

II.

MOTO DI UN SOLIDO ATTORNO AD UN PUNTO FISSO (*)

La posizione di un solido, mobile attorno ad un punto fisso, dipende da tre variabili indipendenti. Seguendo Eulero noi assumeremo per variabili tre angoli definiti nel modo seguente.

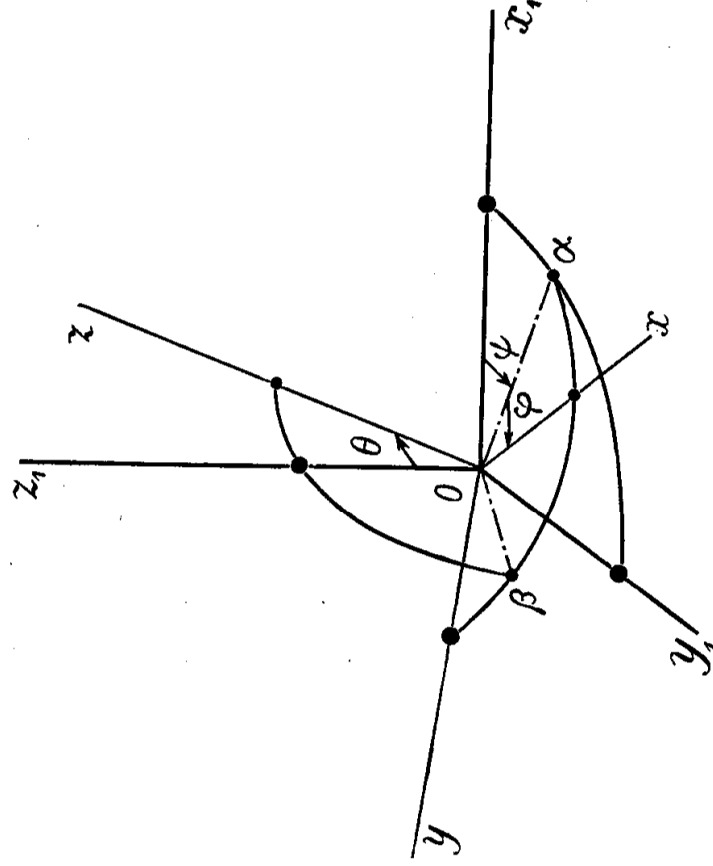


Fig. 44.

Siano x_1, y_1, z_1 tre assi coordinati ortogonali fissi uscenti dal punto dato O (fig. 44): ed x, y, z tre assi pure ortogonali uscenti dalla medesima origine ma mobili insieme col solido, e preci-

(*) Cfr. P. APPELT, *Traité de Mécanique rationnelle*, tome II, Paris 1911, pag. 147, ovvero L. LECORNU, *Cours de mécanique*, tome II, Paris 1915, pag. 168, nonchè H. BOUASSE, *Cours de mécanique rationnelle et expérimentale*, Paris, Delagrave, pag. 558.

samente sempre coincidenti cogli assi d'inerzia di questo, relativi ad O .

Chiamiamo α l'intersezione dei due piani xy , x_1y_1 ed assumiamo per le rotazioni attorno ad α un senso positivo ben definito, se pure arbitrario.

I tre angoli di Eulero sono:

L'angolo $\theta = z_1Oz$ considerato come positivo quando si passa da z_1 a z mediante una rotazione positiva attorno ad α .

L'angolo $\varphi = x_1Ox$ considerato come positivo quando si passa da x_1 ad x mediante una rotazione positiva attorno a z_1 .

L'angolo $\psi = aOx$ considerato come positivo quando si passa da a ad x mediante una rotazione positiva attorno a z .

* * *

Ciò posto è noto che si può far passare il triedro mobile da una data posizione ad un'altra posizione qualunque purchè infinitamente vicina alla prima, facendolo ruotare di un angolo infinitamente piccolo attorno ad un asse istantaneo convenientemente scelto.

Sia dt il tempo impiegato per compiere questa rotazione: e sia ω il vettore, diretto secondo l'asse istantaneo, che rappresenta la velocità angolare; questo vettore può sempre immaginarsi decomposto in tre componenti p , q , r secondo tre direzioni ortogonali qualunque.

Noi supporremo che queste tre direzioni siano quelle che spettano, nell'istante t , ai tre assi mobili x , y , z .

Il movimento elementare del triedro mobile, e quindi del solido, risulterà allora dalla composizione di tre rotazioni $p \cdot dt$, $q \cdot dt$, $r \cdot dt$ attorno a quelle tre rette.

Valutiamo le corrispondenti variazioni degli angoli di Eulero.

A tal fine incominciamo dall'osservare che si può ottenere lo stesso spostamento elementare del solido imprimendogli tre rotazioni simultanee:

$d\theta$ attorno all'asse α

$d\psi$ attorno all'asse z_1

$d\varphi$ attorno all'asse z

A quest'ultima rotazione ($d\varphi$ attorno all'asse z) si dà ordinariamente il nome di *rotazione propria* del sistema: per essa non mutano evidentemente nè l'angolo θ nè l'angolo ψ .

Alla rotazione $d\psi$ attorno all'asse z_1 , in virtù della quale l'asse α descrive il piano $x_1 y_1$ e l'asse z descrive un cono di semiapertura θ attorno a z_1 , si dà il nome di *precessione*: per essa non mutano nè θ nè φ .

Finalmente alla rotazione $d\theta$ attorno ad α , che lascia ovviamente invariati tanto φ che ψ , si dà il nome di *nutatione*.

A questi tre movimenti indipendenti spettano naturalmente tre velocità angolari, rappresentate da tre vettori:

$$\frac{d\theta}{dt} \quad \frac{d\psi}{dt} \quad \frac{d\varphi}{dt}$$

diretti rispettivamente secondo gli assi α , z_1 e z , la cui risultante deve essere la stessa risultante del sistema dei vettori p , q , r .

Noi scriveremo che questa condizione è soddisfatta imponendo che siano eguali le somme delle proiezioni dei vettori dei due sistemi, sulle tre direzioni z , α e β , quest'ultima essendo ortogonale alle precedenti e diretta in modo da formare con esse un triedro positivo (essa si ottiene per intersezione del piano $z z_1$ normale ad α col piano xy normale a z). Otterremo così le tre seguenti relazioni:

$$\frac{d\psi}{dt} \cos \theta + \frac{d\varphi}{dt} = r$$

$$\frac{d\theta}{dt} = p \cos \varphi - q \sin \varphi$$

$$\frac{d\psi}{dt} \sin \theta = p \sin \varphi + q \cos \varphi$$

Queste tre equazioni differenziali definiscono gli angoli di Eulero in funzione delle variabili p , q , r .

Risolte rispetto a queste ultime esse danno immediatamente:

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{d\theta}{dt} \cos \varphi + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \sin \varphi \\ q &= -\frac{d\theta}{dt} \sin \varphi + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \cos \varphi \\ r &= \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Si possono quindi considerare gli angoli di Eulero come variabili indipendenti, e p, q, r come delle funzioni di detti angoli e delle loro derivate rispetto al tempo.

* * *

Tutto ciò premesso proviamoci a scrivere le equazioni di Lagrange: e precisamente incominciamo a considerare una delle predette variabili indipendenti, per esempio la φ , e denotiamo, come già abbiamo fatto nella trattazione generale, con φ' la derivata di detta variabile per rapporto al tempo. Si ha:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial \varphi'} &= 0 & \frac{\partial p}{\partial \varphi} &= -\frac{d\theta}{dt} \operatorname{sen} \varphi + \frac{d\psi}{dt} \operatorname{sen} \theta \cos \varphi = q \\ \frac{\partial q}{\partial \varphi'} &= 0 & \frac{\partial q}{\partial \varphi} &= -\frac{d\theta}{dt} \cos \varphi - \frac{d\psi}{dt} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi = -p \\ \frac{\partial r}{\partial \varphi'} &= 1 & \frac{\partial r}{\partial \varphi} &= 0\end{aligned}$$

Passiamo ora a valutare la forza viva:

$$W = \sum \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right]$$

Basterà sostituire alle singole componenti della velocità di ciascun punto i loro valori in funzione delle componenti della velocità angolare:

$$\frac{dx}{dt} = qz - ry$$

$$\frac{dy}{dt} = rx - pz$$

$$\frac{dz}{dt} = py - qx$$

Se si indicano con:

$$A = \sum \frac{1}{2} m (y^2 + z^2)$$

$$B = \sum \frac{1}{2} m (z^2 + x^2)$$

$$C = \sum \frac{1}{2} m (x^2 + y^2)$$

i momenti d'inerzia rispetto ai tre assi x , y , z e se si tiene presente che questi assi sono stati scelti coincidenti cogli assi d'inerzia relativi al punto O e che perciò:

$$\sum m y z = \sum m z x = \sum m x y = 0$$

si trova facilmente:

$$W = \frac{1}{2} (A p^2 + B q^2 + C r^2)$$

e per conseguenza:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \varphi'} &= A p \frac{\partial p}{\partial \varphi'} + B q \frac{\partial q}{\partial \varphi'} + C r \frac{\partial r}{\partial \varphi'} = C r \\ \frac{\partial W}{\partial \varphi} &= A p \frac{\partial p}{\partial \varphi} + B q \frac{\partial q}{\partial \varphi} + C r \frac{\partial r}{\partial \varphi} = (A - B) p q. \end{aligned}$$

Il primo membro dell'equazione di Lagrange relativa alla variabile φ sarà dunque:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi'} \right) - \frac{\partial W}{\partial \varphi} = C \frac{dr}{dt} + (B - A) p q.$$

Quanto al secondo membro basta ricordarne la definizione per vedere che nel caso attuale non potrà essere altro che il momento delle forze applicate preso rispetto all'asse z (attorno al quale si effettua la rotazione elementare $d\varphi$): lo indicheremo come sempre con \mathcal{E} e scriveremo:

$$C \frac{dr}{dt} + (B - A) p q = \mathcal{E}$$

Le altre due equazioni si potrebbero naturalmente ottenere ragionando in modo analogo sulle variabili ψ e θ : ma è più semplice sostituire l'uno all'altro gli angoli di Eulero attribuendo successivamente ad x e ad y la parte già attribuita a z : ciò che equivale a permutare circolarmente p , q ed r , ed insieme A , B e C .

Si ottengono così le tre equazioni di Eulero:

$$\left. \begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C - B) qr &= \mathcal{L} \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C) rp &= \mathcal{M} \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A) pq &= \mathcal{N} \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

L'integrazione delle sei equazioni (40) e (41) è generalmente impossibile. Essa diviene possibile soltanto in alcuni casi particolari di cui ora faremo un brevissimo cenno.

**

Caso in cui le forze applicate ammettono un'unica risultante passante per il punto fisso. — È il caso dei corpi mobili attorno al loro centro di gravità e soggetti soltanto all'azione del loro peso: e fu risolto molto elegantemente da Poinsot. Lo caratterizzano le tre condizioni:

$$\mathcal{L} = \mathcal{M} = \mathcal{N} = 0$$

Nelle equazioni di Eulero si annullano allora i secondi membri: moltiplicandole rispettivamente per p , q , r e sommando si ottiene:

$$A p \frac{dp}{dt} + B q \frac{dq}{dt} + C r \frac{dr}{dt} = 0$$

moltiplicandole invece per Ap , Bq , Cr e sommando si ottiene:

$$A^2 p \frac{dp}{dt} + B^2 q \frac{dq}{dt} + C^2 r \frac{dr}{dt} = 0$$

Integrando queste equazioni si trova:

$$\begin{aligned} Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 &= h \\ A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 &= k^2 \end{aligned}$$

h e k essendo due costanti arbitrarie.

Non sarebbe del resto stato difficile arrivare a questo risultato direttamente. La prima di queste due equazioni esprime infatti che la forza viva è costante, mentre la seconda ci dice che è costante la grandezza del vettore di componenti Ap , Bq , Cr che rappresenta il momento della quantità di moto. E l'una cosa e l'altra ben potevano affermarsi *a priori* data l'ipotesi particolare che abbiamo premessa.

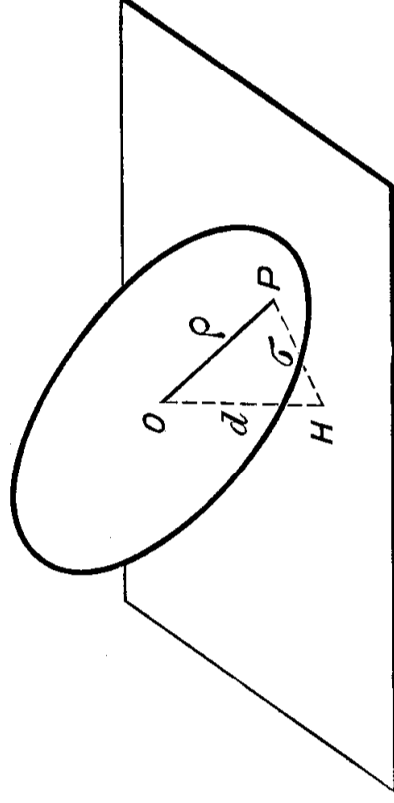


Fig. 45.

Immaginiamo ora costruito l'ellissoide d'inerzia relativo al punto O la cui equazione riferita ai suoi assi è:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

Indichiamo con ξ , η , ζ le coordinate del punto P , in cui questo ellissoide è incontrato dalla semiretta su cui giace il vettore ω che rappresenta la velocità angolare istantanea, e sia ρ la lunghezza del semidiametro OP (fig. 45). Si ha:

$$\frac{\xi}{p} = \frac{\eta}{q} = \frac{\zeta}{r} = \frac{\rho}{\omega} = \sqrt{\frac{A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2}{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

La velocità angolare ω è dunque proporzionale a ρ .

D'altra parte l'equazione del piano tangente in P all'ellissoide è:

$$A\xi x + B\eta y + C\zeta z = 1$$

I coseni direttori della normale ad esso sono rispettivamente proporzionali ad $A\xi$, $B\eta$, $C\zeta$ o, ciò che fa lo stesso, ad Ap , Bq , Cr .

Questa normale è dunque parallela al vettore momento della quantità di moto, vettore che, come abbiamo già detto, è costante (e non solo in grandezza, ma anche in direzione).

Il piano tangente in P possiede dunque una orientazione invariabile.

Finalmente la sua distanza dall'origine è:

$$d = \frac{1}{\sqrt{A^2 \xi^2 + B^2 \eta^2 + C^2 \zeta^2}} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2}} = \frac{\sqrt{h}}{k}$$

Anche questa distanza è dunque costante: *il piano tangente in P è necessariamente un piano fisso.*

E poichè P trovandosi sull'asse di rotazione deve necessariamente avere velocità nulla nell'istante considerato, conviene concludere che il moto dell'ellissoide di inerzia rispetto a questo piano fisso a cui esso ellissoide si mantiene tangente non può implicare nessuno scorrimento del punto di contatto.

Il movimento dell'ellissoide, e quindi anche quello del corpo dato con cui l'ellissoide è invariabilmente connesso, deve quindi considerarsi come completamente definito, nel senso che:

il corpo dato si muove attorno al punto fisso O come se il suo ellissoide d'inerzia relativo ad O rotolasse senza strisciare su di un piano fisso nello spazio, ruotando, in ogni istante, attorno al diametro che fa capo al punto di contatto con una velocità angolare proporzionale alla lunghezza di questo diametro.

La retta OH normale al piano fisso è, come abbiamo visto, la linea di azione del vettore momento della quantità di moto. L'angolo HOP, che essa fa col diametro che fa capo al punto di contatto, ha per coseno:

$$\frac{OH}{OP} = \frac{d}{\rho} = \frac{\sqrt{h}}{k\rho} = \frac{h}{k\omega}$$

La proiezione della velocità angolare ω sulla direzione OH del momento della quantità di moto è dunque costante ed eguale ad $\frac{h}{k}$.

Si chiama *poloide* il luogo dei punti P sull'ellissoide. Esso è evidentemente definito dalla condizione che il piano tangente sia ad una distanza invariabile dal centro.

Bisogna dunque combinare l'equazione dell'ellissoide:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

con la condizione:

$$\frac{1}{\sqrt{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}} = d$$

ossia:

$$A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = \frac{1}{d^2}$$

Si ottiene così:

$$A\left(\frac{1}{d^2} - A\right)x^2 + B\left(\frac{1}{d^2} - B\right)y^2 + C\left(\frac{1}{d^2} - C\right)z^2 = 0$$

che è l'equazione di un cono che dall'origine O proietta il luogo cercato. Questo cono è di secondo grado: la poloide sarà dunque una curva di quarto grado.

Ciò posto si ricordi che, dette a, b, c le lunghezze dei tre semiassi dell'ellissoide d'inerzia, si ha:

$$A = \frac{1}{a^2} \quad B = \frac{1}{b^2} \quad C = \frac{1}{c^2}$$

e si supponga, tanto per fissare le idee, che sia:

$$a < b < c$$

epperò:

$$A > B > C$$

Ma d dovrà naturalmente esser sempre compreso fra a e c :

quindi d^2 dovrà sempre avere per limite inferiore $\frac{1}{A}$, e per limite superiore $\frac{1}{C}$.

Se d prende l'uno o l'altro di questi valori limiti, l'equazione del cono diviene rispettivamente:

$$B(A - B)y^2 + C(A - C)z^2 = 0$$

$$A(A - C)x^2 + B(B - C)y^2 = 0$$

Nel primo caso ($y = z = 0$) il cono si riduce all'asse delle x e la poloide si riduce ai due punti dell'ellissoide che stanno su quest'asse (estremi dell'asse minore).

Nel secondo caso ($x = y = 0$) il cono si riduce all'asse delle z e la poloide degenera nei due punti dell'ellissoide che stanno su quest'asse (estremi dell'asse maggiore).

Se si pone $d = b$, epperò $d^2 = \frac{1}{B}$, il cono diviene:

$$A(A - B)x^2 - C(B - C)z^2 = 0$$

e consta di due piani reali:

$$\frac{z}{x} = \pm \sqrt{\frac{A(A - B)}{C(B - C)}}$$

passanti per l'asse delle y ; la poloide si scinde in due ellissi, sezioni dell'ellissoide secondo quei due piani, le quali ellissi si incontrano in corrispondenza degli estremi dell'asse di lunghezza $2b$.

Queste due ellissi dividono evidentemente la superficie dell'ellissoide in quattro regioni (fig. 46) e poichè due poloidi corrispondenti a valori diversi di d non possono evidentemente avere alcun punto in comune, si può affermare che tutte le poloide corrispondenti a valori di d differenti da b dovranno scindersi in rami contenuti ciascuno in una sola di quelle regioni. Sono delle curve chiuse simmetriche per rapporto ai piani di simmetria dell'ellissoide, conornanti le estremità dell'asse minore ovvero quelle dell'asse maggiore.

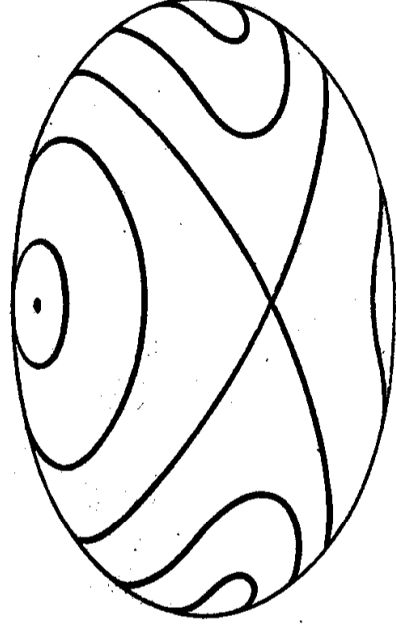


Fig. 46.

**

Il luogo dei punti P *sul piano tangente invariabile* prende il nome di *erpoloide*.

Mentre la poloide è, come abbiamo visto, una curva gobba, ma algebrica, l'erpoloide è una curva piana trascendente.

Essa è generalmente aperta, e compresa fra due circonferenze i cui centri coincidono col piede H della perpendicolare abbassata da O sul piano invariabile (fig. 47).

Indichiamo infatti con σ il raggio vettore che da H va ad un punto generico dell'erpoloide (fig. 45): siccome

$$d^2 + \sigma^2 = \rho^2$$

e siccome ρ varia necessariamente tra due limiti fissi (in ogni caso compresi tra a e c), mentre d si mantiene costante, ne viene subito che anche σ deve variare tra limiti ben determinati.

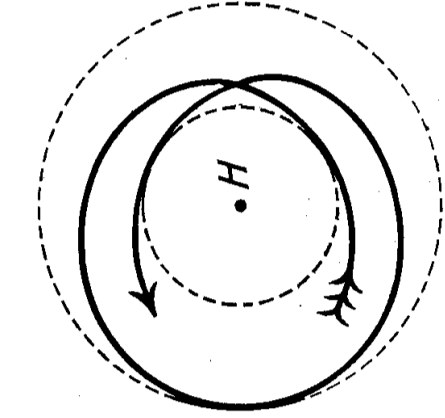


Fig. 47.

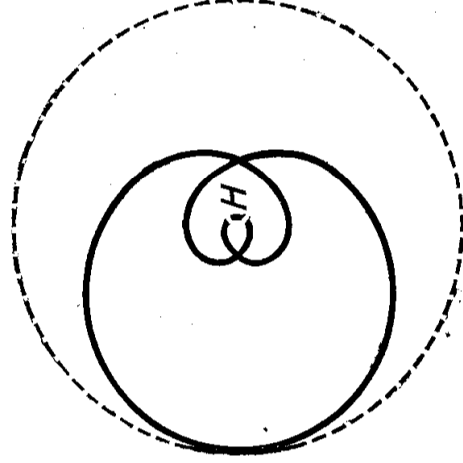


Fig. 48.

Non mancano naturalmente anche qui i casi singolari.

Quando il corpo ruota attorno ad x ovvero attorno a z , e la poloide si riduce ad un punto, anche l'erpoloide si riduce ad un punto: le due circonferenze limiti si confondono perchè hanno entrambe il raggio eguale a zero.

Quando invece la poloide, per $d=b$, si scinde in una coppia di ellissi, allora uno solo dei due cerchi ha il raggio nullo: e l'erpoloide assume l'aspetto di una doppia spirale assintotica al punto H (fig. 48).

* * *

L'introduzione della poloide e dell'erpoloide rende spontanea una nuova rappresentazione meccanica del movimento studiato da Poincaré. Si immagini infatti materializzato il cono che dal punto fisso O proietta la poloide, più precisamente si immagini

materializzata quella porzione di detto cono che è compresa fra O e la poloide stessa. E si pensi di far rotolare il bordo di questa specie di ruota sghemba sul piano fisso, com'è indicato nella fig. 49.

La traccia che tale ruota lascia sul piano non è altro che l'erpoloide.

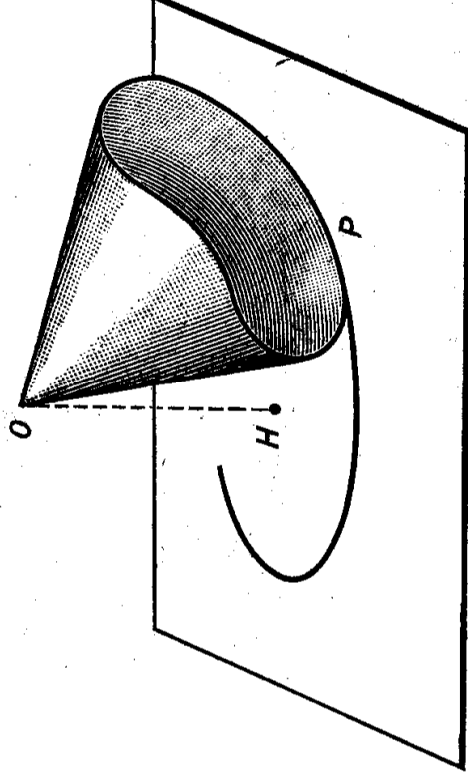


Fig. 49.

Si può anche immaginare materializzato il cono che da O proietta l'erpoloide: questo cono sta evidentemente fisso nello spazio: con esso il primo cono ha sempre in comune la generatrice di contatto attorno a cui compie la sua rotazione elementare.

Si può dunque realizzare il movimento in esame facendo rotolare il primo cono sul secondo.

In ogni caso resta, ben inteso, esclusa ogni possibilità di strisciamento delle linee o delle superficie in contatto. Ne segue che la lunghezza di un qualunque arco di erpoloide è sempre identicamente eguale alla lunghezza del corrispondente arco di poloide.

* * *

Particolarmente interessante è il caso in cui l'ellissoide d'inerzia relativo ad O è di rivoluzione attorno ad uno dei suoi assi. Supponiamo che ciò avvenga per l'asse z : che cioè sia $a = b$ epperò $A = B$. Bastano poche considerazioni sulla simmetria del sistema per provare che la poloide deve restar tutta contenuta in un piano normale a z : che cioè essa deve essere un circolo parallelo dell'ellissoide d'inerzia.

Il cono mobile diviene circolare.

L'erpoloide alla sua volta è necessariamente un altro circolo col centro in H : anche il cono fisso diviene circolare.

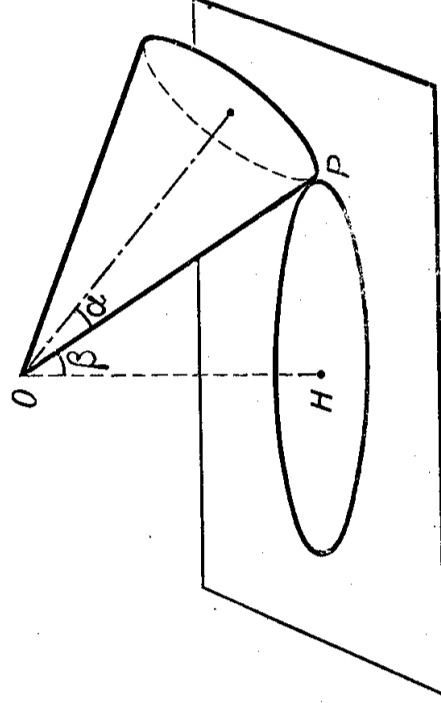


Fig. 50.

Il moto si può pensare realizzato per rotolamento di un cono circolare mobile su uno fisso (fig. 50) ed è completamente definito se si conoscono questi due coni e la velocità angolare ω .

Allo stesso risultato si arriva del resto ragionando così: poichè l'asse istantaneo OP fa un angolo costante α coll'asse

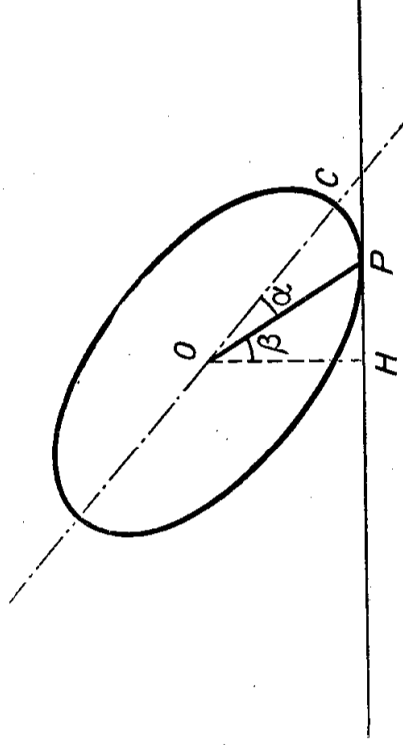


Fig. 51.

d'inerzia OC (fig. 51), e la distanza OP è invariabile, anche la distanza PH deve mantenersi invariabile: l'asse istantaneo OP deve cioè fare un angolo costante β anche coll'asse fisso OH .

Inoltre l'asse d'inerzia OC , l'asse istantaneo OP e l'asse fisso OH devono sempre giacere, per ragioni ovvie, in un medesimo piano: dunque OC fa con OH l'angolo $\alpha + \beta$ pure costante: OC descrive un cono di rivoluzione che ha per asse OH .

Resta soltanto a trovarsi la velocità angolare con cui OC si muove attorno ad OH . A tal fine basta osservare che, ρ essendo costante, anche ω è costante: e poichè la velocità del punto C deve risultar la stessa sia che la si calcoli in relazione a questa velocità ω di rotazione attorno all'asse istantaneo OP , sia che la si calcoli in funzione della velocità angolare incognita Ω con cui OC ruota attorno all'asse fisso OH , si avrà:

$$\Omega \sin(\alpha + \beta) = \omega \sin \alpha$$

Il moto consta dunque di una rotazione uniforme del solido attorno al suo asse d'inerzia z , accompagnato da un movimento pure uniforme di precessione che fa descrivere a questo asse un cono di rivoluzione attorno ad un asse fisso.

È facile, ripensando alle considerazioni che precedono, ritrovare ora uno dei più interessanti risultati a cui eravamo pervenuti tutt'altra via pervenuti nel precedente capitolo. Vogliamo accennare alla proprietà caratteristica degli assi d'inerzia relativi ad O (qui assunti come assi coordinati mobili x, y, z) di essere i soli attorno a cui il corpo può ruotare permanentemente.

Quando ciò avviene l'asse istantaneo deve invero restare fisso rispetto al corpo: i suoi coseni direttori per rapporto agli assi x, y, z , devono mantenersi costanti: le componenti p, q, r della velocità angolare ω risultano proporzionali ad ω stessa.

L'integrale delle forze vive:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h$$

mostra allora che questa velocità angolare ω deve essere costante: lo stesso deve accadere delle sue componenti p, q, r .

Le equazioni di Eulero si riducono a:

$$(C - B)qr = 0$$

$$(A - C)rp = 0$$

$$(B - A)pq = 0$$

Ora se l'ellissoide d'inerzia non è di rivoluzione, queste equazioni non possono essere soddisfatte se non si annullano due

delle componenti p , q , r : il che vuol dire precisamente che l'asse di rotazione coincide con uno degli assi d'inerzia.

Se invece l'ellissoide è di rivoluzione attorno a z , sicchè $A = B$, si può soddisfare alle equazioni scritte tanto supponendo $p = q = 0$, nel qual caso il corpo ruota attorno al predetto asse z , come supponendo $r = 0$, nel qual caso il corpo ruota attorno ad un asse normale al precedente, cioè situato nel piano equatoriale.

Che se infine l'ellissoide si riducesse ad una sfera, sicchè $A = B = C$, qualunque asse potrebbe servire da asse permanente di rotazione perchè qualunque asse può considerarsi come asse d'inerzia.

Ma questa volta possiamo anche spingere più a fondo la nostra indagine, e chiederci se il movimento di rotazione del corpo attorno ad uno dei suoi assi d'inerzia è un movimento stabile o no: se cioè una modificazione infinitamente piccola e del resto arbitraria nelle condizioni iniziali del moto produce in questo delle modificazioni pure infinitamente piccole ovvero vi determina dei cambiamenti finiti.

Incominciamo col considerare il caso generale in cui $A > B > C$.

È allora facile dimostrare che il movimento di rotazione è stabile se avviene attorno all'asse maggiore ovvero a quello minore dell'ellissoide, d'inerzia: instabile se avviene attorno al terzo asse (di lunghezza intermedia).

Immaginiamo infatti che il corpo ruoti attorno ad uno degli assi maggiore o minore: quest'asse resta fisso nello spazio: la poloide si riduce ad un punto situato all'estremità dell'asse stesso, ed il piano fisso non è altro che il piano tangente all'ellissoide in quel punto.

Se ora si modificano di pochissimo le condizioni iniziali, se cioè si suppone che il corpo ruoti, in un dato istante, attorno ad un asse infinitamente vicino all'asse d'inerzia testè considerato, la poloide assume la forma di una piccola curva chiusa, tutta contenuta nelle immediate vicinanze dell'estremo di questo asse d'inerzia: il piano fisso a cui l'ellissoide si mantiene tangente deve quindi distare pochissimo da quello di cui si è parlato prima: e su di esso l'erpoloide deve essere tutta contenuta nelle immediate vicinanze del piede della perpendicolare abbassata da O .

L'asse istantaneo descrive dunque, tanto per rapporto al corpo mobile come per rapporto allo spazio fisso, dei coni di apertura infinitamente piccola: per conseguenza l'asse d'inerzia considerato non può scostarsi se non di infinitamente poco dalla sua direzione primitiva.

Ben diversamente vanno le cose se il corpo ruota attorno all'asse d'inerzia di lunghezza intermedia. In tal caso infatti la poloide è, come sappiamo, costituita da due ellissi.

Ma se noi modifichiamo anche di poco le condizioni iniziali, se cioè supponiamo che il corpo, in un dato istante ruoti attorno ad un asse infinitamente vicino all'asse d'inerzia considerato, ma non giacente in nessuno dei due piani che contengono quelle ellissi, le cose muteranno radicalmente.

A seconda che il punto P in cui quell'asse istantaneo incontra l'ellissoide, apparterrà ad una piuttosto che ad un'altra delle quattro regioni in cui quelle ellissi suddividono la superficie dell'ellissoide, la poloide che esso prenderà a descrivere contornerà l'estremità dell'asse maggiore ovvero quella dell'asse minore.

L'asse d'inerzia considerato verrà così durante il moto a subire deviazioni finite e diverse da caso a caso: le rotazioni attorno all'asse d'inerzia di lunghezza intermedia sono dunque da considerarsi come instabili.

Se l'ellissoide d'inerzia è *di rivoluzione*, l'unico moto di rotazione stabile è quello attorno all'asse di rivoluzione.

Il corpo infatti può bensì anche presentare delle rotazioni permanenti attorno agli assi che stanno nel così detto piano equatoriale.

Ma se si suppone di lievemente alterare le condizioni iniziali, se cioè si suppone che, in un dato istante, il corpo ruoti attorno ad un asse di pochissimo inclinato su tal piano, la poloide assume l'andamento di un circolo parallelo assai prossimo all'equatore, mentre l'erpoloide (che inizialmente era un punto) si svolge in un intorno molto piccolo di H . Ciò significa che l'asse istantaneo devia di poco nello spazio fisso: ma subisce invece deviazioni grandi per rapporto al corpo in movimento. La legge del moto è intanto radicalmente mutata: il moto primitivo è dunque da considerarsi come instabile.

L'ultima ipotesi possibile, quella dell'ellissoide di inerzia *sferico*, conduce ad affermare che tutti gli assi di rotazione sono egualmente stabili, anzi più propriamente indifferenti, nel senso

che, se si sposta comunque l'asse istantaneo da una data posizione in un'altra, esso si mantiene immobile in quest'altra, tanto per rapporto al corpo in moto come per rapporto allo spazio fisso.

**

Movimento di un solido pesante attorno ad un punto fisso (*). — Supporremo l'asse fisso z_1 verticale e diretto verso l'alto. Indicheremo con M la massa totale del corpo, e con $P = Mg$ il suo peso: con ξ_1, η_1, ζ_1 le coordinate del suo baricentro G per rapporto agli assi fissi, e con ξ, η, ζ le analoghe coordinate dello stesso punto per rapporto agli assi mobili (queste ultime sono evidentemente delle costanti).

In queste ipotesi l'integrale delle forze vive e quello delle aree si possono ottenere direttamente in modo molto semplice.

Basta osservare che il lavoro elementare del peso P unica forza applicata al solido, è misurato da $-P \cdot d\zeta_1$: deve quindi essere:

$$dW = \frac{1}{2} d(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = -P \cdot d\zeta_1$$

epperò integrando:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = -2P\zeta_1 + H$$

D'altra parte il momento di P rispetto all'asse z_1 è nullo: il momento della quantità di moto per rapporto a quest'asse deve quindi mantenersi costante. Ora le componenti di questo momento della quantità di moto secondo gli assi mobili x, y, z sono, come abbiamo già avuto occasione di dire altra volta, Ap, Bq, Cr : i coseni degli angoli che le loro direzioni fanno colla verticale sono:

$$\cos(z_1, x) = \sin\theta \sin\varphi$$

$$\cos(z_1, y) = \sin\theta \cos\varphi$$

$$\cos(z_1, z) = \cos\theta.$$

Si può dunque scrivere:

$$Ap \sin\theta \sin\varphi + Bq \sin\theta \cos\varphi + Cr \cos\theta = K.$$

(1) P. APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, tome II, Paris 1915, pag. 193.

Nessun altro integrale primo si sa scrivere nel caso generale, quando cioè si suppone il solido di forma affatto qualunque ed il suo baricentro in posizione arbitraria. È soltanto facendo delle ipotesi particolari sulla forma del solido, e quindi sulla posizione del suo baricentro, che si può andar oltre nella discussione del problema.

Noi supporremo che *il solido sia di rivoluzione attorno all'asse z sul quale verrà quindi a trovarsi il baricentro (caso di Lagrange e di Poisson).*

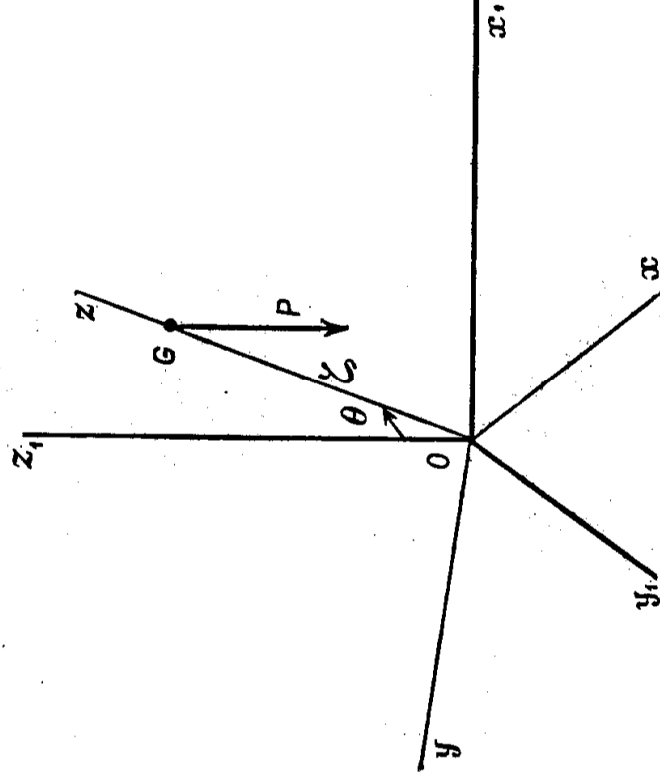


Fig. 52.

Si ha allora $A = B$ e $\xi = \eta = 0$: si può inoltre sempre supporre $\zeta > 0$ poichè ciò equivale soltanto ad assumere come direzione positiva sull'asse delle z quella che dal punto fisso O va verso il baricentro G (fig. 52).

Si ha inoltre $\zeta_1 = \zeta \cos \theta$.

I due integrali delle forze vive e delle aree divengono rispettivamente:

$$A(p^2 + q^2) + Cr^2 = -2P\zeta \cos \theta + H$$

$$A \sin \theta (p \sin \varphi + q \cos \varphi) + Cr \cos \theta = K.$$

Se inoltre si tien conto che, trovandosi G sull'asse z , il momento \mathcal{H} di P rispetto a quest'asse è certamente nullo, la terza equazione di Eulero si riduce a:

$$C \frac{dr}{dt} = 0$$

dalla quale si ricava subito:

$$r = \text{costante.}$$

Denoteremo con r_0 questa costante.

Noi veniamo così in conclusione a disporre di tre equazioni che si possono facilmente porre sotto la forma:

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 &= a - a \cos \theta \\ \text{sen} \theta (p \text{ sen} \varphi + q \cos \varphi) &= \beta - br_0 \cos \theta \\ r &= r_0 \end{aligned}$$

In esse a e b sono delle costanti positive ben determinate, cui spettano i valori:

$$a = \frac{2P\zeta}{A} \quad b = \frac{C}{A}$$

a e β sono invece delle costanti arbitrarie.

Che se si vuole dalle variabili p, q, r passare agli angoli di Eulero, si può sempre farlo grazie alle (40), con che le tre equazioni divengono:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \text{sen}^2 \theta &= a - a \cos \theta \\ \frac{d\psi}{dt} \cdot \text{sen}^2 \theta &= \beta - br_0 \cos \theta \\ \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \cdot \cos \theta &= r_0 \end{aligned}$$

Eliminando $\frac{d\psi}{dt}$ tra le prime due, si ottiene un'equazione in θ :

$$(\beta - br_0 \cos \theta)^2 + \text{sen}^2 \theta \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \text{sen}^2 \theta (a - a \cos \theta)$$

Posto :

$$\cos \theta = u$$

quest'equazione si può scrivere :

$$\left(\frac{du}{dt} \right)^2 = (a - au)(1 - u^2) - (\beta - br_0 u)^2 = f(u)$$

D'altra parte la seconda equazione dà :

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\beta - br_0 u}{1 - u^2}$$

e la terza :

$$\frac{d\varphi}{dt} = r_0 - u \frac{d\psi}{dt} = r_0 - u \frac{\beta - br_0 u}{1 - u^2}$$

Il polinomio $f(u)$ è evidentemente negativo tanto per $u = -1$ come per $u = +1$ (valori estremi che u può prendere visto che è un coseno). Ma supporre $f(u)$ negativo non ha fisicamente nessun senso perchè equivale a supporre che $\frac{du}{dt}$ sia immaginario, mentre, dato il suo significato, esso deve certamente essere sempre reale. I valori che $f(u)$ può effettivamente assumere saranno dunque tutti positivi, o quanto meno nulli: in particolare dovrà essere positivo il valore iniziale $f(u_0)$.

Il polinomio $f(u)$ dovrà dunque annullarsi (fig. 53) per due valori u_1 ed u_2 della variabile, compreso il primo fra -1 ed u_0 , il secondo fra u_0 e $+1$ (oltrechè per un terzo valore che non ci interessa perchè esterno all'intervallo $-1, +1$); ed è più precisamente tra questi due valori u_1 ed u_2 che u dovrà in realtà esser sempre compreso.

Ciò equivale a dire che l'angolo θ deve alla sua volta mantenersi compreso tra due valori limiti θ_1 e θ_2 , i cui coseni sono rispettivamente u_1 ed u_2 .

Se dunque si immaginano descritti, attorno a z_1 come asse, due coni di rivoluzione, aventi entrambi il vertice nel punto

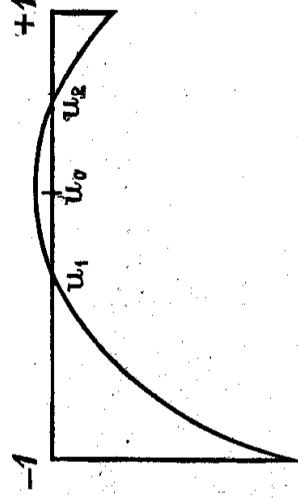


Fig. 53.

fisso O , e di semi-aperture rispettivamente eguali a θ_1 , ed a θ_2 , l'asse z (asse di figura del solido) dovrà durante il movimento mantenersi sempre compreso fra quei due coni.

* * *

Consideriamo una sfera di centro O e raggio eguale all'unità di lunghezza.

I due coni in discorso individuano su di essa due cerchi paralleli situati in piani orizzontali, le cui quote sul piano $x_1 y_1$ (equatoriale orizzontale) sono precisamente u_1 ed u_2 .

Il punto z in cui l'asse di figura del solido incontra la sfera, e che ha per quota u , descrive una curva sempre compresa fra quei due cerchi: si può anzi dimostrare che essa è, in generale, alternativamente tangente all'uno ed all'altro.

Questa curva presenta l'andamento indicato nella fig. 54 ovvero quello indicato nella fig. 56 a seconda che la precessione $\frac{d\varphi}{dt}$ conserva sempre il medesimo segno ovvero si presenta alternativamente positiva o negativa.

Come caso singolare, allorquando la precessione, pur conservando sempre il medesimo segno, si annulla periodicamente, può accadere che la curva presenti delle cuspidi in corrispondenza dei punti in cui essa tocca il cerchio limite superiore (fig. 55).

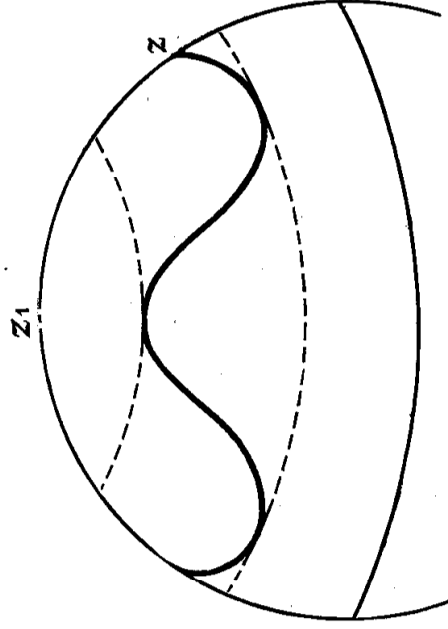


Fig. 54.

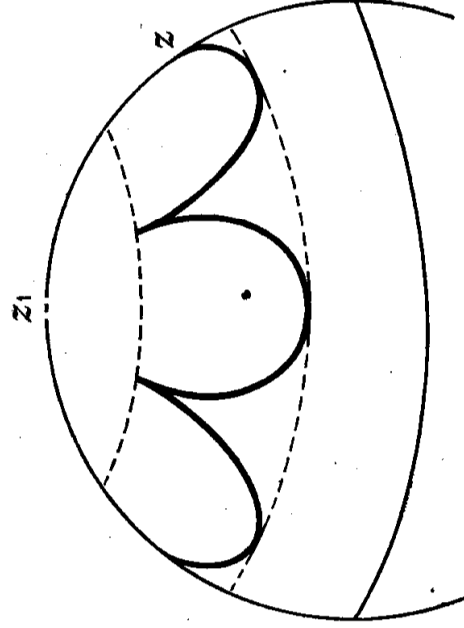


Fig. 55.

Non è poi escluso che u_1 sia uguale all'unità: che cioè il cerchio limite superiore si riduca al punto z_1 : ciò anzi si veri-

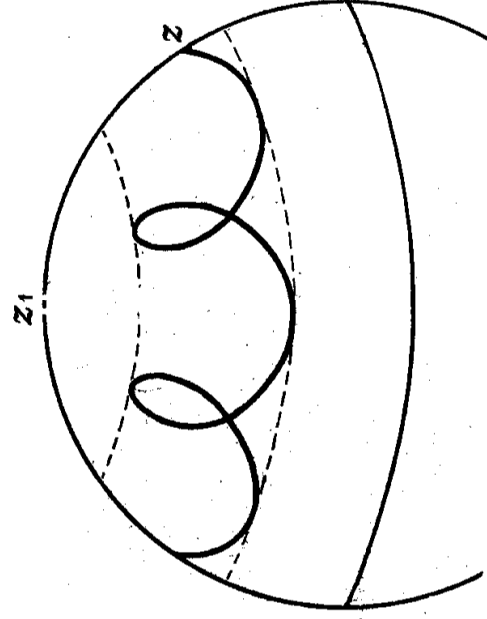


Fig. 56.

ficherà certamente tutte le volte che $u_0 = 1$, tutte le volte cioè che nell'istante iniziale l'asse di figura del solido è verticale.

Un caso particolare molto interessante ci è offerto da una *trattola* la quale sia animata da un rapido moto di rotazione attorno al suo asse di figura e vincolata in modo che la sua punta resti fissa nello spazio (fig. 57).

Sia data la velocità angolare iniziale r_0 attorno all'asse z : i valori iniziali p_0 e q_0 delle altre due rotazioni siano nulli.

Introdotta al solito la variabile ausiliaria $u = \cos\theta$ e dettane $u_0 = \cos\theta_0$ il valore all'istante iniziale, le due equazioni generali:

$$p^2 + q^2 = a - au$$

$$\text{sen}\theta (p \text{ sen}\varphi + q \text{ cos}\varphi) = \beta - br_0 u$$

mostrano che all'istante iniziale deve aversi:

$$a - au_0 = 0$$

$$\beta - br_0 u_0 = 0$$

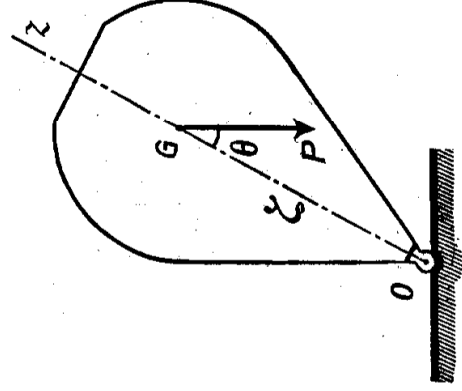


Fig. 57.

Di qui i valori delle costanti:

$$\alpha = a u_0 \quad \beta = b r_0 u_0$$

quindi la funzione ausiliaria $f(u)$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = (u_0 - u) [a(1 - u^2) - b^2 r_0^2 (u_0 - u)]$$

Al solito è necessario che $\left(\frac{du}{dt}\right)^2$ resti positivo: u deve dunque oscillare tra il dato valore iniziale u_0 ed un valore u_1 , necessariamente compreso fra -1 e $+1$ il quale soddisfi alla condizione:

$$a(1 - u_1^2) - b^2 r_0^2 (u_0 - u_1) = 0$$

ossia:

$$u_0 - u_1 = \frac{a(1 - u_1^2)}{b^2 r_0^2}$$

La differenza $u_0 - u_1$ essendo positiva, il limite u_1 è sempre inferiore ad u_0 (il quale funziona quindi da limite superiore: sostituisce cioè il valore u_2 della trattazione generale).

La precessione in questo caso particolare, diviene:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{b r_0 (u_0 - u)}{1 - u^2}$$

Al variare di u tra u_0 ed $u_1 < u_0$, essa conserva sempre il medesimo segno che è quello di r_0 : il piano $z_1 z$ ruota dunque attorno a z_1 sempre nel medesimo senso, e precisamente sempre in quel medesimo senso in cui avviene la rotazione iniziale della trottola attorno al suo asse di figura (asse z , per ipotesi positivo da O verso G).

La precessione si annulla però tutte le volte che u raggiunge il valore iniziale (limite superiore) u_0 : l'andamento del fenomeno è adunque precisamente quello che abbiamo illustrato nella fig. 55.

Dal valore di $u_0 - u_1$ si ricava ancora che quanto più è grande la velocità iniziale r_0 tanto meno u_1 differirà da u_0 : per velocità di rotazione molto grandi della trottola i due coni limiti saranno molto vicini, e la corona entro la quale si sviluppa la curva della fig. 55 sarà molto ristretta. L'asse di figura sembrerà descrivere esso stesso un cono di rotazione attorno alla verticale per O .

Il movimento di questo asse di figura sarà d'altronde in queste ipotesi molto lento: dalla espressione di $\frac{d\psi}{dt}$, ove si ponga al posto di $u_0 - u$ il suo valore limite superiore $u_0 - u_1$, si deduce infatti, in valore assoluto:

$$\left| \frac{d\psi}{dt} \right| < \left| \frac{a(1-u_1^2)}{br_0(1-u^2)} \right|$$

Ora il fattore $\frac{1-u_1^2}{1-u^2}$ è assai prossimo all'unità: $\frac{d\psi}{dt}$ si mantiene dunque dell'ordine di $\frac{1}{r_0}$.

A parità di altre condizioni, e in particolare a parità di velocità di rotazione, $\frac{d\psi}{dt}$ cresce con a cioè colla distanza ζ del baricentro G dall'origine O .

Queste proprietà si mettono bene in evidenza con un apparecchio noto sotto il nome di *bilancia giroscopica*.

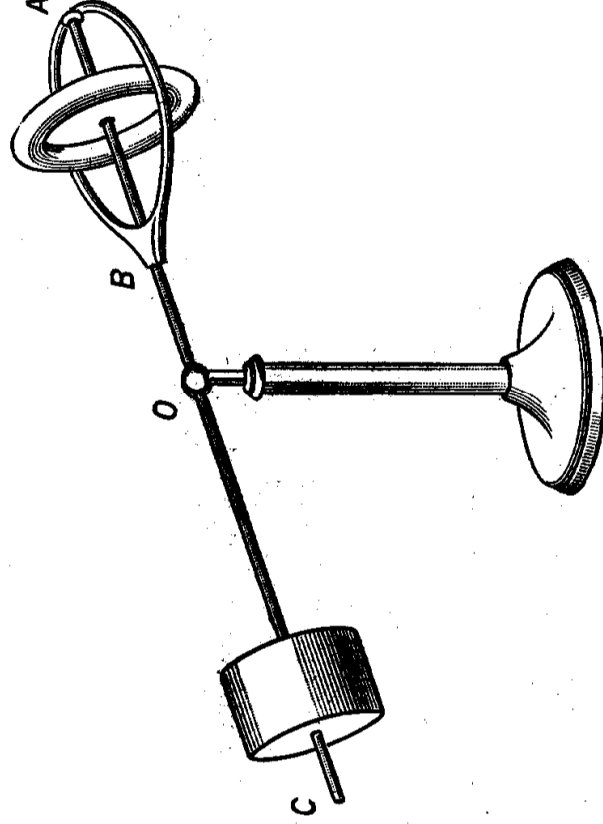


Fig. 58.

Essa consta di un'asta BC articolata in O ad un perno liberamente girevole in un supporto ad asse verticale (fig. 58); ad una delle estremità l'asta porta un toro animato da un rapido

movimento di rotazione attorno al suo asse AB che coincide esattamente coll'asse dell'asta: dall'altra parte essa porta una massa spostabile a volontà in modo che il baricentro G del complesso possa farsi coincidere col punto fisso O , ovvero spostarsi rispetto ad esso da una parte o dall'altra.

Nel primo caso, quando cioè il punto fisso coincide col baricentro, il movimento di rotazione del toro non implica nessun movimento di precessione, poichè l'asse di rotazione coincide con un asse centrale d'inerzia del sistema, e funziona quindi da asse permanente.

Quando invece il baricentro non coincide col punto fisso, il movimento di rotazione del toro determina un movimento combinato di precessione e di nutazione.

Se il sistema viene abbandonato a se stesso in una posizione qualunque senza velocità iniziali di rotazione attorno ad x o ad y le cose procedono nel modo descritto a proposito della trottola e quella delle due estremità A e C dalla cui parte sta il baricentro descrive una curva del tipo di quella rappresentata nella fig. 55.

Se invece nell'atto di abbandonare a sè il sistema gli si imprime una velocità iniziale di rotazione attorno ad uno degli assi x od y , la curva che si osserva può assumere a seconda dei casi l'andamento indicato nella fig. 54 o quello indicato nella fig. 56.

In tutti i casi se la velocità di rotazione del toro attorno al suo asse (asse z) è sufficientemente grande, la nutazione sarà trascurabile, e lo stesso accadrà delle variazioni periodiche della precessione: ed il sistema *apparirà* animato da una semplice precessione uniforme in un senso oppure nell'altro a seconda che G cade dalla parte di A ovvero da quella di C , e tanto più veloce quanto più G dista da O .

* * *

Teoria generale dell'effetto giroscopico (*). — Le considerazioni che siamo venuti esponendo a proposito del movimento della trottola e della bilancia giroscopica ci hanno offerto un primo esempio di una specie di paradosso che si presenta costan-

(*) Cfr. L. LECORNU, *Cours de mécanique*, tome II, Paris 1915, pag. 211.

temente quando si studia il comportamento dei solidi di rivoluzione animati da un movimento molto rapido di rotazione attorno al loro asse.

Quando si abbandona l'asse della trottola a sè stesso, sembrerebbe naturale che esso, sotto l'azione del peso, si spostasse attorno al suo estremo fisso in modo da descrivere un piano verticale: e ciò avverrebbe effettivamente se la trottola non fosse animata da movimento di rotazione attorno al suo asse: invece, grazie a questo movimento, l'asse esce immediatamente da quel piano verticale seguendo una direzione presso a poco normale ad esso, e prende a descrivere una superficie più o meno prossima ad un cono di rivoluzione attorno alla verticale per il punto fisso.

Ora questo non è che un caso particolare di un fenomeno affatto generale, che è conosciuto sotto il nome di *effetto giroscopico*, e del quale noi ci proponiamo qui di dare brevemente un'idea.

Consideriamo a tal fine un solido di rivoluzione, ed assumiamo al solito il suo asse di figura come asse delle z , sicchè $A = B$. Supponiamo che tale solido sia animato da un movimento di rotazione con velocità angolare r , attorno al predetto asse z , e contemporaneamente da un movimento pure di rotazione, con velocità angolare s , attorno ad un asse condotto per l'origine O perpendicolarmente a z , asse che nulla ci vieta di assumere come asse delle x .

In queste condizioni il momento della quantità di moto del sistema sarà un vettore, la cui componente secondo z sarà misurata da Cr , e la cui componente normale a z sarà misurata da As : la sua inclinazione sull'asse di figura sarà dunque:

$$\text{tang } i = \frac{As}{Cr}$$

Ammettiamo che le forze applicate al sistema derivino da una funzione di forza U , e scriviamo l'integrale delle forze vive:

$$W - U = W_0 - U_0$$

tenendo presente che la forza viva attuale è:

$$W = \frac{1}{2} (As^2 + Cr^2)$$

e che per analogia quella iniziale si può scrivere:

$$W_0 = \frac{1}{2} (As_0^2 + Cr_0^2)$$

Sostituendo otteniamo:

$$A(s^2 - s_0^2) + C(r^2 - r_0^2) = 2(U - U_0)$$

e quindi:

$$\text{tang } i = \frac{\sqrt{A^2 s_0^2 + AC(r_0^2 - r^2)} + 2A(U - U_0)}{Cr}$$

Ammettiamo, più particolarmente, che le forze applicate abbiano momento nullo rispetto all'asse di figura: come abbiamo già dimostrato precedentemente questa ipotesi rende immediatamente integrabile la terza delle equazioni di Eulero, e si ha:

$$r = r_0$$

allora:

$$\text{tang } i = \frac{\sqrt{A^2 s_0^2 + 2A(U - U_0)}}{Cr_0}$$

Ammettiamo finalmente che, nel momento considerato, la differenza $U - U_0$ si mantenga costantemente inferiore ad un limite ben determinato H , come accade sempre quando la funzione di forza è uniforme ed i singoli punti del sistema subiscono degli spostamenti finiti; si può allora scrivere:

$$\text{tang } i < \frac{\sqrt{A^2 s_0^2 + 2AH}}{Cr_0}$$

o anche:

$$\text{tang } i < \sqrt{\text{tang}^2 i_0 + \frac{2AH}{C^2 r_0^2}}$$

i_0 essendo il valore iniziale di i .

Ma il secondo membro di questa ineguaglianza è una costante: l'inclinazione dell'asse della figura sulla direzione del momento delle quantità di moto non può dunque crescere indefinitamente, ma deve sempre conservarsi inferiore ad un dato valore.

Che se poi i_0 è molto piccolo, e $C^2 r_0^2$ è molto grande a fronte di $2AH$, anche i deve mantenersi sempre molto piccolo.

Ciò vuol dire che se la direzione del momento della quantità di moto iniziale è molto prossima all'asse di figura, e se inoltre la velocità di rotazione del sistema attorno a quest'asse ed il relativo momento d'inerzia sono sufficientemente grandi, l'asse di figura deve, durante il movimento, avere sempre una direzione molto prossima a quella del momento della quantità di moto.

Ben s'intende che con ciò non si vuole affatto escludere la possibilità che l'asse di figura, ruotando colla velocità angolare s attorno ad un asse ad esso normale, sia animato da piccoli movimenti ai quali non partecipa il vettore momento della quantità di moto; ciò avverrà anzi effettivamente, in generale: ma lo scarto angolare tra quell'asse e questo vettore non potrà mai superare un limite ben determinato in ogni caso concreto, sicchè la direzione del vettore momento della quantità di moto potrà in pratica assumersi a rappresentare una specie di *direzione media* per l'asse di figura, direzione cioè attorno alla quale quest'asse oscilla senza mai potersene scostare in modo notevole.

Se pertanto si fa astrazione dalle oscillazioni insensibili dell'asse di figura, si può confondere la direzione di questo asse con quella del vettore momento delle quantità di moto, e determinarla applicando al vettore Cr il teorema secondo il quale la derivata di quel vettore è eguale al momento delle forze applicate.

In questo consiste ciò che si usa chiamare il *principio dell'effetto giroscopico*.

**

Ciò posto il comportamento dei solidi di rivoluzione rapidamente rotanti attorno al loro asse, e sollecitati da forze che tendano a deviare quest'asse dalla sua direzione primitiva, diventa assai facile a prevedersi, e l'apparente paradosso si spiega.

Immaginiamo infatti che in un determinato punto M dell'asse di figura sia applicata una forza costante F diretta perpendicolarmente al detto asse (fig. 59).

Il suo momento Fl rispetto all'origine fissa O è un vettore diretto normalmente al piano dell'asse e della forza: esso rappresenta la variazione, riferita all'unità di tempo, del vettore momento della quantità di moto.

Se si suppone che nell'istante considerato il sistema sia animato unicamente dalla rotazione di velocità angolare r attorno al suo asse di figura, il momento della quantità di moto iniziale è un vettore Cr diretto secondo questo asse.

Nell'intervallo di tempo elementare dt esso subirà una variazione $F \cdot l \cdot dt$ cioè devierà lievemente nel piano normale ad F .

Ma l'asse di figura è tenuto a seguire da vicino il vettore momento della quantità di moto: a meno dunque di oscillazioni che, per opportune condizioni iniziali, si mantengono sempre nei limiti delle quantità trascurabili, si potrà ritenere che l'asse di

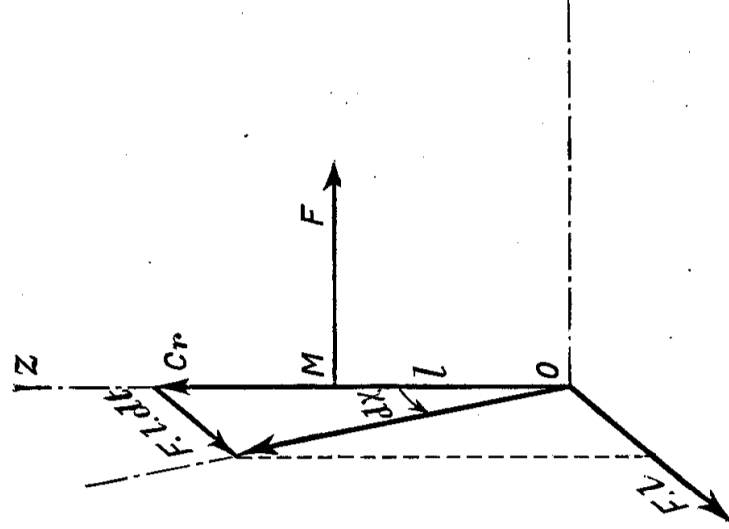


Fig. 59.

figura ruoti attorno alla parallela ad F condotta per O dell'angolo:

$$d\alpha = \frac{F \cdot l \cdot dt}{C \cdot r}$$

epperò colla velocità angolare:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{F \cdot l}{C \cdot r}$$

Se ne deduce subito che:

lo sforzo necessario per deviare l'asse di figura di un solido di rivoluzione, rapidamente ruotante su se stesso, è perpendicolare al piano in cui si vuole che la deviazione avvenga, e, a parità di altre condizioni, tanto più grande quanto maggiore è la quantità di moto Cr che il solido possiede in virtù della sua rotazione propria.

Reciprocamente è evidente che se l'asse di figura di un solido di rivoluzione, rapidamente ruotante su se stesso, è soggetto a vincoli che lo costringano a deviare in un dato piano, esso

reagirà, cioè svilupperà certe reazioni di vincolo eguali e contrarie alle forze esterne che gli si dovrebbero applicare, supposto che fosse libero, per produrre la medesima deviazione.

Più precisamente:

se un punto dell'asse di figura viene costretto a ruotare attorno ad un'asse normale al primo con una data velocità angolare $\frac{dx}{dt}$ esso reagirà con una forza parallela al secondo asse e la cui intensità

$$F = \frac{C \cdot r}{l} \cdot \frac{dx}{dt}$$

a parità di altre circostanze, sarà tanto più grande quanto maggiore è la velocità angolare imposta.

Ecco perchè quando si preme colla mano sull'estremità dell'asta di una bilancia giroscopica (equilibrata in modo che il baricentro G coincida col punto fisso O) e si tenta di farla deviare in un certo senso, si incontra una reazione (che non è affatto in relazione colla massa del sistema, bensì colla quantità di moto, propria del toro) mentre l'asta tende a sfuggire in senso trasversale.

Ed ecco anche perchè l'effetto giroscopico ha potuto in questi ultimi tempi trovare eleganti ed utili applicazioni nella costruzione di apparecchi stabilizzatori (per navi, torpedini, aeroplani, monorails ecc.) costituendo di questi apparecchi l'organo sensibile ai mutamenti di orientazione cioè l'organo capace di reagire — sia assumendo un movimento di precessione, sia sviluppando un sistema di reazioni — con intensità tanto maggiore quanto più è brusco il movimento che si tratta di combattere o di limitare.

S'intende che esula dal nostro programma la trattazione di queste applicazioni eminentemente tecniche.

Qui ci basta l'aver data un'idea del fenomeno, e l'aver indicata la via, seguendo la quale, il lettore potrà approfondirlo sotto tutti gli aspetti.

