II.

LE EQUAZIONI DELLE QUANTITÀ DI MOTO ED I TEOREMI SUL MOTO DEL BARICENTRO

Indichiamo con

$$Q_x = \sum m \frac{dx}{dt}$$

$$Q_y = \sum m \frac{dy}{dt}$$

$$Q_z = \sum m \frac{dz}{dt}$$

le tre componenti secondo gli assi del vettore risultante delle quantità di moto del sistema, o, come le chiameremo più brevemente, le tre componenti della quantità di moto. Per una qualunque di esse, per esempio per la prima, si ha evidentemente:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m \frac{dx}{dt} = \sum m \frac{d^2x}{dt^2}$$

Le (20) si possono dunque scrivere sotto la forma:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dQ_x}{dt} &= \Sigma X \\ \frac{dQ_y}{dt} &= \Sigma Y \\ \frac{dQ_z}{dt} &= \Sigma Z \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

ed esprimere dicendo che: *se i vincoli permettono ad ogni istante uno spostamento rigido qualunque parallelo ad un asse fisso, la derivata della proiezione su quell'asse del vettore risultante della quantità di moto, è eguale alla analoga proiezione del vettore risultante delle forze applicate.*

***

Immaginiamo ora che l'intiera massa del sistema $M = \Sigma m$ possa concentrarsi tutta nel suo baricentro, cioè nel punto le cui coordinate ξ, η, ζ sono definite dalle relazioni:

$$M\xi = \sum m x$$
$$M\eta = \sum m y$$
$$M\zeta = \sum m z$$

Derivando rispetto al tempo (di cui le ξ, η, ζ sono naturalmente funzioni) si ha:

$$M\frac{d\xi}{dt} = \sum m \frac{dx}{dt} = Q_x \qquad \text{e simili}$$

e derivando ancora:

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2} = \sum m \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dQ_x}{dt} \qquad \text{e simili.}$$

Ne concludiamo in primo luogo che: *la quantità di moto di un sistema è eguale alla quantità di moto del suo baricentro, supposto in esso concentrata tutta la massa.*

In secondo luogo ne deduciamo che le (20) si possono ancora scrivere sotto una terza forma:

$$\left.\begin{aligned} M\frac{d^2\xi}{dt^2} &= \sum X \\ M\frac{d^2\eta}{dt^2} &= \sum Y \\ M\frac{d^2\zeta}{dt^2} &= \sum Z \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Ma queste non sono altro che le equazioni del moto del baricentro con ivi concentrata tutta la massa ed ivi trasportate tutte le forze. Dunque: *se i vincoli permettono ad ogni istante tre spostamenti rigidi qualunque secondo tre direzioni non complanari, il baricentro del sistema si muove come un punto libero, avente per massa la massa totale, sul quale agisse la forza risultante delle forze applicate.*

Vale la pena di rilevare che se tra le forze applicate ai varii punti del sistema ve ne sono delle *interne*, queste per il noto principio dell'azione e della reazione devono a due a due essere eguali e contrarie: esse scompaiono perciò automaticamente dalle sommatorie ai secondi membri delle (20): si può pertanto prescindere da esse nel calcolo di quelle sommatorie, come nella determinazione della forza risultante di cui è cenno nell'ultimo enunciato, limitandosi a prendere in considerazione le sole *forze esterne.*

Ne segue subito, a guisa di corollario, che: *se un sistema è esclusivamente soggetto a forze e vincoli interni, la sua quantità di moto deve mantenersi immutata, ed il suo baricentro deve restare immobile, o muoversi di moto rettilineo ed uniforme.*

***

Il teorema della quantità di moto, specialmente se espresso nelle ultime forme indicate, che si riferiscono al moto del baricentro, trova utile ed immediata applicazione nei più svariati problemi della meccanica.

Accenniamo brevemente ad alcune questioni particolarmente interessanti.

Movimento del sistema solare. — Pel sistema solare le forze esterne sarebbero le attrazioni esercitate sul sole e sui varii pianeti dalle stelle: ma le stelle sono estremamente lontane ed attorniano in tutti i sensi il nostro sistema; sicchè con grande approssimazione si può ritenere che la risultante delle loro attrazioni sia uguale a zero. Le sole forze agenti sono dunque le forze attrattive interne che si esercitano tra il sole ed i pianeti e tra questi fra loro. Ne segue che il baricentro del sistema solare (che è un punto molto prossimo al sole, a causa della grande preponderanza della massa solare), se non è in quiete, deve muoversi di moto rettilineo ed uniforme.

Le osservazioni astronomiche confermano questo risultato teorico: esse dimostrano che la velocità del detto baricentro è assai prossima a 20 chilometri al minuto secondo, ed è diretta verso un punto della sfera celeste (a cui gli astronomi hanno dato il nome di apice) il quale si trova nella costellazione della Lira, presso la stella Wega (Alfa Lyrae).

Moto dei proietti. — Il baricentro di un proietto, nel vuoto, si muoverebbe come un punto pesante animato da una data velocità iniziale: e noi già sappiamo che dovrebbe descrivere una parabola. Se ad un dato istante il proietto scoppiasse, il baricentro dei frammenti lanciati all'intorno continuerebbe a descrivere la medesima parabola, almeno fino a che non intervenisse alcuna forza esterna, come avverrebbe per esempio allorquando uno dei frammenti urtasse contro un ostacolo.

Nell'aria le cose vanno un po' diversamente, non solo nel senso che la resistenza del mezzo altera la traiettoria, epperò questa cessa di essere una parabola, ma anche perchè questa resistenza muta completamente all'atto dello scoppio. La traiettoria descritta dal baricentro dei frammenti non è dunque più quella che esso baricentro avrebbe descritta se lo scoppio non fosse avvenuto, bensì quella che esso avrebbe descritto se la resistenza del mezzo si fosse modificata divenendo eguale alla risultante delle resistenze che incontrano effettivamente i singoli frammenti. Il teorema permetterebbe dunque egualmente di calcolare quella traiettoria, se queste resistenze fossero conosciute.

Rinculo delle armi da fuoco. — Immaginiamo un fucile il quale sia libero di spostarsi longitudinalmente: sia M la sua massa, ed m quella del proietto: all'atto dello sparo, mentre il proietto assume la velocità v anche il fucile assumerà una certa velocità u.

Ma fin che il proietto è nella canna dell'arma, i gas prodotti dalle polveri esercitano delle forze eminentemente interne pel sistema costituito delle due masse M ed m: ne segue che il baricentro di questo sistema, se era inizialmente in quiete, in quiete dovrà restare. Ciò si esprime colla condizione

$$M u + m v = 0$$

dalla quale si ricava subito che

$$u = -\frac{m v}{M}$$

L'arma si sposta dunque in senso opposto a quello del moto del proietto, con una velocità che si può render piccola quanto si vuole se si ha l'avvertenza di rendere M sufficientemente grande a fronte di m.

Naturalmente tutto ciò vale nell'ipotesi che si possa trascurare la massa dei gas (o, ciò che fa lo stesso, quella delle polveri da cui essi provengono) e che non intervengano forze esterne.

In pratica se si vuol apprezzare l'influenza della massa dei gas bisogna tener conto che questi assumono una velocità che ha lo stesso senso di quella del proietto: il che vuol dire che la pressione non sarà esattamente la stessa in tutta la loro massa, ma sarà un po' maggiore verso il fondo della camera di scoppio: in conseguenza la velocità di rinculo del fucile sarà un po' maggiore di quella sopra prevista. Se si potesse ammettere che l'intiera massa dei gas assuma la velocità stessa del proietto, il problema si potrebbe immediatamente risolvere ponendo per m la somma delle masse del proietto e delle polveri.

Quanto alle forze esterne, la loro influenza si può bensì trascurare fin che ci si limita al brevissimo intervallo di tempo che occorre al proietto per percorrere la canna dell'arma; poi il loro intervento è in pratica inevitabile ed altera completamente l'ulteriore andamento del fenomeno: sul proietto infatti agisce in modo non più trascurabile la resistenza dell'aria, mentre sull'arma vengono ad agire quei vincoli che caso per caso si saranno predisposti per arrestarne il rinculo.

Moto animale. — Un caso tipico di forze interne è quello delle azioni muscolari in un essere vivente: questi può colle sole sue forze modificare a volontà la sua conformazione: non può senza l'intervento di azioni esterne modificare lo stato di quiete o di moto del suo baricentro.

Consideriamo per esempio il caso di un uomo o di un animale il quale spicca un salto e resta per un certo tempo in aria senza contatto alcuno coi corpi circostanti: avremo occasione di dimostrare fra poco come egli possa con opportune manovre girarsi su sè stesso a volontà: ma possiamo fin d'ora prevedere che, se si prescinde dalla resistenza dell'aria (la cui influenza, nelle condizioni ordinarie e colle ordinarie velocità, è veramente trascurabile) egli non potrà in alcun modo influire sul moto del suo baricentro, la cui traiettoria è da ritenersi perfettamente determinata dall'atto stesso con cui si è determinato il distacco dal suolo.

Il problema dei movimenti di un essere vivente si presta d'altronde anche ad altre considerazioni molto istruttive.

Immaginiamo per esempio un uomo in piedi su di un suolo orizzontale perfettamente liscio (cioè privo di attrito): la reazione di un simile suolo contro i piedi dell'uomo potrà essere a seconda dei casi più o meno grande: sarà però sempre certamente diretta secondo la verticale: sicchè, composta col peso, darà origine ad una forza risultante essa pure certamente verticale.

Orbene supponiamo che peso e reazione del suolo siano le sole forze esterne che agiscono su quell'uomo (proprio come avviene quando egli non tocca nè è toccato da alcun corpo esterno). Assunti gli assi delle x e delle y orizzontali e quello delle z verticali, si avrà necessariamente:

$$\Sigma X = \Sigma Y = 0$$

Solamente ΣZ potrà essere diversa da zero.

Per conseguenza:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0$$

Solamente la componente verticale dell'accelerazione del baricentro potrà differire da zero.

Ciò vuol dire che, se l'uomo era inizialmente in quiete, egli, qualunque sforzo faccia non riuscirà mai a spostarsi su quel suolo, nel senso che il suo baricentro non potrà muoversi se non sulla verticale primitiva (la proiezione del baricentro sul suolo resta immobile).

Che se invece l'uomo era inizialmente in moto, nel senso che la detta proiezione del baricentro sul suolo era dotata di una certa velocità, egli non riuscirà mai, qualunque sforzo faccia, a fermarsi, ma scivolerà sul suolo in un modo che, a seconda delle sue manovre, potrà apparire più o meno complicato, senza che la solita proiezione del baricentro sul suolo cessi di muoversi di moto rettilineo ed uniforme.

Tutto ciò spiega molto bene le difficoltà che si provano camminando sul ghiaccio quando è ben liscio: e dà nello stesso tempo un'idea precisa dell'importanza preponderante, anzi addirittura dell'utilità che possono presentare nel problema della locomozione le resistenze di attrito, facendo vedere che è proprio grazie a queste resistenze che noi riusciamo camminando a spostarci da uno ad altro sito.