PARTE PRIMA

I PRINCIPII

Le leggi della caduta dei gravi — La definizione dinamica della forza — Introduzione del concetto di massa — Il pendolo — Forza viva e quantità di moto — La gravitazione universale — Il principio di D'Alembert.

I.

LE LEGGI DELLA CADUTA DEI GRAVI

La dinamica è una scienza tutt'affatto moderna: le scoperte degli antichi, e in modo particolare dei Greci, nel campo della meccanica si riferivano tutte alla statica: il fondatore della dinamica fu Galileo Galilei.

Ai suoi tempi infatti erano ancora comunemente accettate le concezioni Aristoteliche, secondo le quali, per spiegare la discesa dei corpi pesanti e l'ascesa dei corpi leggeri (di quelli cioè che oggi diciamo più leggeri dell'aria) si diceva che ciascun corpo cerca *il suo luogo*, e che i più pesanti lo trovano in basso, i più leggeri in alto: si distinguevano i movimenti dei corpi in movimenti naturali, come quelli di caduta dei gravi, e in movimenti violenti, come quelli dei proietti. Si diceva ancora, sulla scorta di poche osservazioni e di esperienze superficiali, che i corpi di maggior peso cadono più velocemente di quelli di peso minore.

Per verità Aristotile, pur ingannandosi a fondo nella valutazione degli effetti della presenza dell'aria, si rendeva conto perfettamente di quel che sarebbe accaduto se l'aria potesse venire soppressa.

Egli pensava infatti che, *nel vuoto*, un corpo, una volta messo in movimento, tenderebbe a perseverare in esso indefinitamente, non essendovi ragione alcuna perchè esso andasse a fermarsi in un posto anzichè in un altro: per conseguenza, secondo Aristotile, un tal movimento dovrebbe conservarsi immutato almeno fino a che un ostacolo qualunque non intervenisse ad impedirlo.

Rimarchevoli osservazioni queste, nelle quali v'è chi ha voluto vedere una prima intuizione di quella che noi chiamiamo oggi la legge d'inerzia.

In realtà non è il caso di andar tant'oltre: perchè dalle affermazioni di Aristotile discenda logicamente la nostra legge d'inerzia bisognerebbe infatti limitarsi a considerare un corpo che non avesse mai fatto altro che muoversi di moto rettilineo ed uniforme; chi, alla stregua di quelle affermazioni, considerasse un corpo che per un certo tempo fosse stato costretto a muoversi su di una circonferenza — si pensi al caso della pietra trattenuta dalla fionda — ben lungi dall'esser condotto a pensare ad una tendenza della pietra a sfuggire nella direzione della tangente, potrebbe esser tentato di dedurne che, anche dopo cessata l'azione della fionda, la pietra, abbandonata a se stessa, dovrebbe continuare a percorrere indefinitamente la stessa circonferenza!

Checchè ne sia, ha certamente ragione il Lecornu quando osserva che disgraziatamente Aristotile, invece di adottare francamente le conseguenze di questo suo modo di concepire i movimenti nel vuoto, ha preferito affermare l'impossibilità fisica del vuoto: così, in luogo di contribuire ai progressi della dinamica, egli li ha probabilmente intralciati, poichè l'incontestata autorità che gli fu universalmente riconosciuta durante tutto il medio evo ha certamente ritardata di parecchi secoli l'esatta comprensione dei fenomeni dinamici (*).

***

Il primo che abbia intraviste con una certa chiarezza le più elementari verità sul moto dei corpi fu probabilmente Leonardo da Vinci (1452-1519): è ormai certo che egli conosceva il rapporto dei tempi impiegati da un grave a discendere lungo piani diversamente inclinati: e tutto fa credere che egli avesse anche acquistata un'idea abbastanza chiara del principio di inerzia. I suoi lavori non poterono però avere alcuna influenza sul progresso della scienza perchè non furono pubblicati se non molto più tardi (1797).

(*) L. Lecornu, *La mécanique, les idées et les faits*, Paris 1918, pag. 59.

Ebbero invece una notevole importanza gli scritti di BENEDETTI (1530-1590) il quale introdusse la nozione dell'accelerazione nel moto di caduta dei gravi, attribuendola al sommarsi di successive impulsioni impresse dalla gravità. Egli pensava di spiegare la continuità del movimento di un proietto ammettendo l'esistenza in esso di una certa *virtus impressa* di cui egli non aveva forse neppure una nozione ben chiara, ma che rappresentò la prima espressione di una idea che ha avuto in seguito il maggiore sviluppo.

Benedetti fu il primo ad affermare che un corpo leggero in sè non esiste: che cioè esistono soltanto dei corpi più o meno pesanti: e che anche l'aria è pesante: egli avvertì che dal peso dei corpi bisogna detrarre la spinta che questi subiscono da parte del mezzo nel quale sono immersi (principio di Archimede).

Partendo dalla considerazione di più corpi identici cadenti insieme gli uni a fianco degli altri, ora liberi, ora legati fra loro, e premesso che il vincolo introdotto non può in nulla alterare il fenomeno della caduta, egli giunse alla conclusione che corpi ineguali, ma costituiti dalla medesima sostanza, devono cadere colla medesima velocità.

A questo punto però si arrestano le cognizioni di Benedetti: egli crede ancora che le velocità di caduta di due corpi di egual forma e dimensioni, ma costituiti da diverse sostanze, stiano fra loro come i loro pesi.

E spetta, come abbiamo annunciato, a GALILEO GALILEI (1564-1642) il merito insigne di avere penetrato questo problema a fondo, sì da gettare le basi di tutta la dinamica. I *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* nei quali Galileo espose e discusse sotto forma di dialogo il suo pensiero, comparvero per la prima volta a Leyda nel 1638. Essi non procurarono allora al loro autore una celebrità paragonabile a quella che gli derivò dalle sue scoperte astronomiche: ma, come osserva giustamente Lagrange (*), essi rappresentano il più solido e reale suo titolo alla gloria. Le scoperte dei satelliti di Giove, o delle fasi di Venere, o delle macchie solari, non richiedevano che l'assiduo uso dei telescopii: occorreva per contro un genio

(*) J. L. LAGRANGE, *Mécanique analytique*, Seconde partie, première section, " Sur les différents principes de la Dynamique ".

veramente straordinario per discernere le vere leggi della natura in tutto quel complesso di fenomeni che l'umanità aveva sempre avuto sotto gli occhi e di cui tuttavia non aveva mai saputo fino a quel tempo darsi ragione.

***

Galileo ha in primo luogo assodato che, se si fa astrazione dalla presenza dell'aria, tutti i corpi cadono colla medesima velocità.

L'esperienza diretta gli permetteva di controllare solo fino ad un certo punto questa sua affermazione: certe sfere d'oro, di piombo, di rame e di cera che egli lasciava cadere insieme dall'alto della Torre di Pisa giungevano bensì in fondo sensibilmente insieme: tuttavia un'esperienza veramente concludente egli non era in grado di farla.

Soltanto assai più tardi Newton, collocando in un tubo, dal quale era stata preventivamente estratta l'aria, un pezzetto d'oro ed una piuma, potrà constatare in modo definitivo e rigoroso la stessa identica durata di caduta.

Galileo acquistò la certezza su questo argomento per una via indiretta, la quale basterebbe da sola a provare il suo mirabile acume.

Egli era solito osservare le oscillazioni pendolari delle numerose lampade appese nel Duomo di Pisa, e riguardava quelle oscillazioni come delle serie di discese (e di salite) lungo una successione di piani inclinati, di inclinazione gradatamente variabile, successione evidentemente identica per tutte le lampade sospese a fili di eguale lunghezza. Ed avendo constatato che, in queste condizioni, tutte le lampade, dalle più grosse e pesanti alle più piccole e leggere, compivano le loro oscillazioni in tempi identicamente eguali, egli ne concluse che tutti i corpi dovevano presentare la medesima velocità di caduta su ciascuno di quei piani, anzi addirittura su ciascun piano non escluso il verticale.

Se pertanto i corpi che ci circondano sembrano qualche volta, quando cadono liberamente, sottrarsi a questa legge, ciò è da attribuirsi unicamente alla presenza dell'aria, la quale interviene in due modi distinti: prima perchè, secondo il principio di Archimede, diminuisce in diverso grado il peso dei diversi corpi senza mutare la loro massa: poi perchè oppone al loro movimento una resistenza che varia col variare della loro forma e delle loro dimensioni, e che, per velocità notevoli, può assumere un'importanza tutt'altro che trascurabile.

***

Giunto così a stabilire che una legge unica presiede alla caduta di tutti i corpi, Galileo dovette chiedersi quale fosse questa legge.

Egli sapeva naturalmente, poichè basta l'esperienza anche la più rudimentale a provarlo, che il movimento di caduta dei gravi non è uniforme: gli sembrò allora naturale l'ipotesi che esso fosse uniformemente accelerato.

Le ragioni che egli porta a giustificazione di questa ipotesi sono assai interessanti a conoscersi. Nei suoi *Discorsi e dimostrazioni matematiche* già citati, egli premette che la natura ricorre sempre nei suoi procedimenti ai mezzi più semplici e più facili, per dedurne che, poichè un corpo che cade acquista man mano velocità di caduta sempre maggiori, l'incremento di velocità deve verificarsi nel più semplice dei modi possibili, in quello cioè cui corrispondono, in tempi eguali, incrementi di velocità pure eguali. Nè vi è possibile equivoco sulla importanza che Galileo attribuiva a questo suo modo di vedere, poichè ad indicare il moto così definito egli usa indifferentemente la designazione di *naturalmente accelerato* in luogo di quella di *uniformemente accelerato*.

Molto ci sarebbe a dire su questo principio metafisico della pretesa semplicità delle leggi della natura (*), principio che noi incontriamo qui per la prima volta, ma che, sotto questa stessa o sotto altra forma equivalente, si ritrova ad ogni momento nella storia della scienza. In realtà le leggi della natura non sono nè semplici nè complicate: se esse ci appaiono tali, ciò avviene soltanto in dipendenza delle variabili che noi assumiamo e degli algoritmi che noi adottiamo per rappresentarle matematicamente, sicchè la stessa legge si può far apparire semplicissima o complicatissima mediante una oculata impostazione

(*) H. Bouasse, *Introduction à l'étude des théories de la mécanique*, Paris 1895, pagg. 93 e seg.

del problema cui si riferisce ed una opportuna scelta del modo di esprimerla.

Del resto Galileo, da quel fisico eminente che era, non si accontentò delle ragioni metafisiche che lo inducevano ad ammettere che i corpi assumano, cadendo liberamente, un moto uniformemente accelerato, ma giudicò che l'esperienza sola doveva decidere, e si accinse immediatamente a dimostrare per via sperimentale il suo asserto.

Al che si opponeva una grande difficoltà pratica, dipendente da ciò che i corpi cadenti liberamente si muovono con velocità assai considerevoli: Galileo aveva già riscontrato che quelle certe sfere abbandonate dall'alto della Torre di Pisa impiegavano meno di tre secondi per raggiungerne la base: ed i mezzi di cui egli poteva disporre per la misura del tempo non gli consentivano assolutamente di operare colla necessaria precisione in simili condizioni.

Era dunque per Galileo indispensabile trovare un modo di rallentare il movimento di caduta senza alterare la forma della legge del moto: ed egli pensò molto opportunamente di ricorrere ad un piano inclinato.

Il piano di cui Galileo si servì in quella occasione era in realtà costituito da un regolo di legno lungo ben 14 metri sul quale era stata praticata una scanalatura rigorosamente rettilinea ed accuratamente levigata: il regolo era disposto in modo che il dislivello dei suoi estremi era dodici volte più piccolo della sua lunghezza: una piccola sfera di marmo ben pulito scendeva rotolando lungo la scanalatura.

***

D'altra parte era tutt'altro che facile riscontrare sperimentalmente che le velocità crescevano proporzionalmente ai tempi, cioè secondo una legge del tipo

$$v = g \, . \, t \tag{1}$$

Era più facile cercar di controllare la relazione eventualmente esistente tra lo spazio percorso ed il tempo impiegato a percorrerlo: Galileo riuscì a passare dall'una all'altra legge con un ragionamento che è ad un tempo semplice, chiaro e perfettamente corretto.

Si immagini un ordinario sistema di coordinate cartesiane ortogonali nel piano, in cui le ascisse rappresentino i tempi, e le ordinate le velocità acquistate dal mobile (fig. 1). È evidente che la legge del moto di cui ci occupiamo sarà, in queste ipotesi, rappresentata da una retta la cui inclinazione sull'asse delle ascisse misurerà la accelerazione g (incremento della velocità relativo all'unità di tempo).

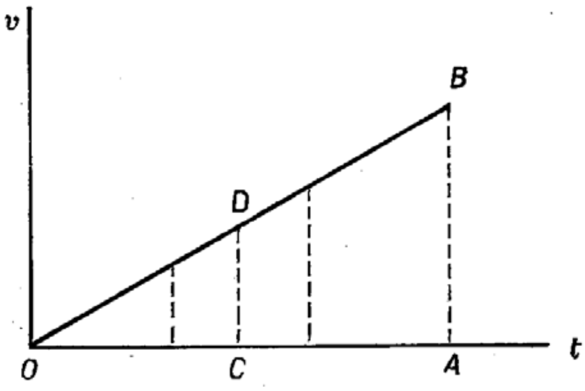

Fig. 1.

Ciò posto si consideri, a partire dall'origine del moto, un certo intervallo arbitrario di tempo $t = OA$ e sia $v = gt = AB$ la velocità che il mobile viene a possedere alla fine del detto intervallo.

È chiaro che nell'istante $\frac{t}{2} = OC$ la velocità sarà $\frac{gt}{2} = CD$; e che inoltre a ciascun istante del semi intervallo OC si può sempre far corrispondere un determinato istante del semi intervallo CA tale che le due velocità corrispondenti differiscano egualmente, l'una in meno, l'altra in più, dalla velocità media $\frac{gt}{2}$.

Se pertanto si paragona il moto considerato con un moto uniforme di velocità eguale a questa velocità media, si vede subito che gli spazii percorsi in meno nel movimento reale rispetto a quello uniforme durante il primo semi intervallo, verranno compensati da corrispondenti spazii percorsi in più durante il secondo semi intervallo.

Si potrà dunque concluderne che lo spazio percorso nel moto uniformemente accelerato durante l'intiero intervallo è lo stesso che verrebbe percorso se il moto fosse uniforme con velocità eguale alla velocità media. Tale spazio sarà dunque misurato dal prodotto di questa velocità media per il tempo:

$$s = \frac{gt}{2} \cdot t = \frac{1}{2} gt^2 \qquad (2)$$

Da questa formola così direttamente acquisita, Galileo dedusse che nel moto considerato spazii che stanno fra loro come $1:4:9:16:\ldots$ devono essere percorsi in tempi che stanno rispettivamente come $1:2:3:4:\ldots$

E le esperienze che egli eseguì sul descritto piano inclinato, rilevando il moto della piccola sfera di marmo, confermarono pienamente questa previsione.

***

Restava a sapersi quale rapporto esistesse tra la velocità acquistata dalla sfera scendendo lungo il piano inclinato e quella che la stessa sfera avrebbe acquistata cadendo liberamente lungo la verticale.

Galileo risponde subito (*) che la velocità non può dipendere che dal dislivello: che cioè un corpo deve acquistare la medesima velocità sia discendendo lungo il piano inclinato sia cadendo lungo l'altezza di esso: e giustifica questo suo asserto ragionando così.

Immaginiamo che nell'istante in cui il corpo perviene alla estremità della sua caduta la sua velocità venga improvvisamente invertita epperò rivolta verso l'alto: il corpo risalirà ed il suo moto attuale sarà per così dire la riproduzione capovolta del precedente: la velocità che prima cresceva proporzionalmente al tempo diminuirà ora colla medesima legge per annullarsi nell'istante in cui il corpo sarà pervenuto alla medesima altezza da cui era partito. Si può pertanto dire che la velocità che un corpo acquista cadendo gli permette di risalire ad una altezza eguale all'altezza di caduta.

Orbene lo stesso deve avvenire anche quando la velocità acquisita venga utilizzata per far risalire il corpo su di un piano di inclinazione diversa da quella su cui si è effettuata la discesa. Se infatti, cadendo lungo un dato piano inclinato, un corpo acquistasse una velocità che gli permettesse di risalire su di un altro piano inclinato, ad un livello più alto dell'iniziale, se ne potrebbe concludere che mediante una successione convenientemente architettata di siffatti piani si potrebbe innalzare

---

(*) Galileo Galilei, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze.* – Terza giornata (sul movimento locale).

un corpo ad una qualsiasi altezza abbandonandolo puramente e semplicemente all'azione del suo peso: il che è assurdo perchè noi sappiamo bene che i corpi pesanti tendono sempre a discendere e non possono sollevarsi se non per l'intervento di qualche forza esterna.

Che se invece la velocità acquistata nella discesa lungo il primo piano inclinato non dovesse permettere al corpo di salire, sul nuovo piano inclinato, se non ad un livello inferiore all'iniziale, basterebbe (in virtù di ciò che si è detto poc'anzi) capovolgere l'esperienza per ricadere nel medesimo assurdo.

L'affermazione di Galileo che le velocità acquistate nella caduta non dipendono che dalla altezza verticalmente percorsa, qualunque sia l'inclinazione del piano, non implica dunque se non la nozione, affatto logica ed intuitiva, che i corpi pesanti non possono in nessun caso innalzarsi per la sola virtù del loro peso.

* * *

Galileo del resto non si accontentò neppur questa volta dei ragionamenti, e trovò subito un modo molto elegante di dimostrare sperimentalmente il suo asserto.

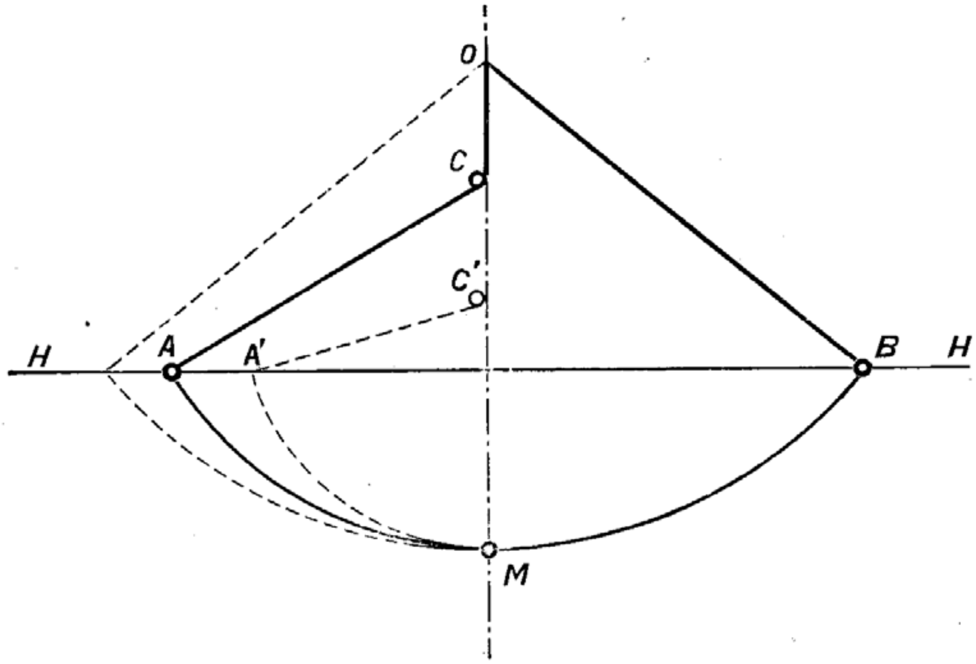

Fig. 2.

Egli prese una pesante sfera di piombo sospesa ad un lungo filo OM (fig. 2) il quale oscillando attorno al suo estremo fisso O veniva ad incontrare un arresto C spostabile a volontà sulla verticale per O.

La traiettoria del centro della sfera risultava così costituita da due archi di cerchio di raggio differente.

Spostata pertanto la sfera lungo l'arco di centro C fino ad una certa posizione A situata su di una data orizzontale HH Galileo la lasciava libera di oscillare: egli potè così osservare che essa raggiungeva sul cerchio di centro O una ben determinata posizione B la quale era precisamente l'intersezione del cerchio stesso colla orizzontale HH: e che lo stesso accadeva qualunque fosse la posizione di C; che cioè, qualunque fosse la curvatura della traiettoria descritta nella discesa, la sfera risaliva lungo MB sempre alla medesima altezza.

Galileo ne dedusse che, al passaggio per la verticale in M, la velocità della sfera doveva, nei varii casi, essere sempre eguale, dipendentemente dal dislivello tra la orizzontale HH ed il punto M, indipendentemente dal particolare cammino seguito per superare detto dislivello.

Egli d'altronde si compiaceva, come abbiamo già accennato, di pensare questo cammino come costituito da una serie di piccoli piani inclinati succedentisi con continuità. Potè quindi facilmente concludere che la velocità acquistata da un grave che discenda lungo un piano inclinato non dipende dalla inclinazione del piano ma soltanto dal dislivello superato, epperò è quella stessa che il grave acquisterebbe cadendo liberamente, cioè verticalmente, dalla medesima altezza.

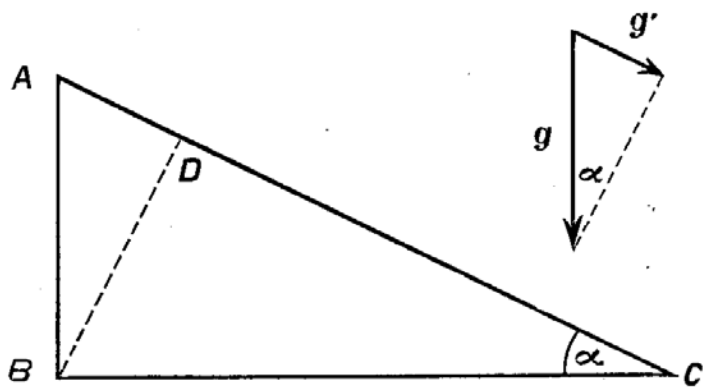

Fig. 3.

Nulla di più facile ora che calcolare l'accelerazione di un corpo che cada liberamente se si è misurata quella che gli spetta su di un piano di data inclinazione.

Sia infatti AB l'altezza di un dato piano inclinato AC (fig. 3): siano g e g' le accelerazioni di un grave che si muova per effetto del suo peso lungo quelle due direzioni, t e t' i tempi impiegati a percorrerle. La velocità finale comune sarà:

$$v = gt = g't'$$

Inoltre si avrà:

$$AB = \frac{v}{2}\,t \qquad AC = \frac{v}{2}\,t'$$

e per conseguenza:

$$\frac{g'}{g} = \frac{t}{t'} = \frac{AB}{AC} = \operatorname{sen}\alpha$$

I tempi impiegati dal grave a percorrere il piano inclinato e la sua altezza stanno dunque come le rispettive lunghezze: le accelerazioni stanno nel rapporto inverso.

***

Galileo dedusse da questo teorema alcuni interessanti corollarii.

Consideriamo per esempio due corpi i quali cadano, l'uno verticalmente, l'altro obliquamente cioè su di un dato piano inclinato AC. Poichè l'accelerazione di quest'ultimo sta a quella del primo come l'altezza AB sta alla lunghezza AC, per avere lo spazio AD che esso percorre durante il tempo che il primo corpo impiega a passare da A in B basterà proiettare ortogonalmente AB sulla direzione AC.

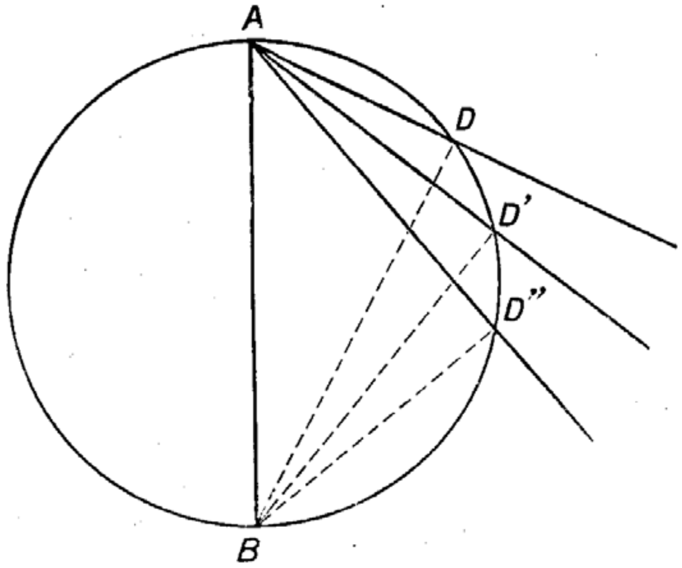

Fig. 4.

Ne segue subito che se un certo numero di piani diversamente inclinati si dipartono da un medesimo punto A (fig. 4) si possono su di essi individuare gli spazi percorsi in tempi eguali tracciando la circonferenza che ha per diametro l'altezza AB che viene a parità di tempo percorsa nel caso della libera caduta.

Sotto altra forma si può dire che un corpo sottoposto alla sola azione del suo peso impiega lo stesso tempo a descrivere il diametro verticale di un cerchio ovvero una qualunque delle corde dello stesso cerchio che si dipartono dall'estremità superiore di quel diametro (o che fanno capo alla sua estremità inferiore).

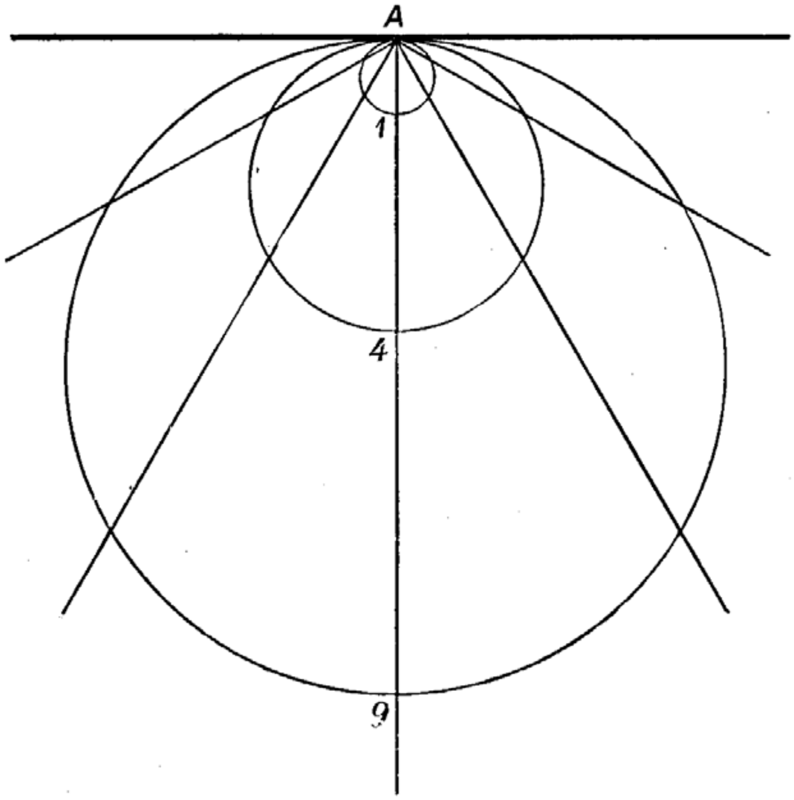

Fig. 5.

Sotto altra forma ancora, se si considerano quante si vogliono rette diversamente inclinate uscenti da un medesimo punto A dello spazio (fig. 5), e si pensa che in un medesimo istante un corpo pesante si diparta da A su ciascuna di quelle rette, si può affermare che in un istante successivo qualunque tutti i corpi in movimento si troveranno su di una sfera il cui diametro verticale misura lo spazio percorso da un corpo che cada liberamente, epperò cresce proporzionalmente al quadrato del tempo.

***

Galileo non si fermò però allo studio di semplici casi particolari, ma cercò sempre di perseguire, in tutte le sue conseguenze logiche, lo studio del fenomeno, modificando gradualmente ed in tutti i modi possibili le circostanze determinanti di quel problema particolare di cui si era fatta un'idea chiara: e giunse così ad una concezione di carattere generale la quale, non tanto forse per lui quanto per i suoi successori, assunse tutta l'importanza di una legge nuova.

Ecco in poche parole il suo ragionamento.

Riprendiamo in esame quel certo corpo che discende sotto l'azione del suo peso lungo un certo piano inclinato AB (fig. 6) e che in virtù della velocità così acquistata è capace di risalire fino all'altezza iniziale su di un qualsiasi altro piano inclinato BC

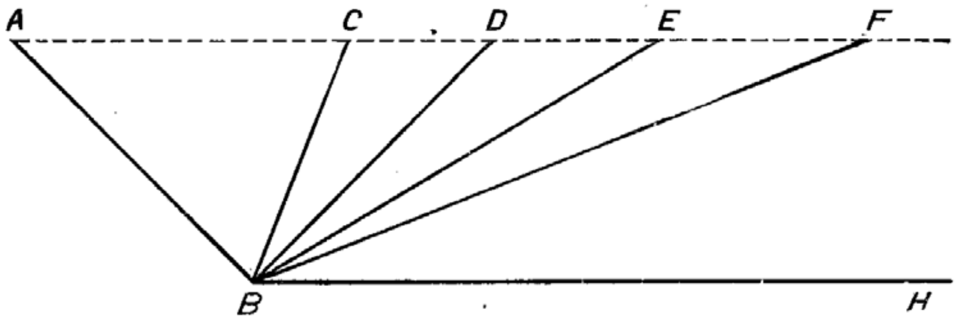

Fig. 6.

(opportunamente raccordato al primo in corrispondenza della sua estremità inferiore), ed immaginiamo che questo piano ruoti attorno al punto B prendendo successivamente le posizioni BD, BE, BF, ecc. sempre meno inclinate sulla orizzontale BH.

È evidente che il rallentamento del moto ascendente diviene in queste condizioni sempre meno sentito, e che tanto lo spazio percorso, come il tempo impiegato a percorrerlo, devono alla lor volta divenire sempre più grandi.

Al limite, sul piano orizzontale BH, il rallentamento del moto dovrà sparire del tutto, ed il corpo dovrà continuare indefinitamente a muoversi con velocità costante.

È così che Galileo intuì per la prima volta quella legge che, sotto il nome di legge di inerzia, doveva segnare il definitivo tramonto della concezione Aristotelica del moto: egli per verità esitò a formularla in tutta la sua generalità: ma ciò non può meravigliare chi pensi che egli non poteva, se non per gradi e lentamente, abbandonare un modo di pensare che i secoli avevano reso abituale e che l'esperienza stessa sembrava confermare. Non bisogna infatti dimenticare che l'esperienza più elementare dimostra che tutti i corpi in movimento, se abbandonati a sè stessi, finiscono presto o tardi per fermarsi: ed è stato già un grande merito per Galileo l'essere arrivato ad intuire che ciò doveva attribuirsi alle resistenze che si oppongono al moto e che in pratica non possono mai essere completamente eliminate.

L'elemento più caratteristico ed interessante del suo ragionamento è infatti proprio questo: che stabilisce la costanza della proiezione verticale del cammino percorso dal corpo che risale un piano inclinato con una data velocità iniziale, riferendosi ai piccoli percorsi, pei quali le resistenze passive non possono avere che un'influenza assai limitata: esso ci autorizza così a pensare che quella proiezione resterebbe la stessa comunque piccola fosse l'inclinazione del piano, se per percorsi sempre più lunghi le resistenze passive non si sommassero nei loro effetti fino ad alterare completamente l'andamento del fenomeno.