Parte Seconda

LA DINAMICA ANALITICA

Le equazioni di D'Alembert-Lagrange — Le equazioni della quantità di moto ed i teoremi sul moto del baricentro — Le equazioni dei momenti della quantità di moto ed il teorema delle aree — L'equazione delle forze vive ed il principio della conservazione dell'energia — Le equazioni di Lagrange.

I.

LE EQUAZIONI DI D'ALEMBERT-LAGRANGE

Noi vogliamo scrivere nella forma più generale le equazioni del movimento di un sistema materiale soggetto a vincoli senza attrito.

Sappiamo che basta scrivere che, *in ogni istante del moto, le forze applicate e le forze d'inerzia si fanno equilibrio.*

Per esprimere le condizioni di questo equilibrio vogliamo applicare il principio dei lavori virtuali. Ciò equivale a dire che dovremo scrivere che **nella configurazione attuale del sistema,** *il lavoro di tutte le forze, ivi comprese quelle d'inerzia, è nullo per tutti gli spostamenti piccolissimi e compatibili coi vincoli,* **tali quali essi sono attualmente.**

Il lettore vorrà ben tener presenti, nel seguito del nostro studio, le parole che qui si son scritte in particolare evidenza: parole che vanno messe in relazione con la denominazione di *virtuali* che si dà agli spostamenti di cui qui si è parlato.

Non si tratta infatti nell'applicazione di questo principio, di calcolare il lavoro *effettivo* che le forze compiono durante le effettive variazioni di configurazione del sistema: si tratta soltanto di scrivere che quelle certe forze si fanno attualmente equilibrio, e per fare questo bisogna considerare i vincoli quali essi sono attualmente e le variazioni di configurazione quali essi le permettono, senza preoccuparsi delle modificazioni che i vincoli stessi possono subire col tempo: ne segue che, quando i vincoli sono funzioni del tempo, gli spostamenti virtuali contemplati in questo procedimento possono non aver nulla a che fare colle variazioni di configurazione a cui il sistema va effettivamente soggetto.

***

Ciò premesso, indichiamo con

$$x \qquad y \qquad z$$

le coordinate di un punto generico di massa m del sistema, riferite ad un ordinario sistema di assi (cartesiani ortogonali) fissi.

$$\frac{dx}{dt} \qquad \frac{dy}{dt} \qquad \frac{dz}{dt}$$

saranno le componenti, rispetto agli stessi assi, della velocità v del punto.

$$\frac{d^2x}{dt^2} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} \qquad \frac{d^2z}{dt^2}$$

saranno quelle della sua accelerazione a.

Le componenti della forza d'inerzia saranno dunque rispettivamente:

$$-m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad -m\frac{d^2y}{dt^2} \qquad -m\frac{d^2z}{dt^2}$$

Se pertanto si indicano ancora con

$$X \qquad Y \qquad Z$$

le analoghe componenti della forza applicata allo stesso punto, la cercata equazione fondamentale della dinamica si potrà scrivere sotto la forma:

$$\sum\left[\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right]=0 \quad (16)$$

intendendo che la sommatoria va estesa a tutti i punti materiali di cui il sistema è costituito, e che

$$\delta x \qquad \delta y \qquad \delta z$$

denotano le componenti di uno spostamento virtuale, nel senso che si è indicato poc'anzi e che ora passiamo a precisare in simboli.

Supponiamo perciò che il sistema si componga di n punti materiali, tra i quali sussistano certi vincoli che, con le stesse avvertenze e riserve adottate già nella teoria dell'equilibrio [Cfr. *I fondamenti della Statica*, pag. 85], riterremo traducibili in k equazioni di condizione:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots, z_n, t) = 0 \\ f_2(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots, z_n, t) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_k(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots, z_n, t) = 0 \end{array}\right\} \tag{17}$$

$f_1, f_2, \ldots, f_k$ sono dunque questa volta delle funzioni non delle sole $3n$ coordinate degli n punti del sistema, ma anche del tempo t: funzioni che potremo supporre affatto arbitrarie purchè dotate di derivate prime ovunque finite e continue.

In queste condizioni è noto che le $3n$ componenti:

$$\begin{array}{l} dx_1, \quad dy_1, \quad dz_1 \\ dx_2, \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots, \quad dz_n \end{array}$$

di uno spostamento reale del sistema, per riuscir compatibili coi vincoli, debbono soddisfare alle k equazioni:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} dy_1 + \ldots + \dfrac{\partial f_1}{\partial z_n} dz_n + \dfrac{\partial f_1}{\partial t} dt = 0 \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial f_2}{\partial y_1} dy_1 + \ldots + \dfrac{\partial f_2}{\partial z_n} dz_n + \dfrac{\partial f_2}{\partial t} dt = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial f_k}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial f_k}{\partial y_1} dy_1 + \ldots + \dfrac{\partial f_k}{\partial z_n} dz_n + \dfrac{\partial f_k}{\partial t} dt = 0 \end{array}\right\} \tag{18}$$

Se invece si vuol esprimere che le $3n$ componenti:

$$\begin{array}{l} \delta x_1, \quad \delta y_1, \quad \delta z_1, \\ \delta x_2, \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots, \delta z_n \end{array}$$

di uno *spostamento virtuale* sono compatibili coi vincoli *quali essi* *sono in un determinato istante*, il tempo va evidentemente trattato come una costante; si trovano allora le k equazioni:

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\,\delta x_1 + \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}\,\delta y_1 + \ldots + \dfrac{\partial f_1}{\partial z_n}\,\delta z_n = 0 \\
\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\,\delta x_1 + \dfrac{\partial f_2}{\partial y_1}\,\delta y_1 + \ldots + \dfrac{\partial f_2}{\partial z_n}\,\delta z_n = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dfrac{\partial f_k}{\partial x_1}\,\delta x_1 + \dfrac{\partial f_k}{\partial y_1}\,\delta y_1 + \ldots + \dfrac{\partial f_k}{\partial z_n}\,\delta z_n = 0
\end{array}\right\} \tag{19}$$

le quali non coincidono colle precedenti se non nel caso particolarissimo in cui si abbia:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} = 0$$

$$\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} = 0$$

ciò che significa, in linguaggio comune, che i vincoli imposti al sistema dato sono *indipendenti dal tempo*.

***

Tutto ciò premesso è evidente che date le equazioni (19) si potranno sempre ricavare i valori di k delle quantità δx, δy, δz in funzione delle rimanenti $3n - k$.

Se, fatto ciò, si sostituiscono questi valori nella equazione (16) si ottiene un'equazione il cui primo membro è una funzione lineare ed omogenea delle $3n - k$ quantità che sono rimaste completamente arbitrarie.

Ora perchè questo primo membro si annulli, come vuole l'equazione, qualunque siano i valori che si attribuiscono a queste variabili arbitrarie, occorre e basta che siano tutti nulli i coefficienti di queste variabili: l'equazione ottenuta si scinde così in $3n - k$ equazioni distinte.

Aggiungendo queste $3n - k$ equazioni alle k equazioni dei vincoli si ha un sistema di $3n$ equazioni tra le $3n$ incognite $x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots\ldots, z_n$ ed il tempo: esse sono le equazioni del moto.

Si vede subito che, con questo procedimento, le equazioni del moto si ottengono colla medesima facilità con cui a suo tempo abbiamo ottenuto le equazioni dell'equilibrio (Cfr.: *I fondamenti della Statica*, pag. 86 e seguenti).

Vi è però una differenza importantissima, almeno dal punto di vista della utilizzazione del procedimento a fini pratici, ed è questa: che questa volta le equazioni trovate contengono le derivate seconde delle incognite per rapporto al tempo: ciò che in Statica naturalmente non avveniva. Ne segue che questa volta il problema è ancora ben lontano dall'essere risolto, in quanto implica l'integrazione di queste equazioni differenziali: e possiamo dire fin d'ora che qui risiede la maggiore, e sovente insormontabile, difficoltà della Dinamica.

Come già abbiamo detto nella discussione or ora citata del problema generale dell'equilibrio, l'eliminazione delle quantità $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \delta x_2, \ldots\ldots, \delta z_n$ si può fare col metodo dei moltiplicatori di Lagrange: ripetendo i ragionamenti fatti in quella occasione si troverebbe facilmente che dalla conoscenza di questi moltiplicatori si passa subito a quella delle reazioni di vincolo. Naturalmente non staremo a ripeterci. Osserveremo piuttosto che qui i valori delle reazioni di vincolo dipenderanno non soltanto dalle forze date, ma anche dalle forze d'inerzia, sicchè il loro calcolo effettivo non può poi essere condotto a termine se non dopo effettuata l'integrazione delle equazioni del movimento.

Avvertiamo finalmente, per quanto la cosa sia così evidente che non ce ne dovrebbe esser bisogno, che se il sistema è in quiete (o si muove di moto traslatorio uniforme) sicchè le accelerazioni son tutte nulle, si ritrovano identicamente le equazioni note dell'equilibrio: il che è quanto dire che l'attuale trattazione generale del problema dinamico contiene quella del problema statico come caso particolare.

***

Supponiamo che i vincoli imposti al sistema siano tali che tra gli spostamenti virtuali si possa annoverare una traslazione rigida parallela all'asse delle x; attribuendo un medesimo valore, del resto affatto arbitrario, a tutte le δx ed annullando contemporaneamente tanto le δy che le δz, la (16) diviene:

$$\delta x \,.\, \sum\left(X - m\,\frac{d^2 x}{dt^2}\right) = 0$$

ossia:

$$\sum m\,\frac{d^2 x}{dt^2} = \Sigma\, X$$

Se supponiamo invece che tra gli spostamenti virtuali si possa annoverare una rotazione rigida del sistema attorno allo stesso asse, sicchè si possa porre, per un punto qualunque:

$$\delta x = 0 \qquad \delta y = -\,z\,.\,\delta\theta \qquad \delta z = y\,.\,\delta\theta$$

con $\delta\theta$ eguale per tutti i punti, e del resto arbitrario, la (16) diviene:

$$\delta\theta \,.\, \left[\sum\left(y Z - m y\,\frac{d^2 z}{dt^2}\right) - \sum\left(z Y - m z\,\frac{d^2 y}{dt^2}\right)\right] = 0$$

ossia:

$$\sum m\left(y\,\frac{d^2 z}{dt^2} - z\,\frac{d^2 y}{dt^2}\right) = \Sigma\,(y Z - z Y)$$

Naturalmente quello che si è detto per l'asse delle x vale anche per gli altri due assi coordinati.

Se pertanto un sistema non è soggetto ad alcun vincolo esterno, sicchè qualunque spostamento rigido può essere assunto come spostamento virtuale, dovranno per esso risultare soddisfatte le due seguenti terne di equazioni:

$$\left.\begin{aligned} \sum m\,\frac{d^2 x}{dt^2} &= \Sigma\, X \\ \sum m\,\frac{d^2 y}{dt^2} &= \Sigma\, Y \\ \sum m\,\frac{d^2 z}{dt^2} &= \Sigma\, Z \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

$$\left.\begin{aligned}\sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)&=\Sigma(yZ-zY)\\ \sum m\left(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}\right)&=\Sigma(zX-xZ)\\ \sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)&=\Sigma(xY-yX)\end{aligned}\right\}\qquad(21)$$

Se invece il sistema è soggetto a qualche vincolo esterno, in dipendenza del quale qualche moto rigido riesce interdetto, il nostro ragionamento può ripetersi soltanto a condizione che detto vincolo venga in precedenza rimosso, salva naturalmente l'introduzione della rispettiva reazione di vincolo tra le forze applicate.

In questo senso si può dire che le precedenti equazioni valgono per un sistema affatto qualunque: non bisogna però dimenticare che le sommatorie ai secondi membri vengono allora a contenere le proiezioni sugli assi delle reazioni incognite, con che quelle equazioni, pur mantenendo tutto il loro valore teorico, perdono generalmente la loro utilità pratica.

Soltanto in qualche caso particolarmente semplice riesce ancora possibile servirsene: tipico quello dell'equilibrio, in cui le sei equazioni testè scritte si riducono ovviamente alle ben note sei equazioni fondamentali della statica dei sistemi rigidi.