

CAPITOLO IX

DEFORMAZIONI ANELASTICHE

IX.1 - La prova di trazione. Presa una sbarretta diritta (per precisare, un tondino di acciaio) se ne ancori un'estremità e e si applichi all'altro estremo una forza N di trazione diretta secondo l'asse del tondino. Il dispositivo di carico permetta di variare la forza applicata entro ampi limiti e di misurarne i valori. Fissati due punti P, Q su una generatrice della superficie laterale del tondino, si disponga uno strumento (estensimetro) capace di misurare con elevata sensibilità le variazioni che la distanza l dei due punti subisce durante la prova di carico. Con tale apparecchiatura si potrà costruire un grafico che rappresenti la corrispondenza fra i valori di N e le variazioni δl di l . Si osserva che, se su un certo tratto del tondino si realizza una situazione sufficientemente uniforme, lo allungamento δl deve essere proporzionale alla lunghezza l che è detta *base di misura*. Quindi, per avere indicazioni di carattere generale, converrà riportare in diagramma piuttosto che δl il rapporto $\delta l/l$ che viene detto *dilatazione* e viene indicato con ϵ . D'altra parte, è noto dall'esperienza che la forza N si distribuisce

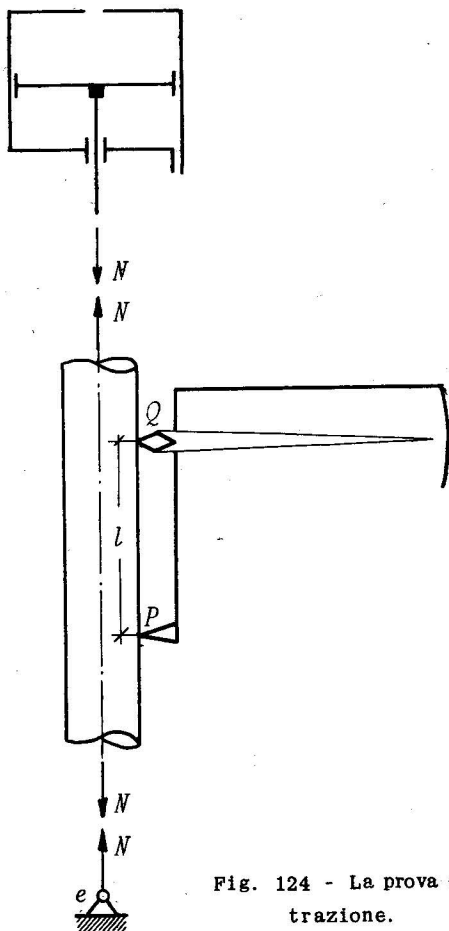


Fig. 124 - La prova di trazione.

uniformemente sull'area A della sezione, ove questa sia sufficientemente lontana dai dispositivi di bloccaggio coi quali sul tondino si esercita la trazione. Appare naturale ritenere che il comportamento di ciascuna particella del materiale debba dipendere dallo stato di sollecitazione a cui essa è sottoposta e non dalla presenza o meno di particelle adiacenti nelle sue stesse condizioni. Allora si può concludere che il comportamento del materiale sarà legato al rapporto N/A che viene indicato con σ e detto *tensione normale*: esso rappresenta la forza agente sulla sezione riferita all'area della medesima. In conclusione, risultati di carattere generale per il materiale in esame si possono presentare in base alla prova in questione deducendone il grafico che dà i valori di σ in funzione di ϵ . In un tratto abbastanza prossimo all'origine il diagramma si presenta rettilineo (fig. 125). Ciò è in accordo con la relazione [43], che in condizioni più generali dà la dilatazione elastica della fibra media di una trave. Le proprietà specifiche del materiale in esame determina-

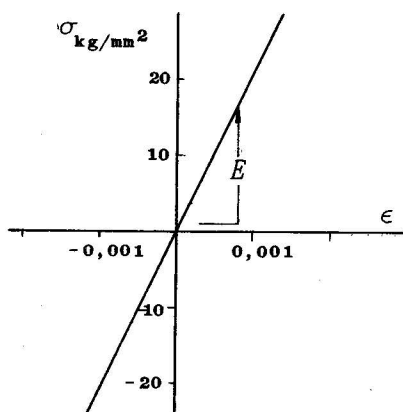


Fig. 125 - Diagramma $\sigma(\epsilon)$ di un acciaio. Tratto elastico.

no la pendenza E (modulo elastico).

Sottoponiamo adesso il tondino d'acciaio a tensioni più elevate di quelle che appaiono nella figura 125. Si osserverà che il diagramma $\sigma(\epsilon)$ (figura 126) si scosta dal suo andamento iniziale rettilineo, mostrando deformazioni crescenti più rapidamente di quanto indica la retta iniziale; esse raggiungono valori di tanto superiori a quelli relativi al tratto rettilineo che questo, nella scala che si deve adottare per rappresentare l'intero

esso rappresenta la forza agente sulla sezione riferita all'area della medesima. In conclusione, risultati di carattere generale per il materiale in esame si possono presentare in base alla prova in questione deducendone il grafico che dà i valori di σ in funzione di ϵ . In un tratto abbastanza prossimo all'origine il diagramma si presenta rettilineo (fig. 125). Ciò è in accordo con la relazione [43], che in condizioni più generali dà la dilatazione elastica della fibra media di una trave. Le proprietà specifiche del materiale in esame determina-

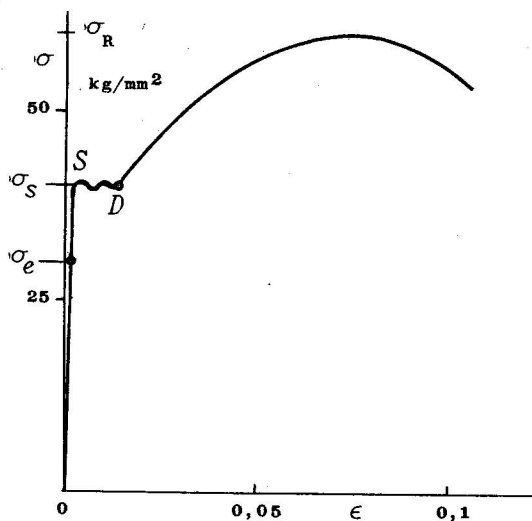


Fig. 126 - Diagramma $\sigma(\epsilon)$ di un acciaio.

diagramma, si confonde con l'asse delle ordinate. Quando si raggiunge un certo valore σ_s di σ detto *tensione di snervamento* (yield point) la deformazione cresce sotto carico pressoché costante, talvolta diminuente in un primo tratto. La tensione riprende ad aumentare da un certo punto D ; la fase che qui ha inizio è detta *incrudimento*. In questa la σ raggiunge un massimo per poi decrescere (*) avvicinandosi la provetta alla rottura. La tensione massima σ_R rappresenta il valore più alto dello sforzo che la provetta può sopportare ed è detto tensione di rottura.

Ogni materiale ha un diagramma caratteristico $\sigma(\epsilon)$. Per gli acciai al carbonio il tratto SD (dove $\sigma \approx \sigma_s$) si presenta tanto più ampio quanto più basso è il tenore di carbonio. Per materiali fragili invece la rottura si produce subito dopo il tratto rettilineo iniziale. Le leghe leggere, ed anche alcuni acciai speciali, presentano una curva $\sigma(\epsilon)$ di tipo continuo, con pendenze gradualmente decrescenti dopo il primo tratto rettilineo. La fig. 127 si riferisce ad un tipo di duralluminio. Nella fig. 127a il diagramma è segnato in scala tale da contenere la curva fino al punto di rottura e quindi il primo tratto non si distingue dall'asse delle ordinate; una breve porzione della stessa curva è riprodotto nella fig. 127b con ascisse ingrandite.

È importante rilevare che, per qualunque materiale, la caratteristica $\sigma(\epsilon)$, sia essa del tipo indicato nella fig. 126 o di quello della fig. 127, non è reversibile: se, secondo lo esempio rappresentato nella fig. 127b, raggiunto il carico corrispondente ad un punto S fuori del primo tratto lineare, si fa diminuire la sollecitazione, il punto rappresentativo discende lungo una linea c di pendenza E . Togliendo il carico si arriva al punto K con una deformazione residua ϵ_p . Caricando di nuovo l'asta, si ripercorre il ramo c e successivamente un arco b che appare come prolungamento dell'arco a .

(*) Occorre tener presente che le tensioni sono ottenute convenzionalmente dividendo N per l'area iniziale della sezione. In realtà nella fase di grandi deformazioni si forma nel provino una strozzatura; riferendo lo sforzo all'area minima della sezione contratta presso la strozzatura, si troverebbero valori di σ continuamente crescenti oltre il punto D fino a rottura. La riduzione di sezione, sempre alquanto localizzata, si accompagna ad una certa disuniformità nelle dilatazioni: ciò rende necessaria una definizione in certa misura convenzionale degli elementi in base ai quali si determinano le dilatazioni da riportare in ascissa sui grafici.

Per i materiali con caratteristica del tipo indicato nella fig.127 manca la fase *SD* di arresto nella legge incrementale del carico che caratterizza la tensione σ_s nel caso

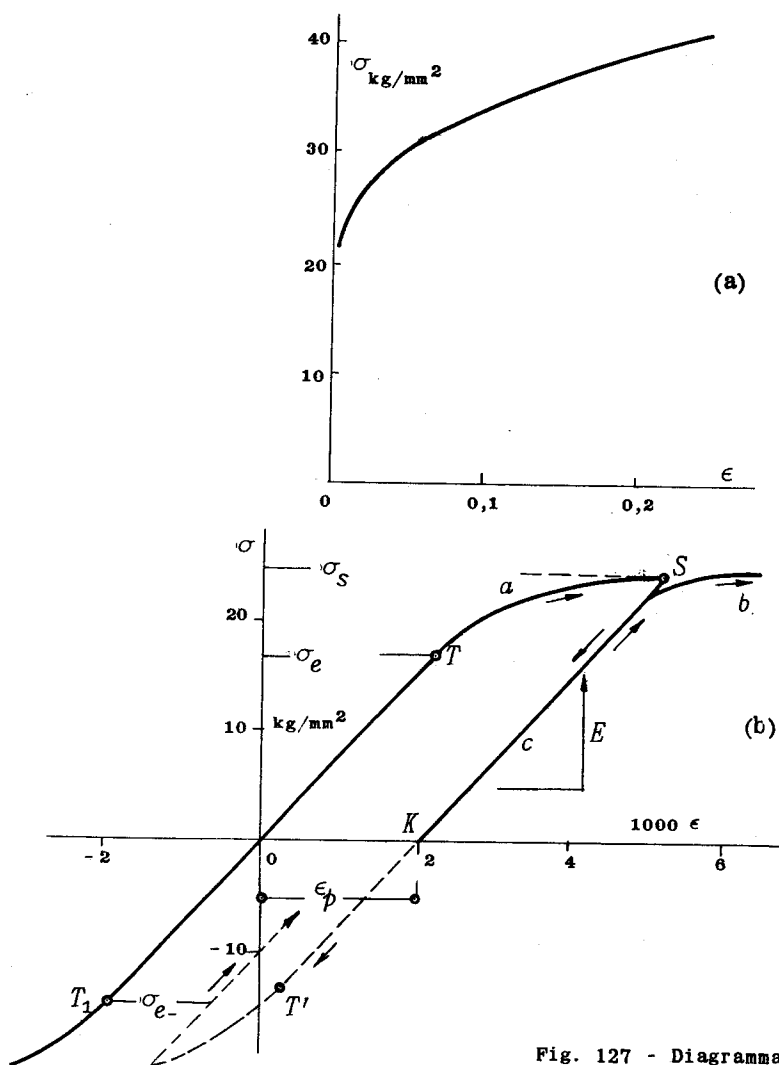


Fig. 127 - Diagramma $\sigma(\epsilon)$ di una lega di alluminio.

della fig.126; perciò, in tali casi, si definisce la tensione di snervamento in base ad un valore, fissato per convenzione, della deformazione residua ϵ_p ; comunemente si assume per σ_s la tensione a cui corrisponde $\epsilon_p = 0,002$ (punto S della curva a).

IX.2 - Deformazioni elastiche e anelastiche. Secondo quanto sopra si e' notato circa gli effetti di una inversione del processo di carico, della deformazione totale ϵ raggiunta in fase di sollecitazioni crescenti, solo la parte σ/E scompare quando si tolga il carico: questa parte si chiama *deformazione elastica*; essa e' legata da relazione di proporzionalita' alla tensione σ di cui segue le variazioni. La differenza $\epsilon_p = \epsilon - \sigma/E$ rappresenta la deformazione *anelastica*. Nel primo tratto della caratteristica (fig.125) il punto rappresentativo segue la medesima caratteristica nelle fasi crescenti come in quelle decrescenti di carico; il materiale allora e' detto *elastico*. Lo stesso avviene a partire dal punto K della fig.127b, lungo il ramo c ; ossia il materiale torna a comportarsi elasticamente dopo aver subito una deformazione anelastica, che permane invariata finche' non siano toccati certi limiti di sollecitazione.

Per un esame piu' completo di questi fenomeni, bisogna determinare il comportamento del materiale a sollecitazioni di segno opposto. Con particolari accorgimenti si puo' sottoporre il provino a sforzi di compressione: i valori di σ e di N sono, in queste condizioni, negativi. Applicando carichi di compressione crescenti da zero, si ottiene dall'altra parte dell'origine un diagramma $\sigma(\epsilon)$ analogo, ma spesso non perfettamente simmetrico, a quello trovato per tensioni positive. Si individua cosi' un certo tratto (TT_1 nella fig.127b) della caratteristica lungo il quale il materiale si comporta elasticamente: esistono due tensioni di segno opposto che indichiamo con σ_e e σ_{e-} dette *limiti di proporzionalita'* tali che, finche' σ si mantiene nell'intervallo $\sigma_e > \sigma > \sigma_{e-}$ sussiste la proporzione $\sigma = E\epsilon$.

Per qualche materiale la corrispondenza fra σ e ϵ e' rappresentata da una caratteristica reversibile ma non rettilinea. Anche un tale materiale viene detto *elastico*, intendendo che l'elasticita' sia caratterizzata dalla coincidenza della legge $\sigma(\epsilon)$ nelle fasi di carico e scarico. Cio' posto si potrebbero definire *limiti di elasticita'*, ossia valori delle tensioni oltre i quali la relazione $\sigma(\epsilon)$ cessa di essere reversibile, distinti dai limiti di proporzionalita'. Tale distinzione, pero', e' superflua poiche' per i materiali da costruzione il diagramma $\sigma(\epsilon)$ cessa di essere rettilineo quando intervengono deformazioni permanenti. Del resto i limiti di elasticita' vengono definiti fissando convenzionalmente la deformazione residua massima ($\epsilon_p = 10^{-4}$ o $\epsilon_p = 10^{-5}$, secondo i regolamenti).

Appare dalla fig.127b che il materiale, dopo subita una

deformazione ϵ_p modifica i suoi limiti elastici. Raggiunta la posizione S , il punto rappresentativo segue in fase di deformazioni decrescenti, una caratteristica lineare fino al punto T' ; questo si trova notevolmente più in alto di T_1 (effetto Bauschinger). D'altra parte il limite elastico superiore risulta alquanto accresciuto. Scendendo oltre il punto T' si nota una variazione della deformazione plastica.

In conclusione: il materiale segue una caratteristica lineare in modo reversibile (ossia con deformazioni anelastiche inferiori ad un limite convenzionale) finché la tensione resta compresa entro i limiti elastici; quando questi vengono superati interviene una deformazione permanente e si determina un nuovo campo elastico, con nuovi limiti di elasticità: la deformazione permanente si mantiene invariata finché il punto rappresentativo resta entro quei limiti.

I fenomeni in questione vengono complicati dal fatto che le deformazioni anelastiche si evolvono nel tempo: cioè avviene specialmente per il calcestruzzo in maturazione, per gli

acciai a temperature elevate e, per certi metalli come l'alluminio puro, anche a temperatura ordinaria. Sotto tensione costante, ad es., la deformazione in questi casi cresce nel tempo. Il fenomeno è detto *pastosità* (creep, fluage); il nome di *plasticità* viene invece attribuito al comportamento anelastico *indipendente dal tempo*.

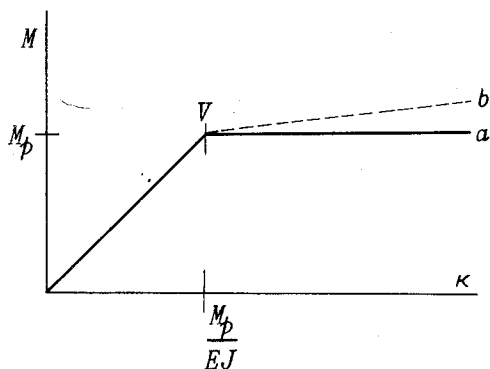


Fig. 128 - Caratteristica $\kappa(M)$ nel caso di plasticità ideale (a) e di incrudimento lineare (b).

La deformazione anelastica del materiale si ripercuote sui valori delle deformazioni degli elementi di trave; le relazio-

ni [43]-[45] e in genere la [134] cessano di valere quando il materiale supera in qualche punto della sezione i limiti d'elasticità. Particolarmente importante nel calcolo delle traviature è la relazione che definisce la curvatura κ . Una vasta serie di indagini viene sviluppata ammettendo che κ sia, come nel campo elastico, indipendente da N e da T e che la sua legge di variazione sia rappresentata dalla spezzata a della fig. 128. In queste condizioni si dice che il materiale presenta *plasticità ideale*: secondo questa schematizzazione il

momento flettente non può superare il valore M_p , che dipende dalle caratteristiche del materiale e della sezione; quando κ supera il valore M_p/EJ il momento flettente si mantiene costante; se κ decresce si ha un ritorno elastico e la curvatura è espressa da $\kappa_p + M/EJ$ con κ_p costante finché M si mantiene nei limiti $M_p > M > -M_p$.

IX.3 - Deformazioni anelastiche nelle travature isostatiche. Finché nella scrittura delle equazioni di equilibrio si trascura la deformazione della struttura e si determinano i dati geometrici che in esse intervengono in base alle dimensioni della struttura prima della deformazione, quelle equazioni mantengono il loro carattere di relazioni lineari fra carichi e sollecitazioni. Anche se la struttura nelle sue deformazioni manifesta proprietà non lineari, sussistendo per quanto riguarda gli sforzi la dipendenza lineare dai carichi, vale, in particolare, la sovrapponibilità degli effetti. Perciò per una struttura staticamente determinata, se si applicano i carichi con una legge assegnata, e se si conoscono le relazioni che, sezione per sezione, definiscono i parametri di deformazione come $\bar{\epsilon}, \kappa, \bar{\gamma}$ in funzione delle caratteristiche di sollecitazione possono senza difficoltà calcolarsi gli spostamenti. Ad esempio, per una travatura reticolare, piana o spaziale, si può calcolare lo spostamento η di un nodo K in una data direzione applicandovi in quella direzione una forza di esplorazione U , determinando gli sforzi corrispondenti N' e infine scrivendo

$$U\eta = \sum \left(\frac{N}{EA} + \bar{\epsilon}_a \right) lN' \quad [153]$$

essendo la somma estesa a tutte le aste, per ciascuna essendo N lo sforzo nella situazione attuale di carico e $\bar{\epsilon}_a$ la dilatazione anelastica. Quest'ultima quantità può essere dovuta a deformazione plastica o ad effetti termici o a qualunque altra causa: occorre solo che la si sappia calcolare in base alla situazione in esame.

Anche il calcolo di robustezza è facile per la struttura isostatica: le capacità di resistenza vengono esaurite quando l'elemento più sollecitato raggiunge il massimo sforzo che esso è atto a sostenere.

IX.4 - L'anelasticita' nelle strutture iperstatiche. Per le strutture iperstatiche il fatto che in un elemento o piu' la relazione fra sollecitazioni e deformazioni perda il carattere di dipendenza lineare biunivoca rende il calcolo di sforzi e deformazioni notevolmente piu' complesso. Pertanto e' importante precisare in quale campo di applicazione tale analisi si renda necessaria.

Se il materiale si comportasse elasticamente fino a valori delle tensioni e deformazioni prossime al punto di rottura, come del resto avviene per materiali fragili, il calcolo statico della struttura sarebbe esaurito dall'analisi elastica: determinata in base a questa analisi la sollecitazione generica S in un elemento strutturale per una condizione di carico della quale sia F una forza rappresentativa, nota la sollecitazione S_R per la quale quell'elemento esaurisce le possibilita' di resistenza, detto λ il piu' basso dei valori che il rapporto S_R/S assume per i vari elementi che costituiscono la struttura, si puo' affermare che la struttura presenta un *coefficiente di sicurezza* λ alla rottura per la condizione di carico considerata. Infatti, per la proporzionalita' che sussiste fra carichi e sforzi nella struttura elastica, moltiplicando per lo stesso λ tutte le forze applicate si raggiungera' la sollecitazione S_R nell'elemento in considerazione mentre in tutti gli altri si avra' $S < S_R$.

Analoghe considerazioni valgono in tutti i casi in cui si debba evitare che i limiti di elasticita' siano superati, come si richiede per le strutture soggette essenzialmente a carichi oscillanti. Invece per le strutture soggette a carichi statici, con elementi capaci di sopportare grandi deformazioni plastiche senza subire deterioramento (costruzioni in acciaio dolce) o ancora per situazioni di carico del tutto eccezionali, interessa particolarmente effettuare il *calcolo a rottura*, ossia determinare la configurazione di carico F_R che porta la costruzione al collasso: si determina cosi' il fattore λ come moltiplicatore del sistema dei carichi invece che delle sollecitazioni. In questo studio il comportamento degli elementi strutturali viene radicalmente schematizzato: per le travature inflesse e' stata generalmente adottata l'ipotesi della plasticita' ideale. Si accennera' ad alcuni risultati a cui questa indagine ha condotto.

IX.5 - Le cerniere plastiche. Si consideri la trave vincolata e caricata come in fig. 129a. Supponendo la trave di sezione costante e di materiale elastico si trova il momento di incastro $-5Fl/27$ e il momento sotto il carico $8Fl/81$. Moltiplicando per un fattore $\chi > 1$ la forza F i momenti crescono in proporzione; nella figura si riportano i rapporti M/χ e quindi lo stesso grafico e vale in tutto il campo elastico. Invece la larghezza $2M_p/\chi$ della striscia entro la quale il diagramma deve stare, va diminuendo al crescere di χ . Per un certo valore χ_1 di χ si verifica la eguaglianza

$$5Fl/27 = M_p/\chi_1$$

Il valore del fattore di carico $\chi_1 = \frac{5.4M_p}{Fl}$ fornito da questa relazione costituisce il limite superiore dei moltiplicatori

per i quali la trave si trova in campo elastico: per $\chi > \chi_1$ il momento nella sezione A si mantiene costante. Il diagramma dei momenti flettenti, con ordinata $M = -M_p$ nella sezione A e ora staticamente determinato; per il carico addizionale $F(\chi - \chi_1)$ la trave si comporta come se fosse appoggiata ai due estremi.

Si noti che in tutte queste situazioni, l'unica sezione nella quale il momento raggiunge il limite M_p è quella d'incastro: se il fenomeno prosegue secondo lo schema adottato vuol

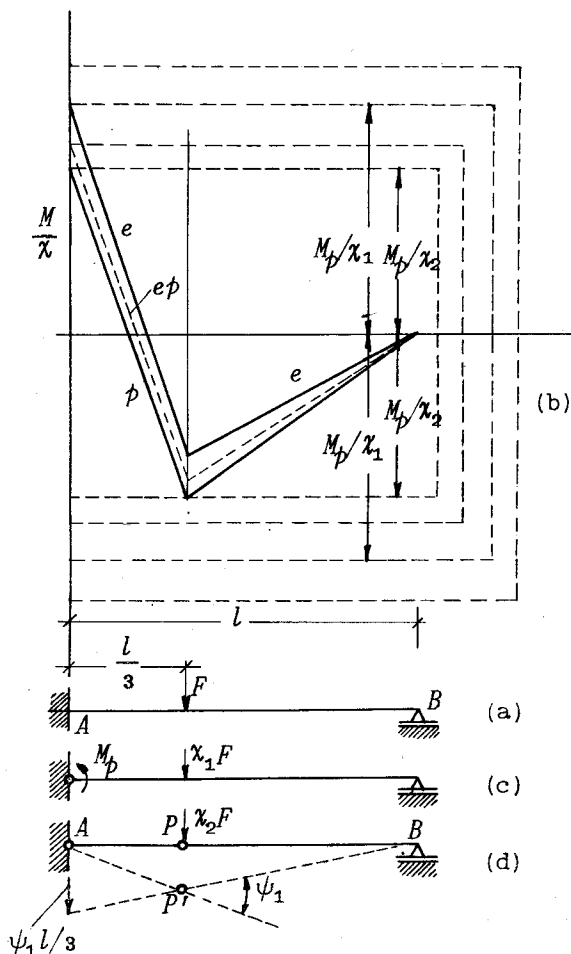


Fig. 129 - (a) Trave con incastro e appoggio: la linea e del diagramma (b) dà i momenti nella trave elastica. (c) Trave con una cerniera plastica: linea ep dei momenti. (d) Meccanismo di collasso plastico: momenti p .

dire che κ raggiunge valori infiniti localmente. Cio' corrisponde alla schematizzazione della fig. 128. Se si ammettesse una legge d'incrudimento (linea b della fig. 128) si troverebbe che la deformazione plastica (come realmente avviene) si distribuisce su una certa zona. Invece la idealizzazione adottata viene a creare nella sezione una concentrazione di deformazioni; essa e' la *cerniera plastica*. Per $M < M_p$ la rotazione ψ e' nulla nella cerniera; con $\psi > 0$ si ha $M \equiv M_p$, con $\psi < 0$ resta $M \equiv -M_p$ (fig. 130). Il diagramma $e\phi$ di M/χ si puo' pensare come ottenuto sommando al grafico e dei momenti elastici un diagramma triangolare

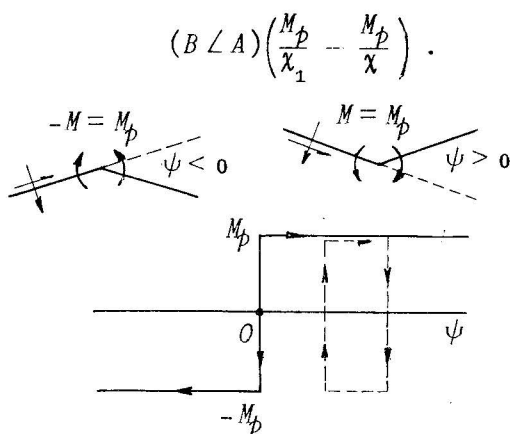


Fig. 130 - Comportamento ideale della cerniera plastica.

Il grafico dei momenti si modifica a questo modo al tempo stesso che la striscia in cui esso deve essere contenuto va restringendosi. Per un certo valore χ_2 di χ la punta positiva dei momenti, sotto la forza F , raggiungera' il margine positivo della striscia: χ_2 e' il massimo valore possibile per il moltiplicatore χ . Una nuova cerniera si e' ora formata in P' (fig. 129d) e la struttura risulta labile rendendo impossibili incrementi di χ sopra χ_2 . Il diagramma finale dei momenti e' rappresentato dalla linea ϕ . Il valore di χ_2 e' ottenuto dall'eguaglianza

$$\frac{M_p}{\chi_2} = \frac{8Fl}{81} + \frac{2}{3} \left(\frac{M_p}{\chi_1} - \frac{M_p}{\chi_2} \right)$$

che da'

$$\chi_2 = 7,5 M_p / Fl$$

Si puo' giungere al medesimo risultato facendo uso del-

l'equazione degli spostamenti virtuali. Si assume come sistema *a* il complesso di forze e reazioni relativo alla situazione limite e come sistema *b* gli spostamenti del moto rigido elementare che il meccanismo della fig. 129d consente. Detta ψ_1 la rotazione relativa dei due pezzi che si articolano in P' sarà $2\psi_1/3$ la rotazione in A e $2\psi_1 l/9$ la freccia sotto il carico. Per l'equazione $L_e = 0$ si ha

$$\chi_2 F \frac{2\psi_1 l}{9} - \psi_1 M_p - \frac{2}{3} \psi_1 M_p = 0 \quad [154]$$

con la quale si ritrovano i risultati sopra indicati.

E' importante calcolare le frecce della trave nella fase antecedente al collasso. Nella fig. 131 e' indicato un conveniente sistema di esplorazione e sono riportati i momenti sulla trave. In base ai risultati del calcolo condotto mediante l'equazione dei lavori

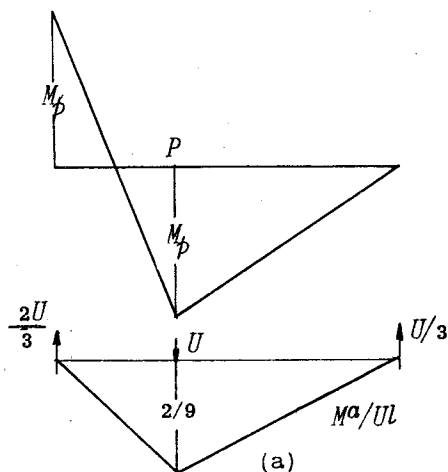


Fig. 131 - Momenti sulla trave della fig. 129d. (a) Sistema di esplorazione per il calcolo della freccia in P .

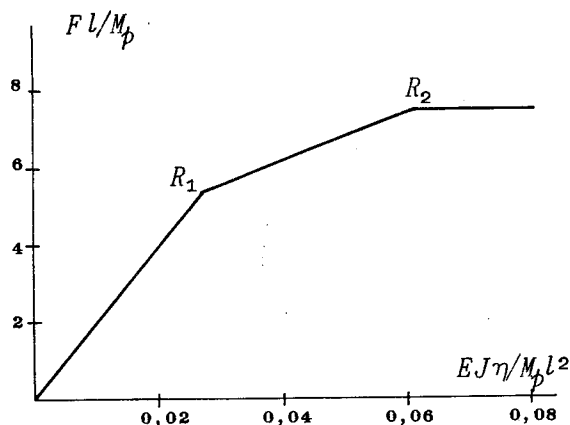


Fig. 132 - Diagramma deformazioni-carichi per la trave della fig. 129d.

(che da', per $\chi = \chi_1$, $\eta = 5M_p l^2 / 81EJ$) si ottiene il diagramma della fig. 132. Il punto R_1 corrisponde al moltiplicatore

$\chi = \chi_1$ in corrispondenza del quale cessa la fase elastica; il punto R_2 corrisponde all'inizio del collasso, col moltiplicatore χ_2 .

IX.6 - Il collasso plastico. L'esempio sopra svolto mostra l'evoluzione del processo di deformazione plastica, fino al collasso della struttura. Cerniere plastiche si vanno costituendo sotto i carichi crescenti, nei punti in cui i momenti raggiungono il limite locale M_p . Quando il numero di queste è tale da rendere la struttura labile, si raggiunge il collasso. Una struttura h volte iperstatica è resa isostatica dalla formazione di h cerniere; se queste sono in numero di $h+1$, la struttura si trasforma in un meccanismo. Se si trattasse delle usuali cerniere prive d'attrito, nella configurazione finale la struttura sarebbe incapace di sostenere alcun carico; siccome però le cerniere reagiscono qui con momenti noti, resta definito il moltiplicatore dei carichi, per la situazione finale. Occorre qui osservare che non è necessario che si formino tutte le $h+1$ cerniere perché la struttura



Fig. 133 - Meccanismo di collasso plastico parziale.

h volte iperstatica ceda: si può verificare anche un collasso parziale, con numero minore di cerniere plastiche. Si consideri, ad es., una trave continua (figura 133): basta che si costituiscano tre cerniere in

una campata perché si produca il collasso. Si è visto inoltre dalla [154] che la situazione finale di carico può essere direttamente determinata applicando al sistema nello stadio finale l'equazione degli spostamenti virtuali; allo stesso risultato si potrebbe anche giungere con considerazioni dirette di equilibrio.

Per il calcolo del fattore χ di collasso si richiede che siano note le posizioni delle cerniere, ossia che si conosca il *meccanismo di collasso*. Se, pur senza aver calcolato il diagramma dei momenti flettenti relativo alla struttura elastica, si sa che esso presenta punti salienti in $h+1$ sezioni, si collocheranno in queste le cerniere plastiche. Spesso invece l'ubicazione delle cerniere non è prevedibile a priori: questo è il caso della trave della fig. 129 per la cerniera interna alla campata quando il carico sia distribuito su ampio tratto. Per superare queste difficoltà sono stati ideati vari procedimenti i quali tutti hanno la finalità di permettere il

calcolo del moltiplicatore di collasso evitando che si debba seguire l'intero processo nel suo sviluppo. In sostanza si tratta di effettuare dei tentativi: per ogni presunto meccanismo di collasso si potrà calcolare il relativo moltiplicatore. Un importante teorema assicura che il fattore effettivo di collasso è il più piccolo fra quelli forniti da tutti i cinematismi in cui possa trasformarsi la struttura fissando le posizioni delle cerniere plastiche. Infatti, sia χ_t il moltiplicatore ottenuto dal calcolo di tentativo, χ quello vero, sia M_t il momento nella generica cerniera plastica del meccanismo presunto, M il momento nella medesima sezione per il sistema effettivo, ψ_t sia la rotazione relativa nella cerniera stessa e η_t la freccia sotto il carico F per il meccanismo presunto. Si scrivono dunque dall'equazione degli spostamenti virtuali le due relazioni

$$\sum M_t \psi_t = \chi_t \sum F \eta_t \quad , \quad \frac{\chi_t}{\chi} \sum M \psi_t = \chi_t \sum F \eta_t \quad [155], [156]$$

La prima è la condizione d'equilibrio con la quale si determina χ_t , la seconda è ottenuta moltiplicando per χ_t/χ la analoga relazione che deve sussistere per i momenti reali poiché essi sono in equilibrio coi carichi χF . Le somme a primo membro si estendono a tutte le cerniere plastiche del meccanismo presunto, quelle a secondo membro a tutti i carichi. Sottraendo membro a membro si ha

$$\sum \left(M_t - \frac{\chi_t}{\chi} M \right) \psi_t = 0 \quad [157]$$

I prodotti $\psi_t M_t$ devono essere tutti positivi, poiché momento e rotazione relativa hanno ugual segno in ogni cerniera plastica (fig. 130). D'altra parte $|M_t| \geq |M|$ perché i momenti nelle cerniere presunte sono uguali ai limiti plastici che i momenti M non possono superare. Quindi, se fosse $\chi_t < \chi$ verrebbe ad essere necessariamente positivo ogni addendo della [157] e l'eguaglianza non potrebbe sussistere; perciò deve essere $\chi \leq \chi_t$ (teorema del minimo fattore di collasso plastico).

Dopo aver fissato un meccanismo di collasso, è possibile assicurarsi se questo sia o no quello effettivo. Basta determinare i momenti flettenti M_t ad esso corrispondenti: se in qualche sezione è $|M_t| > M_p$, il meccanismo fissato non è quello vero e perciò si deve procedere ad un nuovo tentativo. Il calcolo fatto può servire a fornire un limite inferiore per χ (il limite superiore essendo χ_t). Si calcolerà il valore mas-

simo r_m del rapporto $|M_t|/M_p$ sulle varie sezioni: il teorema del massimo fattore di collasso plastico assicura che $\chi \geq \chi_t/r_m$.

Il secondo teorema menzionato afferma che qualunque distribuzione di momenti M_s che verifichi le condizioni di equilibrio con carichi $\chi_s F$ senza superare in alcuna sezione il momento limite, fornisce un moltiplicatore $\chi_s \leq \chi$. Infatti, assumendo come spostamenti virtuali quelli effettivi η con rotazioni ψ nelle cerniere plastiche, si hanno le due equazioni di equilibrio

$$\Sigma M\psi = \chi \Sigma F\eta, \quad \frac{\chi}{\chi_s} \Sigma M_s \psi = \chi \Sigma F\eta$$

La seconda di queste e' ricavata moltiplicando per χ/χ_s l'equazione di equilibrio per i momenti M_s . Per differenza si ha

$$\Sigma \left(M - \frac{\chi}{\chi_s} M_s \right) \psi = 0 \quad [158]$$

I prodotti $M\psi$ debbono essere positivi, come sopra; d'altra parte $|M| \geq |M_s|$ poiche' in nessuna sezione i momenti M_s superano i limiti ammessi, mentre nelle cerniere e' $|M| = M_p$. La relazione [158] sarebbe quindi assurda se fosse $\chi < \chi_s$; quindi e' $\chi \geq \chi_s$.

I momenti M_t/r_m fanno equilibrio ai carichi $\chi_t F/r_m$ senza superare i limiti locali; quindi e' vero che χ_t/r_m costituisce un limite inferiore per χ . Dunque da uno stesso calcolo di tentativo si ricavano due valori fra quali deve essere compreso quello vero χ . Qualora invece, tracciati i diagrammi dei momenti M_t si constati che in nessuna sezione si supera M_p , il valore χ_t , dovendo al tempo stesso soddisfare alla condizione $\chi_t \geq \chi$ per il primo teorema sopra enunciato e alla $\chi_t \leq \chi$ per il secondo, dovra' coincidere col moltiplicatore vero.

Malgrado l'aiuto dei due teoremi, il calcolo del fattore χ di collasso si puo' presentare alquanto laborioso. Un ostacolo alla esecuzione del controllo di r_m si incontra particolarmente con i meccanismi di collasso parziale; questi non rendono staticamente determinato lo schema strutturale e quindi richiederebbero la risoluzione di una struttura iperstatica. Vari procedimenti insegnano ad aggirare questi ostacoli (*).

(*) Ved., ad es., Neal - Plastic Methods of Structural Analysis - Chapman Hall, 1956.

IX.7 - Esempio di calcolo del collasso plastico. Si consideri il telaio quadrato, con sezioni tutte uguali, caricato come mostra la fig.134, con $F = 2H$. I punti salienti del diagramma dei momenti sono quelli marcati da C_1 a C_8 sullo schema. La struttura, essendo tre volte iperstatica, acquisterebbe $6 - 3 = 3$ gradi di libert  se s'inserisse una cerniera in ciascuno dei punti C . Quindi potranno definirsi tre meccanismi indipendenti, ad es., quelli presentati nella fig.134 a,b,c. Adottando il primo di questi, dalla [155] si ottiene (*)

$$4M_p\psi = 2\chi Ha\psi \quad [159]$$

Tracciamo ora il diagramma dei momenti flettenti per il lato 1-3 con $\chi F = 4M_p/a$, secondo la [159], col metodo usuale di sovrapposizione (fig.33). Si nota che nel punto di mezzo e' $M_t = -2M_p$ (fig.134e). Poich  viene superato il limite ammesso, il meccanismo scelto non e' quello vero. I meccanismi della fig.134 b,c danno

$$4M_p\psi = \chi Fa\psi \quad [160]$$

fornendo lo stesso fattore del primo: anche essi sono dunque da scartare. Si dovranno costituire dei meccanismi per *combinazione*, associando quelli basici in modo da elidere qualcuna delle cerniere. Con lo schema della fig.134d si ottiene

$$4M_p\psi = \chi (F + H)a\psi \quad [161]$$

Il valore $\chi = 8M_p/3aF$ che da qui si ricava costituisce il piu' piccolo dei moltiplicatori trovati; ed e' facile controllare che i momenti corrispondenti stanno dappertutto entro i limiti prescritti (fig.134f). Quindi e' questo il moltiplicatore che per $F = 2H$ definisce la situazione di collasso plastico della struttura.

Per una visione piu' completa del fenomeno, si supponga che le forze F, H siano fissate a piacere indipendentemente. Nel piano di coordinate $\chi H, \chi F$ ogni retta per l'origine corrisponde ad un assegnato rapporto F/H ; variando il fattore χ il punto rappresentativo si muove sulla retta stessa. Una rappresentazione in coordinate adimensionali e' indicata nella fig.134g.

(*) Si noti che nella scrittura dell'equazione dei lavori non occorre porre attenzione ai versi di ψ perche' i prodotti $M\psi$ hanno tutti lo stesso segno. Qui l'equazione ha un contenuto fisico: gli spostamenti virtuali sono quelli del meccanismo supposto, il lavoro calcolato corrisponde alla dissipazione di energia nella deformazione plastica presunta.

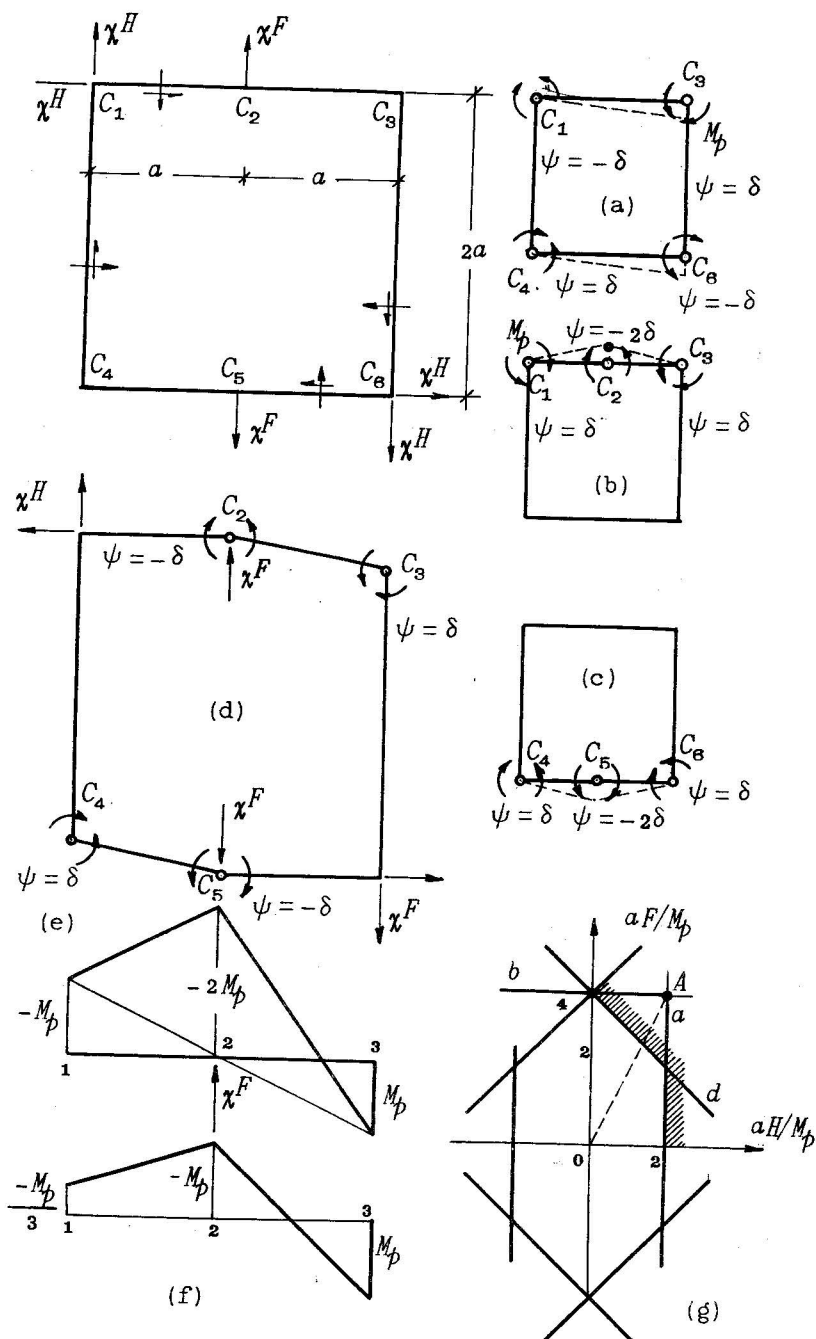


Fig. 134 - Collasso plastico di un riquadro. (a) - (d) Meccanismi di collasso. (e) - (f) Diagrammi dei momenti sulla trave superiore relativi ai meccanismi (a), (d). (g) Grafico del confine di collasso plastico.

Le equazioni [159], [160] e [161] corrispondono rispettivamente alla verticale a , alla orizzontale b e alla retta d , inclinata a 45° : le rette simmetriche rispetto agli assi valgono per forze e deformazioni di verso opposto. Segnando le rette corrispondenti ai vari meccanismi di collasso si viene ad individuare intorno all'origine una figura (un esagono nel caso in esame) il cui contorno rappresenta le situazioni per le quali la struttura viene portata al limite di collasso. Nel caso considerato, per $F = 2H$, spostandosi sulla linea a tratto, prima di raggiungere in A la situazione trovata in base alle [159] e [160], si riscontra il collasso in corrispondenza della intersezione con la retta d . Invece per $F \leq H$ il meccanismo di collasso e' quello della fig. 134a.

IX.8 - Collasso incrementale. Per la stessa struttura della fig. 134 si rappresentano le condizioni di carico nella figura 135 con le medesime coordinate della fig. 134d. Si carica

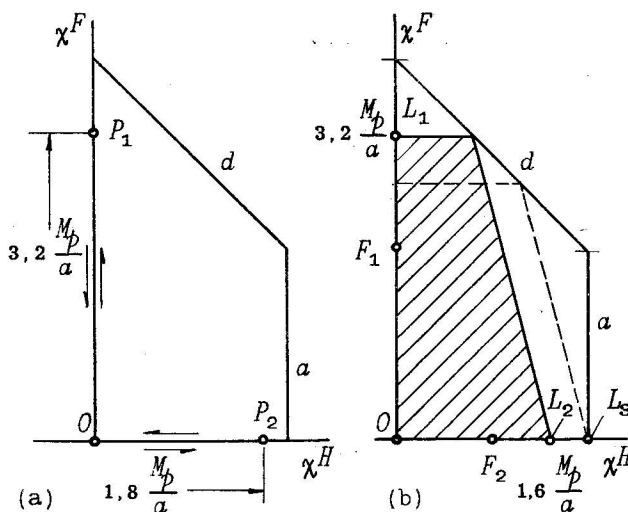


Fig. 135 - (a) Alternanze di carico che conducono al collasso incrementale.
(b) Regione di assestamento.

anzitutto la struttura con le forze $\chi F = 3.2 M_p/a$, come indicato dal punto P_1 . Se la struttura si comportasse elasticamente, secondo quanto indica la fig. 136b, nel punto C_2 si raggiungerebbe il momento $-1.2 M_p$. La situazione effettiva si può pensare realizzata con cerniere in C_2 e C_5 , quando si esercitino attraverso queste i momenti elastici $-1.2 M_p$ e i

momenti di scarico plastico $0,2M_p$ rappresentati nella fig. 137a. Togliendo il carico, i momenti elastici scompaiono, mentre permane lo stato di coazione presentato nella figura 137a.

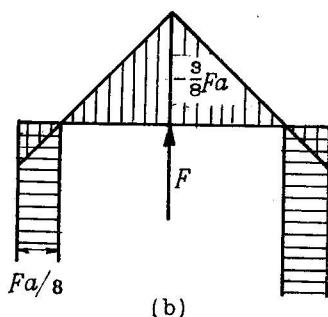
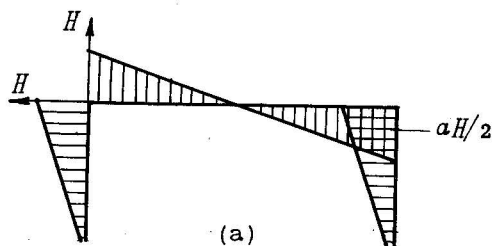


Fig. 136 - Momenti elastici sul telaio della fig. 134 soggetto alle forze H e F .

Si torni ad applicare ora il momento elastico in C_2 raggiungebbe il valore $-1,1M_p$. Quindi si dovrà considerare uno scarico come quello della fig. 137a con fattore $0,1M_p$. Togliendo il carico questi momenti restano e sommandosi ai preesistenti lasciano un residuo $0,2M_p$. Si ritorna quindi alla medesima situazione che precedeva l'applicazione del carico P_2 . Il processo si svolge in forma di ciclo chiuso per quanto riguarda i valori dei momenti. La situazione peraltro appare grave se si considerano le deformazioni che si accompagnano a questi cicli. Il processo relativo alle cerniere C_2 e C_3 è rappresentato nella fig. 138. L'applicazione del ca-

Si applichino ora i carichi corrispondenti al punto P_2 della fig. 135a, e cioè si ponga $\chi H = 1,8M_p/a$ e $F = 0$. I momenti elastici hanno la distribuzione della fig. 136a. Nel vertice C_3 si avrebbe $M = 0,9M_p$, inferiore al limite plastico, se non esistessero i momenti residui dati da $0,2M_p$. Quindi oltre ai momenti elastici con $M = 1,1M_p$ in C_3 si dovranno considerare quelli di scarico plastico indicati nella fig. 137b. Tolto il secondo carico questi resteranno: sommandosi ai preesistenti danno un momento $0,1M_p$ su tutte le sezioni.

carico del punto P_1 . Il mo-

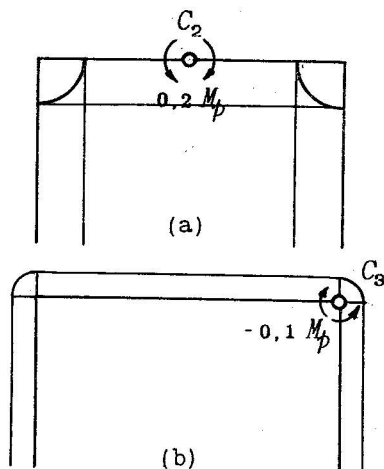


Fig. 137 - Momenti flettenti di scarico plastico.

rico indicato in P_1 porta al punto 1; la soppressione del carico porta al punto 2; l'applicazione del carico indicato in P_2 porta al punto 3, la soppressione al punto carico al punto 4, con variazione di momento ma non di deformazione.

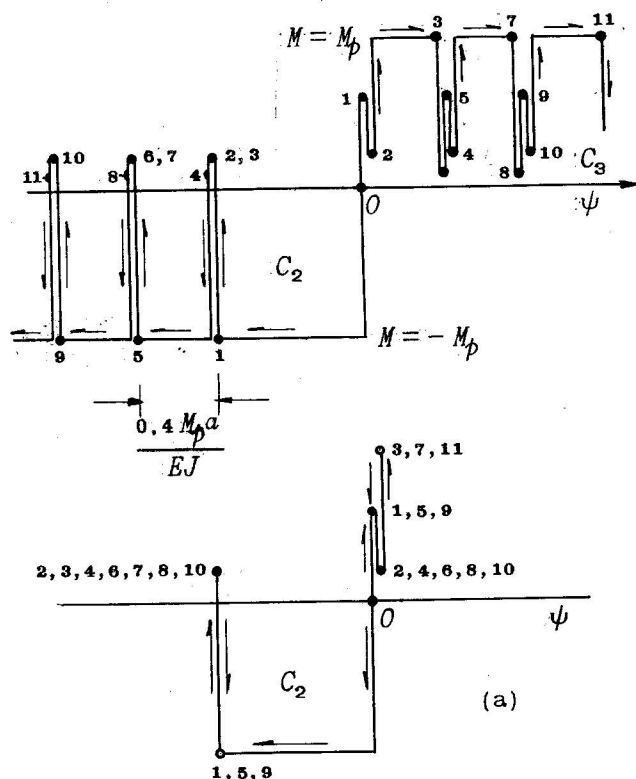


Fig. 138 - Evoluzione dei momenti e delle deformazioni plastiche nelle cerniere C_2, C_3 in collasso incrementale: 1 carico P_1 , 2 scarico, 3 carico P_2 , 4 scarico, 5 carico P_1 , 6 scarico, 7 carico P_2 , 8 scarico, 9 carico P_1 , 10 scarico, 11 carico P_2 . (a) Assestamento plastico.

Applicando il carico relativo a P_1 si ha una deformazione plastica pari alla metà di quella al primo ciclo e si giunge al punto 5: da questo punto il processo prosegue ripetendo quanto si è indicato a partire dal punto 1. E' questo un tipo particolare di collasso detto *incrementale* in quanto la struttura subisce incrementi successivi di deformazione plastica. E' importante rilevare che questo cedimento si verifica applicando sistemi di carico situati all'interno del confine di collasso plastico.

Supponiamo ora (fig. 135b) che, dopo applicate e tolte le

forze $\chi F = 3,2M_p/a$ (punto L_1) si applichi il complesso di carico $\chi H = 1,6M_p/a$ (punto L_2); con ciò si produce in C_3 un momento $0,8M_p$ che sommandosi ai momenti residui $0,2M_p$ del primo carico dà un sistema di deformazioni privo di componenti plastiche. Quando questo secondo carico viene tolto resta in tutte le sezioni il momento residuo $0,2M_p$; la successiva applicazione del primo carico, aggiunge in C_2 il momento dato da $-1,2M_p$: l'intera struttura resta ancora in campo elastico. In tali condizioni si dice che la travatura ha raggiunto una condizione di *assestamento plastico*: dopo una prima deformazione plastica che ha creato nella struttura una distribuzione opportuna di momenti residui, nei successivi cicli di carico il comportamento è del tutto elastico (fig.138a). Si trova facilmente che, coi momenti residui calcolati, si può applicare qualsiasi condizione di carico rappresentata da un punto contenuto nell'area tratteggiata sulla fig.135b senza che in alcuna sezione il materiale oltrepassi il limite di plasticità. Se si applica un sistema di carichi che porti fuori di detta regione si alterano i momenti residui e quindi si modifica il contorno della *regione di assestamento*. Ad es., nel caso della fig.135b applicando il carico rappresentato dal punto L_3 si annullano i momenti residui ed il contorno della regione assume la forma segnata a tratto.

Si presenta dunque il quesito: dato un gruppo di configurazioni di carico $F_1, F_2, \dots, F_n$, ciascuna costituita da un sistema di forze di assegnati valori, determinare il massimo valore χ_m di χ tale che applicando le condizioni $\chi_m F_1, \chi_m F_2, \dots, \chi_m F_n$ in successione arbitraria i momenti nella travatura restino ovunque in campo elastico. Si tratta di determinare momenti residui m tali che sommati ai momenti corrispondenti secondo la teoria elastica ad uno qualunque dei sistemi $\chi_m F_1, \dots, \chi_m F_n$ diano momenti che non superino M_p in valore assoluto. In ciascuna sezione si potrà determinare il momento massimo $\mathcal{M}_m$ e il minimo $\mathcal{M}_n$ fra quelli prodotti dai diversi sistemi di carico F . La situazione limite sarà raggiunta quando si verifichi la condizione

$$m + \chi \mathcal{M}_m = M_p \quad \text{ovvero} \quad m + \chi \mathcal{M}_n = -M_p \quad [162]$$

in un numero sufficiente di sezioni per trasformare la struttura in un meccanismo, essendo in tutte le altre $m + \chi \mathcal{M}_m \leq M_p$, $m + \chi \mathcal{M}_n \geq -M_p$. Il *teorema dell'assestamento plastico* afferma che se si trova per i momenti m una distribuzione con la quale le condizioni espresse sono verificate con un certo fattore χ_m , questo rappresenta il fattore di collasso incrementale: ossia con fattore $\chi > \chi_m$ con certe successioni

di carico χF la struttura subisce deformazioni plastiche crescenti illimitatamente. Viceversa, con $\chi \leq \chi_m$, applicando in qualunque successione i carichi χF , la struttura, dopo una fase di deformazioni plastiche si *assesterà*, ossia troverà un assetto di coazione stabile.

I punti di contatto fra la ricerca del coefficiente χ del collasso plastico e quello del collasso incrementale appaiono evidenti se si considera che, sommando ad una distribuzione di momenti residui i momenti corrispondenti ad una situazione di carico, con la condizione [162] verificata presso le cerniere che trasformano la struttura in meccanismo, si ha una distribuzione identica a quella considerata nello studio del collasso plastico: distribuzione staticamente determinata, con la eccezione dei casi di collasso parziale. I momenti m sono in sostanza una combinazione di sistemi supplementari (§ V.2). La presente questione differisce dalla precedente in quanto intervengono diversi sistemi di carico, dei quali sarà da scegliere sezione per sezione il più gravoso. Tale differenza si traduce in una maggiore complessità del calcolo preliminare, qui sempre iperstatico; peraltro nei due casi sono adottabili i medesimi procedimenti di risoluzione.

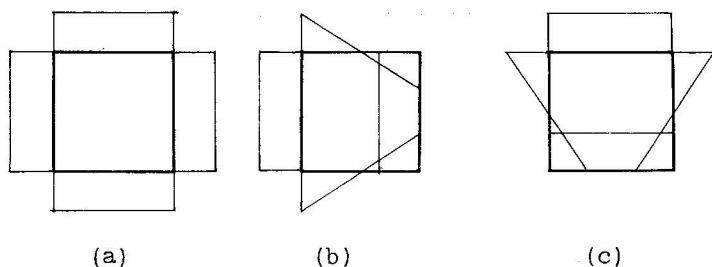


Fig. 139 - Sistemi supplementari per il telaio quadrato.

Ci riferiamo, ad es., al problema la cui soluzione è presentata nella fig. 135: le condizioni di carico sono costituite da $F = 2M_p/a$, $H = 0$ (punto F_1 , fig. 135b) e da $F = 0$, $H = M_p/a$ (punto F_2 , fig. 135b). I momenti m sono ottenibili per combinazione dei sistemi supplementari della fig. 139. Siccome struttura e carichi presentano simmetria centrale (sicché, con una rotazione di 180° intorno al centro del riquadro, la figura si ricopre) sono da scartare i sistemi della figura 139b,c che presentano momenti uguali e contrari nei punti diametralmente opposti; perciò m è costante in tutto il riquadro. Tralasciando i tentativi, ci soffermiamo sul meccanismo della fig. 134d. Nel punto C_2 è $M_n = -0.75M_p$, corrispon-

dente alla condizione F_1 ; nel punto C_3 e' $\mathfrak{M}_m = 0,5M_p$, corrispondente alla condizione F_2 . Scrivendo le [162] per le due cerniere si ha

$$m - 0,75\chi M_p = -M_p \quad , \quad m + 0,5\chi M_p = M_p$$

e risolvendo

$$\chi = 1,6 \quad , \quad m = 0,2M_p$$

come gia' trovato. Come controllo si calcolano i momenti in C

$$\mathfrak{M}_n = m - 0,5\chi M_p = -0,6M_p > -M_p \quad ,$$

$$\mathfrak{M}_m = m + 0,25\chi M_p = 0,6M_p < M_p$$

Si ha cosi' conferma della soluzione.

Si noti che estendendo l'analisi della fig. 135b ai quadranti adiacenti si trovano lati che corrispondono a deforma-

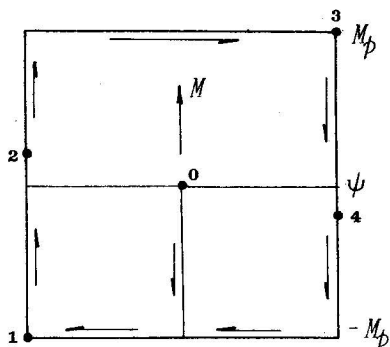


Fig. 140 - Momenti e deformazioni plastiche nella cerniera C_2 : 1 carico P_1 , 2 scarico, 3 carico invertito, 4 scarico. Il ciclo si riprende dal punto 1 sotto il carico P_1 .

zioni plastiche delle stesse cerniere di segno opposto a quelle che qui si producono. Con sistemi di carichi che obblighino questi lati a spostarsi ad ogni ciclo si avrebbero deformazioni opposte in ogni alternanza. Si produrrebbe un diagramma chiuso di funzionamento della cerniera come quello presentato nella figura 140. Questo e' il fenomeno di *plasticizzazione alternata*; per quanto esso non appaia pericoloso, poiche' le deformazioni si mantengono finite, esso e' atto a produrre la rottura di qualsiasi materiale per fenomeno di fatica.