

## CAPITOLO VII

### TRAVATURE SPAZIALI

**VII.1 - Caratteristiche di sollecitazione.** Si considereranno ora le travature nella loro forma generale: aggregati di travi con sezione asimmetrica e linea d'asse sghemba. Con le eccezioni contemplate nelle figg. 2 e 3, si ammette che le sollecitazioni siano calcolabili con la teoria delle travi: sezione per sezione si dovranno determinare le sei caratteristiche di sollecitazione; da queste la teoria anzidetta permette di calcolare le tensioni sulla sezione secondo relazioni che saranno considerate nella Parte seguente. Inoltre, da quelle sei caratteristiche si determina secondo quella teoria la deformazione elastica di ciascun tronco elementare di trave. Per il calcolo delle deformazioni della travatura basterà dare la espressione del lavoro interno  $L_i^{ab}$  riferito all'elemento  $dZ$  di linea d'asse in funzione delle caratteristiche di sollecitazione.

A definire l'azione risultante a cui una sezione generica è sottoposta basterebbe, ad esempio, fissare tre assi ortogonali a piacere e calcolare le proiezioni su questi della risultante e i momenti risultanti rispetto ai medesimi assi. La scelta di un particolare riferimento piuttosto che altri, per la definizione delle sei caratteristiche di sollecitazione viene fatta con il criterio di rendere più spedito il calcolo delle tensioni e, soprattutto, quello delle deformazioni. Tornando all'espressione [48] di  $L_i$ , possiamo renderci conto delle conseguenze della scelta. Se invece di calcolare il momento  $M$  rispetto al baricentro  $G$  della sezione, si introducesse il momento  $M_u$  rispetto ad un asse  $u$  passante alla distanza  $y = h$  da  $G$ , essendo

$$M^a M^b = (M_u^a + hN^a)(M_u^b + hN^b)$$

nell'espressione di  $L_i$ , oltre agli integrali contenenti i prodotti  $M_u^a M_u^b$ ,  $N^a N^b$  comparirebbe un integrale contenente i prodotti  $M_u^a N^b$  a complicare sensibilmente il calcolo delle deformazioni. In particolare, la rotazione  $\varphi$  delle sezioni verrebbe a dipendere non solo da  $M$  ma anche da  $N$ . Il riferi-

mento baricentrico e' l'unico che, supposto il materiale elastico, omogeneo e isotropo, permetta di evitare queste complicazioni, cioe' elimini il concatenamento fra momento flettente e sforzo normale nei loro effetti sulla deformazione.

Nel caso piu' generale, nell'espressione di  $L_i$  entrano le sei caratteristiche di sollecitazione. L'espressione piu' semplice che la teoria delle travi possa dare e' quella nella quale le sei caratteristiche entrino separatamente in altrettanti addendi:

$$L_i = \int \left( \frac{N^a N^b}{EA} + \frac{T_{x'}^a T_{x'}^b}{GA_{x'}} + \frac{T_{y'}^a T_{y'}^b}{GA_{y'}} + \frac{M_x^a M_x^b}{EJ_x} + \frac{M_y^a M_y^b}{EJ_y} + \frac{M_t^a M_t^b}{GJ_t} \right) dZ \quad [134]$$

L'integrazione si estende, al solito, all'intera linea d'asse. L'assenza di prodotti misti nell'integrando indica che ciascuna delle caratteristiche di sollecitazione  $N, T_{x'}, T_{y'}, M_x, M_y, M_t$  produce nell'elemento di trave  $dZ$  una deformazione per la quale essa soltanto lavora e nessuna delle altre.

L'addendo  $N^a N^b / EA$  e' gia' noto dall'esame delle situazioni simmetriche (Cap. IV).

Nei due seguenti figurano le componenti su due assi ortogonali  $x', y'$  della forza tagliante risultante che sollecita la sezione. Tali direzioni sono stabilite nel piano della sezione in modo da evitare il concatenamento fra  $T_{x'}$  e  $T_{y'}$ , ossia da eliminare i termini del tipo  $T_{x'} T_{y'}$ . Nei denominatori figurano  $A_{x'}, A_{y'}$ , caratteristiche geometriche della sezione aventi dimensioni di un'area.

Il 4° e il 5° termine dell'integrando in parentesi contengono i momenti flettenti  $M_x$  e  $M_y$  (\*), momenti risultanti rispetto a due assi baricentrici che siano principali d'inerzia della sezione, ossia tali che risulti nullo il momento centrifugo

$$J_{xy} = \int xy \, dA$$

l'integrale essendo esteso a tutti gli elementi  $dA$  che costituiscono l'area della sezione. Figurano nei denominatori i momenti d'inerzia

$$J_x = \int y^2 \, dA \quad , \quad J_y = \int x^2 \, dA$$

---

(\*) Nei capitoli precedenti il momento  $M_x$  e il momento d'inerzia  $J_x$  sono stati indicati senza l'indice  $x$ , che qui deve apporsi ad evitare confusione con le quantita' relative all'altro asse.

Se si fissassero assi  $x, y$  non principali, l'espressione di  $L_t$  conterrebbe nella funzione integranda il prodotto  $M_x M_y$ . Se gli assi non fossero baricentrici comparirebbero anche termini del tipo  $M_x N, M_y N$ .

L'ultimo addendo della parentesi contiene i momenti *torcenti*  $M_t$ , ossia i momenti delle forze agenti sulla sezione calcolati rispetto ad un asse normale ad essa, definito in modo da evitare il concatenamento fra momento torcente e taglio. Il punto per il quale deve passare l'asse di riferimento del momento torcente affinché l'espressione [134] non contenga termini del tipo  $M_t T_x, M_t T_y$  e' detto *centro di taglio*.

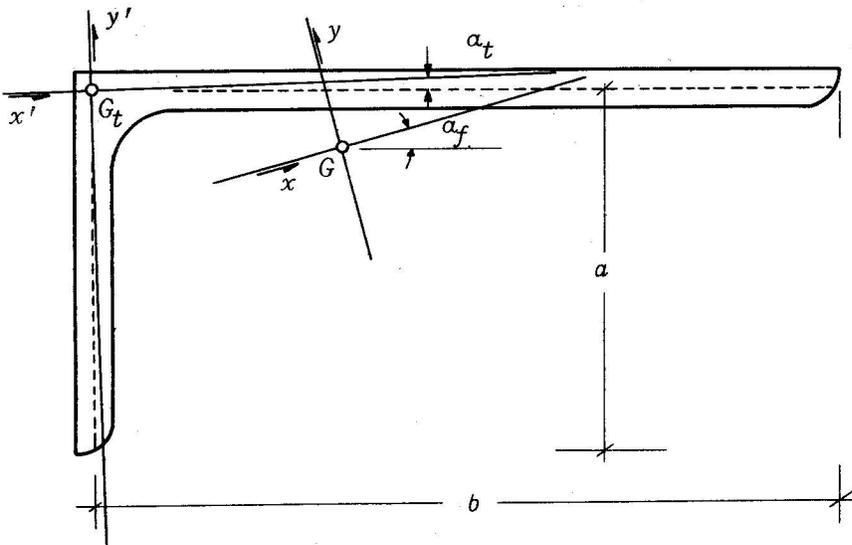


Fig. 109 - Assi di riferimento per un cantonale a lati diseguali. Con precisione tanto maggiore quanto piu' piccolo e' lo spessore dei lati rispetto alla loro lunghezza si puo' ammettere:

- che il centro di taglio e' situato nell'intersezione delle linee medie dei due lati
- che gli assi principali sono rotati rispetto ai lati dell'angolo  $\alpha_f$  dato da

$$\operatorname{tang} 2\alpha_f = 6 a^2 b^2 / (b^2 - a^2)(a^2 + b^2 + 4 a b)$$

- che gli assi  $x', y'$  di riferimento del taglio sono rotati dell'angolo  $\alpha_t$  definito da

$$\operatorname{tang} 2\alpha_t = ab(b-a)/(b+a)(a^2 + b^2 + 3 a b)$$

A denominatore dell'ultimo addendo compare il *modulo di rigidezza torsionale*  $J_t$ : e' questa una caratteristica della sezione avente dimensione di (lunghezza)<sup>4</sup> come un momento d'iner-

zia. Per la sezione circolare e per quella anulare (delimitata da due cerchi concentrici)  $J_t$  coincide col momento d'inerzia polare rispetto al centro  $J_p = 2J_x = 2J_y$ . Sul calcolo di  $J_t$ , come anche delle caratteristiche  $A_x, A_y$ , si dirà nella Parte seguente.

Nella fig. 109 è indicata la posizione degli assi di riferimento per un profilato normale a  $L$ : gli assi principali  $x, y$  per il baricentro  $G$ , gli assi  $x', y'$  per il centro di taglio  $G_t$ .

Se la sezione possiede due assi di simmetria, il centro  $G_t$  coincide col baricentro. Se ve è un solo asse di simmetria, su questo stanno i punti  $G$  e  $G_t$ ; gli assi  $y$  e  $y'$  (oppure  $x, x'$ ) stanno su tale retta. Nella fig. 110 è indicata la posizione approssimativa di  $G_t$  per alcuni casi tipici.

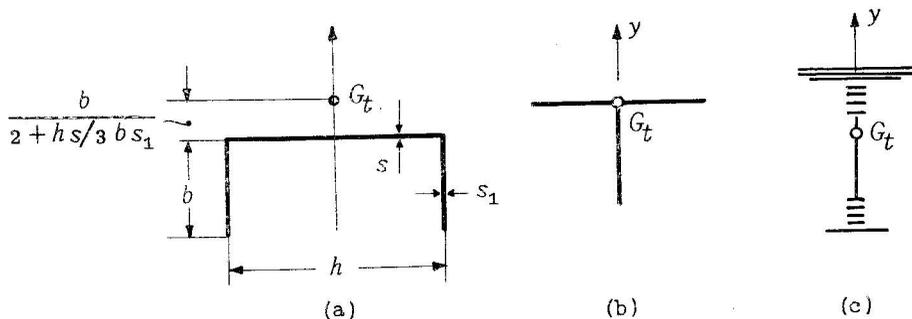


Fig. 110 - Posizioni del centro di taglio  $G_t$  per alcune sezioni tipiche. (a) Profilato a C, (b) profilato a T, (c) sezione a doppio T: scomposta l'area in strisce e determinato per ciascuna il momento d'inerzia rispetto a  $y$  si trova  $G_t$  nel baricentro di questi momenti d'inerzia.

Nelle applicazioni conviene spesso determinare le caratteristiche di sollecitazione con un riferimento diverso da quello per il quale  $L_i$  assume l'espressione [134] a termini separati: la forza tagliante viene scomposta nelle componenti  $T_x, T_y$  secondo i due assi centrali  $x, y$ ; in luogo del momento torcente si determina il momento  $M_z$  rispetto all'asse normale alla sezione per il suo baricentro. Da tali quantità si passa alle  $T_{x'}, T_{y'}, M_t$  al momento di usare la [134], secondo le relazioni

$$T_{x'} = T_x \cos \alpha + T_y \sin \alpha \quad [135]$$

$$T_{y'} = T_y \cos \alpha - T_x \sin \alpha \quad [136]$$

$$M_t = M_z + T_x e_y - T_y e_x \quad [137]$$

essendo  $\alpha$  l'angolo di cui gli assi  $x'y'$  sono rotati rispetto agli assi  $xy$  nella direzione  $+x \rightarrow +y$  ed essendo  $e_x, e_y$  le coordinate baricentriche di  $G_t$  (fig.111) (\*). Se si trascurano le deformazioni dovute al taglio,

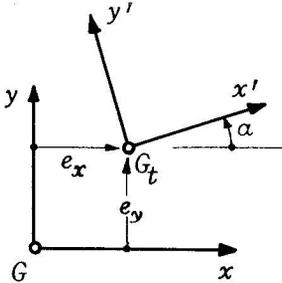


Fig. 111 - Assi di riferimento nel piano della sezione.

la determinazione delle direzioni  $x', y'$  e il calcolo di  $T_{x'}, T_{y'}, A_{x'}, A_{y'}$  possono essere tralasciati.

Circa i segni delle caratteristiche di sollecitazione, secondo le convenzioni generalmente usate nella Scienza delle Costruzioni, si stabilisce che:

- le forze taglianti  $T_x, T_y$  e la forza normale  $N$  sono positive se sulla faccia positiva della sezione agiscono nelle direzioni positive degli assi  $x, y$  e  $z$ ;
- il momento  $M_x$  e' positivo se, sulla faccia positiva, agisce nel verso che porta la direzione  $+y$  a sovrapporsi alla direzione  $+z$ ;  $M_y$  e' positivo se opera nel verso che porta  $+x$  a sovrapporsi a  $+z$ ;  $M_z$  e' positivo se e' volto, sulla faccia positiva, nel senso di rotazione  $+x \rightarrow +y$ .

I momenti sono rappresentati mediante vettori secondo le convenzioni della Meccanica, in accordo con la terna di riferimento generale  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  i cui assi vengono orientati come le prime tre dita della mano destra. Il vettore rappresentativo di una coppia, normale al piano della coppia, e' volto nel senso in cui avanzerebbe una vite normale (destra) sotto l'azione della coppia. Nel riferimento locale della sezione generica, la terna  $x, y, z$  puo' essere scelta congruente con quella generale o no, a piacere. Nel primo caso le proiezioni del vettore momento baricentrico applicato alla sezione sulla faccia positiva danno, sui tre assi, i momenti  $M_x, -M_y, M_z$ ; nel caso opposto le componenti stesse rappresentano i momenti  $-M_x, M_y, -M_z$ .

(\*) Talora puo' convenire fissare gli assi ortogonali baricentri  $x, y$  in posizione non coincidente con gli assi centrali che per questo caso distinguiamo con  $x'', y''$ . I momenti relativi a questi, da porre nella [134] al posto di  $M_x$  e  $M_y$ , sono dati da

$$M_{x''} = M_x \cos \alpha - M_y \sin \alpha$$

$$M_{y''} = M_y \cos \alpha + M_x \sin \alpha$$

essendo qui  $\alpha$  l'angolo di cui gli assi principali  $x'', y''$  sono rotati rispetto al riferimento  $x, y$ .

**VII.2 - L'asse elastico.** Il luogo dei centri di taglio delle varie sezioni costituisce una linea detta *asse elastico*. Esamineremo alcune proprietà di tale asse. Si supponga la trave diritta; l'asse elastico sia una retta parallela all'asse della trave. La trave sia caricata in modo che per qualsiasi sezione del tratto in esame sia  $M_t = 0$ , come avviene se applichiamo alla trave forze incidenti all'asse elastico. Si vuole esaminare il moto di una sezione proiettata sul piano che la contiene prima della deformazione, allo scopo di esaminare se tale moto sia traslatorio o contenga una componente rotatoria. A tal fine si adottano come sistema di esplorazione due coppie torcenti  $U_C$  applicate alle sezioni terminali del tronco con versi opposti. Scelto questo come sistema *a* e come sistema *b* quello delle deformazioni corrispondenti ai carichi incidenti all'asse elastico, si avrà in  $L_t$  la misura della rotazione relativa  $\vartheta$  delle sezioni estreme nelle condizioni di carico sopra definite. Ora si osserva che nella condizione *a* la sola caratteristica non nulla è  $M_t$ , mentre nell'altra condizione *b* questo momento è appunto nullo. Allora risulta  $L_t = 0$  e quindi  $\vartheta = 0$ : *le sezioni estreme del tronco non subiscono rotazione relativa se i carichi che agiscono sulla trave sono incidenti all'asse elastico.*

Adesso, per lo stesso tronco di trave, esaminiamo le deformazioni che si producono quando esso sia soggetto a torsione pura, ossia in qualunque sezione sia diversa da zero solo la caratteristica  $M_t$ . È intuitivo che il moto delle sezioni proiettate nel loro piano sarà una rotazione intorno ad un punto non molto lontano dal baricentro, punto che si dice *centro di torsione*. Assumendo come sistema *b*, al solito, la deformazione in esame, si applica come sistema *a* per la scrittura dell'equazione dei lavori, una forza tagliante condotta in una direzione qualunque per il centro di taglio  $G_t$  di una sezione estrema e a questa si fa equilibrio con azioni applicate alla base opposta  $B$ . Per il sistema *b* la sola caratteristica non nulla è  $M_t$  mentre per il sistema *a* appunto questa caratteristica è nulla. Quindi risulta  $L_t = 0$  e pertanto, supposta la base  $B$  immobile, dovrà fare lavoro nullo la forza tagliante applicata alla base opposta. Tenendo presenti le considerazioni del § IV.2 appare evidente che l'annullarsi di tale lavoro significa che il centro di rotazione della sezione deve essere situato sulla retta d'azione della forza. Poiché ciò avviene per qualunque direzione della forza tagliante, sempre che essa passi per  $G_t$ , si conclude che il *centro di torsione coincide col centro di taglio.*

• Le proprietà enunciate dell'asse elastico si riferiscono

alla trave diritta, con asse baricentrico e asse elastico paralleli. Cosa avvenga quando queste condizioni non siano verificate non puo' essere esaminato finche' si resti nell'ambito della teoria delle travi: si richiederebbe un'analisi piu' approfondita che nei suoi fondamenti non ponesse le restrizioni inerenti alla teoria di St.Venant.

**VII.3 - Le travature in generale.** I concetti occorrenti per il calcolo delle travature sono sostanzialmente quelli specificati a proposito dei sistemi piani.

La rappresentazione geometrica deve indicare la linea d'asse e, per ciascun punto di esso, l'orientazione degli assi locali  $x, y$  normali e  $z$  tangente alla linea suddetta; deve inoltre specificarsi la posizione dell'asse elastico. Se la struttura e' scomposta in corpi semplici soggetti a forze tutte note, le sei condizioni di equilibrio per una delle due parti in cui la sezione generica spezza tale corpo bastano a determinare le caratteristiche di sollecitazione per la sezione stessa  $T_x, T_y, N, M_x, M_y, M_z$ . Prima di giungere a questo, e' necessario determinare le reazioni dei vincoli che occorre spezzare per ridurre lo schema a corpi semplici liberi, fatta eccezione per quei corpi semplici che abbiano tutti i vincoli concentrati in una sezione estrema.

Circa la rappresentazione dei vincoli non esistono convenzioni universalmente accettate. Si converra' di marcare le sezioni di vincolo e di indicare accanto le caratteristiche di sollecitazione che il vincolo *non* e' in grado di trasmettere. Il vincolo capace di esercitare le sei azioni viene detto *incastro*; esso sara' marcato solo quando si debba procedere alla enumerazione dei vincoli, per la quale nel conteggio degli incastri valgono le osservazioni espresse a proposito delle travature piane.

Come vincoli fondamentali vanno considerati la coppia rotoidale e la prismatica. La prima detta anche *cerniera cilindrica*, consente una rotazione relativa delle parti collegate intorno ad un determinato asse e quindi, per la supposta assenza di attriti, annulla i momenti rispetto a tale asse. Se questo e' disposto, ad esempio, parallelamente a  $x$ , per il baricentro di una determinata sezione, vi annullera'  $M_x$ ; se esso e' tangente all'asse della trave annullera'  $M_z$  nella sezione in cui e' posta la cerniera.

La coppia prismatica consente una traslazione relativa delle parti collegate in una data direzione. Se questa viene disposta secondo l'asse  $x$  di una certa sezione, vi sara'

$T_x = 0$ . I due accoppiamenti menzionati sono detti vincoli di ordine 5 perche' trasmettono 5 caratteristiche di sollecitazione. Collegando in serie  $n$  di questi si costituisce un vincolo di ordine  $6-n$ . Così, collegando in serie tre cerniere cilindriche ad assi concorrenti in un punto  $P$  della linea d'asse vi si stabilirà una cerniera sferica: questo è un vincolo triplo che annulla i momenti  $M_x, M_y$  e  $M_z$ . Se ancora si dispongono in serie con la cerniera sferica due coppie prismatiche, si costituirà un appoggio semplice: un vincolo semplice cioè capace di trasmettere solo una forza passante per il punto di concorso degli assi delle cerniere e normale al piano contenente le direzioni di scorrimento delle due coppie prismatiche.

Vari di questi tipi di vincolo hanno importanza nella costruzione di macchine; pochi di esse trovano realizzazione costruttiva nelle strutture fisse; tutti però possono intervenire negli artifici di calcolo che si adottano per la risoluzione delle strutture o per la determinazione delle linee di influenza.

Il conteggio del numero  $v$  dei vincoli semplici che bisogna interrompere per ridurre la struttura a  $m$  corpi semplici indipendenti, incluso eventualmente il terreno, permette di calcolare il grado di iperstaticità  $h$  mediante la relazione:

$$h = v - 6(m - 1) \quad [138]$$

Se  $h = 0$ , basteranno le equazioni del § I.4 per la determinazione delle reazioni vincolari e delle caratteristiche di sollecitazione. Nella applicazione, particolari accorgimenti possono facilitare alquanto l'uso delle [2], [3]. Ad esempio, per il calcolo del momento di una forza rispetto ad un asse, si potrà fare uso di sussidi grafici come quelli della fig. 112: il momento in questione, con le notazioni della figura, è dato da  $d_x f_y F/f$  o anche da  $d_p f_p F/f$ .

Se la struttura è iperstatica, volendo procedere alla sua risoluzione coi metodi dei §§ V.1-V.4 si definiranno anzitutto come sovrabbondanti un certo numero di vincoli e si determineranno gli sforzi che i carichi applicati producono nello schema isostatico. Si ottengono così gli sforzi principali rappresentati dalle caratteristiche  $\tilde{T}_x, \tilde{T}_y, \tilde{N}, \tilde{M}_x, \tilde{M}_y, \tilde{M}_z$ . Poi si considereranno i sistemi supplementari, sforzi corrispondenti alla applicazione delle reazioni, semplici o combinate, dei vincoli soppressi, agenti con versi opposti sui due elementi affacciati. Si troveranno così il sistema  $T'_x, T'_y, N', M'_x, M'_y, M'_z$  e gli altri ancora, se la struttura è più volte iperstatica.

Si scriveranno quindi le sollecitazioni risultanti nella forma corrispondente alla [82]. Ad esempio, in una struttura due volte iperstatica, per i momenti torcenti si scriverà:

$$M_t = \tilde{M}_t + X' M'_t + X'' M''_t \quad [139]$$

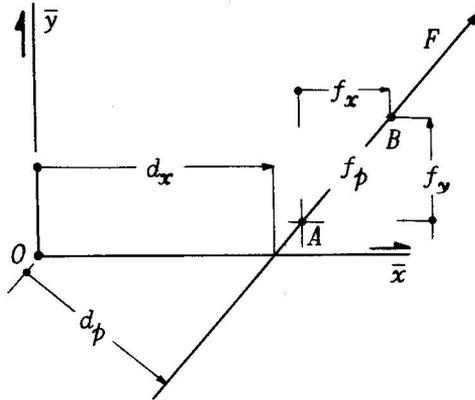
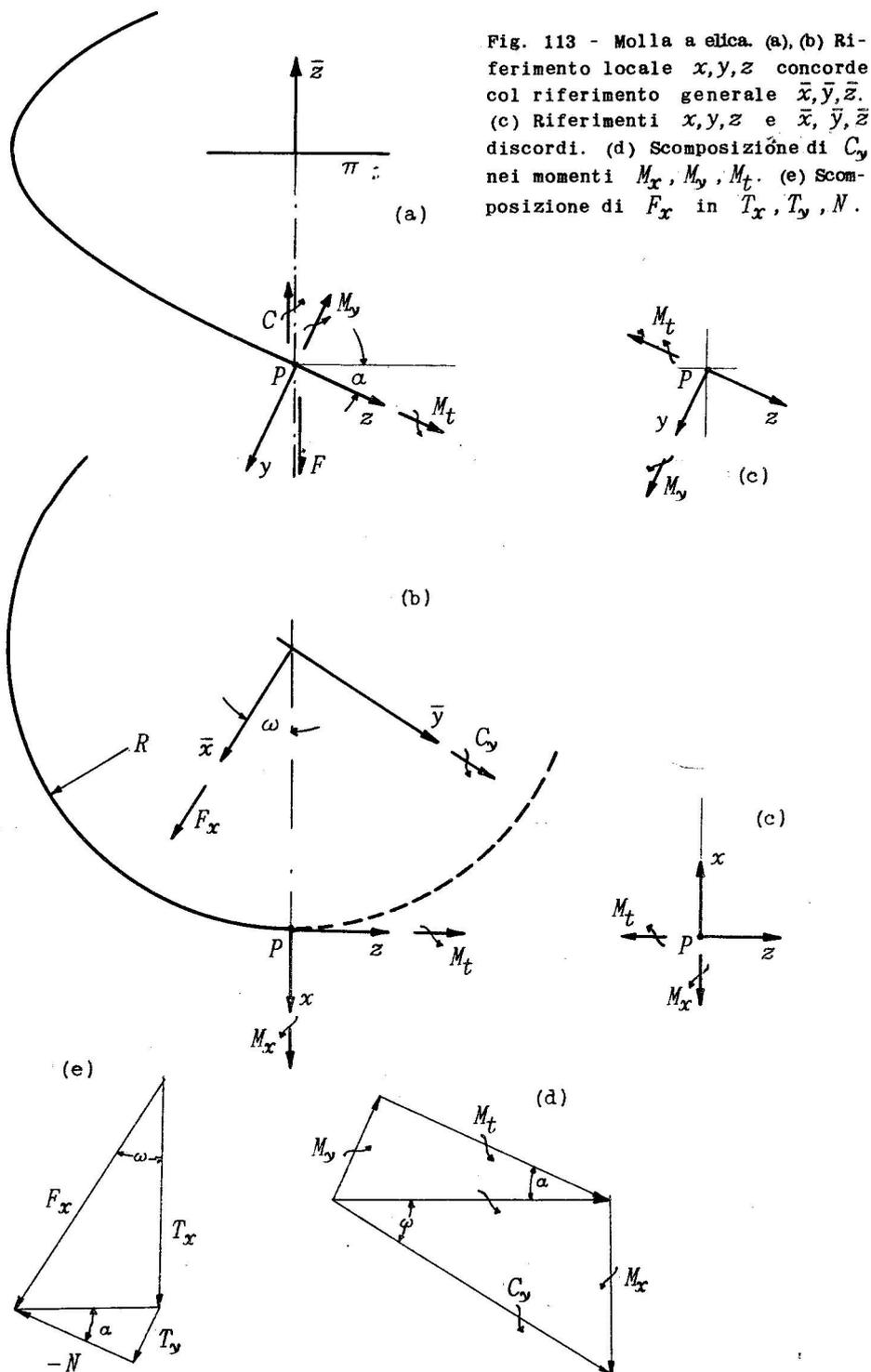


Fig. 112 - Il momento della forza  $F$  (situata fuori del piano  $\bar{x}\bar{y}$ ) rispetto all'asse  $\bar{z}$  per  $O$  può essere calcolato moltiplicando per  $d_x$  la componente di  $F$  normale al piano  $\bar{x}\bar{z}$  o moltiplicando la proiezione di  $F$  nel piano  $\bar{x}\bar{z}$  per la distanza  $d_p$  di questa da  $O$ .

Alle incognite  $X', X''$  sarà imposto che sia  $L_e = 0 = L_i$  quando si assuma come sistema  $b$  quello delle sollecitazioni risultanti espresse dal secondo membro della [139] e analoghe, e come sistema  $a$  il sistema supplementare  $X' = 1$  o quello  $X'' = 1$ . Si ottengono così le equazioni di elasticità: dalla loro risoluzione si hanno i valori delle incognite  $X$  e infine si calcolano gli sforzi e le deformazioni risultanti come per i sistemi piani.

**VII.4 - Sollecitazioni in una molla ad elica.** La molla sia costituita (fig. 113) da una trave a sezione circolare, la cui linea d'asse è formata da un'elica cilindrica. Sia  $R$  il raggio del cilindro sul quale l'elica è avvolta, e sia  $\alpha$  l'inclinazione della tangente sul piano  $\pi$  normale all'asse. Il riferimento fisso si dispone con gli assi  $\bar{x}, \bar{y}$  in detto piano,  $\bar{z}$  secondo l'asse del cilindro. L'asse  $x$  si dispone secondo la normale principale all'elica, ossia in direzione radiale. Conseguentemente si fissano l'asse  $y$  e l'asse  $z$  rispetto al quale si calcolano i momenti torcenti poiché il centro



di taglio e' nel centro del cerchio sezione. Nella fig. 113a e' proiettato un tratto dell'elica sul piano normale all'asse  $x$  per una sezione generica  $P$ , definita dall'angolo  $\omega$  che  $x$  fa col piano  $\bar{x}\bar{z}$ . La linea d'asse qui assume la forma di una sinusoide, con inclinazione  $\alpha$  nel punto di flesso. La figura 113b rappresenta una proiezione normale all'asse dell'elica. Essendo la sezione circolare  $J_t = 2J_y$ ; supposto  $G = 0,4E$  e'  $GJ_t = 0,8 EJ_y$ .

Consideriamo anzitutto la molla soggetta ad una forza  $F$  agente lungo l'asse del cilindro volta nel senso di tendere la molla. La  $F$  si scompone nelle forze  $F \cos \alpha$  e  $F \sin \alpha$  rispettivamente parallele a  $y$  e  $z$ . Si ha quindi:

$$\begin{aligned} T_x = M_x = 0 \quad , \quad T_y = F \cos \alpha \quad , \quad N = F \sin \alpha \quad , \\ M_y = -FR \sin \alpha \quad , \quad M_t = -FR \cos \alpha \quad . \end{aligned}$$

Per calcolare l'allungamento che una spira subisce in queste condizioni di carico, si applica l'equazione dei lavori assumendo come sistema  $b$  quello sopra calcolato, come sistema  $a$  quello relativo a  $F = U$ . L'allungamento  $\delta$  e' misurato da  $L_e/U$ . Gli integrali relativi a  $L_t$  si riducono al prodotto dello sviluppo della linea d'asse  $2\pi R/\cos \alpha$  per le funzioni integrande che si mantengono costanti. Quindi trascurando gli effetti dello sforzo normale e di  $T_y$  si trova

$$\delta = 2\pi \frac{FR^3}{GJ_t} (\cos \alpha + 0,8 \sin^2 \alpha / \cos \alpha)$$

Essendo  $\alpha$  di solito piccolo si sostituisce generalmente il fattore in parentesi col valore 1.

Si consideri ora la molla soggetta ad una coppia  $C$  con vettore momento (\*) secondo  $\bar{z}$ . In questo caso e'

$$T_x = T_y = N = M_x = 0 \quad , \quad M_y = C \cos \alpha \quad , \quad M_t = -C \sin \alpha$$

Adoperando come sistema  $a$  questa configurazione di sforzi e come sistema  $b$  quella corrispondente al carico assiale, si puo' determinare l'angolo  $\vartheta = L_e/C$  di cui girano intorno all'asse del cilindro le sezioni estreme della spira tesa. Si trova:

$$\vartheta = 0,4\pi \frac{FR^2}{GJ_t} \sin \alpha \quad [140]$$

---

(\*) I vettori che rappresentano le coppie sono distinti con una freccia curva che indica il senso in cui e' volta la coppia.

Si applichi una coppia  $C_y$  con vettore momento diretto secondo  $\bar{y}$ . Si ottiene (fig. 113d):

$$\begin{aligned} T_x = T_y = N = 0 \quad , \quad M_x = C_y \sin \omega \quad , \\ M_y = C_y \cos \omega \sin \alpha \quad , \quad M_t = C_y \cos \omega \cos \alpha \end{aligned}$$

La rotazione intorno a  $\bar{y}$  che questa azione produce si puo' calcolare assumendo come sistema  $a$  e  $b$  le relative sollecitazioni e determinando  $L_i/C_y$ . Considerando che  $e \, dZ = R d\omega / \cos \alpha$  si ottiene:

$$\varphi_y = \frac{C_y R}{E J_y \cos \alpha} \int (\sin^2 \omega + \cos^2 \omega \sin^2 \alpha + 1,25 \cos^2 \omega \cos^2 \alpha) d\omega$$

In via di approssimazione si puo' ritenere uguale a 1 lo integrando in parentesi. Allora, tenendo presente che  $d\bar{z} = R d\omega \sin \alpha$  si puo' affermare che per la deformabilita' corrispondente all'azione in esame la molla si comporta come una trave disposta lungo l'asse del cilindro, di rigidezza  $E J_y / \tan \alpha$ . Usando invece come sistema  $b$  quello relativo alla forza  $F$  e osservando che le funzioni  $\sin \omega$  e  $\cos \omega$  nelle integrazioni estese a numeri interi di spire si annullano, si puo' affermare che la trazione agente lungo l'asse del cilindro non produce inflessioni della molla, se il numero di spire e' intero.

Si considerino infine gli effetti di una forza agente secondo  $\bar{x}$ . Questa puo' essere trasportata all'altezza di  $P$  introducendo una coppia nel piano  $\bar{x}\bar{z}$  proporzionale allo spostamento impresso a  $F$ . La forza trasportata da' le sollecitazioni

$$\begin{aligned} T_x = F_x \cos \omega \quad , \quad T_y = F_x \sin \omega \sin \alpha \quad , \quad N = - F_x \sin \omega \cos \alpha \\ M_x = 0 \quad , \quad M_y = F_x R \sin \omega \cos \alpha \quad , \quad M_t = - F_x R \sin \omega \sin \alpha \end{aligned}$$

Le deformazioni che questo tipo di sollecitazione produce sono assimilabili a quelle dovute al taglio in una barretta diritta disposta lungo l'asse del cilindro.

Con questa sollecitazione usata come sistema  $a$  si puo' provare che, su un numero intero di spire la forza  $F$  assiale non produce spostamenti laterali delle estremita' della molla. Dunque, se si trascura la rotazione data dalla [140] si puo' affermare che, a parte gli effetti di frazioni di spire, una forza secondo  $\bar{z}$  produce uno spostamento nella stessa direzione delle sezioni terminali; quindi, reciprocamente imprimendo un tale spostamento la molla reagisce secondo il suo asse.

**VII.4 - Caratteristiche di sollecitazione antimetriche.** Le travature con linea d'asse contenuta in un piano rispetto al quale la struttura e' simmetrica saranno ora considerate in condizioni antimetriche di carico, ossia sottoposte a forze (carichi o reazioni vincolari) normali al piano di simmetria o coppie il cui vettore momento sia contenuto in quel piano.

Sulla normale al piano di rappresentazione si assumerà un versore positivo: per precisare, sia diretto dal disegno verso l'osservatore. Su questo versore si faranno coincidere le direzioni positive degli assi  $x$  e  $\bar{x}$  del riferimento locale e di quello generale. Gli assi  $\bar{y}, \bar{z}$  del riferimento generale saranno disposti in modo che la rotazione  $\bar{y}\bar{z}$  sia antioraria. Per la rappresentazione delle forze si segnerà presso la traccia di ciascuna il valore algebrico preceduto da segno + o -

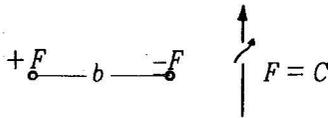


Fig. 114 - Rappresentazione di una coppia.

secondo che per quella forza si voglia stabilire il verso convenzionale concorde o discorde con quello della normale. La coppia di forze  $\pm F$  (fig. 114) sarà rappresentata col vettore momento, normale al piano della coppia, rivolto nel senso per cui la forza  $+F$  si trovi a sinistra della  $-F$  rispetto alla direzione della freccia. L'aggiunta della freccia trasversale che indica il senso di rotazione della coppia è qui superflua; tuttavia si potrà segnlarla per distinguere i vettori momento dalle forze.

Sul piano di simmetria della struttura (fig. 115) sia  $a$  la linea d'asse per la porzione di travatura in esame. In ogni punto sono note le direzioni  $z$  (tangente alla linea) ed  $y$  (normale ad essa e quindi traccia del piano della sezione); i versi dei due assi sono fissati a piacere. Le forze agenti sulla sezione nelle situazioni che qui si considerano, si riducono ad una forza  $F$  normale al piano di rappresentazione. Sono dunque nulle le tre caratteristiche che intervenivano nei capitoli precedenti, ossia  $T_y, N$  e  $M_x$ . Saranno invece differenti da zero in generale le caratteristiche  $M_y, M_t, T_x$ . Rinviando alla parte successiva il calcolo delle tensioni che a queste corrispondono, si esamineranno mediante l'equazione dei lavori virtuali le deformazioni che corrispondono a queste sollecitazioni in base alle proprietà elastiche del materiale. Si userà dunque l'espressione [134] limitata ai termini non nulli, ossia

$$L_i = \int \left( \frac{M_y^a M_y^b}{EJ_y} + \frac{M_t^a M_t^b}{GJ_t} + \frac{T_x^a T_x^b}{GA_x} \right) dZ \quad [141]$$

Anche qui gli integrali si intendono estesi all'intera linea d'asse della struttura. La forza tagliante  $T_x$  e' data dalla risultante delle forze agenti sulla sezione ed e' volta nel senso  $+x$  sulla faccia positiva; la forza sulla faccia negativa e' data da  $-T_x$  (\*). Il momento flettente  $M_y$  e' positivo se sulla faccia positiva agisce nella direzione che porta l'asse  $+x$  sull'asse  $+z$ ; quindi se  $F$  e' la risultante delle forze agenti sulla sezione e'  $M_y = -Fz$  (fig. 115). Il vettore momento che rappresenta  $M_y$  ha il verso  $+y$  se il senso di rotazione  $yz$  e' orario (fig. 115b) verso opposto nel caso contrario (fig. 115a). Il momento  $M_t$  e' calcolato rispetto all'asse parallelo a  $z$  per il centro di taglio che qui si trova sull'asse  $y$ . Esso e' positivo se sulla faccia positiva della sezione gira nel senso  $xy$ ; quindi esso e' rappresentato da un vettore concorde o opposto rispetto a  $+z$  secondo che la rotazione  $yz$  sia antioraria o oraria.

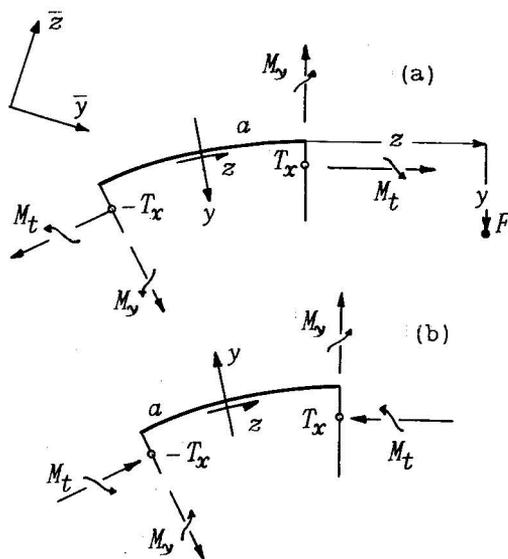


Fig. 115 - Versi positivi delle caratteristiche di sollecitazione: (a) con terne  $xyz$  e  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$  concordi; (b) con terne discordi.

Il termine relativo al taglio nella [141] viene di solito trascurato.

(\*) Per la simmetria delle sezioni le direzioni  $x', y'$  della fig. 109 qui coincidono con quelle degli assi  $x, y$ ; per questo nella [141]  $A_x$  sta al posto di  $A_{x'}$ .

**VII.5 - Sistemi di forze parallele.** Le forze e le coppie che intervengono nel calcolo delle sollecitazioni nella trave piana caricata trasversalmente si riducono a sistemi di forze parallele. Per tali sistemi le condizioni di equilibrio sono tre; esse possono scriversi come equazioni di momento rispetto a tre assi del piano non concorrenti. Una delle equazioni di momento può essere sostituita da un'equazione di proiezione in direzione normale al piano di simmetria; in termini generici, questa si scrive:

$$\sum (\pm F_i) = 0 \quad [142]$$

la sommatoria essendo estesa alle forze del sistema, ciascuna preceduta dal segno che la accompagna sulla rappresentazione. Le equazioni di momento saranno della forma:

$$\sum C_i \cos \alpha_i + \sum (\pm b_i)(\pm F_i) = 0 \quad [143]$$

Fissato un verso positivo sull'asse rispetto al quale si calcolano i momenti, si intenderà con  $\alpha_i$  l'angolo che quella direzione fa col vettore rappresentativo della coppia  $C_i$ . Al braccio  $b_i$  si apporrà segno + o - secondo che la forza stia a sinistra o destra rispetto alla direzione dell'asse; la forza  $F_i$  viene presa col segno indicato in figura.

Accenniamo ad alcune operazioni fondamentali che possono effettuarsi con procedimenti analitici o grafici, secondo convenza.

I) **Scomposizione di una forza in tre.** Siano  $F_1, F_2, F_3$  le forze da calcolare, equivalenti alla  $F$ . Le forze e le loro tracce sono indicate con lo stesso simbolo (fig. 116a). L'equazione di momento rispetto alla congiungente le tracce di  $F_2$  e  $F_3$  dà  $F_1$ ; e così le altre. Altrimenti si può operare come indica la fig. 59'a, mediante introduzione della forza  $F_{12}$  in allineamento con  $F_1, F_2$  e con  $F_3, F$ .

Caso particolare è quello in cui al posto di  $F$  sia da scomporre una coppia  $C$ . Si conduce allora per  $F_3$  una normale al vettore momento di  $C$  fino ad incontrare la retta  $F_1 F_2$ ; all'intersezione si trova la forza  $F_{12}$  e si procede come indica la fig. 116b.

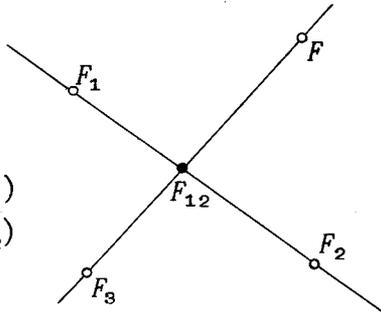
II) **Scomposizione di una forza in una coppia e due forze.** Sia  $C_3$  la coppia da determinare, della quale si conosce la direzione dell'asse momento. Si conduce dalla traccia di  $F$  la normale al vettore di  $C_3$  e si determina  $F_{12} = F$  all'intersezione con la  $F_1 F_2$ ; questa forza viene scomposta in  $F_1$  e  $F_2$  come sopra (fig. 116c).

$$F_{12} = F(F_3 F / F_3 F_{12})$$

$$F_3 = F(F_{12} F / F_{12} F_3)$$

$$F_1 = F_{12}(F_2 F_{12} / F_2 F_1)$$

$$F_2 = F_{12}(F_1 F_{12} / F_1 F_2)$$

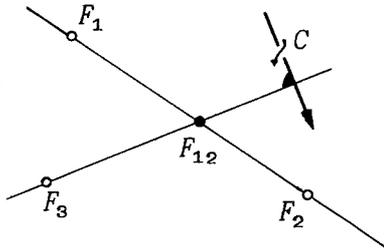


(a)

$$F_{12} = C / (F_3 F_{12}) = -F_3$$

$$F_1 = F_{12}(F_2 F_{12} / F_2 F_1)$$

$$F_2 = F_{12}(F_1 F_{12} / F_1 F_2)$$

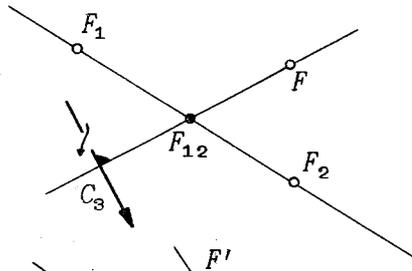


(b)

$$C_3 = F(F_{12} F)$$

$$F_1 = F(F_2 F_{12} / F_2 F_1)$$

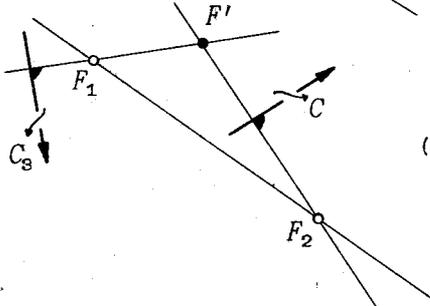
$$F_2 = F(F_1 F_{12} / F_1 F_2)$$



(c)

$$F_1 = C / (F_2 F') = -F_2$$

$$C_3 = F_1(F_1 F')$$

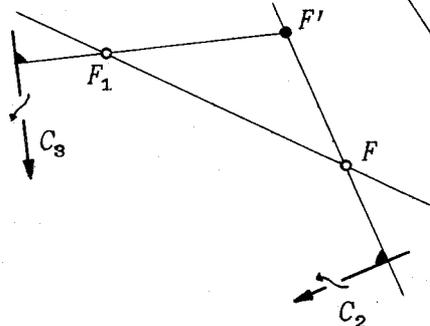


(d)

$$F_1 = F$$

$$C_2 = F(F' F)$$

$$C_3 = F(F_1 F')$$



(e)

Fig. 116 - (a) Scomposizione di  $F$  in  $F_3$  e  $F_{12}$  e quindi di  $F_{12}$  in  $F_1$  e  $F_2$ . Si indica con  $(F_3 F / F_3 F_{12})$  il rapporto fra il segmento che va dalla traccia di  $F_3$  a quella di  $F$  e il segmento che dalla traccia di  $F_3$  va a quella di  $F_{12}$ . Il rapporto è positivo se  $F_3$  cade fuori dell'intervallo  $F_{12} F$ .

(b) Scomposizione di  $C$  in  $F_3$  e  $F_{12}$  e quindi di  $F_{12}$  in  $F_1, F_2$ . Si indica con  $(F_3, F_{12})$  la distanza fra  $F_3$  e  $F_{12}$ , positiva se la coppia  $F_{12}, F_3 = -F_{12}$  ha il verso di  $C$ .

(c) Scomposizione di  $F$  in  $C_3$  e  $F_{12} = F$  e poi di  $F_{12}$  in  $F_1, F_2$ . Il verso di  $C_3$  è quello per cui  $F$  è a sinistra di  $F_{12}$ .

(d) Scomposizione di  $C$  in  $F_1, F_2, C_3$ . Il segmento  $F_2 F'$  è normale al vettore di  $C$ , il valore  $(F_2 F')$  è positivo se, rispetto al verso di  $C$ ,  $F'$  è a sinistra di  $F_2$ . Il senso di  $C_3$  deve lasciare  $F'$  a sinistra di  $F_1$ .

(e) Scomposizione di  $F$  in  $F_1, C_2, C_3$ .  $(F F')$  è normale al vettore di  $C_2$ ,  $F$  è a sinistra di  $F'$  rispetto ad esso;  $(F' F_1)$  è normale al vettore di  $C_3$ ,  $F$  è a sinistra di  $F_1$  rispetto ad esso.

Se invece e' da trovare il sistema equivalente ad una coppia  $C$ , si conduce da  $F_2$  una normale al vettore di  $C$ , da  $F_1$  una normale al vettore di  $C_3$  e si costituiscono cosi' due coppie la cui composizione dia  $C$  (fig. 116d).

111) **Scomposizione di una forza in due coppie ed una forza.** Si trasporta come mostra la fig. 116e, la forza  $F$  in  $F'$  e poi in  $F_1$  introducendo due coppie  $C_2$  e  $C_3$ .

Se anziche' trovare un sistema equivalente si debba trovare quello equilibrante, si ha da cambiare segno alle  $F_1, F_2, F_3$  o alle corrispondenti coppie.

**VII.6 - Sforzi e deformazioni nelle travature piane caricate trasversalmente.** Nei problemi relativi alle travature con linea d'asse contenuta in un piano di simmetria, soggette a carichi normali a questo piano, il fatto che le caratteristiche di sollecitazione si riducano a tre e che la risoluzione di questi problemi possa condursi mediante operazioni eseguite nel piano di rappresentazione arreca notevoli semplificazioni rispetto al caso generale. Per la scrittura delle equazioni di equilibrio valgono le considerazioni del paragrafo precedente. Per il calcolo delle deformazioni e la risoluzione delle strutture iperstatiche si ha solo da segnalare la riduzione dell'espressione dei lavori dalla forma [134] alla [141]; anzi, generalmente trascurandosi gli effetti del taglio, si scrive semplicemente:

$$L_i = \int (M_y^a M_y^b / EJ_y + M_t^a M_t^b / GJ_t) dz \quad [144]$$

Alcune osservazioni particolari sono da tener presenti nel computo dei gradi di vincolo. Il vincolo completo e' ancora l'incastro, che trasmette le tre caratteristiche di sollecitazione  $M_y, M_t, T_x$ . La cerniera cilindrica con asse normale al piano di simmetria, che per le condizioni simmetriche agisce come vincolo doppio, qui opera come un incastro poiche' annulla solo il momento  $M_x$  che qui non compare. Se l'asse della cerniera e' parallelo al piano di simmetria essa agisce come vincolo doppio. Analogamente la coppia prismatica agira' come vincolo doppio se la direzione di scorrimento ammesso e' normale al piano di simmetria; nella sezione dove essa e' disposta sara'  $T_x = 0$ . Per questi vincoli e per gli altri che possono dedursi per loro combinazione non si adottera' alcun simbolo speciale: si segnara' con doppio taglio la loro ubicazione

e si annoteranno accanto le caratteristiche di sollecitazione che il dispositivo viene ad annullare.

Come in ogni altro caso, il grado di iperstaticità dipende dalla somma  $v$  dei gradi di vincolo (\*) che occorre rompere per ridurre lo schema a corpi semplici liberi; quindi si scrive:

$$h = v - 3(m - 1) \quad [145]$$

considerando che le equazioni disponibili sono in numero di tre per ciascuno dei corpi semplici meno uno (sia esso il terreno o uno dei componenti se la struttura non fa capo al terreno).

a) Si consideri lo schema della fig. 117: un arco incastrato con tre cerniere cilindriche di assi  $r_1, r_2, r_3$  che annullano i momenti  $M_y$  nelle sezioni  $A, B, C$ .

Interrompendo le tre cerniere si vengono ad isolare tre corpi (il terreno con due archi a sbalzo e i due archi  $a, b$ ); quindi la [145] con  $v = 6$  dà  $h = 0$ . La risoluzione si conduce rapidamente per via grafica se l'arco  $a$  è scarico e sull'arco  $b$  è data la risultante  $F$  dei carichi. Ogni cerniera è in grado di trasmettere le azioni  $T_x$  e  $M_t$ : ossia, per composizione di queste, una forza qualunque purché incidente al suo asse. Per l'equilibrio del corpo  $a$  le reazioni delle cerniere  $A$  e  $B$  debbono essere uguali e opposte e perciò passano per il punto di intersezione di  $r_1$  e  $r_2$ . Per l'equilibrio del corpo  $b$ , la forza  $F$ , la reazione della cerniera  $B$  e quella della  $C$  (che sta sulla  $r_3$ ) debbono avere tracce allineate. Quindi le reazioni sono facilmente calcolate,

---

(\*) Si noti che l'ordine di un vincolo computato nel caso di carico simmetrico aggiunto all'ordine del medesimo vincolo relativo al sistema antitetico qui in esame dà l'ordine complessivo del vincolo stesso considerato nello spazio. Ad esempio la cerniera cilindrica ha ordine 2 in un caso e ordine 3 nell'altro per il quale va trattata come incastro: nello spazio essa è un vincolo di ordine 5. La cerniera sferica costituisce un vincolo doppio nella travatura caricata simmetricamente, per la quale essa non si distingue dalla cerniera cilindrica; nelle condizioni antitetiche essa costituisce un vincolo semplice, essendo in grado di trasmettere solo il taglio annullando i momenti  $M_y$  e  $M_z$  (se collocata sull'asse). Difatti nello spazio essa è un vincolo triplo. Corrispondentemente il grado di iperstaticità complessivo che si calcola mediante l'espressione [138] è la somma del grado relativo alla struttura simmetricamente caricata dato dalla [8] e di quello dato dalla [145].

come mostra la fig. 117, e conseguentemente le sollecitazioni. Ad esempio si ha: nelle sezioni  $A, B$  e'  $T_x = -R_{12}$ , nella  $C$  e'  $T_x = R_3$ .

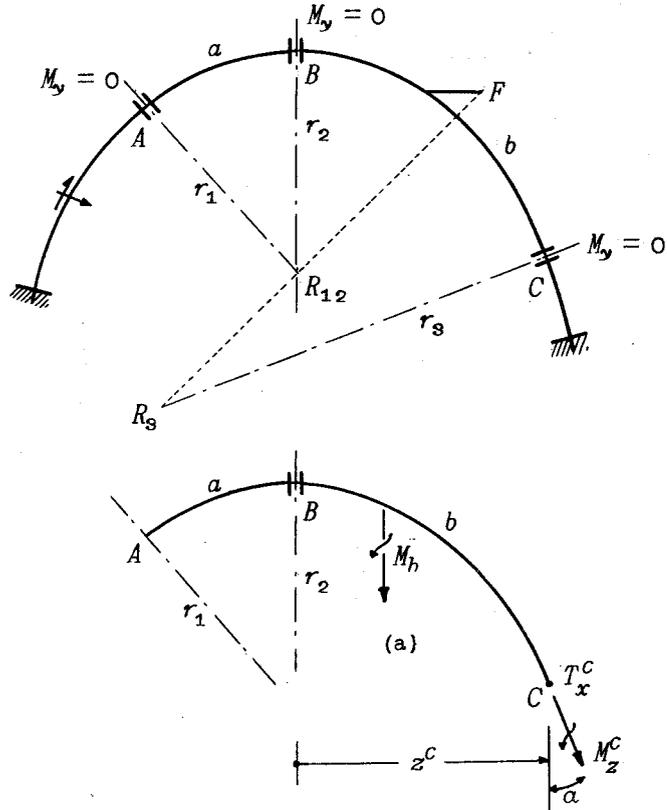


Fig. 117 - Reazioni vincolari in uno schema isostatico. Sul corpo  $b$  agisce

$$R_3 = F (FR_{12}/R_{12}R_3) \quad , \quad R_{12} = F (FR_3/R_3R_{12})$$

Nel caso della figura il rapporto  $(FR_{12}/R_{12}R_3)$  e' positivo mentre  $(FR_3/R_3R_{12})$  e' negativo.

L'equazione dei momenti intorno a  $r_2$  contiene le sole incognite  $T_x^C$  e  $M_t^C$ .

Si noti come tutte le sollecitazioni crescono indefinitamente se il punto di intersezione delle  $r_1$  e  $r_2$  si approssima alla  $r_3$ . Cio' significa che se gli assi delle cerniere concorrono in un punto, lo schema e' anomalo.

La risoluzione della medesima struttura puo' condursi per via analitica: assunte come incognite il taglio e il momento torcente nella sezione  $C$  si potranno scrivere per queste quantita' due equazioni di equilibrio, una alla rotazione in-

torno a  $r_2$  per il corpo  $b$

$$M_b + T_x^C z^C + M_t^C \cos \alpha = 0$$

dove  $M_b$  e' il momento dei carichi applicati sul corpo  $b$ , ed una analoga per i due corpi  $a, b$ , rispetto alla retta  $r_1$ . Calcolato  $T_x^C$  e  $M_t^C$  non v'e' difficolt'a a determinare le sollecitazioni in qualunque altra sezione.

b) Si consideri lo schema della fig. 118, con due cerniere cilindriche di assi  $r_1$  ed  $r_3$  nelle sezioni  $A, C$  e una coppia prismatica nella sezione  $B$ . Per la risoluzione analitica, assunte come nel caso della fig. 117a le incognite  $T_x^C$  e  $M_t^C$  si potra' scrivere per il corpo  $b$  un'equazione di equilibrio per le forze normali al piano (nella quale le reazioni in  $B$  non intervengono) e poi un'equazione di equilibrio alla rotazione intorno a  $r_1$  per i corpi  $a + b$ . Nelle due equazioni, oltre ai carichi applicati interverranno solo le incognite menzionate, che cosi' vengono determinate.

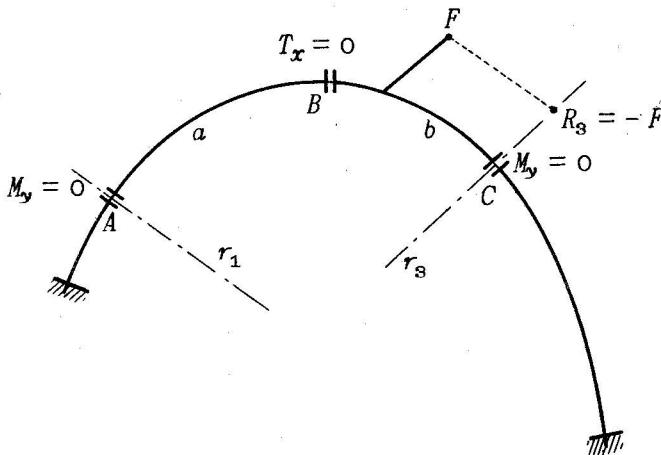


Fig. 118 - Schema con due cerniere cilindriche ed una guida prismatica.

Se e' caricato solo il corpo  $b$  ed e'  $F$  la risultante delle forze su questo, si puo' procedere come indica la figura 118: condotta per la traccia di  $F$  una parallela a  $r_1$  fino ad intersecare  $r_3$  si ha qui la reazione  $R_3 = -F$  sul corpo  $b$ . La coppia costituita dalla  $F$  e dalla  $R_3$  e' il momento torcente in  $A$ , trasmesso attraverso la cerniera cilindrica, nella quale essendo il corpo  $a$  esente da carichi e mancando la forza tagliante in  $B$  per il vincolo ivi esistente, puo' essere trasmessa solo una coppia nel piano di traccia  $r_1$ .

Si noti che lo schema della fig. 118 diventa anomalo se gli assi  $r_1$  e  $r_3$  sono paralleli, mentre per quello della fig. 117 tale parallelismo sarebbe privo di inconvenienti sempre che  $r_1$  e  $r_3$  non coincidessero.

c) Lo schema della fig. 119 e' costituito da due mensole a  $90^\circ$  solidali al loro estremo  $P$ . Si assumeranno come sovrabbondanti le sollecitazioni in tale punto. Il sistema principale e' formato dalle due mensole indipendenti. Se  $p$  e' il carico distribuito, agente nella direzione  $x$ , dalla relazione

$$d^2 \tilde{M}_y / dz^2 = - p$$

si potranno calcolare i momenti principali coi metodi del § II.6. Nella fig. 119a sono indicati tre possibili sistemi supplementari. Se le travi sono di sezione costante, i corrispondenti valori dei coefficienti  $\delta$  per le equazioni di elasticita' nella forma [96] sono

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \tilde{U}(l^3/3EJ_y)_1 + U(l^3/3EJ_y)_2, & \delta_{12} &= U_c(l^2/2EJ_y)_2, \\ & & \delta_{13} &= -U_c(l^2/EJ_y)_1 \\ \delta_{22} &= U_c(l/EJ_y)_2 + U_c(l/GJ_t)_1, & \delta_{23} &= 0, \\ \delta_{33} &= U_c(l/EJ_y)_1 + U_c(l/GJ_t)_2 \end{aligned}$$

distinguendosi con l'indice 1 o 2 fuori parentesi i valori relativi alle due travi.

Una differente scelta per i sistemi supplementari  $X' = 1$  e  $X'' = 1$  e' presentata nella fig. 119b; questi sono ottenuti sovrapponendo i sistemi della fig. 119a con ugual segno o con segni opposti. Queste combinazioni risultano particolarmente utili nel caso della struttura simmetrica rispetto al piano a  $45^\circ$  cogli assi delle due travi passante per  $P$ . Con questi si ha in tal caso:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= 2Ul^3/3EJ_y, & \delta_{12} &= -2U_c l^2/2EJ_y, \\ \delta_{22} &= 2U_c l/EJ_y + 2U_c l/GJ_t = \delta_{33}, \\ \delta_{13} &= \delta_{23} = 0. \end{aligned}$$

Con questi sistemi il calcolo di  $X'$  e  $X''$  nella struttura simmetrica resta del tutto indipendente da quello di  $X'''$ . In particolare se le due travi sono soggette allo stesso carico uniforme  $p$  e quindi per ambedue e'  $\tilde{M} = -p(l-z)^2/2$ , si ottiene:

$$X' = X'' = 0, \quad X''' = \frac{pl^2/3U_c}{1 + EJ_y/GJ_t}$$

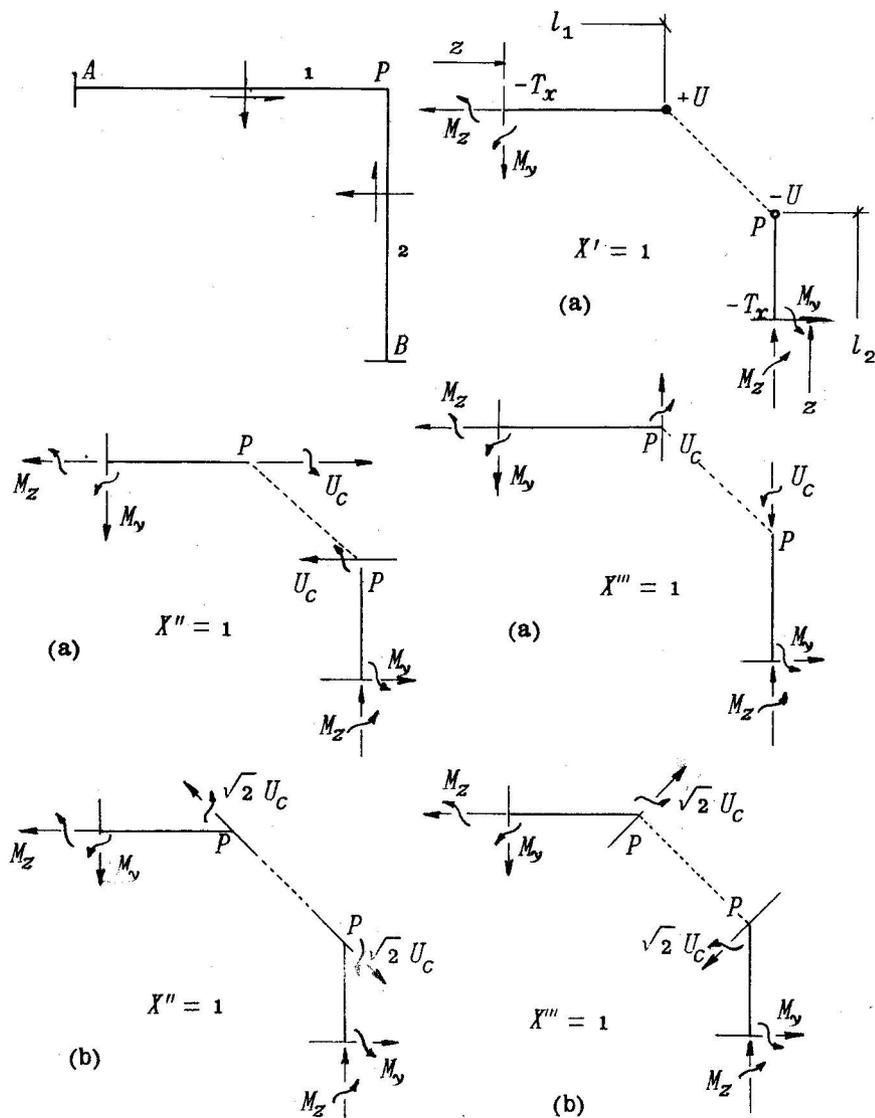


Fig. 119 - Sistemi supplementari per uno schema 3 volte iperstatico.

- (a)  $X' = 1$  : nella trave 1,  $T_x^I = U$ ,  $M_y^I = U(z - l_1)$ ,  $M_z^I = 0$   
 nella trave 2,  $T_x^I = -U$ ,  $M_y^I = U(l_2 - z)$ ,  $M_z^I = 0$
- $X'' = 1$  : nella trave 1,  $T_x^{II} = M_y^{II} = 0$ ,  $M_z^{II} = U_C$   
 nella trave 2,  $T_x^{II} = M_z^{II} = 0$ ,  $M_y^{II} = U_C$
- $X''' = 1$  : nella trave 1,  $T_x^{III} = M_z^{III} = 0$ ,  $M_y^{III} = U_C$   
 nella trave 2,  $T_x^{III} = M_y^{III} = 0$ ,  $M_z^{III} = U_C$
- (b)  $X'' = 1$  : nella trave 1,  $T_x^{II} = 0$ ,  $M_y^{II} = U_C$ ,  $M_z^{II} = -U_C$   
 nella trave 2,  $T_x^{II} = 0$ ,  $M_y^{II} = -U_C$ ,  $M_z^{II} = U_C$
- $X''' = 1$  : nella trave 1,  $T_x^{III} = 0$ ,  $M_y^{III} = U_C = M_z^{III}$   
 nella trave 2,  $T_x^{III} = 0$ ,  $M_y^{III} = U_C = M_z^{III}$

d) Si consideri il telaio ad anello della fig.120 nella condizione di carico ivi indicata. Lo schema principale viene definito ponendo  $M_y = T_x = 0$  nella sezione  $\omega = 0$  e  $M_y = 0$  per  $\omega = \pi/2$  (fig.120a). Per l'equilibrio alla rotazione intorno al diametro orizzontale deve essere anche  $M_y = 0$  per

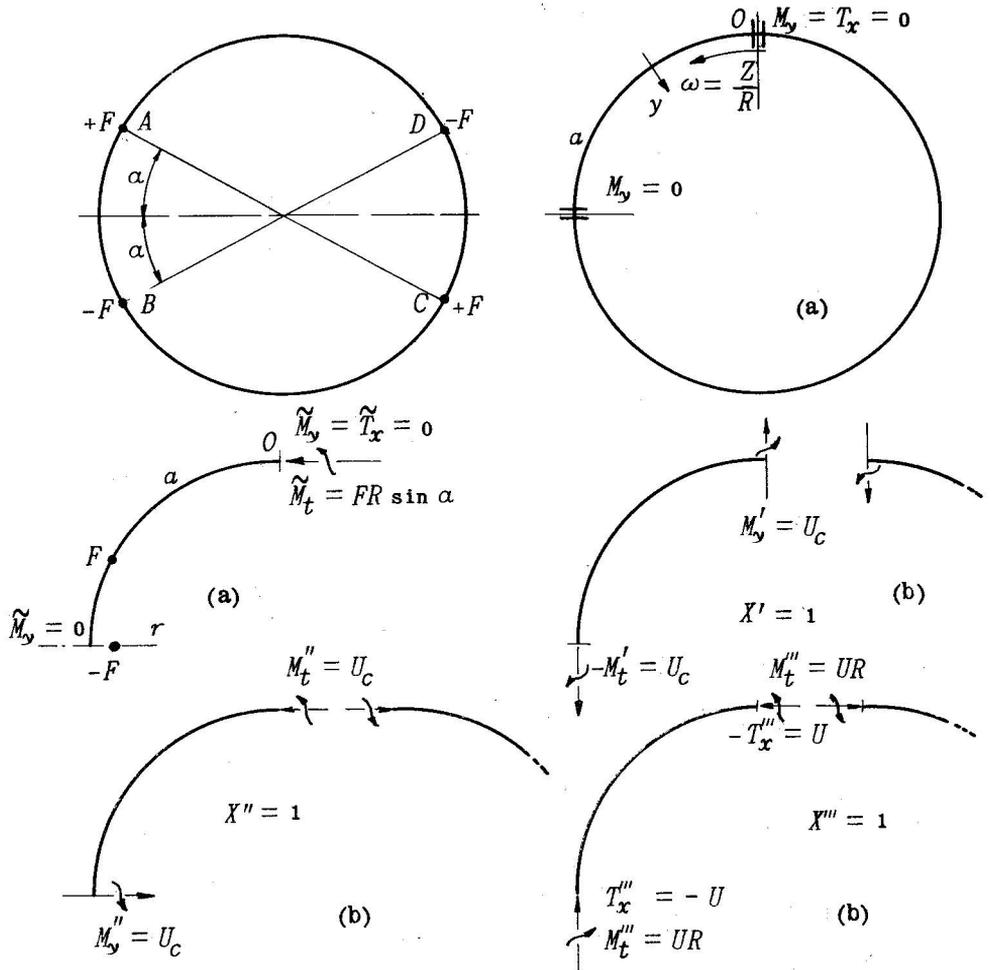


Fig. 120 - Telaio ad anello caricato trasversalmente.

(a) Schema principale. (b) Sistemi supplementari.

$$\begin{aligned}
 X' = 1 & , M_y' = U_C \cos \omega , M_t' = -U_C \sin \omega , T_x' = 0 \\
 X'' = 1 & , M_y'' = U_C \sin \omega , M_t'' = U_C \cos \omega , T_x'' = 0 \\
 X''' = 1 & , M_y''' = 0 , M_t''' = UR , T_x''' = -U
 \end{aligned}$$

$\omega = 3\pi/2$ ; per l'equilibrio alla rotazione intorno al diametro verticale e'  $M_y = 0$  per  $\omega = \pi$ ; in quella sezione e' anche

$T_x = 0$ . Lo schema principale e' dunque simmetrico rispetto ad entrambi i diametri, rispetto ai quali i carichi sono antime-  
trici; quindi si puo' limitare il calcolo ad un quarto di anello. Per questo l'equilibrio alla rotazione intorno alla retta  $r$  vale ad individuare il momento  $\tilde{M}_t$  in  $O$ . Si trova quindi:

$$\tilde{M}_y = FR \sin a \sin \omega \quad , \quad \tilde{M}_t = FR \sin a \cos \omega$$

fino al punto  $A$  dove agisce la forza  $F$ . Oltre tale punto e'

$$\tilde{M}_y = FR \cos a \cos \omega \quad , \quad \tilde{M}_t = FR(1 - \cos a \sin \omega)$$

Tre sistemi supplementari sono definiti nella fig. 120b. I primi due sono simmetrici rispetto ai due diametri anzidetti e quindi non intervengono nelle condizioni di carico considerate. Il terzo da' luogo ai momenti:

$$\frac{2}{\pi}(a + \cos 2a) - 1$$

da aggiungere ai momenti principali torcenti. Quelli flettenti mantengono come definitivi i valori del sistema principale.

Si osservi che i tre sistemi supplementari della fig. 120b sono ortogonali e quindi le tre iperstatiche sono calcolabili separatamente per qualunque condizione di carico.