

CAPITOLO V

SISTEMI PIANI IPERSTATICI

V.1 - Sistema principale. Si è visto che, nella risoluzione di uno schema di struttura, il primo passo consiste nel conteggio dei vincoli che si debbono idealmente troncare per ridurre il sistema a corpi semplici isolati. Se il numero delle caratteristiche dei vincoli soppressi eguaglia quello delle equazioni che la statica mette a disposizione, lo schema è staticamente determinato e quindi risolubile coi procedimenti dei Capp. II e III. Se il numero delle incognite supera di h quello delle equazioni di equilibrio disponibili, ossia se il sistema è h volte iperstatico, si potranno assegnare a piacere i valori per un numero h di caratteristiche di sollecitazione o di vincolo e la determinazione di ogni altra caratteristica sarà possibile mediante le equazioni d'equilibrio. Gli sforzi che così si ottengono non coincideranno di regola, con quelli che i carichi producono nella struttura reale. Tuttavia la loro calcolo costituisce una operazione necessaria nel procedimento di risoluzione a cui si accennerà in primo luogo. Diremo *sistema principale* lo schema strutturale modificato per l'aggiunta di un numero h di assunzioni atte a renderlo staticamente determinato: *sforzi principali* saranno quelli che su tale schema produce l'applicazione dei carichi. In genere questi sforzi saranno controdistinti sovrapponendo il segno $\sim$ al simbolo.

Il procedimento più immediato per rendere isostatica una struttura h volte iperstatica consiste nel supporre uguali a zero h caratteristiche di sollecitazione o di vincolo. Questa via ha un vantaggio di evidenza: le assunzioni fatte sono visualizzabili sullo schema stesso della struttura che può essere rappresentata trasformata nel sistema principale, con h vincoli soppressi. Tuttavia occorre subito precisare che il sistema principale può anche essere introdotto mediante posizioni analitiche che difficilmente si potrebbero mettere in evidenza sul disegno ma che non sono tuttavia di uso più difficile.

È evidente che vi sono infinite maniere di rendere iso-

statica una struttura sia pure una volta iperstatica. Unica limitazione inderogabile alla libertà di scelta del sistema principale è che questo non sia un sistema anomalo nel senso indicato nel § II.6. Qualunque scelta che non cada in quell'errore è concettualmente ammissibile. La pratica può peraltro suggerire una scelta come più opportuna che altre. Un criterio particolare è il seguente: se la struttura possiede una certa simmetria, conviene che il sistema principale la possieda anche. Un criterio di carattere più generale, che ha importanza nella esecuzione materiale dei calcoli, numerici o grafici, è il seguente: gli sforzi principali debbono essere non troppo lontani dai definitivi, per quanto può a priori prevedersi. L'attuazione di questo criterio, alquanto vago, richiede matura esperienza per la applicazione. Tuttavia qualche esempio mostrerà come la sua adozione possa in molti casi essere facile.

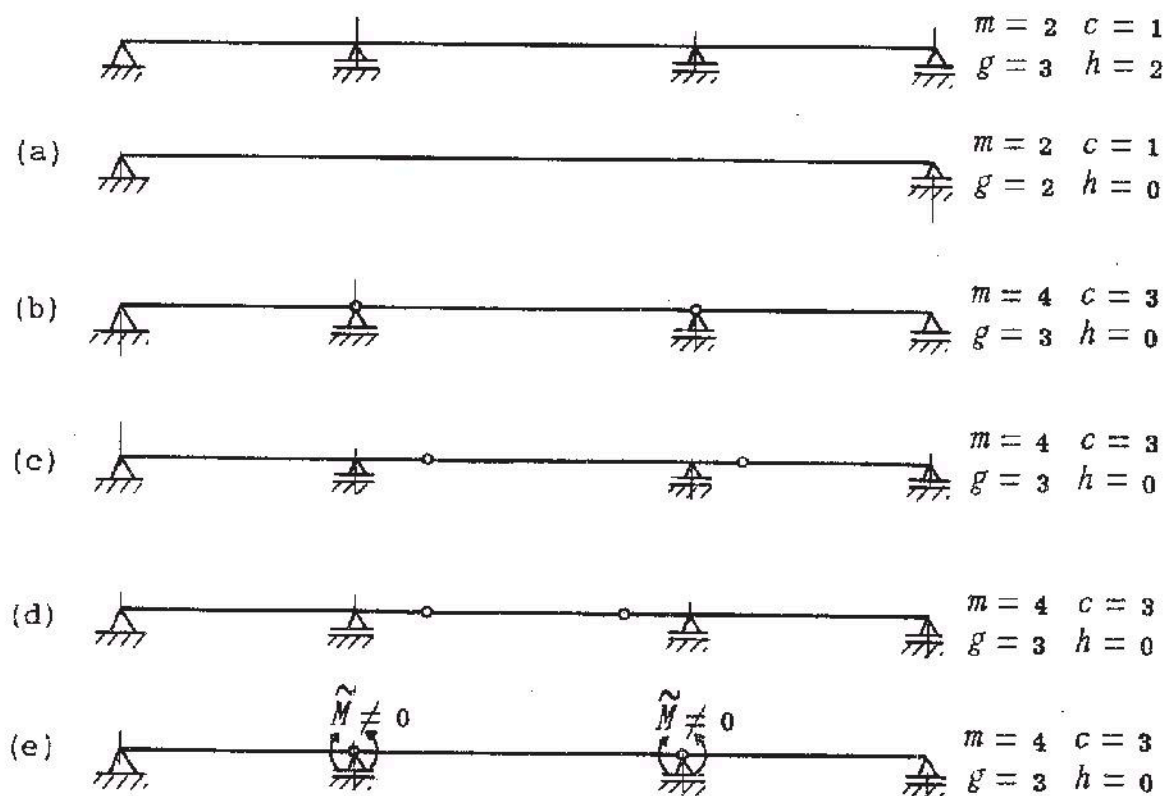


Fig. 70 - Vari schemi principali di una stessa struttura iperstatica.

La trave continua su 4 appoggi (di cui uno opera da cerniera per eventuali forze orizzontali) può essere resa isostatica mediante soppressione dei due appoggi centrali (fig. 70a). È intuitivo che la struttura così modificata, caricata come è di solito da forze tutte verticali, volte nello stesso verso, si troverà in condizioni assai peggiori che nella reale

situazione. Invece, se come sistema principale si assume quello della fig. 70b con la continuit  sugli appoggi interrotta da cerniere, si avr  una situazione meno discosta dalla effettiva. Un'altra possibile scelta consisterebbe nella riduzione ad uno schema Gerber (fig. 70c), meglio se questo rispetta l'eventuale simmetria della struttura (fig. 70d). Si noti come la riduzione ad una trave Gerber   in sostanza equivalente a quella della fig. 70b, con l'aggiunta di momenti sugli appoggi (figura 70e). Generalizzando possiamo dire che si pu  sopprimere un vincolo (trasformando, ad es., il vincolo triplo di continuit  della trave in uno doppio, con l'inserzione di una cerniera) oppure si pu  porre una condizione analitica circa la reazione di quel vincolo oppure si pu  fissare il valore di quella reazione in base a risultati di un calcolo analogo o di tabelle prefissate: le varie scelte sono concettualmente equivalenti e si differenziano solo nella materiale esecuzione dei calcoli numerici. Occorre infine osservare che se la risoluzione   condotta per via analitica o se sono disponibili strumenti per il calcolo numerico, le preferenze accennate perdono valore; per l'uso delle calcolatrici numeriche passa in primo piano di importanza nella scelta del sistema principale la semplicit  di impostazione.

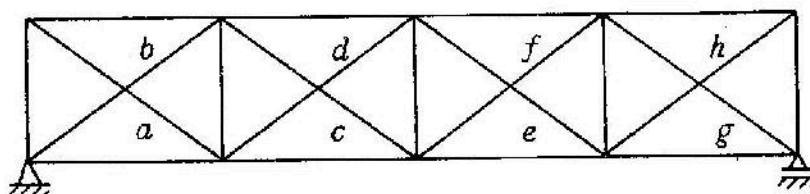


Fig. 71 - Travatura reticolare iperstatica.

Nel caso di travature reticolari, la maniera pi  immediata di definire il sistema principale consiste nel sopprimere h aste, ossia nel supporre che in ognuna di esse sia $\tilde{N} = 0$. Cos  nel caso di una travatura a croce di S. Andrea a 4 maglie (fig. 71) si potranno tagliare le diagonali a, c, e, g scrivendo dunque

$$\tilde{N}_a = \tilde{N}_c = \tilde{N}_e = \tilde{N}_g = 0 \quad [78]$$

Ovvero si potranno fare le assunzioni

$$\tilde{N}_a = -\tilde{N}_b, \quad \tilde{N}_c = -\tilde{N}_d, \quad \tilde{N}_e = -\tilde{N}_f, \quad \tilde{N}_g = -\tilde{N}_h \quad [79]$$

che pi  da vicino possono riprodurre l'effettiva situazione. Questa   una posizione che difficilmente si riuscirebbe a rap-

presentare sullo schema ma che in pratica conduce a calcoli parimenti semplici (*).

V.2 - Sistemi supplementari. Nella struttura resa isostatica mediante soppressione di h vincoli scelti come *sovrabbondanti* possiamo produrre sollecitazioni senza intervento di forze esterne applicando presso ciascuno dei vincoli prima soppressi azioni uguali ed opposte sulle due parti, come le eser-

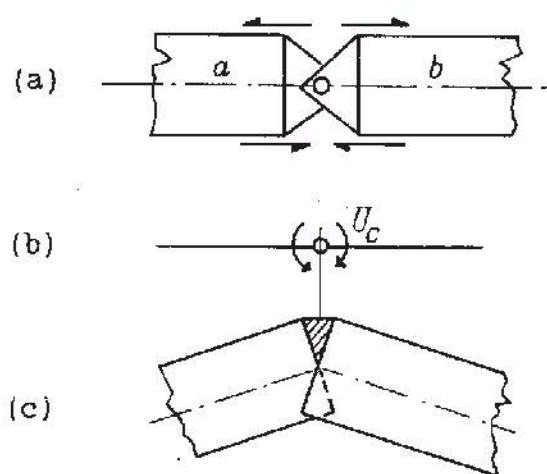


Fig. 72 - (a) Coppia presso la cerniera. (b) Indicazione schematica. (c) Unione con dislocazione rotatoria.

citerebbe quel vincolo. Ad esempio, se in una sezione la continuit  della trave   stata interrotta ponendo, per il sistema principale, una cerniera, si potranno idealmente applicare coppie uguali e opposte sulle due parti (fig. 72). Se in una data sezione si   collocata una coppia prismatica si da annullare lo sforzo N nel sistema principale, si potra' artificialmente introdurre una forza normale fra le due parti (fig. 73a); se la coppia prismatica   stata collocata in modo da annullare il taglio in quella sezione, si applicheranno le due forze tra-

sversali opposte indicate nella fig. 73c. Le sollecitazioni che si producono in queste condizioni sono ancora calcolabili coi procedimenti del Cap. II, perche' esse si riferiscono al sistema isostatico principale.

In tal modo per la struttura h volte iperstatica si potranno produrre h di tali sistemi di sollecitazioni che saranno detti *supplementari*.   assolutamente necessario che questi sistemi siano fra loro indipendenti, ossia che nessuno di essi possa essere ottenuto per combinazione dei rimanenti. Tale condizione   certamente realizzata se condizioni di carico come quelle delle figg. 72 e 73 vengono esercitate presso ciascuno dei vincoli soppressi, separatamente.   opportuno pero' rilevare che, oltre questa scelta immediata altre sono possi-

(*) Le [79] significano che, in ciascuna maglia la forza tagliente si divide in parti uguali sulle due diagonali, invece che ricadere su una sola come vorrebbero le [78].

bili talvolta piu' convenienti. In linea generale si puo' dire che un sistema supplementare potrebbe essere definito facendo intervenire simultaneamente tutti i vincoli sovrabbondanti, con rapporti arbitrariamente fissati fra le varie reazioni. Sulla eventuale convenienza di tali scelte combinate si discuterà piu' avanti. Qui si sottolinea la proprietà essenziale di questi stati di sollecitazione: essi sono prodotti da *due* forze (o *due* coppie) uguali e contrarie, esercitanti fra gli elementi affacciati presso il vincolo soppresso. Essi potrebbero essere originati creando sconnessioni (*dislocazioni*) presso i vincoli sovrabbondanti, ossia saldando in posizione ruotata (nel caso della fig. 72) o traslata (nel caso della fig. 73) le due parti affacciate.

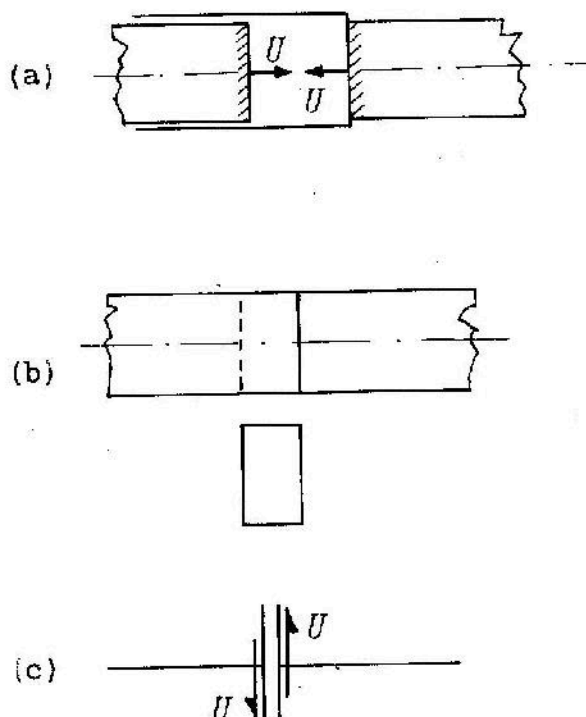


Fig. 73 - (a) Forze assiali che creano una dislocazione. (b) Dislocazione longitudinale per asportazione di materiale. (c) Forze taglienti che creano una dislocazione trasversale.

V.3 - Combinazione degli sforzi principali e supplementari.

Per precisare le idee, ci riferiamo ad uno schema reticolare due volte iperstatico. Il sistema principale venga definito tagliando due aste a, b o, piu' precisamente, interponendo su entrambe accoppiamenti prismatici atti a rendere $N = 0$. Si calcoleranno, analiticamente o graficamente, tre sistemi di sforzi:

(*) Quando la reazione si esercita fra uno dei corpi e il terreno (fig. 74) si tralascia talvolta di segnalare l'abbinamento delle due forze opposte, dato che degli effetti della forza sul terreno si suole prescindere.

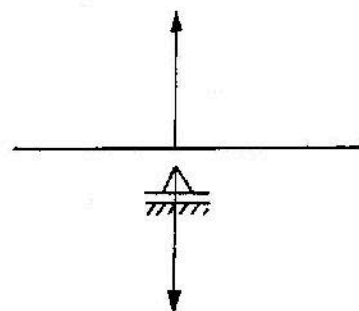


Fig. 74 - Iperstaticita' relativa ad un appoggio.

principale con $F \neq 0$, $N_a = 0$, $N_b = 0$
 1° supplementare, con $F = 0$, $N_a = U$, $N_b = 0$
 2° supplementare, con $F = 0$, $N_a = 0$, $N_b = U$

Dunque nel primo caso si assoggetta la struttura resa isostatica ai carichi F , nel secondo la si assoggetta alla forza U agente con versi opposti fra le facce del taglio praticato all'asta a , nel terzo alla forza U presso l'asta b . Si indicano rispettivamente con $\tilde{N}_i, N'_i, N''_i$ gli sforzi nell'asta generica i nei tre casi. Combiniamo ora i tre sistemi sommando agli sforzi del primo quelli del secondo moltiplicati per un fattore X' , indefinito al momento, e quelli del terzo moltiplicati per un altro fattore arbitrario X'' . Scriviamo cioè per un'asta generica i

$$N_i = \tilde{N}_i + X' N'_i + X'' N''_i \quad [80]$$

e in particolare per le aste a e b

$$N_a = X' U, \quad N_b = X'' U \quad [81]$$

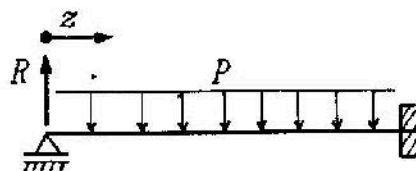
E' facile controllare che, per qualunque coppia di valori che si assegnino per X' e X'' le condizioni di equilibrio di ciascun nodo restano verificate (*). Si e' dunque costruita nella [80] l'espressione piu' generale per lo stato di sollecitazione che possa crearsi nella travatura rispettando le condizioni di equilibrio e prescindendo dall'esame delle deformazioni che a questi sforzi corrispondono. Similmente, per una travatura inflessa due volte iperstatica si scrive per i momenti in qualunque sezione l'espressione

$$M = \tilde{M} + X' M' + X'' M'' \quad [82]$$

Espressioni analoghe si scrivono per tutte le caratteristiche di sollecitazione. Si rappresenta così lo stato generale di sollecitazione come combinazione di quello principale e dei sistemi supplementari, ciascuno di questi moltiplicato per un fattore indeterminato. Gli sforzi principali possono essere definiti come prodotti dai carichi esterni, per $X' = X'' = 0$; i due supplementari sono chiamati sistemi $X' = 1$ e $X'' = 1$ rispettivamente.

(*) Infatti, poiche' gli sforzi $\tilde{N}$ fanno equilibrio ai carichi applicati sara' $\sum \tilde{N} \cos \alpha + F_x = 0$; poiche' i sistemi supplementari sono in equilibrio senza che intervengano carichi esterni sara' $\sum N' \cos \alpha = \sum N'' \cos \alpha = 0$. Quindi e' $\sum N \cos \alpha + F_x = \sum \tilde{N} \cos \alpha + X' \sum N' \cos \alpha + X'' \sum N'' \cos \alpha + F_x = 0$. E così per qualsiasi nodo in qualunque direzione si proietti.

Talvolta si usano per gli sforzi risultanti nella struttura iperstatica espressioni apparentemente differenti dalle [80], [82]. Ad esempio in una campata di una trave continua si possono scrivere i momenti nella forma [24]. I momenti semplici possono essere interpretati come momenti principali per la trave spezzata da cerniere sugli appoggi. I fattori $(Q \angle P)$, $(P \angle Q)$ rappresentano i quozienti M'/U_c , M''/U_c se le condizioni $X' = 1$ e $X'' = 1$ vengono definite introducendo momenti U_c al posto di M^P e M^Q rispettivamente. Similmente per la trave della fig. 75 si può scrivere



$$m = 2, \quad i = 1, \quad g = 1 \\ h = 1$$

Fig. 75 - Trave iperstatica soggetta a carico uniforme.

$$M = -pz^2/2 + Rz \quad [83]$$

essendo p il carico uniformemente distribuito, R la reazione dell'appoggio. La [83] rientra nella formulazione [82] se si considera come sistema principale quello corrispondente alla trave a sbalzo ($\tilde{M} = -pz^2/2$) e come sistema supplementare $X' = 1$ quello corrispondente ad una reazione $R = U$ (ossia, $M' = Uz$). Quindi è $R = UX'$, $Rz = X'M'$. In ogni caso è conveniente ricondurre il calcolo allo schema generale rappresentato dalla legge di scomposizione [82]. I momenti $\tilde{M}, M', M''$ e quelli degli altri sistemi supplementari se la struttura è più che due volte iperstatica, saranno rappresentati da grafici separatamente tracciabili prima ancora che si siano calcolati i valori di X' e X'' (*).

V.4 - Le equazioni di elasticità. Supponiamo, per precisare le idee, che il sistema supplementare $X' = 1$ sia generato dalle azioni rappresentate nella fig. 72a, b esercitate presso una cerniera introdotta per artificio di calcolo nella definizione del sistema principale. Attraverso la cerniera stessa nello stato di sollecitazione rappresentato dalla combinazione [82] si trasmette il momento $X'U_c$. Se questa configurazione di sforzi combinati deve essere quella medesima che si ha nella struttura reale (nella quale la cerniera non esiste e i tratti a e b di trave sono solidali) nella defor-

(*) Queste sono qui definite come fattori numerici, allo scopo di mantenere per M', M'' le dimensioni di momenti, per N', N'', T', T'' dimensioni di forze.

mazione risultante la rotazione relativa dei due tronchi deve essere nulla. Esprimiamo questa condizione mediante l'equazione dei lavori virtuali, assumendo come sistema a il sistema supplementare $X' = 1$ e come sistema b la configurazione reale di deformazioni. Il lavoro L_e deve essere nullo in questo caso: e perciò sarà $L_i = 0$. Ossia, scrivendo la [41] con la scelta sopra specificata per i sistemi a e b avremo

$$\int \frac{M' M dZ}{EJ} + \int \frac{N' N dZ}{EA} + \int \frac{T' T dZ}{GA_y} = 0 \quad [84]$$

Analoghe relazioni sussisteranno per ciascuno degli altri eventuali sistemi supplementari. Così se, ad esempio il sistema $X'' = 1$ sarà generato dalle azioni della fig. 73a esercitate presso la coppia prismatica introdotta per artificio di calcolo nella riduzione al sistema principale, l'equazione che si ottiene dalla [84] sostituendo M', N', T' con M'', N'', T'' indicherà che, per la deformazione relativa agli sforzi risultanti M, N, T la traslazione relativa assiale delle due sezioni affacciate deve essere nulla. Se un altro sistema supplementare è creato come mostra la fig. 73c la corrispondente equazione esprimerà l'annullarsi dello scorrimento relativo delle due facce separate dalla coppia prismatica per artificio introdotta. Le equazioni [84] vengono dette *equazioni di elasticità*. Esse esprimono le condizioni di *congruenza*: esigono cioè che la deformazione risultante rispetti la connessione della travatura evitando formazione di vani o compenetrazioni. Per far comparire esplicitamente nelle [84] le incognite iperstatiche X', X'' , ecc. occorrerà sostituirvi, al posto di M, N, T le espressioni analoghe alla [82]. Scriviamo esplicitamente queste equazioni per una travatura reticolare due volte iperstatica, sostituendo per brevità con ρ i fattori l/EA . Così dall'equazione $\sum N' N \rho = 0$ si ha

$$X' \sum N'^2 \rho + X'' \sum N' N'' \rho + \sum N' \tilde{N} \rho = 0 \quad [85]$$

e dalla $\sum N'' N \rho = 0$

$$X' \sum N' N'' \rho + X'' \sum N''^2 \rho + \sum N'' \tilde{N} \rho = 0 \quad [86]$$

le sommatorie intendendosi estese a tutte le aste. La struttura generale delle equazioni di elasticità appare evidente dalle [85], [86]. Gli sforzi principali entrano solo nei termini noti. Ciò significa che, se la medesima struttura dovrà essere calcolata per diverse condizioni di carico i coefficienti delle incognite nelle equazioni di elasticità vanno calcolati solo una volta per tutte. Ognuna delle equazioni di ela-

sticità e' in relazione con un sistema supplementare: gli sforzi a questo relativi figurano a fattore nelle somme o integrali, che costituiscono termini noti e coefficienti di quella equazione. Il coefficiente dell'incognita $X^{(i)}$ nell'equazione relativa al sistema $X^{(k)} = 1$ contiene i prodotti degli sforzi relativi ai due sistemi supplementari. Queste espressioni non mutano valore se si scambiano i numeri d'ordine i, k delle due X . Quindi, i coefficienti delle incognite, scritti in forma di determinante danno un quadro simmetrico rispetto alla diagonale.

V.5 - Calcolo di un telaio simmetrico. Applicheremo il procedimento sopra indicato alla risoluzione di un elemento strutturale frequentemente impiegato per le ordinate di fusoliera.

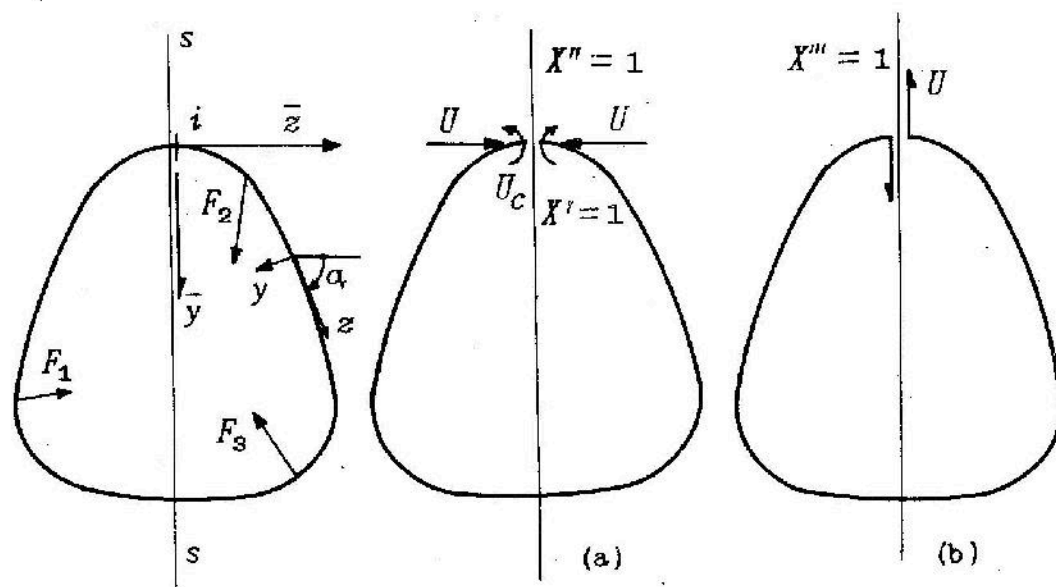


Fig. 76 - Telaio tre volte iperstatico. (a) Sistemi supplementari simmetrici. (b) Sistema antisimmetrico.

In questo caso la [8], con $m = 1$, $i = 1$, $c = p = g = 0$ da $h = 3$. Allo scopo di sfruttare le proprietà di simmetria rispetto al piano di traccia s (fig. 76) che il telaio possiede, assumiamo come sovrabbondanti le caratteristiche di sollecitazione in una delle sezioni sul piano di simmetria. Definiamo quindi i tre sistemi supplementari come mostra la fig. 76 e quindi abbiamo

$$\begin{aligned} M' &= U_c, & N' &= T' = 0 \\ M'' &= -U\bar{y}, & N'' &= U \cos \alpha, & T'' &= -U \sin \alpha \\ M''' &= U\bar{z}, & N''' &= U \sin \alpha, & T''' &= U \cos \alpha \end{aligned}$$

essendo $\cos \alpha = d\bar{z}/dZ$, $\sin \alpha = d\bar{y}/dZ$ lungo la linea d'asse.

Per la simmetria della struttura risulta che le espressioni

$$M'M'''/EJ, \quad N'N'''/EA, \quad T'T'''/GA_y$$

assumono valori uguali e di segno opposto nei punti simmetricamente situati rispetto al piano di simmetria di traccia s . Effettuando le integrazioni si trova che i coefficienti di X''' nelle prime due equazioni di elasticità, e quindi quelli di X' e X'' nella terza di quelle equazioni, sono nulli. Il sistema si scinde perciò in due equazioni nelle incognite X' e X'' ed una terza equazione dalla quale separatamente si ottiene X''' .

Trascurando le deformazioni relative alle sollecitazioni N e T e usando la notazione $dw = dZ/EJ$ la prima equazione di elasticità diventa

$$X' \int M'^2 dw + X'' \int M' M'' dw + \int M' \tilde{M} dw = 0 \quad [87]$$

Nella sezione presso la quale il taglio è praticato si hanno le caratteristiche di sollecitazione $M_0 = U_c X'$, $N_0 = UX''$, $T_0 = UX'''$. Tenendo conto di queste espressioni e di quelle di M' e M'' si ottiene dalla [87]

$$M_0 \int dw - N_0 \int \bar{y} dw + \int \tilde{M} dw = 0 \quad [88]$$

Dalla seconda equazione di elasticità

$$X' \int M' M'' dw + X'' \int M''^2 dw + \int M'' \tilde{M} dw = 0 \quad [89]$$

si ottiene

$$M_0 \int \bar{y} dw - N_0 \int \bar{y}^2 dw + \int \tilde{M} \bar{y} dw = 0 \quad [90]$$

La terza equazione da

$$T_0 \int \bar{z}^2 dw + \int \tilde{M} \bar{z} dw = 0 \quad [91]$$

Si è già rilevato che i sistemi supplementari possono essere definiti mediante combinazione delle reazioni dei vincoli sovrabbondanti. Nel caso in esame si può dare il sistema $X'' = 1$ come indica la fig. 77, essendo h una lunghezza arbitraria: si introducono, cioè, nella sezione in chiave uno

sforzo normale U ed un momento Uh . Si ha allora $M'' = U(h - \bar{y}) = -U\bar{y}$. Della libert  di scelta di h si puo' far uso per annullare la quantita' $\int M' M'' dw$: questa condizione fornisce la relazione

$$h \int dw = \int \bar{y} dw \quad [92]$$

La distanza h   dunque quella che intercorre fra il baricentro dei pesi elastici dw e quello della sezione in chiave. Col nuovo sistema supplementare risulta

$$M_0 = U_c X' + Uh X'' \quad , \quad N_0 = UX''$$

Le equazioni di elasticita' assumono ora la forma a incognite separate

$$U_c X' \int dw + \int \tilde{M} dw = 0 \quad , \quad UX'' \int \bar{y}^2 dw = \int \tilde{M} \bar{y} dw, \quad UX''' \int \bar{z}^2 dw + \int \bar{z} \tilde{M} dw = 0$$

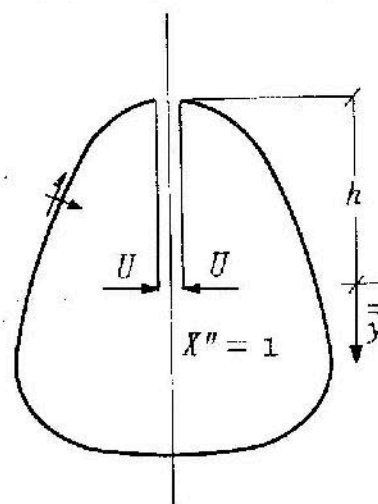


Fig. 77 - Sistema supplementare combinazione dei due della fig. 76a.

V.6 - Interpretazione geometrica delle equazioni d'elasticita'. Per concretare queste considerazioni, ci riferiamo all'espressione [85]. Ricordiamo che gli sforzi N' sono quelli che si producono nella travatura quando, tagliate le aste a e b , fra le facce del taglio dell'asta a si applichino forze che producano in essa una trazione U . Se si assume questa configurazione di sforzi come sistema a e come sistema b si assumono le deformazioni del sistema principale, dall'equazione dei lavori si ha la relazione

$$U \tilde{\delta}_1 = \sum N' \tilde{N}_\rho \quad [93]$$

posto che con $\tilde{\delta}_1$ si indichi la diminuzione di distanza dei due nodi estremi dell'asta a nel sistema principale. Scegliendo come sistema b quello corrispondente alla forza U applicata sul taglio dell'asta b si ha, per lo stesso sistema a ,

$$U \delta_{12} = \sum N' N''_\rho \quad [94]$$

posto che con δ_{12} si indichi la variazione di detta distanza nelle condizioni di carico $X'' = 1$. Similmente, assumendo per entrambi i sistemi quello stesso prima definito come sistema a

si ottiene la relazione

$$U\delta_{11} = \sum N'^2 \rho \quad [95]$$

Qui δ_{11} rappresenta l'accorciamento della distanza fra le sezioni tratteggiate nella fig. 73a, quando la trazione nell'asta a venga esercitata mediante il dispositivo ivi rappresentato. In definitiva, scrivendo l'equazione considerata nella forma

$$\delta_{11}X' + \delta_{12}X'' + \tilde{\delta}_1 = 0 \quad [96]$$

possiamo concludere che l'equazione [96] afferma l'annullarsi dello spostamento relativo delle facce del taglio nell'asta a , ottenuto sommando agli effetti dei carichi esterni con $X' = X'' = 0$ quelli della condizione di carico $X' = 1$ moltiplicati per X' e quelli della condizione $X'' = 1$ moltiplicati per X'' .

Si noti che nella sommatoria che definisce δ_{11} interviene il termine relativo all'asta a che nelle altre sommatorie non compare essendo $\tilde{N}_a = N_a'' = 0$. Indichiamo con δ_{11}^* la sommatoria calcolata con esclusione dell'asta a ; ossia poniamo

$$\delta_{11} = \delta_{11}^* + U\rho_a$$

Poiché in questa asta è $N = UX'$ possiamo scrivere la [96] in questa forma

$$NL/EA = -\tilde{\delta}_1 - \delta_{11}^*X' - \delta_{12}X'' \quad [97]$$

ossia: l'allungamento dell'asta a è uguale alla somma degli aumenti che la distanza dei suoi nodi subisce nel sistema principale e nei sistemi supplementari ciascuno moltiplicato per il rispettivo fattore X .

Per qualsiasi travatura, ogni equazione di elasticità può essere scritta ed interpretata come si è fatto per la [96]: essa viene ad esprimere l'annullarsi della dislocazione relativa al vincolo sovrabbondante a cui quella equazione si riferisce, tale dislocazione essendo espressa per sovrapposizione degli effetti del sistema principale e dei supplementari. Questa interpretazione geometrica può essere utile per le applicazioni quando alcuni degli spostamenti che i coefficienti δ esprimono possa essere calcolato per altra via più spedita che l'applicazione del metodo generale, che si vale dell'equazione dei lavori.

V.7 - Equazioni contenenti spostamenti. La fig. 78 rappresenta uno schema assai semplice di struttura una volta iperstatica che peraltro si presta a importanti considerazioni.

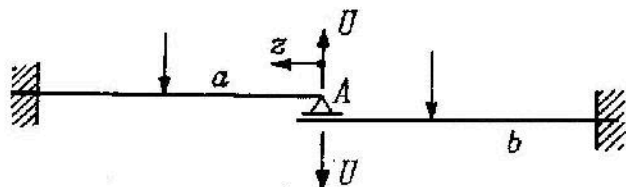


Fig. 78 - Schema a un grado di iperstaticità.

Il procedimento di risoluzione è immediato: scelto come sistema principale quello delle due travi a sbalzo, senza l'appoggio mutuo in A, e come sistema supplementare quello generato dalle due forze U segnate in figura, si scrive l'equazione di elasticità

$$X \left(\int_a M'^2 dw + \int_b M'^2 dw \right) + \int_a \tilde{M} M' dw + \int_b \tilde{M} M' dw = 0 \quad [98]$$

nella quale sono stati distinti coi simboli a, b gli integrali relativi alle due travi. Si applichi alla stessa struttura l'equazione dei lavori virtuali assumendo come sistema a quello prodotto dalla forza U agente verso l'alto sulla trave a , con momenti $M^a = Uz$ identici agli M' del sistema supplementare, ma limitati solo alla trave a (*). Si trova così

$$-U \eta_a = \int_a M' M dw \quad [99]$$

essendo η_a la freccia (positiva verso il basso) della sezione terminale della trave a . Si consideri adesso la trave b , soggetta alla forza U verso il basso; assumendo questi sforzi per il sistema a si ottiene

$$U \eta_b = \int_b M' M dw \quad [100]$$

essendo η_b lo spostamento della sezione terminale della tra-

(*) Le deformazioni non sarebbero congruenti in queste condizioni perché l'altra trave non si inflette: ma ciò non entra in questione nell'equazione dei lavori che non richiede la congruenza per il sistema a .

ve b . Per la congruenza deve essere $\eta_a = \eta_b$. Quindi sommando membro a membro le [99] e [100] si riottiene la [98] quando si sostituisca M con $\tilde{M} + XM'$. Con ovvia generalizzazione possiamo affermare che le equazioni di elasticità sono ottenibili eliminando gli spostamenti dalle relazioni che legano questi allo stato di tensione. Si vedranno nel seguito vari casi in cui l'eliminazione può essere meno conveniente che l'uso dell'equazione nella forma, diciamo, *mista*, contenente sforzi e deformazioni.

Se lo spostamento η_a è in qualche modo prescritto, si può calcolare l'iperstatica direttamente dalla [99]. Indicando con $\tilde{\eta}_a$ la freccia della sezione A nella trave a sbalzo soggetta ai suoi carichi, con η'_a la freccia stessa prodotta dalla forza U (verso l'alto e perciò negativa), si ha dalla [99] (*)

$$\eta_a = \tilde{\eta}_a + X\eta'_a$$

e quindi

$$X = (\tilde{\eta}_a - \eta_a) / (-\eta'_a)$$

La reazione XU risulta dunque nulla se lo spostamento imposto eguaglia quello della trave isolata a sbalzo; essa può agire verso l'alto o verso il basso a seconda del cedimento assegnato. Appare quindi che la struttura iperstatica può essere soggetta anche ad effetti sfavorevoli dei cedimenti dei vincoli; le sue condizioni di resistenza possono risultare peggiorate rispetto a quelle dello schema isostatico.

Una trattazione nella quale si fa uso di un'equazione del tipo [99] è quella della trave continua, secondo l'equazione dei tre momenti; questa si deduce immediatamente dalla relazione [68] che appunto è stata ottenuta mediante un sistema di esplorazione costituito da tre forze applicate a tre sezioni della trave rettilinea.

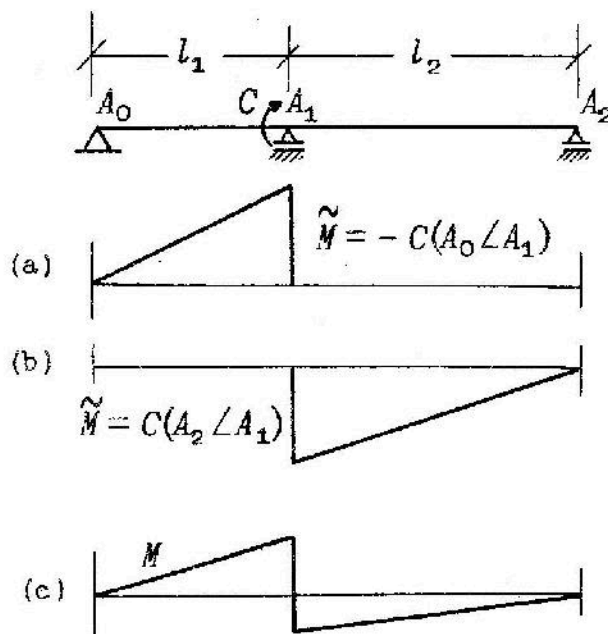
V.8 - La trave continua. La trave vincolata mediante una cerniera ed un appoggio semplice è struttura staticamente determinata che si calcola coi metodi del §II.6. Si considererà qui il caso in cui la trave corra continua (ossia non interrotta da cerniere come è la Gerber) su un numero $n > 2$ di appoggi. Uno di questi è costituito da una cerniera per sop-

(*) Infatti l'equazione dei lavori dà

$$-U\tilde{\eta}_a = \int M' M dw, \quad -U\eta'_a = \int M'^2 dw$$

chiede la determinazione dei momenti $\tilde{M}$ e il calcolo degli integrali [70] (*). Così si scrive la [101] per ciascuna terza di appoggi consecutivi ponendo per i il numero d'ordine assegnato a ciascuno degli appoggi intermedi. I momenti sul primo e sull'ultimo appoggio vengono introdotti con i valori dipendenti dagli eventuali carichi sugli sbalzi; naturalmente di questi carichi non si dovrà tener conto nel calcolo dei momenti $\tilde{M}$ nelle due campate che fanno capo al primo e all'ultimo appoggio, i loro effetti essendo già inclusi nei due momenti sugli appoggi di estremità.

a) Trave continua su 3 appoggi soggetta ad una coppia sull'appoggio centrale (fig. 80). Supposto che gli appoggi non si



spostino, e' $\delta_1 = 0$. Considerata la coppia C come agente sulla prima campata, si hanno i momenti semplici della fig. 80a e quindi $\tilde{K}_1 = -2C\beta_1$ dalla [70]. Essendo $M_0 = M_2 = 0$, dalla [101] abbiamo

$$M_1 = C\beta_1/(\beta_1 + \beta_2)$$

Dalla [24] abbiamo quindi nella prima campata

$$\begin{aligned} M &= \tilde{M} + M_1(A_0 \angle A_1) = \\ &= -C \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} (A_0 \angle A_1) \end{aligned}$$

mentre nella seconda e'

$$\begin{aligned} M &= M_1(A_2 \angle A_1) = \\ &= C \frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2} (A_2 \angle A_1) \end{aligned}$$

Fig. 80 - Trave continua su 3 appoggi caricata da una coppia C sull'appoggio centrale. (a)(b) Momenti semplici. (c) Momenti risultanti.

Naturalmente si avrebbero gli stessi risultati attribuendo la coppia C alla seconda campata. Coi momenti $\tilde{M}$ della

(*) Per il calcolo di $\tilde{K}$ può servire l'interpretazione statica indicata nella nota all'eq. [70] o l'interpretazione geometrica: $\tilde{K}$ è l'angolo che farebbero sull'appoggio i le tangenti alle linee elastiche delle due travi semplicemente appoggiate nelle due campate adiacenti (figura 79a).

fig.80 si avrebbe l'equazione:

$$M_1 = -C\beta_2/(\beta_1 + \beta_2)$$

Questo e' il momento a sinistra dell'appoggio, mentre a destra e' $M = M_1 + C$. Risulta dunque che la coppia C si ripartisce fra le due campate in ragione inversa ai relativi parametri β che ne misurano la deformabilita'.

b) Trave con 4 campate uguali, caricata su uno sbalzo (figura 81). Supposto che gli appoggi non si spostino (e quindi $\delta_i \equiv 0$), poiche' non insistono carichi sulle campate (e quindi $\tilde{A}_i \equiv 0$) e poiche' i fattori β sono tutti uguali, la [101] scritta per $i = 1, 2, 3$ da'

$$4M_1 + M_2 = 0 \quad M_1 + 4M_2 + M_3 = 0 \quad M_2 + 4M_3 + M_4 = 0$$

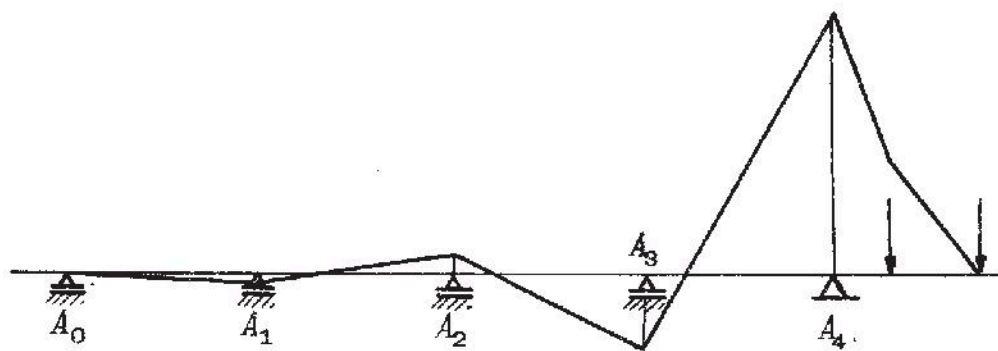


Fig. 81 - Trave continua su 5 appoggi con carichi su uno sbalzo.

Si ottiene quindi

$$M_2 = -4M_1, \quad M_3 = 15M_1, \quad M_4 = -56M_1$$

Poiche' M_4 e' noto in base ai carichi applicati sullo sbalzo, sono immediatamente note le sollecitazioni di flessione in tutta la trave (fig.81).

c) Trave con 5 campate uguali, soggetta a carico uniforme nella campata centrale (fig.82). Supposti nulli i cedimenti degli appoggi, abbiamo $\delta_i \equiv 0$. Anche $\tilde{X}_1$ e' nullo; per la [70] e' $\tilde{X}_2 = pl^3/24EJ$. Quindi dalla [101] per $i=1$ e $i=2$ si ha

$$4M_1 + M_2 = 0 \quad M_1 + 4M_2 + M_3 = -\frac{pl^3}{24EJ\beta} = -\frac{pl^2}{4} \quad [102]$$

Per la simmetria e' $M_3 = M_2$; non occorre quindi scrivere

altre equazioni, ottenendosi dalle [102]

$$M_1 = \frac{pl^2}{4 \cdot 19} \quad M_2 = -\frac{pl^2}{19}$$

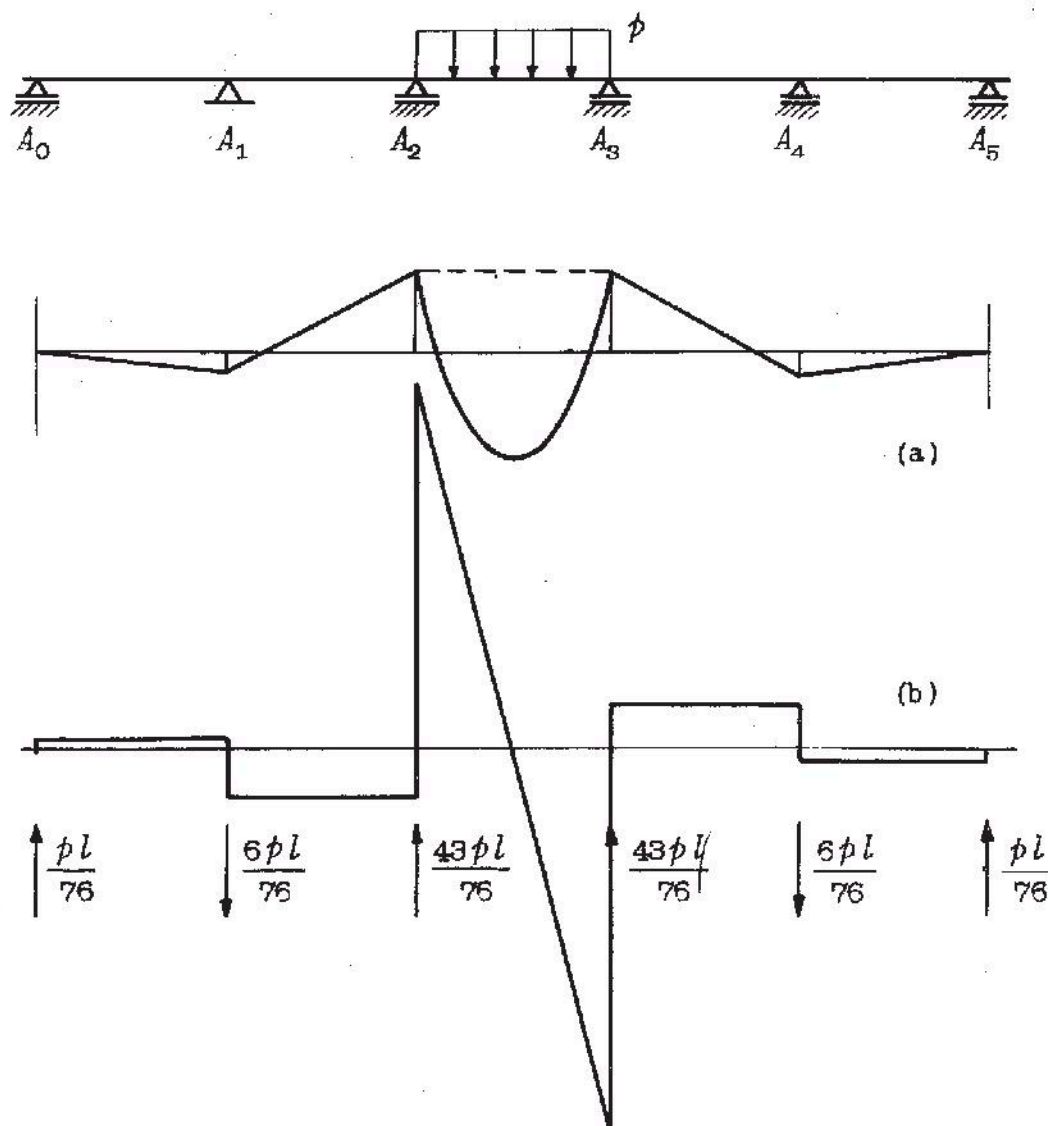


Fig. 82 - Trave continua su 6 appoggi.

d) Trave incastrata ai due estremi. Il problema viene ricondotto all'equazione dei tre momenti, potendosi sostituire un incastro con una campata rigida ($\beta = 0$).

Quindi la trave della fig. 83b, con $\beta_1 = \beta_3 = 0$ e' equivalente a quella della fig. 83a. Nel caso in cui la trave incastrata sia soggetta a carico uniforme, facendo uso

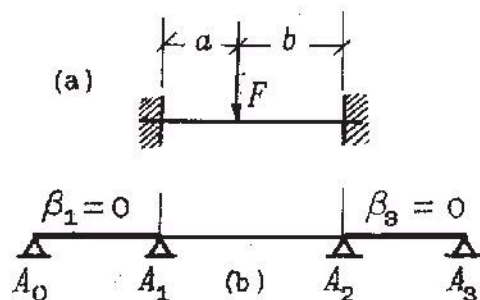


Fig. 83 - Trave incastrata agli estremi.

della [70] si scrive

$$2M_1 + M_2 = - \frac{pl^3}{24EJ\beta} = - \frac{pl^2}{4}$$

e quindi, essendo $M_1 = M_2$, si ha $M_1 = -pl^2/12$.

Se agisce una forza F (fig. 83a) nella campata, secondo la [67] si ha

$$2M_1 + M_2 = - Fab(l+b)/6lEJ\beta = - Fab(l+b)/l^2$$

$$M_1 + 2M_2 = - Fab(l+a)/l^2$$

e quindi

$$M_1 = - Fab^2/l^2, \quad M_2 = - Fa^2b/l^2 \quad [103]$$

2. Calcolo delle sollecitazioni. Una volta determinati i momenti sugli appoggi, il tracciamento completo del diagramma dei momenti è immediato; come indica la [24] e la fig. 33, basta riportare i momenti semplici a partire dalle rette che congiungono i punti del diagramma già trovati, sulle verticali di appoggio. Per il taglio fra gli appoggi $i-1$ e i , come indica la [25] basta sommare la quantità $(M_i - M_{i-1})/l_i$ ai valori del taglio trovati supponendo la campata semplicemente appoggiata. Così ad es., per il caso c) sopra considerato, il taglio è costante in ognuna delle prime due campate e vale $pl/76$ e $-5pl/76$ rispettivamente; valori opposti si hanno nelle campate simmetriche, mentre in quella centrale il taglio non differisce da quello che si avrebbe se la campata fosse semplicemente appoggiata (fig. 82b).

In corrispondenza di ciascun appoggio si ha una discontinuità nel diagramma del taglio, dovuta alla reazione. La condizione di equilibrio per l'elemento di trave situato sull'appoggio i (figura 84) dà

$$R_i = T_{i+} - T_{i-}$$

essendo T_{i-} il taglio nella sezione $z_i - dz$, T_{i+} il taglio nella sezione $z_i + dz$, R_i la reazione d'appoggio. Indicando con $\tilde{R}_i$ il valore della reazione calcolata nell'ipotesi che ogni campata fosse semplicemente appoggiata, si ha

$$R_i = \tilde{R}_i + \frac{M_{i+1} - M_i}{l_{i+1}} - \frac{M_i - M_{i-1}}{l_i} \quad [104]$$

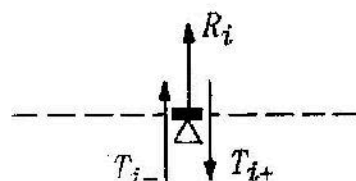


Fig. 84 - Equilibrio dell'elemento di appoggio.

3. Trave continua su appoggi elastici. Se il cedimento η_i e' proporzionale alla relativa reazione, ossia se, per ogni appoggio si conosce una costante k_i per cui e'

$$R_i = k_i \eta_i \quad [105]$$

eliminando dalla [101] gli spostamenti η_i mediante le [105] e [104] si ottiene un'equazione nella quale intervengono i momenti $M_{i-2}, M_{i-1}, M_i, M_{i+1}, M_{i+2}$, detta percio' equazione dei cinque momenti (*).

V.9 - La scelta dei sistemi supplementari. Un esempio di trave continua su 5 appoggi (fig.85) sara' qui usato per trarre conclusioni generalizzabili relative alla scelta dei sistemi supplementari.

Assunte come sovrabbondanti le reazioni degli appoggi A_1, A_2, A_3 possiamo definire i sistemi supplementari:

$$X' = 1, \quad \text{con} \quad R_1' = U, \quad R_2' = R_3' = 0$$

$$X'' = 1, \quad \text{con} \quad R_2'' = U, \quad R_1'' = R_3'' = 0$$

$$X''' = 1, \quad \text{con} \quad R_3''' = U, \quad R_1''' = R_2''' = 0$$

I relativi momenti sono indicati nella fig.85a. Le equazioni di elasticita' che cosi' si ottengono hanno una forma poco conveniente per i calcoli numerici. Le incognite vi compaiono con coefficienti poco differenti l'uno dall'altro e si richiede una grande precisione nel calcolo di questi se si vuole raggiungere una precisione soddisfacente nei risultati finali. Una scelta piu' opportuna per i sistemi supplementari e' la seguente:

$$X' = 1, \quad \text{con} \quad R_1' = -U_c/l_1 - U_c/l_2, \quad R_2' = U_c/l_2, \quad R_3' = 0$$

$$X'' = 1, \quad \text{con} \quad R_1'' = U_c/l_2, \quad R_2'' = -U_c/l_2 - U_c/l_3, \quad R_3'' = U_c/l_3$$

$$X''' = 1, \quad \text{con} \quad R_1''' = 0, \quad R_2''' = U_c/l_3, \quad R_3''' = -U_c/l_3 - U_c/l_4$$

Come e' facile controllare, per questa scelta le equazioni di elasticita' assumono la forma, certamente vantaggiosa, delle equazioni dei tre momenti.

(*) L'equazione dei tre momenti, in quanto vi si considerano fissati gli spostamenti degli appoggi, e' un'equazione della forma [99]. Se in particolare gli spostamenti sono nulli, essa coincide con l'equazione di elasticita' relativa al sistema supplementare $M_i = U_c, M_{i+1} = 0$. Con questa equazione coincide quella dei 5 momenti per appoggi elastici.

Altre scelte sono peraltro possibili, atte a rendere ancor piu' semplice la risoluzione delle equazioni di elasticita'. Evidentemente si giunge ad una situazione molto vantaggiosa quando ciascuna di quelle equazioni contenga una sola incognita: ossia quando si riesca ad annullare i coefficienti di X'' e X''' nella prima, di X' e X''' nella seconda e di X' e X'' nella terza equazione di elasticita'. Questo obiettivo puo' essere raggiunto operando nel modo seguente.

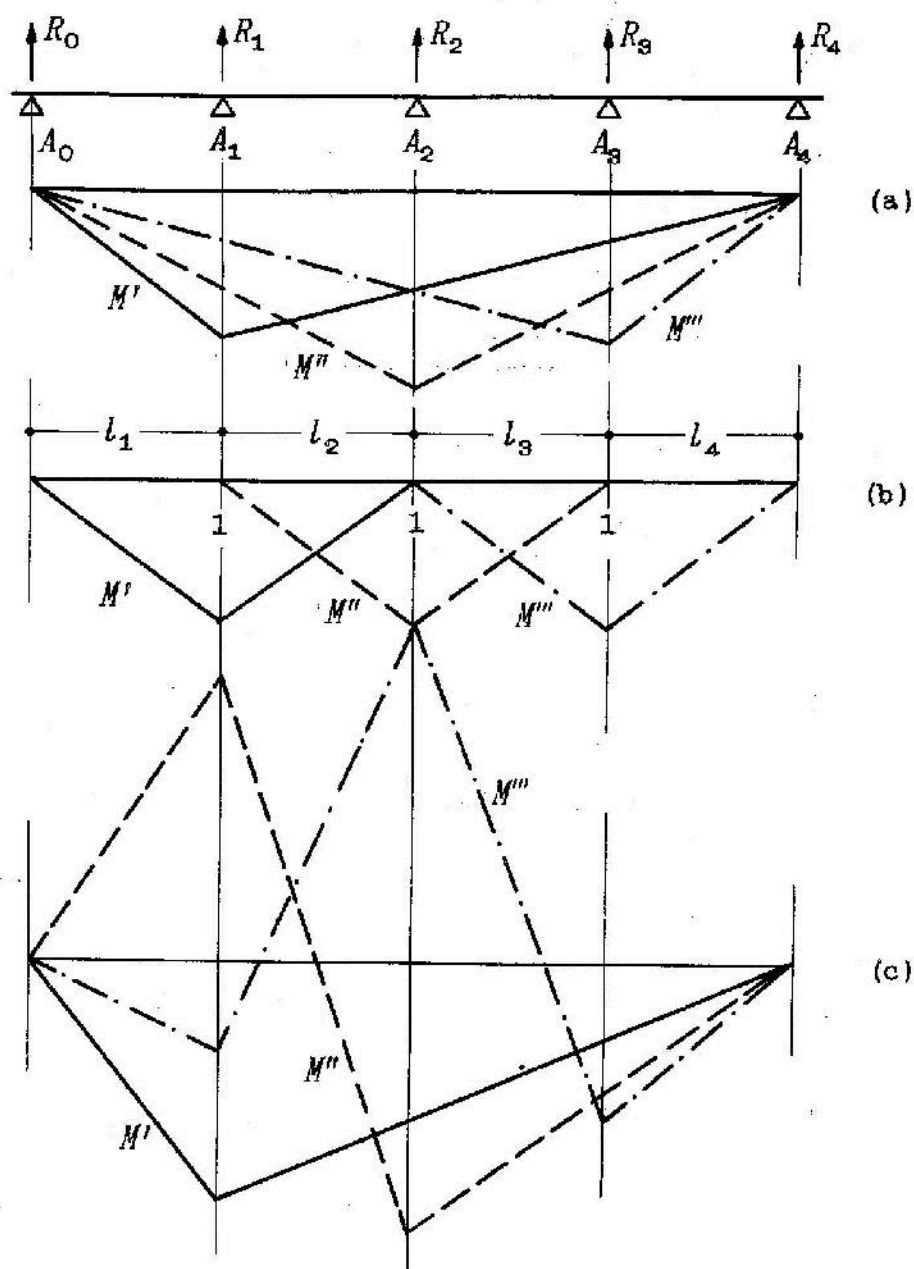


Fig. 85 - Differenti scelte dei sistemi supplementari per la trave continua su 5 appoggi.

Fissato a piacere il sistema degli sforzi M' , si deter-

minano i momenti M'' in modo da realizzare la condizione

$$\int M' M'' dw = 0 \quad [106]$$

Per far questo basta considerare che gli sforzi M'' possono definirsi combinando gli sforzi M' con qualsiasi differente sistema supplementare $\tilde{M}''$ mediante un fattore di combinazione Y il cui valore può essere scelto in modo da verificare la [106]. Si potrà cioè scrivere

$$M'' = \tilde{M}'' + Y M' \quad [107]$$

e calcolare Y dall'equazione che si ottiene sostituendo la [107] nella [106]. Similmente i momenti M''' possono essere ottenuti combinando i sistemi M', M'' con un terzo sistema $\tilde{M}'''$ indipendente da essi scrivendo

$$M''' = \tilde{M}''' + Y' M' + Y'' M'' \quad [108]$$

e poi calcolando i coefficienti Y' e Y'' in base alle condizioni

$$\int M' M''' dw = \int M'' M''' dw = 0 \quad [109]$$

Quando si siano così trovati i sistemi M', M'' e M''' , la risoluzione delle equazioni di elasticità risulta immediata poiché queste si riducono alla forma

$$\begin{aligned} \int \tilde{M} M' dw + X' \int M'^2 dw &= 0 \\ \int \tilde{M} M'' dw + X'' \int M''^2 dw &= 0 \\ \int \tilde{M} M''' dw + X''' \int M'''^2 dw &= 0 \end{aligned} \quad [110]$$

Nel caso particolare della trave con 5 appoggi si possono introdurre i momenti M' come nel caso della fig. 85c, ponendo $R'_1 = U$, $R'_2 = R'_3 = 0$. I momenti M'' potranno essere prodotti applicando reazioni R''_1 e R''_2 , con $R''_3 = 0$, tali da dare spostamento nullo in A_1 : così, come si vede immediatamente dall'equazione dei lavori virtuali, si soddisfa alla condizione [106]. Tale sistema supplementare è calcolato facilmente mediante l'equazione dei tre momenti: nel caso in cui le 4 campate siano uguali, si può scrivere $R''_1 = -11U$, $R''_2 = 9U$. Per la stessa via si ottiene il terzo sistema supplementare con forze R'''_1, R'''_2, R'''_3 che diano spostamenti nulli in A_1

e A_2 : nel caso di campate uguali si ha $R_1''' = 36U$, $R_2'' = -65U$, $R_3''' = 48U$. I momenti sono rappresentati nella fig. 85c; non occorre precisare le scale, potendo fissarsi a piacere il fattore U per ciascun sistema. Calcolate le X si determinano le sollecitazioni risultanti con l'ordinario metodo di sovrapposizione. In particolare, con il medesimo fattore U per i tre sistemi si ha

$$R_1/U = X' - 11X'' + 36X''' \quad , \quad R_2/U = 9X'' - 65X''' \quad , \quad R_3/U = 46X'''$$

Un altro esempio nel quale si è sciolto il concatenamento fra le equazioni di elasticità è stato mostrato nel § V.5. L'opportunità di procedere alla determinazione di questi speciali sistemi di sforzi supplementari, che vengono detti *ortogonali*, dipende dall'uso che deve farsi delle equazioni di elasticità. Se la struttura deve essere calcolata per molte condizioni di carico, il lavoro addizionale che si deve affrontare per determinare questi sistemi viene ampiamente compensato dalla semplificazione che essi arrecano nella risoluzione. Viceversa, se v'è modo di usare mezzi meccanici per il calcolo numerico, il vantaggio svanisce in gran parte. In ogni caso però ogni accorgimento che nel determinante dei coefficienti delle equazioni di elasticità porti a rinforzare i valori situati sulla diagonale principale rispetto agli altri, è vantaggioso per i computi numerici.

V. 10 - Deformazioni delle travature iperstatiche. Si è già osservato che lo stato di sollecitazione corrispondente ai carichi di esplorazione deve essere determinato in accordo con le condizioni di equilibrio, ma non si richiede il rispetto della congruenza per le deformazioni che a quelle sollecitazioni si accompagnerebbero; ciò perché l'equazione dei lavori virtuali esige solo che gli sforzi a siano equilibrati. Tale proprietà è assai utile nel calcolo degli spostamenti in una travatura iperstatica. Le sollecitazioni effettive vanno determinate, naturalmente, in modo da verificare, oltre alle condizioni della statica, le equazioni di elasticità; quando poi si applicano carichi fittizi per l'esame delle deformazioni, le relative sollecitazioni possono essere calcolate sulla struttura resa isostatica nel modo che si ritenga più opportuno. È facile vedere che, se si calcolassero le iperstatiche per questo secondo sistema, queste sarebbero prive di effetti sui risultati. Si supponga, per semplicità, che la struttura sia una volta iperstatica e che si considerino solo gli

effetti della flessione. Siano

$$M^a = \tilde{M}^a + X^a M'$$

i momenti trovati secondo gli usuali procedimenti di risoluzione della travatura iperstatica soggetta ai carichi di esplorazione. Sostituendo nell'espressione di L_1 si trova

$$L_1 = \int M^a M dw = \int \tilde{M}^a M dw + X^a \int M' M dw$$

Il coefficiente dell'incognita X^a relativa ai carichi di esplorazione e' nullo: appunto l'annullarsi di quell'integrale costituisce la condizione di elasticita' in base alla quale

e' determinata l'incognita iperstatica per gli sforzi effettivi. Solo gli sforzi $\tilde{M}^a$ determinati sul sistema principale danno contributo nel valore di L_1 .

Nella fig. 86 e' mostrata l'applicazione di queste considerazioni al calcolo della freccia nella sezione caricata dalla forza F di una trave incastrata ai due estremi. I momenti effettivi (figura 86a) sono determinati in base alla soluzione [103]. Nella sezione P , secondo la [24] e'

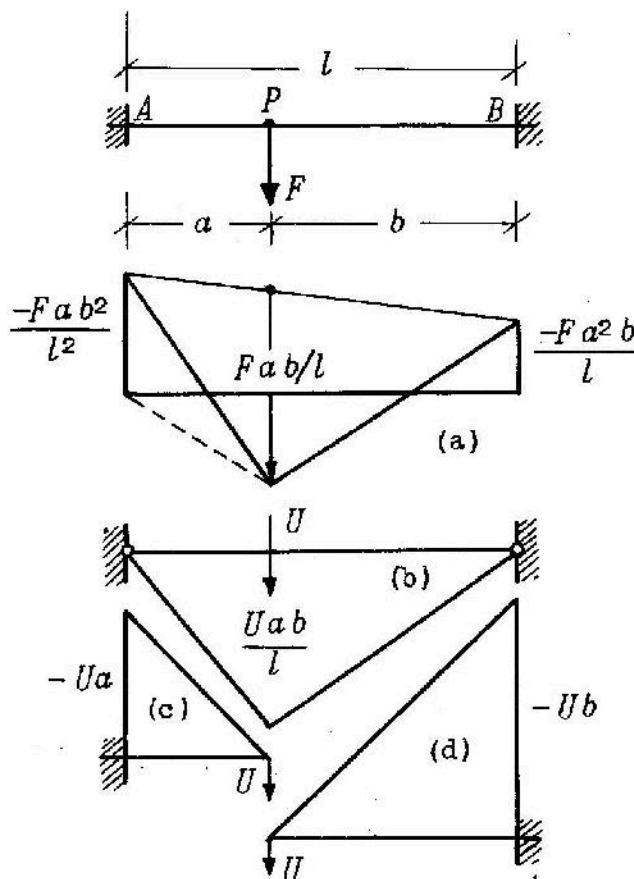


Fig. 86 - Calcolo della freccia sotto la forza F . (a) Momenti reali. (b), (c), (d) Possibili scelte per i sistemi di esplorazione.

$$M = -\frac{Fab^2}{l^2} \frac{b}{l} - \frac{Fa^2b}{l^2} \frac{a}{l} + \frac{Fab}{l} = \frac{2Fa^2b^2}{l^3}$$

Come momenti M^a si potrebbero adoperare i momenti effettivi, con $F = U$; ovvero quelli della fig. 86b che corrispondono alla trave incernierata ai due estremi, o quelli della fig. 86c relativi alla trave liberata del vincolo di destra, o quelli della trave liberata del vincolo di sinistra. Le due ultime scelte conducono piu' rapidamente al risultato. Con i momenti della fig. 86c

l'integrazione va estesa al tratto AP con

$$M^a = -Ua(P \angle A) \quad , \quad M^b = M = \frac{2Fa^2b^2}{l^3}(A \angle P) - \frac{Fab^2}{l^2}(P \angle A)$$

Si trova così

$$\frac{L}{U} = \eta = \frac{Fa^3b^3}{3EJl^3}$$

V.11 - Metodo dei vincoli addizionali. Si consideri una struttura (fig. 87) costituita da più travi variamente caricate, incastrate ad un estremo e all'altro collegate da un mutuo appoggio, come le due della fig. 78.

Ponendo

$$k_i = 1/\int z^2 dw \quad (i = a, b, c, d) \quad [112]$$

e sviluppando la [99] si trova la relazione

$$k_i(\tilde{\eta}_i - \eta) = T_i \quad [113]$$

dove $\tilde{\eta}_i$ è la freccia della mensola i con estremità A libera, T_i è il taglio in questa sezione nelle condizioni di reciproco vincolo per le quali η è la freccia comune delle 4 travi. La quantità $\bar{T}_i = k_i \tilde{\eta}_i$ rappresenta il taglio che si avrebbe in A se tale punto non si spostasse. Se qui si applicasse nella direzione $-y$ la forza

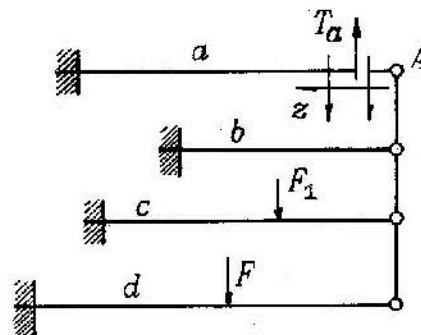


Fig. 87 - Mensole vincolate da mutuo appoggio in A .

$$\bar{R} = \sum k_i \tilde{\eta}_i \quad (i = a, b, c, d) \quad [114]$$

ciascuna trave si troverebbe nella situazione di una mensola con un appoggio fisso, soggetta a momenti $\bar{M} = \tilde{M} + \bar{T}_i z$. Introduciamo ora la forza $-\bar{R}$ in assenza di altri carichi. Si produrrà allora una freccia η data dalla

$$\eta \sum k_i = \bar{R} \quad [115]$$

Ciascuna trave riceve per effetto di tale forza un taglio addizionale

$$\hat{T}_i = -k_i \eta = -k_i \bar{R} / \sum k_i \quad [116]$$

Il taglio definitivo in A sarà dato da $\bar{T} + \hat{T}$. Le sollecitazioni in ciascuna trave sono date dalla somma degli sfor-

zi nella mensola con appoggio rigido e di quelli dati dalla forza $\hat{T}_i$.

Si osservi la differenza fra questo procedimento e quello sviluppato nei §§ V.1 - V.4. Lì la risoluzione procede da una combinazione di stati di tensione che rispettano le condizioni di equilibrio ma non la congruenza, singolarmente presi: la congruenza viene imposta alla combinazione che deve rappresentare gli sforzi effettivi. Qui sono invece combinate due soluzioni congruenti (per le quali cioè le sezioni terminali delle travi subiscono lo stesso spostamento) ma separatamente non equilibrate (nel senso che una forza $\pm \bar{R}$ viene aggiunta ai carichi reali); dalla composizione delle due soluzioni nasce la configurazione effettiva, nella quale la forza addizionale sparisce. Nella determinazione della seconda soluzione, quella relativa al sistema scaricato delle forze effettivamente agenti, si può assumere come incognita lo spostamento η , come è fatto nella [115] o si può eliminare tale spostamento, scrivendo che $\hat{T}_i/k_i$ deve avere per tutte le travi lo stesso valore: in ogni caso però un'equazione di equilibrio conclude il procedimento di risoluzione.

Si noti ancora che k è una caratteristica di rigidezza delle travi componenti; essa rappresenta il rapporto fra forza e spostamento per la sezione terminale nella direzione y . La [116] presenta una proprietà generale dei sistemi iperstatici: fra diversi elementi operanti in parallelo ciascuno assume una parte del carico proporzionale alla sua rigidezza; gli elementi più cedevoli sono i meno caricati.

V.12 - L'equazione dei quattro momenti. Si consideri una struttura composta da travi rettilinee; le estremità di ognuna di queste fanno capo al terreno, a cui sono vincolate da incastro o cerniera, oppure ad un incrocio, punto di giunzione di più travi (*). Fissiamo la nostra attenzione sulla trave PQ (fig. 88) di lunghezza l_1 , sulla quale viene stabilita a piacere la direzione della coordinata longitudinale z e quella del versore normale $\vec{j}_1$, direzione dell'asse y locale. Si applichi il sistema di carichi di esplorazione della

(*) Le travi che si congiungono possono anche essere solo due, nel qual caso più che di incrocio si può parlare di deviazione della linea d'asse.

fig. 88a. Per questi e'

$$L_e/U = \frac{(\vec{\eta}^Q - \vec{\eta}^P) \cdot \vec{j}_1}{l_1} - \varphi^Q \quad [117]$$

essendo $\vec{\eta}^P, \vec{\eta}^Q$ i vettori che rappresentano gli spostamenti dei nodi P, Q e φ^Q la rotazione del nodo Q . Nel calcolo

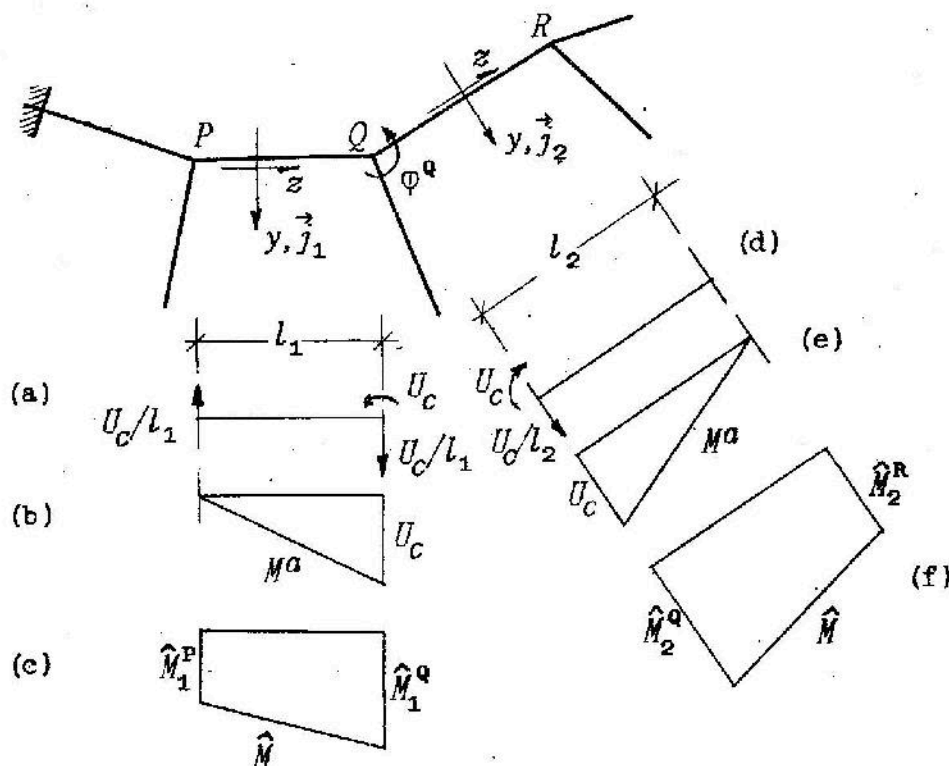


Fig. 88 - Schema per la deduzione dell'equazione dei 4 momenti.

di L_t trascuriamo, al solito, il termine relativo al taglio. Per i momenti flettenti adottiamo la scomposizione

$$M = \bar{M} + \hat{M} \quad [118]$$

indicando con $\bar{M}$ i momenti che si avrebbero se ciascuna campata fosse perfettamente incastrata agli estremi. Questi momenti si calcolano coi consueti metodi (ad es., con l'equazione dei tre momenti) e soddisfano di conseguenza alle relazioni

$$\int_P^Q \bar{M} dw = 0 = \int_P^Q \bar{M} z dw$$

qualunque sia l'origine dalla quale si misura z . Mentre i momenti $\bar{M}$ dipendono solo dai carichi trasversali applicati alla campata, i residui $\hat{M}$ sono legati alla deformazione dell'intera struttura: essi nella trave PQ hanno andamento li-

neare fra i valori estremi $\hat{M}^P$ e $\hat{M}^Q$. Se la rigidezza EJ della trave è costante risulta

$$L_i/U_c = (\hat{M}^P + 2\hat{M}^Q)_i \beta_1$$

essendo $\beta_1 = (l/6EJ)_1$; gli indici fuori parentesi stanno a distinguere i valori relativi alla trave che si considera; si deve infatti tener presente che per uno stesso nodo $\hat{M}$ assume diversi valori sulle varie travi che vi concorrono.

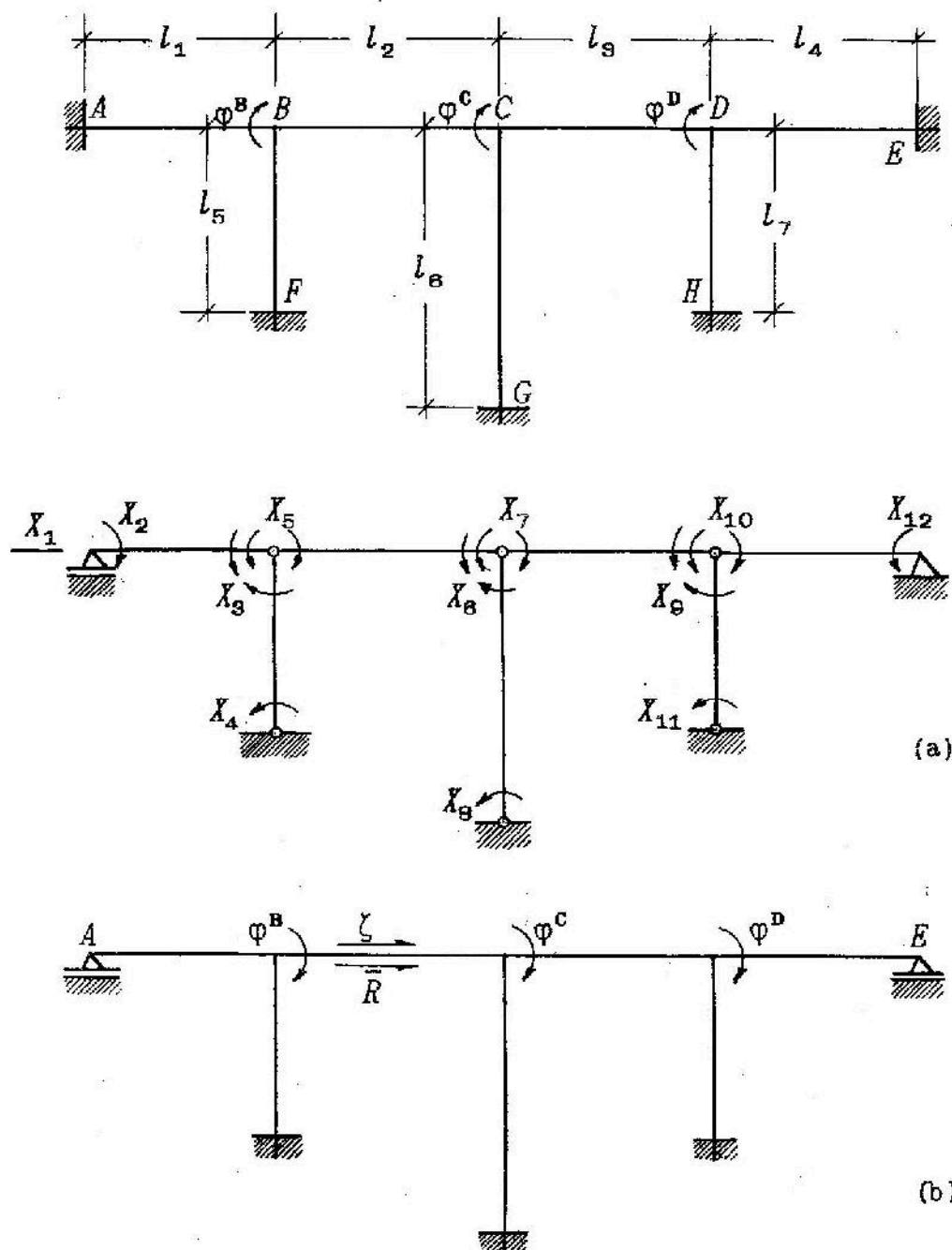


Fig. 89 - Trave solidale con piedritti. (a) Sistemi principale e supplementari. (b) Schema con mobilità orizzontale.

L'equazione dei 4 momenti vale per strutture per le quali gli spostamenti dei nodi possano ritenersi trascurabili. In tal caso l'eguaglianza $L_e = L_i$ dà

$$(\hat{M}^P + 2\hat{M}^Q)_1 \beta_1 = \varphi^Q \quad [119]$$

Se si associa il sistema di carichi di esplorazione della fig. 88a con quello della fig. 88d si elimina l'angolo φ^Q ottenendosi $L_e = 0$. Quindi dalla $L_i = 0$ si ottiene l'equazione dei 4 momenti (*)

$$(\hat{M}^P + 2\hat{M}^Q)_1 \beta_1 + (2\hat{M}^Q + \hat{M}^R)_2 \beta_2 = 0 \quad [120]$$

dove i valori con indice 2 si riferiscono alla adiacente campata QR.

Equazioni di questo tipo possono scriversi per ogni coppia di travi adiacenti. Il sistema va completato con le condizioni di equilibrio per i momenti $\bar{M} + \hat{M}$ in ciascun incrocio.

Per il conteggio delle equazioni disponibili nella risoluzione di travature con incastri reciproci fra le travi concorrenti nei nodi conviene riferirsi alle equazioni nella forma [119]. Consideriamo l'esempio della fig. 89. Scrivendo le [119] per ciascuna estremità delle travi che formano la travatura si hanno 14 equazioni. Per quelle riferentisi alle estremità incastrate al terreno il secondo membro è nullo; nelle altre appaiono i tre angoli $\varphi^B, \varphi^C, \varphi^D$. Il sistema viene completato dalle tre equazioni di equilibrio per gli incroci: si hanno in totale 17 equazioni contenenti come incognite 14 momenti e tre rotazioni.

V.13 - Formulazione negli spostamenti incogniti. Il metodo dei vincoli addizionali si presta ad una formulazione in termini di spostamenti incogniti, come s'è visto dal semplice esempio della fig. 87. Si considereranno ancora due applicazioni del metodo.

1. Trave solidale coi piedritti. Si consideri lo schema della fig. 89. Esso è 12 volte iperstatico; per risolverlo mediante le equazioni di elasticità si potrebbe adottare il sistema principale della fig. 89a ed i sistemi supplementari ivi

(*) Per tener conto dello spostamento dei nodi si dovrebbe aggiungere a secondo membro della [120] l'espressione $(\vec{\eta}^Q - \vec{\eta}^P) \cdot \vec{j}_1 / l_1 - (\vec{\eta}^R - \vec{\eta}^Q) \cdot \vec{j}_2 / l_2$.

indicati, costituiti, tutti ad eccezione del primo, da coppie presso le articolazioni (*). Trascurando le deformazioni relative agli sforzi assiali si possono ottenere, come sopra e' accennato, dopo eliminazione delle rotazioni $\varphi^B, \varphi^C, \varphi^D$, 14 equazioni, dalle quali si individuano i momenti ai due estremi delle 7 travi. Accenneremo ora al procedimento che sulla base delle medesime equazioni si puo' sviluppare tenendo in evidenza le rotazioni φ .

Supporremo ancora deformabili solo a flessione le travi; quindi i nodi 1,2,3 non si spostano. Allora a definire la configurazione del sistema bastano le rotazioni $\varphi^B, \varphi^C, \varphi^D$. Ciascuna trave, sia essa una campata orizzontale o un piedritto, si viene a trovare nelle condizioni di una trave appoggiata, soggetta sulle sezioni estreme a momenti che ne impongano le rotazioni. I momenti si scompongono nella forma [118] e si scrive

$$\hat{M} = (\varphi^* M^* + \varphi^{**} M^{**}) / U_\varphi \quad [121]$$

dove φ^* e φ^{**} sono le rotazioni delle sezioni estreme (nulle negli incastri al terreno); M^* e M^{**} sono i momenti che corrispondono ad una rotazione U_φ (fig. 90a) su un appoggio e nulla sull'altro. Così, indicando con Ω il rapporto EJ/l per ciascuna delle travi (tutte supposte di sezione costante) si ottengono le equazioni

$$\begin{aligned} C^B - 4\varphi^B(\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_5) - 2\varphi^C\Omega_2 &= 0 \\ C^C - 4\varphi^C(\Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_6) - 2\varphi^B\Omega_2 - 2\varphi^D\Omega_3 &= 0 \\ C^D - 4\varphi^D(\Omega_3 + \Omega_4 + \Omega_7) - 2\varphi^C\Omega_2 &= 0 \end{aligned} \quad [122]$$

essendo C^B la somma dei momenti $\bar{M}$ (coi rispettivi segni, individuati com'e' detto a proposito della fig. 31) trasmessi all'incrocio B dalle travi che vi concorrono; così per i nodi C e D . I carichi applicati intervengono solo in queste coppie. Qualunque sia la loro distribuzione e' facile calcolare ciascuna campata come perfettamente incastrata (e quindi indipendente dalle altre). Il successivo calcolo delle rotazioni e quindi dei momenti definitivi secondo le [122] e [121] risulta così piu' spedito che la determinazione delle iperstatiche secondo i procedimenti prima accennati.

(*) Si noti che l'equazione di elasticita' relativa ad uno dei sistemi supplementari della fig. 89a (ad eccezione della prima) non differisce dalla corrispondente [120] se vi si fanno comparire i momenti risultanti M : le differenze derivano dalle diverse scomposizioni [82] o [118].

Con facili modifiche si può passare al caso in cui i piedritti siano incernierati alla base. Si può usare l'espressione [118] intendendo che $\bar{M}$ sono i momenti prodotti dai carichi sul piedritto supposto incastrato in alto e incernierato in basso; per i momenti $\hat{M}$ vale l'espressione $\varphi^* \hat{M}^* / U_\varphi$ essendo φ^* la rotazione della estremità superiore e $\hat{M}^*$ i momenti indicati nella fig. 90b.

All'opposto di quanto avviene nella risoluzione della struttura mediante calcolo delle iperstatiche, qui la complessità dei calcoli aumenta al diminuire dei gradi di vincolo delle strutture. Ad es., per risolvere la travatura della fig. 89b che differisce dalla precedente in quanto i vincoli alle estremità della trave orizzontale consentono spostamenti in questa direzione, si deve introdurre un altro parametro di spostamento: lo spostamento orizzontale ζ , costante lungo la trave AE per la supposta indeformabilità assiale di questa. Quindi per i piedritti si deve aggiungere alla espressione di $\hat{M}$ un termine $\zeta \hat{M}^{***} / U_\eta$. Per la trave di sezione costante i momenti $\hat{M}^{***}$ sono

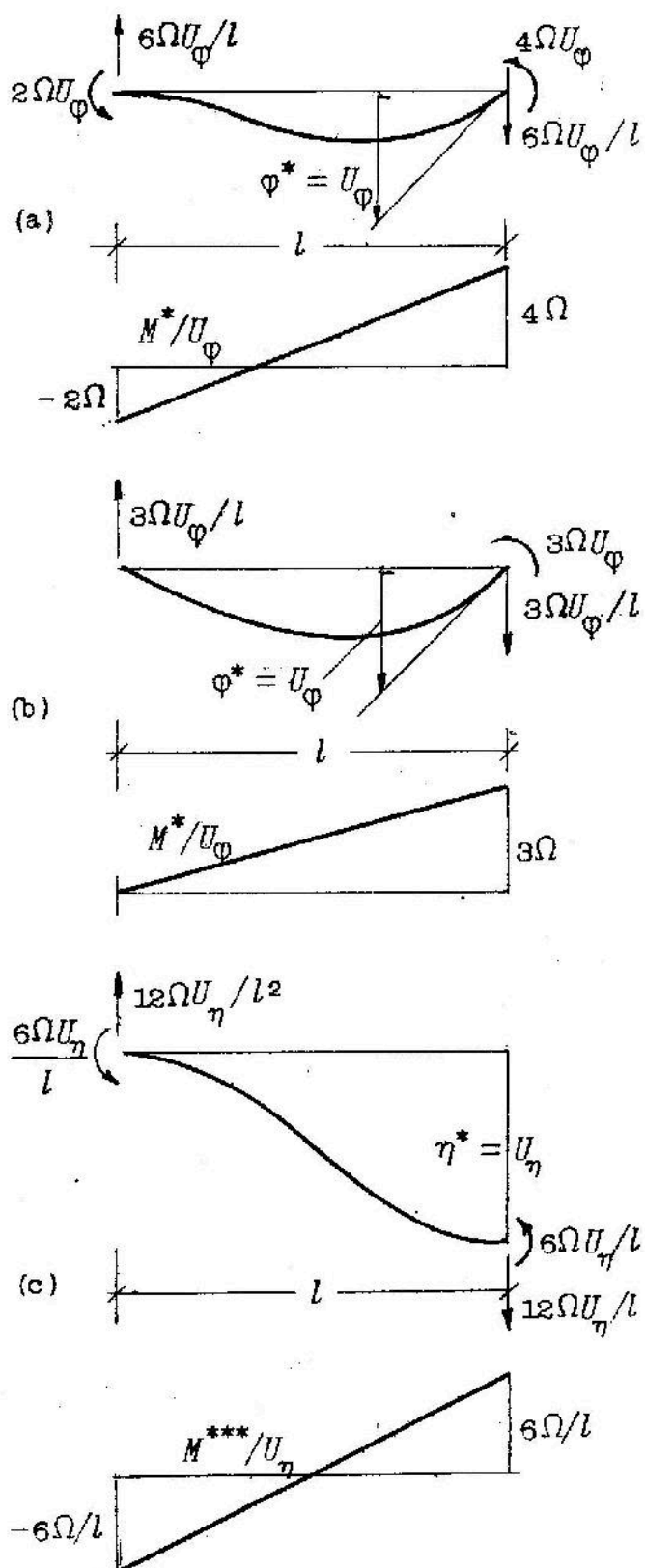


Fig. 90 - Deformazioni e momenti in un tronco di trave a sezione costante.

- (a) $\varphi = \eta = 0$ per $z = 0$; $\varphi = U_\varphi$, $\eta = 0$ per $z = l$
 (b) $\hat{M} = \eta = 0$ per $z = 0$; $\varphi = U_\varphi$, $\eta = 0$ per $z = l$
 (c) $\varphi = \eta = 0$ per $z = 0$; $\varphi = 0$, $\eta = U_\eta$ per $z = l$

indicati nella fig. 90c. Perciò ai primi membri delle equazioni [122] sono da aggiungere rispettivamente le quantità $6\zeta(\Omega/l)_5$, $6\zeta(\Omega/l)_6$, $6\zeta(\Omega/l)_7$, mentre una nuova equazione viene introdotta dall'equilibrio della trave AE alla traslazione orizzontale. Sia $\bar{R}$ la forza da applicare lungo l'asse della trave per stabilire l'equilibrio nelle condizioni $\zeta = \varphi^B = \varphi^C = \varphi^D = 0$. Questa forza è facilmente determinata trattando i piedritti come travi perfettamente incastrate agli estremi. Si ha quindi l'equazione:

$$\begin{aligned} \bar{R} + 12\zeta \left[\left(\frac{\Omega}{l^2} \right)_5 + \left(\frac{\Omega}{l^2} \right)_6 + \left(\frac{\Omega}{l^2} \right)_7 \right] - \\ - 6\varphi^B \left(\frac{\Omega}{l} \right)_5 - 6\varphi^C \left(\frac{\Omega}{l} \right)_6 - 6\varphi^D \left(\frac{\Omega}{l} \right)_7 = 0 \end{aligned} \quad [123]$$

2. Strutture composte di archi e travi. Si consideri un arco incastrato ad un estremo. Collochiamo gli assi $\bar{y}, \bar{z}$ (figura 91a) in posizione tale che risulti

$$\int \bar{y} dw = \int \bar{z} dw = 0$$

L'origine degli assi è dunque il baricentro G dei pesi elastici. Secondo la [76] applicando alla sezione terminale una forza qualsiasi per G quella sezione non ruota. Secondo

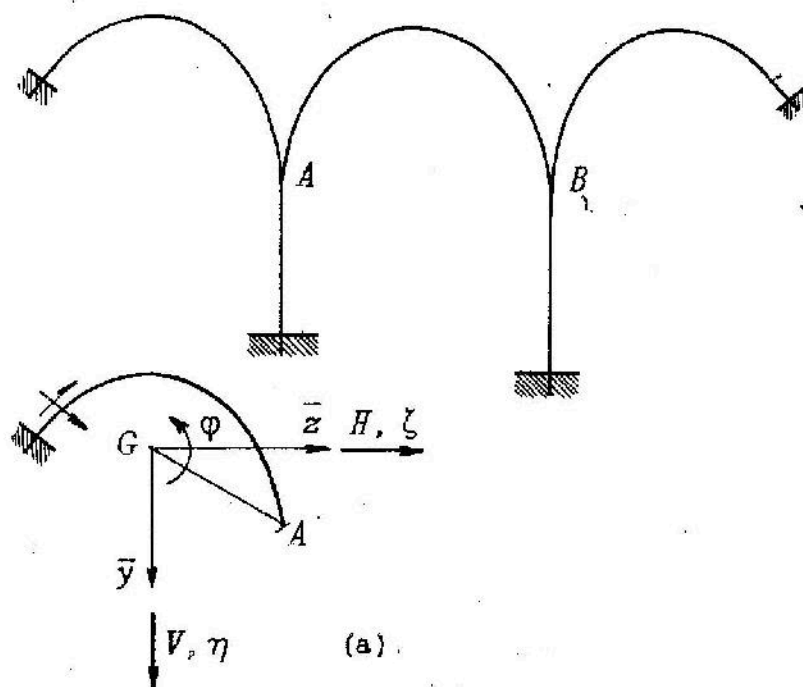


Fig. 91 - Travatura composta di archi e travi.

la [77] una forza U agente secondo l'asse $\bar{y}$ produrrà uno spostamento secondo $\bar{y}$ dato da $\eta = a_{11}U$ ed uno spostamento secondo $\bar{z}$ dato da $\zeta = a_{12}U$ essendo

$$a_{11} = \int \bar{z}^2 dw \quad , \quad a_{12} = - \int \bar{y}\bar{z} dw$$

Una forza U secondo $\bar{z}$, sempre per la [77] dà gli spostamenti $\eta = a_{12}U$ e $\zeta = a_{22}U$ essendo

$$a_{22} = \int \bar{y}^2 dw$$

Sotto l'azione di una forza per G di componenti H, V secondo $\bar{z}$ e $\bar{y}$ rispettivamente e di un momento M^G si avranno gli spostamenti

$$\eta = a_{12}H + a_{11}V \quad , \quad \zeta = a_{22}H + a_{12}V \quad [124]$$

e la rotazione $\varphi = M^G W$ essendo $W = \int dw$. Quindi se alla sezione terminale è impresso uno spostamento rappresentato dai parametri ζ, η, φ è facile calcolare M^G e, dalle [124] gli sforzi H, V :

$$H = \frac{a_{11}\zeta - a_{12}\eta}{D} \quad , \quad V = \frac{a_{22}\eta - a_{12}\zeta}{D} \quad [125]$$

essendo $D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$.

In base a queste espressioni si calcolano le sollecitazioni nell'arco. In particolare per i momenti si può scrivere

$$M = \bar{M} + \varphi/W + [\eta(a_{22}\bar{y} + a_{12}\bar{z}) - \zeta(a_{12}\bar{y} + a_{11}\bar{z})]/D \quad [126]$$

essendo $\bar{M}$ i momenti che le forze agenti sull'arco produrrebbero quando questo fosse perfettamente incastrato ai suoi estremi.

Se più archi e travi si congiungono in un nodo (fig. 91), in funzione delle caratteristiche di spostamento di questo si possono esprimere le sollecitazioni nei vari elementi e quindi le reazioni trasmesse al nodo. Si potranno quindi, in condizioni più generali di quelle contemplate dalle [122], scrivere le equazioni di equilibrio per ognuno di questi incroci. Da queste si calcolano i parametri di spostamento incogniti e poi le sollecitazioni nei vari elementi. Ad es., per lo schema della fig. 91 se i piedritti sono assialmente deformabili si scriveranno tre equazioni di equilibrio per ciascuno dei nodi A, B , dove figureranno come incognite le tre componenti di spo-

stamento dei nodi stessi. Se si trascura la deformabilità assiale dei piedritti, le equazioni e le incognite si riducono a 4.

V.14 - Travature simmetriche. Quando una travatura, oltre al piano di simmetria che ne contenga la linea d'asse, possieda ancora altri elementi di simmetria, conviene nei relativi calcoli statici trarre vantaggio delle semplificazioni ottenibili. Occorre anzitutto precisare che per una travatura isostatica, se la linea d'asse e i vincoli sono simmetrici rispetto ad una linea s (fig. 92a) cioè basta perché le proprietà di simmetria sussistano per le caratteristiche di sollecitazione; invece per le strutture iperstatiche si richiede anche che la simmetria sia rispettata nella distribuzione della

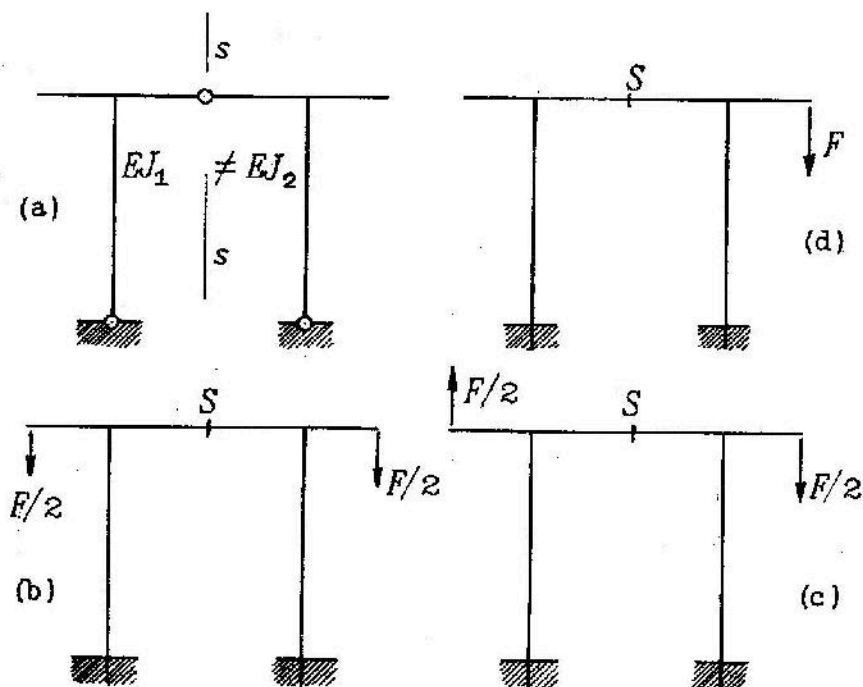


Fig. 92

- (a) Schema isostatico simmetrico
- (b) Sistema simmetrico
- (c) Sistema antismetrico
- (d) Sistema asimmetrico = (b) + (c).

rigidezza flessionale EJ , nonché delle caratteristiche EA e GA_y , se si tien conto degli effetti dello sforzo assiale e del taglio. In una struttura che goda di tale simmetria è opportuno definire i sistemi supplementari in modo che siano simmetrici o antisimmetrici (come nella fig. 76). Si ottiene così che

il gruppo di equazioni relativo alle iperstatiche simmetriche sia separato da quello relativo alle antimetriche. Circa la definizione dei sistemi di carico simmetrici o antimetrici vale quanto detto a proposito della fig.9.

Le proprietà di simmetria si possono esprimere come segue: in una struttura simmetrica carichi simmetrici (antimetrici) producono sollecitazioni simmetriche (antimetriche). Così nella travatura caricata come in fig.92b il taglio nella sezione S deve essere nullo, poiché questo rappresenta una sollecitazione antimettrica; viceversa nel caso della fig.92c saranno nulli lo sforzo normale e il momento flettente nella sezione S . La figura mostra come un carico asimmetrico possa ottenersi per sovrapposizione di uno simmetrico e uno antimettrico.