

CAPITOLO IV

TRAVATURE PIANE CARICATE NEL LORO PIANO CALCOLO DELLE DEFORMAZIONI

IV.1 - Rappresentazione delle piccole deformazioni. Generalmente le strutture, finché non siano sottoposte a carichi che ne compromettano il normale funzionamento, presentano deformazioni piccolissime. È naturale quindi che nel loro studio si faccia uso corrente delle semplificazioni che possono ottenersi trattando gli spostamenti sotto carico come infinitesimi e si riserbi un'analisi più approfondita ai casi speciali per i quali essa si dimostri necessaria. Di una semplificazione che si giustifica con l'assunzione che le deformazioni siano piccole si fa uso nella trattazione precedente: l'equilibrio della struttura viene analizzato con riferimento alla configurazione iniziale, mentre in realtà esso si stabilisce nella configurazione deformata.

Essendo gli spostamenti estremamente piccoli, non si può rappresentarli nella stessa scala in cui si disegna la struttura. Si usa talvolta riportare sulla stessa rappresentazione della struttura nel piano di simmetria gli spostamenti di alcuni punti, fortemente ingranditi rispetto alla scala del disegno. Si intende che tale rappresentazione non vale a definire la posizione relativa dei punti stessi a deformazione avvenuta.

Siano A_1, A_2 (fig. 44) due punti della struttura indeformata, $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2$ i vettori che da un'origine fissa vanno ai punti stessi e sia l la distanza $A_1 A_2$. Siano $A_1 A'_1$ e $A_2 A'_2$ i vettori $\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2$ che rappresentano fortemente ingranditi gli spostamenti dei due punti per effetto della deformazione. La rappresentazione essendo convenzionale nel senso sopra detto, la distanza dei punti A'_1, A'_2 misurata sul disegno non rappresenta la distanza dei due punti a deformazione avvenuta. Indicando con $l + \delta l$ tale distanza, si potrà calcolarla in base alla relazione:

$$(l + \delta l)^2 = (\vec{\xi}_2 + \vec{\eta}_2 - \vec{\xi}_1 - \vec{\eta}_1)^2 = (\vec{\xi}_2 - \vec{\xi}_1)^2 + 2(\vec{\xi}_2 - \vec{\xi}_1) \cdot (\vec{\eta}_2 - \vec{\eta}_1) + (\vec{\eta}_2 - \vec{\eta}_1)^2$$

L'ultimo addendo nello sviluppo dei quadrati viene cancellato per la semplificazione ammessa, tenendo ancora presente che e'

$$(\vec{\xi}_2 - \vec{\xi}_1)^2 = l^2$$

si ottiene

$$\delta l = \frac{\vec{\xi}_2 - \vec{\xi}_1}{l} \cdot (\vec{\eta}_2 - \vec{\eta}_1) \quad [38]$$

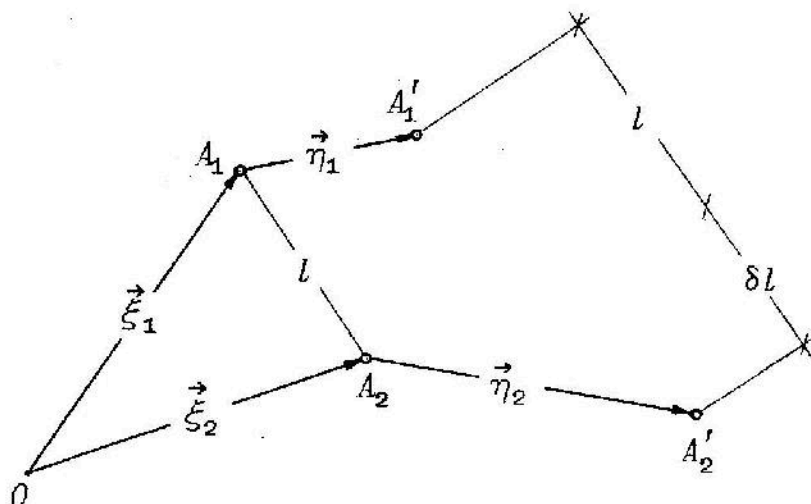
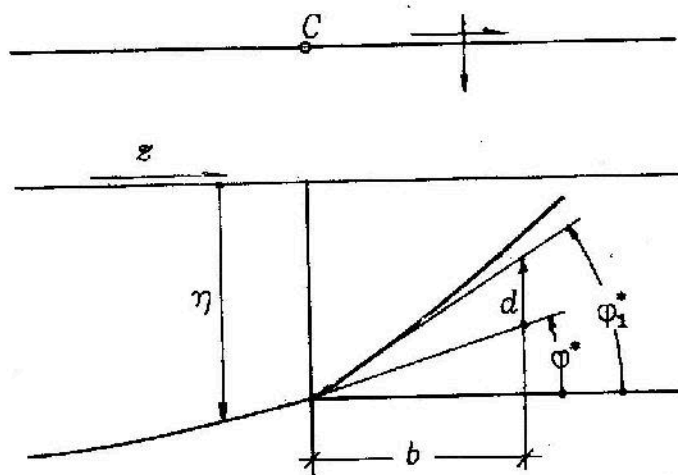


Fig. 44 - Vettori spostamento $\vec{\eta}$ rappresentati in scala fortemente ingrandita rispetto alle coordinate $\vec{\xi}$.

Il primo fattore del prodotto scalare rappresenta il versore della direzione A_1A_2 . Si conclude che la variazione di lunghezza del segmento A_1A_2 e' data dalla differenza delle proiezioni sul segmento stesso degli spostamenti degli estremi. In particolare, se tale variazione e' nulla, come e' noto dalla cinematica dei moti rigidi, gli spostamenti dei due estremi debbono avere la stessa proiezione sulla congiungente. Sebbene il disegno falsi certe misure, da esso si puo' dedurre δl come mostra la figura, leggendo nella scala degli spostamenti la differenza fra la proiezione del segmento $A'_1A'_2$ su A_1A_2 e il segmento iniziale.

Frequentemente si usa una rappresentazione cartesiana degli spostamenti: si riporta la componente, su una data direzione, dello spostamento dei punti di una data linea in funzione di una coordinata misurata lungo la linea stessa. Ad esempio si riportano verticalmente (fig.45) gli spostamenti verticali η dei punti della linea d'asse orizzontale di una trave, in funzione della coordinata z . Naturalmente sono assai diverse le scale delle ascisse e delle ordinate di tale diagramma; sicche' le letture sul grafico dovranno farsi nel-

l'una o nell'altra direzione, mai in direzione obliqua. In particolare la variazione di distanza di due punti della linea d'asse non potrà dedursi dal grafico. Volendo misurare la pen-



denza φ che la tangente alla deformata viene ad assumere, non si potrà desumere tale angolo direttamente dal grafico, ma si dovrà dedurlo dal quoziente degli incrementi di ordinata e di ascissa, letti nelle rispettive scale. Quindi si scriverà:

$$\tan \varphi = \frac{1}{K} \tan \varphi^* \quad [39]$$

Fig. 45 - Diagramma degli spostamenti verticali η (linea elastica). Computo della rotazione relativa in corrispondenza della cerniera C.

essendo K il rapporto, assai grande, di ingrandimento delle ordinate rispetto alle ascisse, ed essendo φ^* l'angolo che

si misura sul disegno. Peraltro, essendo piccolissimo l'angolo φ che figura a primo membro, sarà lecito confonderlo con la sua tangente. Per lo stesso motivo, volendo misurare la rotazione relativa $\varphi_1 - \varphi$ di due direzioni si potrà scrivere:

$$\varphi_1 - \varphi = \frac{1}{K} (\tan \varphi_1^* - \tan \varphi^*)$$

Ossia, si misurerà nella scala degli spostamenti l'intercetto d verticale fra le due direzioni e lo si dividerà per la distanza orizzontale b letta nella scala del disegno (fig. 45).

IV.2 - Cinematica dei piccoli moti rigidi. In vari problemi capita di dover considerare moti rigidi piccolissimi delle varie parti della struttura. Richiameremo brevemente alcune nozioni di cinematica necessarie per quello studio.

Nel moto piano esiste sempre un punto C , detto *centro di rotazione*, al finito o a distanza infinita, che non subisce spostamento. Lo spostamento di un punto generico P della medesima figura sarà perpendicolare al segmento CP e misurato da $r\psi$ essendo r la distanza di P da C e ψ la rotazione (piccolissima) del corpo. La proprietà vale per il moto

relativo come per quello assoluto, cioè riferito ad un sistema fisso. Indicheremo col numero 0 questo riferimento, con 1, 2, ... le altre figure in moto, con $O_1, O_2, \dots$ i centri di rotazione assoluta di queste, con 12 il centro di rotazione del corpo 1 rispetto al corpo 2. Si osserva che se i corpi 1, 2 sono collegati da una cerniera, il centro 12 starà nella traccia dell'asse di questa; se essi sono collegati da una coppia prismatica il centro 12 si troverà all'infinito, sulla direzione normale alla guida; se fra i due corpi esiste un appoggio, il centro 12 starà sulla normale all'appoggio.

Altra proprietà importante è quella di allineamento dei tre centri: nel moto piano dei corpi 1, 2, 3 i centri 12, 23, 31 sono allineati.

Applicheremo le proprietà enunciate all'esame del moto di schemi strutturali isostatici trasformati in meccanismi ad un grado di libertà mediante la soppressione di un vincolo. Questo esame ha interesse, fra l'altro, in quanto permette di riconoscere gli schemi anomali nel senso indicato nel § II.6. Infatti è evidente che, se la struttura, resa labile dalla soppressione di un vincolo, esegue un movimento che quel vincolo non è in grado di impedire, la struttura è difettosa. In questo controllo si ha un metodo equivalente a quello statico che nel § II.6 è stato indicato per il riconoscimento dei sistemi anomali.

Si consideri uno schema a tre vincoli semplici, come quello della fig. 21. Soppresso il vincolo di reazione R_3 , il corpo ha possibilità di ruotare intorno a P_3 : il sistema sarà difettoso se la retta d'azione di R_3 passa per P_3 , ossia se le reazioni dei tre vincoli passano per un punto.

Si consideri uno schema a tre cerniere (figg. 22, 23). Si sopprima il vincolo orizzontale in C (fig. 46), ossia si trasformi quella cerniera in un appoggio verticale. Con la costruzione indicata si trova il centro di rotazione del corpo 2. Il vincolo soppresso in C sarebbe inefficace se O_2 ca-

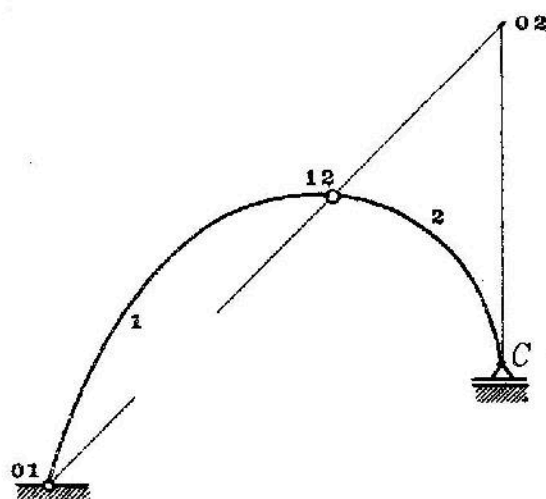
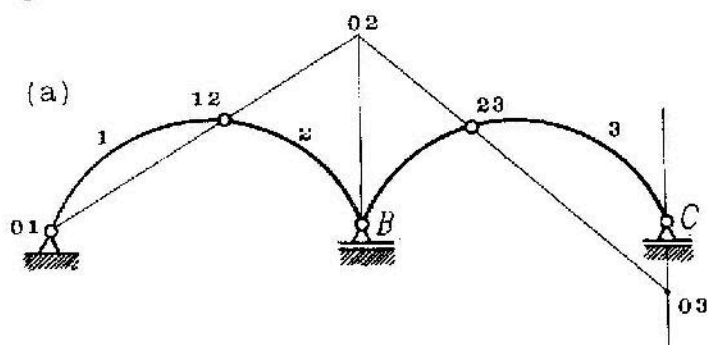
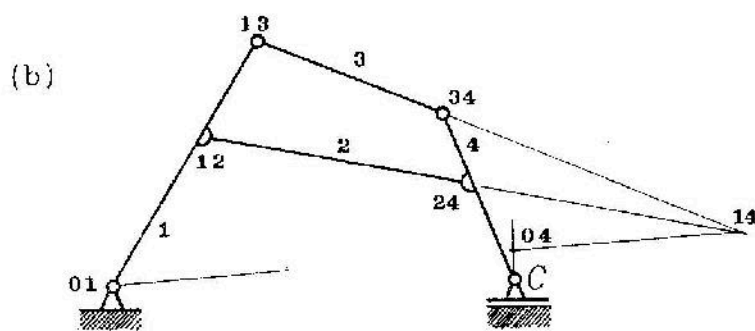


Fig. 46 - Centri di rotazione per l'arco a tre cerniere liberato del vincolo orizzontale in C. Si trova O_2 in allineamento con O_1 e 12, sulla verticale d'appoggio.

desse in C , ossia se le tre cerniere fossero allineate (figura 27a).



Si trova 02 in allineamento con 01 e 12 e sulla verticale per B . Quindi si ottiene 03 allineato con 02 e 23, sulla verticale per C .



Si trova 14 allineato con 13 e 34 nonché con 12 e 24. Quindi si ottiene 04 allineato con 01 e 14, sulla verticale per C .

Fig. 47 - Centri di rotazione per gli schemi di strutture del tipo indicato nella fig. 27 c) e d) liberati di un vincolo orizzontale in C .

Si esamini uno schema del tipo di quello della fig. 27 c. Soppresso il vincolo orizzontale in C (fig. 47a) si ottiene un meccanismo con i centri di rotazione indicati; il vincolo soppresso è inefficace se 03 cade in C ; ossia nelle condizioni della fig. 27c. Similmente (fig. 47b) si esamina uno schema del tipo presentato nella fig. 27d, dopo soppressione del vincolo orizzontale in C ; se il centro 04 cade in C , ossia nelle condizioni della fig. 27d, il sistema è anomalo.

Oltre a determinare i centri di rotazione delle varie parti del sistema, interessera per le applicazioni dare una rappresentazione degli spostamenti. Si supponga che il corpo in esame effettui una rotazione piccolissima intorno a C e si vogliano determinare gli spostamenti conseguenti in una data direzione, poniamo, verticale. Indicando con $\bar{x}$ la distanza orizzontale da C del punto generico P , il relativo spostamento verticale, con le notazioni della fig. 48 sarà espresso da

$$r\psi \cos \alpha = \psi \bar{x}$$

Si conclude: tutti i punti della verticale distante $\bar{x}$ da C subiranno lo stesso spostamento verticale $\psi \bar{x}$. Si po-

tra' quindi con un solo diagramma a ordinate verticali rappresentare gli spostamenti di tutti i punti del piano: sara' un diagramma rettilineo che taglia l'asse delle ascisse nel punto in cui si proietta C .

Gli spostamenti in una data direzione derivanti da piu' moti rigidi piccolissimi combinati si sommano algebricamente. Si consideri ad esempio il meccanismo della fig.49. La rotazione del corpo 1 intorno alla cerniera 01 da' gli spostamenti verticali rappresentati dalla retta (1) a partire dalla fondamentale (0) che rappresenta il riferimento fisso. La rotazione del corpo 2 rispetto al corpo 1,

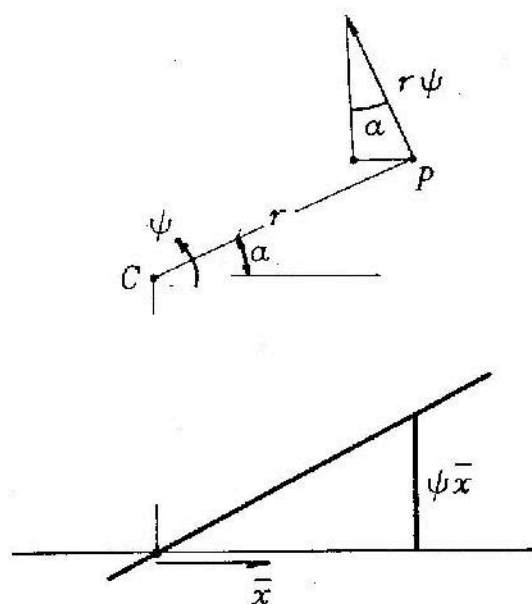


Fig. 48 - Spostamenti verticali corrispondenti ad una rotazione ψ .

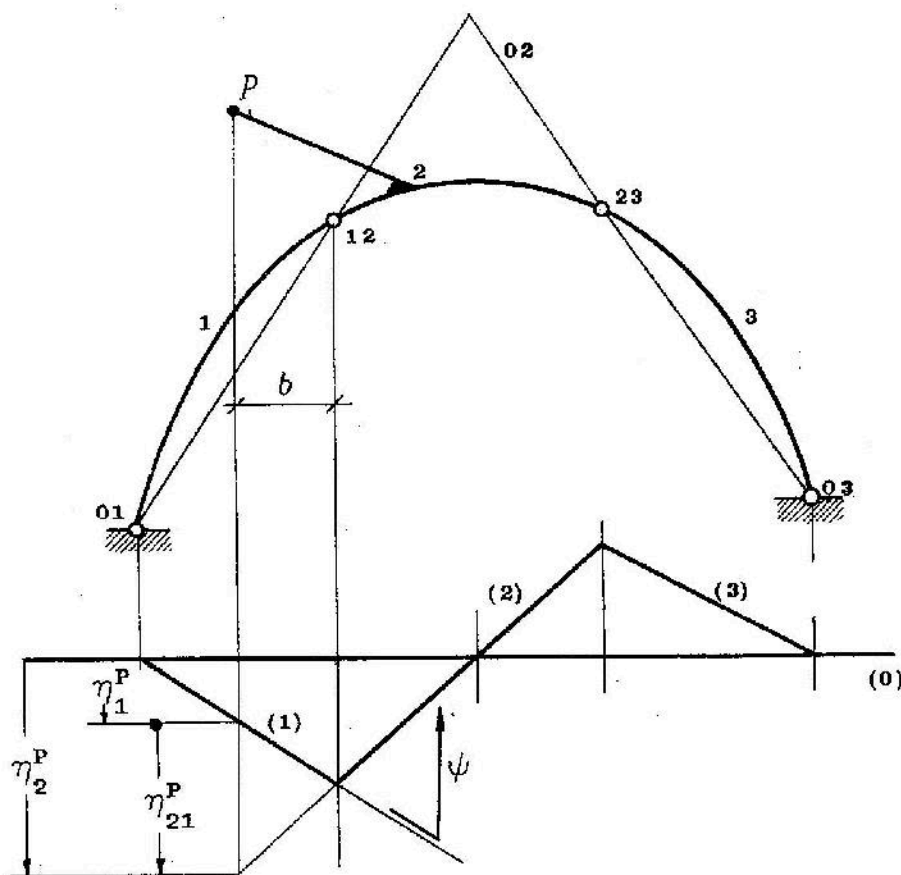


Fig. 49 - Spostamenti verticali piccolissimi.

con centro relativo 12 da' nel punto P lo spostamento η_{21}^P

proporzionale alla distanza b della verticale di P da 12. Lo spostamento assoluto η_2^P di P e' dato dalla somma di quello relativo e dello spostamento η_1^P che gli competerebbe se fosse solidale al corpo 1. La rotazione relativa ψ e' misurata da rapporto fra η_{21}^P e la distanza orizzontale b , nelle relative scale. A ricordare che la misurazione dell'angolo piccolissimo ψ non va fatta col goniometro dalla figura, sulla rappresentazione si adotta il tipo di freccia indicato. Se invece che riportare gli spostamenti, si rappresentassero i rapporti η/ψ al posto dello spostamento η_{21}^P si dovrebbe portare il segmento b .

Si noti che la retta (2) che rappresenta gli spostamenti assoluti del corpo 2 taglia la fondamentale (0) in corrispondenza del centro 02; la retta (3) ha in comune con la (2) il punto corrispondente al centro 23 e taglia la (0) verticalmente sotto 03; le rette (1) e (3) si intersecano in un punto che in verticale corrisponde al centro relativo 13, lontano dal disegno nella fig.49.

IV.3 - L'equazione dei lavori virtuali. In una data travatura si consideri un sistema a di sforzi rappresentato dalle caratteristiche M^a, N^a, T^a , il quale verifichi le condizioni che la statica impone, in connessione con sistema di forze esterne F^a . Non si fa alcuna distinzione circa la natura di queste forze, se cioe' esse siano reazioni vincolari o carichi, concentrate o distribuite. Si pone solo la condizione che, per qualunque tronco di struttura che si pensi isolato dal resto, risultino verificate le condizioni di equilibrio fra le caratteristiche di sollecitazione M^a, N^a, T^a e le forze F^a eventualmente agenti sul tronco.

Per la stessa struttura si consideri un sistema b di deformazioni piccolissime, al quale si prescrive solo la condizione che esso rispetti la connessione del corpo: ossia in nessun punto deve avvenire che tra le facce opposte di una medesima sezione si verifichi un moto relativo.

Si precisa inoltre che i due sistemi sono del tutto indipendenti. Non entrano in questione le deformazioni che gli sforzi a produrrebbero nel corpo ne' le sollecitazioni che si accompagnerebbero alle deformazioni b . Il fenomeno che qui si considera non si riferisce ad una situazione *reale*, bensì ad una posizione ideale, o *virtuale* nel senso originario della parola, in cui non intervengono affatto le proprietà fisiche del corpo in questione.

Diciamo *lavoro esterno* L_e^{ab} il lavoro che le forze F^a

effettuano quando i rispettivi punti di applicazione subiscano gli spostamenti $\vec{\eta}^b$ che loro competono nella deformazione b . Se le forze $\vec{F}^a$ sono concentrate, si ha:

$$L_e^{ab} = \sum \vec{F}^a \cdot \vec{\eta}^b \quad [40]$$

la sommatoria essendo estesa a tutte le forze. Se si tratta di carichi distribuiti sopra linee, superfici o volumi, la sommatoria sarà sostituita da integrali, semplici, doppi o tripli.

L'equazione dei lavori virtuali stabilisce l'eguaglianza

$$L_e^{ab} = L_i^{ab} \quad [41]$$

dove il lavoro interno L_i rappresenta la somma dei lavori che su ciascuna particella isolata di struttura farebbero le sollecitazioni del sistema a nella deformazione b . Per le travature piane con sollecitazioni definite dalle sole caratteristiche M^a, N^a, T^a il lavoro interno assume la forma:

$$L_i^{ab} = \int N^a \bar{\epsilon}^b dZ + \int M^a \bar{\kappa}^b dZ + \int T^a \bar{\gamma}^b dZ \quad [42]$$

essendo gli integrali estesi all'intera linea d'asse della travatura.

Il significato dei fattori $\bar{\epsilon}, \bar{\kappa}, \bar{\gamma}$ appare evidente quando si consideri un elemento di trave (figura 50) prima e dopo la deformazione b , e si porti la sezione terminale P ad occupare la medesima posizione nei due stati. Poiché $T^a \bar{\gamma}^b dZ$ è il lavoro della forza tagliente T^a , sarà $\bar{\gamma}^b dZ$ il segmento di cui la sezione libera si sposta nella direzione y scorrendo su se stessa: la quantità $\bar{\gamma}$ è perciò detta scorrimento.

Poiché $N^a \bar{\epsilon}^b dZ$ è il lavoro dello sforzo assiale N^a , sarà $\bar{\epsilon}^b dZ$ l'allungamento che l'elemento dZ subisce; perciò $\bar{\epsilon}$ è il coefficiente di dilatazione medio. Il lavoro $M^a \bar{\kappa}^b dZ$ rivela una rotazione $\bar{\kappa}^b dZ$ della sezione considerata: la quantità $\bar{\kappa}^b$ è detta curvatura per la ragione che apparirà

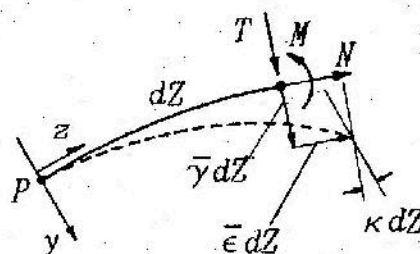


Fig. 50 - Elemento di trave deformato (linea a tratto) con una sezione terminale portata nella posizione iniziale.

piu' avanti (*).

Da queste considerazioni appare che $\bar{\epsilon}$ e $\bar{\gamma}$ sono quantita' adimensionali, mentre κ ha dimensioni reciproche di una lunghezza.

L'equazione [41] sussiste per qualunque sistema di forze e sollecitazioni in equilibrio e per qualunque deformazione infinitesima *congruente*, ossia compatibile con la connessione della struttura o di quella sua parte alla quale si vorra' applicare l'equazione stessa. Stante tale liberta' di definizione dei due sistemi, appare evidente la vastita' del campo di applicazioni aperto all'uso di quella equazione. Si possono distinguere sostanzialmente due classi di applicazioni:

a) *con spostamenti virtuali*. Si voglia esaminare l'equilibrio di un sistema di sforzi e sollecitazioni. Si assumera' questo come sistema a ; per ogni scelta congruente del sistema b si otterra' dalla [41] una equazione che rappresenta una condizione alla quale il sistema a deve soddisfare se esso rispetta le condizioni della statica. E' questa applicazione la piu' frequente in Meccanica. Trattandosi di corpi indeformabili l'equazione si riduce alla $L_e^{ab} = 0$.

b) *con forze virtuali*. Si voglia esaminare la connessione cinematica di un sistema di spostamenti e deformazioni. Si assumera' questo come sistema b ; per ogni scelta di un sistema a equilibrato si otterra' dalla [41] una equazione che rappresenta una delle condizioni a cui il sistema b deve soddisfare se esso rispetta le condizioni cinematiche per le deformazioni congruenti. E' questo l'uso che qui si fara' piu' sovente dell'equazione [41].

Per illustrare subito questo secondo impiego, si applichera' la [41] alla determinazione degli effetti di una dilatazione termica. Si consideri una trave dritta, vincolata in modo isostatico (trave a sbalzo, appoggiata o Gerber) soggetta ad un regime non uniforme di temperature, per il quale in una sezione generica si verifica una differenza di temperatura t fra fibre distanti h nella direzione y . Detto α il coefficiente di dilatazione termica del materiale, supposto che la temperatura vari da un punto all'altro della sezione

(*) Si noti che la posizione di coincidenza della sezione per P prima e dopo la deformazione e' stata assunta per comodita' di definizione; in realta' essa non modifica il valore dei lavori perche' per ogni moto rigido piccolissimo le forze sull'elemento fanno lavoro nullo poiche' sono in equilibrio.

come funzione lineare di y , sarà $\kappa = \alpha t/h$ come appare nella fig. 51a. Adottando queste deformazioni come sistema b ; si fissino come sistema a gli sforzi che nella trave Gerber in considerazione (fig. 51) si producono applicando due coppie U_C con versi opposti, ai due lati della cerniera C . Il lavoro di queste due coppie misura la rotazione relativa dei due tronchi di trave in corrispondenza della cerniera. Quindi tale rotazione è data da:

$$\Delta\varphi = \frac{\alpha}{U_C} \int \frac{t}{h} M^a dz \quad [43]$$

i momenti M^a essendo rappresentati dal grafico triangolare della fig. 51b.

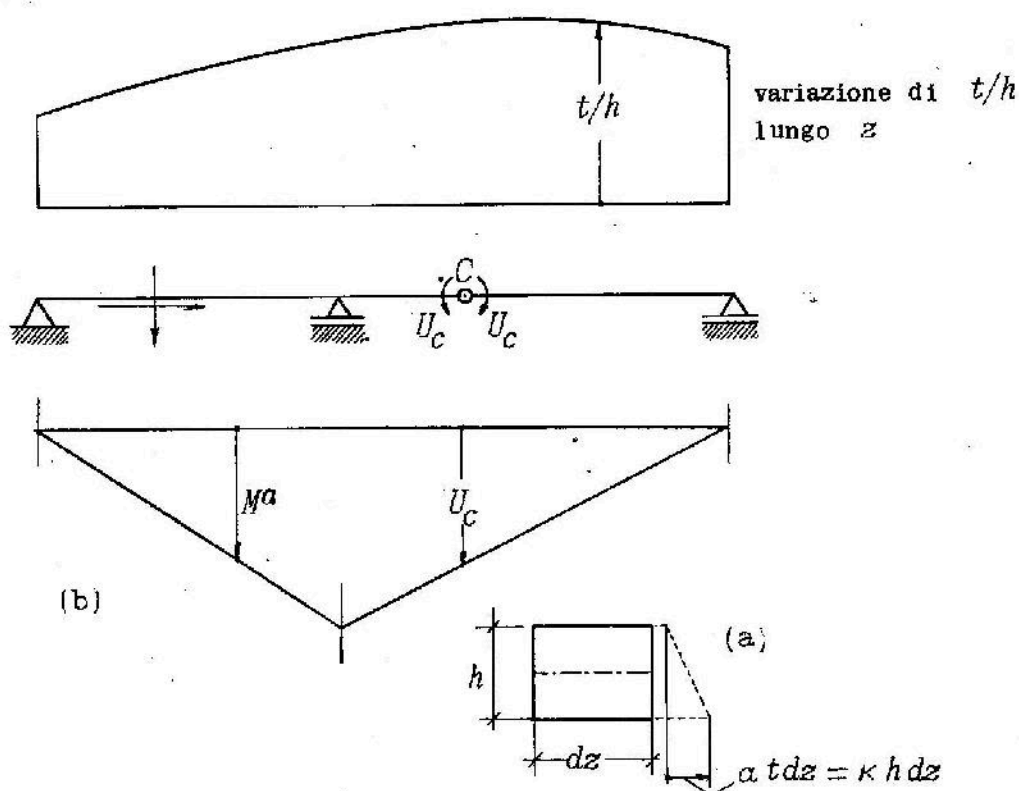


Fig. 51 - Rotazione relativa presso la cerniera C prodotta da salti termici.

Con la medesima espressione, variando solo la scelta dei carichi fittizi che originano i momenti M^a si può calcolare qualunque caratteristica degli spostamenti conseguenti alla variazione termica in esame. Si tratta in ciascun caso di integrare, su tutta la struttura il prodotto dei momenti M^a per i parametri κ^b derivanti dall'effetto termico. Si è qui supposto che la struttura sia staticamente determinata; in caso contrario la variazione termica si accompagnerebbe ad uno stato di tensione e quindi i coefficienti di dilatazione non sarebbero più semplicemente espressi da αt .

Nella scelta dei carichi fittizi per la determinazione di una certa caratteristica di spostamento vale il criterio ovvio: occorre individuare un sistema di carichi che diciamo di esplorazione tale che il suo lavoro nella deformazione in esame misuri la quantità che si vuole conoscere. Se quindi si richiede lo spostamento di un punto P in una data direzione, si applicherà in P , in quella direzione una forza U (*) e ad essa si fa equilibrio con le necessarie reazioni vincolari. Se i vincoli sono rigidi, il lavoro delle relative reazioni è nullo e quindi il valore di L_e/U rappresenta lo spostamento cercato. Se si vuole conoscere lo spostamento relativo (variazione di distanza) di due punti P, Q si applicheranno in questi due forze con versi opposti. Volendo determinare la rotazione di una sezione vi si applicherà una coppia U_c (*) di esplorazione: L_e/U_c dà la rotazione cercata, per calcolare la rotazione relativa di due sezioni, si introdurranno in esse due coppie U_c opposte.

Le sollecitazioni relative a questi sistemi di carichi di esplorazione entreranno nell'espressione di L_t come sistema a : il sistema b sarà costituito dalla deformazione in esame. Così, determinato L_t secondo la [42] e quindi L_e per la [41], si trova lo spostamento in questione:

Per il calcolo delle sollecitazioni del sistema a non occorre prendere in esame le deformazioni che a queste corrisponderebbero, ma basta solo curare, com'è detto nella premessa all'equazione dei lavori, che le condizioni della statica siano rispettate. Di questa proprietà si trarrà vantaggio nell'applicazione alle strutture iperstatiche, per le quali gli sforzi a potranno essere calcolati dopo aver reso isostatico lo schema con adeguate troncature.

IV.4 - Deformazioni elastiche. Per i materiali metallici impiegati nella costruzione di elementi resistenti, finché le sollecitazioni non superino determinati limiti, si producono deformazioni proporzionali ai carichi applicati che scompaiono quando i carichi sono tolti. Queste deformazioni sono dette *elastiche*; se il materiale presenta, nei riguardi di tali deformazioni, le stesse proprietà in tutte le direzioni esso è detto *isotropo*. Se, entro certi limiti di approssimazione, si può ammettere che il materiale costituente una trave sia

(*) Si indica con U una forza qualsiasi di valore comodo per i conti numerici (ad es., $U = 1_t$). Parimenti U_c è un momento fissato a piacere.

elastico, omogeneo e isotropo, le deformazioni $\bar{\epsilon}, \kappa, \bar{\gamma}$, che le sollecitazioni producono in un elemento di trave possono essere calcolate mediante le relazioni che fornisce la teoria di St. Venant delle travi:

$$\bar{\epsilon} = N/EA, \quad \kappa = M/EJ, \quad \bar{\gamma} = T/GA_y \quad [43], [44], [45]$$

Figurano in queste espressioni al numeratore le caratteristiche della sollecitazione a cui la deformazione è dovuta. Nei denominatori compaiono caratteristiche geometriche della sezione: l'area A della sezione, il momento d'inerzia rispetto all'asse x

$$J = \int y^2 dA \quad [46]$$

e l'area A_y . Il calcolo di quest'ultima caratteristica è assai complesso. Nelle ordinarie applicazioni gli scorrimenti $\bar{\gamma}$ danno un contributo trascurabile al valore di L_t e quindi valutazioni di prima approssimazione sono giustificate. Nel caso di sezioni, come quella di un profilato a doppio T, composte prevalentemente da due aree distanziate nella direzione y (piattabande o solette) collegate da una striscia parallela a y di larghezza limitata s (anima) si può porre in via approssimata:

$$A_y = 2s \sqrt{J/A} \quad [47]$$

Figurano inoltre nei denominatori delle [43]-[45] le caratteristiche del materiale rappresentate dal *modulo elastico* E e dal *modulo tangenziale* G . Come appare dalle espressioni stesse, queste quantità hanno dimensioni di una forza divisa per un'area. I valori di E vanno da 21.000 kg/mm² per gli acciai, a 7.000 kg/mm² per le leghe d'alluminio, a 1.000 kg/mm² per il legno di qualità, teso secondo le fibre. Il modulo tangenziale per i materiali usuali da costruzione si approssima a 0,4 E .

La [42], in base alle [43]-[45], assume dunque la forma

$$L_t = \int \left(\frac{N^2 a_N b}{EA} + \frac{M^2 a_M b}{EJ} + \frac{T^2 a_T b}{GA_y} \right) dz \quad [48]$$

l'integrazione essendo estesa sempre all'intera linea d'asse. In molte applicazioni l'ultimo addendo, relativo agli effetti del taglio, viene trascurato.

Si noti come le espressioni [48] siano lineari nelle sollecitazioni b . Vale quindi per gli spostamenti elastici, come per gli sforzi, la sovrapposizione degli effetti enunciata

nel § I.5. Difatti se M' e M'' sono due generiche distribuzioni di sforzi ed e' $M^b = M' + M''$, e' anche

$$\int M^a M^b \frac{dZ}{EJ} = \int M^a M' \frac{dZ}{EJ} + \int M^a M'' \frac{dZ}{EJ}$$

IV.5 - Deformazioni delle travature reticolari. Ammesso che su ciascuna asta $\bar{\epsilon}$ assuma valore costante, poiche' la sollecitazione a si riduce allo sforzo N^a costante lungo l'asta, l'espressione del lavoro interno qui diventa

$$L_i = \sum N^a \bar{\epsilon}^b l \quad [49]$$

essendo la sommatoria estesa a tutte le aste.

Con questa relazione e la equazione dei lavori virtuali si puo' determinare lo spostamento di un nodo qualsiasi in una direzione assegnata quando si conoscano le dilatazioni $\bar{\epsilon}$ delle aste nello stato di deformazione in esame: basta applicare in quel nodo una forza U nella direzione prescritta e determinare un sistema di sforzi N^a che realizzi l'equilibrio di ogni nodo, con l'intervento di forze esterne nei nodi fissi. Se le forze equilibranti sono introdotte in nodi che subiscono spostamenti, l'equazione dei lavori condurra' a determinare gli spostamenti relativi a questi riferimenti.

Se si esaminano le deformazioni elastiche corrispondenti ad una data configurazione di sforzi si potra' far uso delle [43] e [49] scrivendo:

$$L_i = \sum N^a N^b l / EA \quad [50]$$

Si applicheranno queste relazioni per il sistema di carichi fittizi indicato nella fig.52, agenti sui nodi consecutivi 1,2,3 del corrente inferiore. Il lavoro di questi carichi e' $L_e = U_c \delta$ essendo:

$$\delta = \frac{\eta_2 - \eta_1}{l_1} - \frac{\eta_3 - \eta_2}{l_2} \quad [51]$$

In questa espressione η_1, η_2, η_3 sono gli spostamenti verticali dei tre nodi. Per il calcolo del relativo lavoro interno si osserva che solo le aste segnate con linea continua nel dettaglio della fig.53 risultano caricate. Adoperando le [35], [36] si hanno per il nodo 3 le condizioni di equilibrio

$$S_a + S_c = 0 \quad , \quad S_a h' + S_c (h + h') + U_c / l_2 = 0$$

dove sono indicati con S_a, S_c gli sforzi nelle aste a, c divisi per le relative lunghezze. Similmente per il nodo $1'$, con le notazioni della fig. 53 si ottiene:

$$S_b + S_e = 0 \quad , \quad S_b(h - h'') - S_e h'' + U_c/l_1 = 0$$

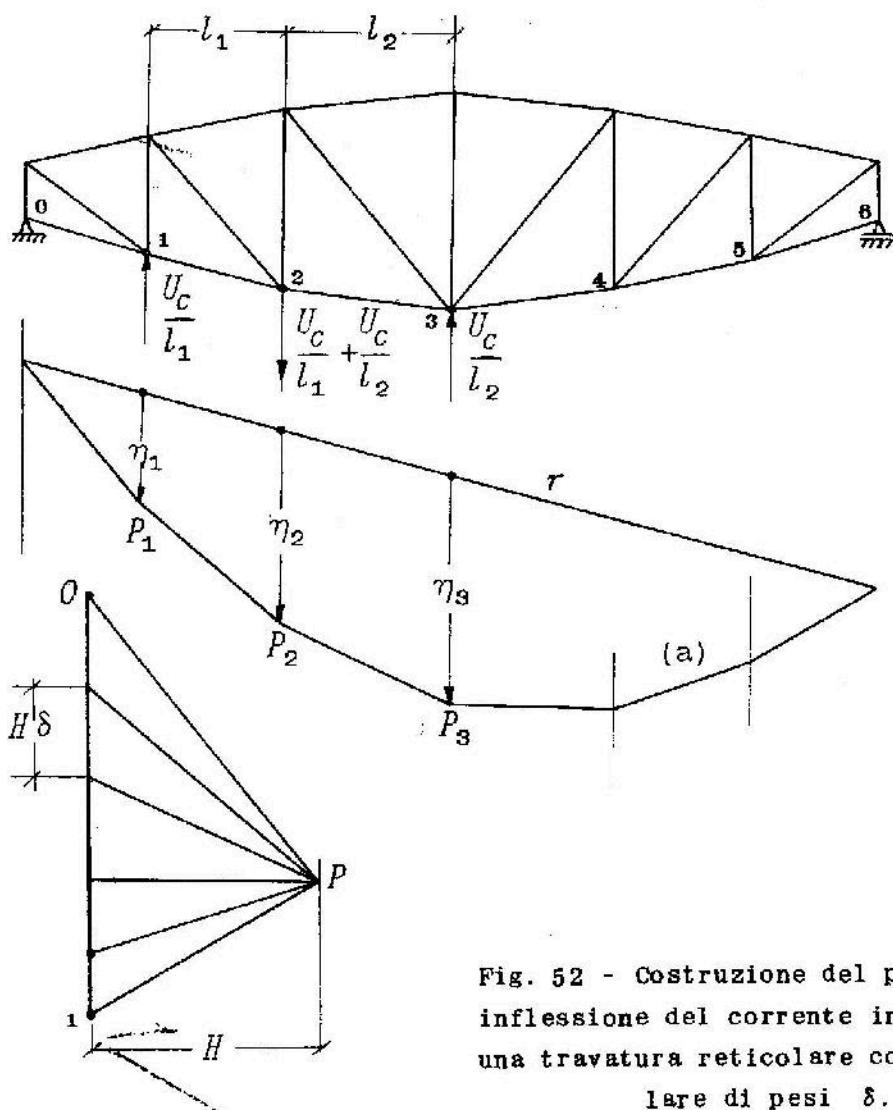


Fig. 52 - Costruzione del poligono di inflessione del corrente inferiore di una travatura reticolare come funicolare di pesi δ .

Quindi si trova:

$$S_a = -S_c = U_c/hl_2 \quad , \quad S_e = -S_b = U_c/hl_1$$

Per il nodo $2'$ si ha l'equazione:

$$S_b(h - h'') + S_d h + S_c(h + h') = 0$$

Con queste espressioni, e considerando che per l'asta f e' $N = -U_c/l_1$ si puo' calcolare L_i . Di solito si tiene conto solo del contributo apportato dalla deformazione dei due cor-

renti e quindi si scrive:

$$L_i/U_c = N_a l_a^2 / h l_2 EA_a - N_b l_b^2 / h l_1 EA_b \quad [52]$$

dove N_a, N_b sono gli sforzi nelle aste a, b nella condizione di carico per la quale si calcolano le deformazioni, l_a, l_b, A_a, A_b sono le lunghezze e le aree delle sezioni delle due aste. Per l'equazione dei lavori l'espressione [52] dà il valore definito dalla [51].

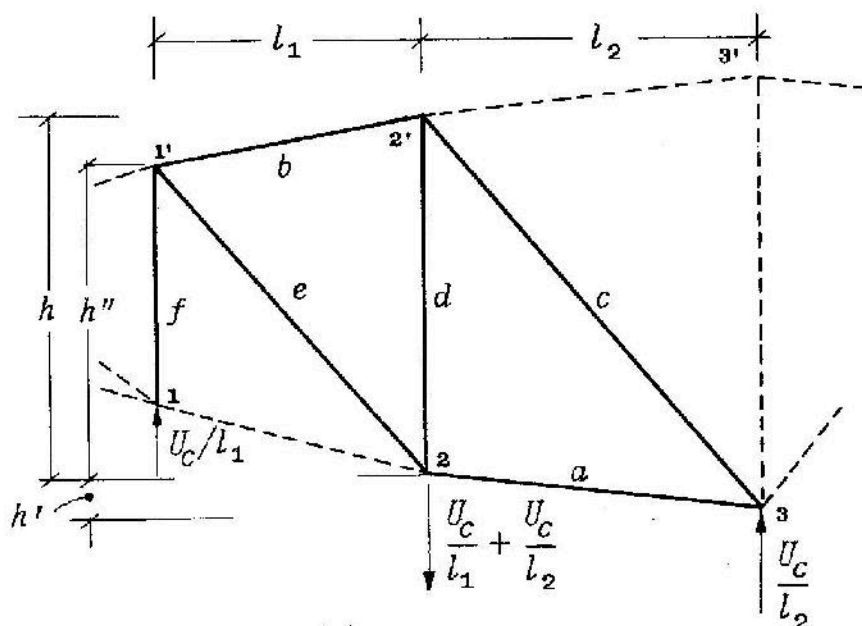


Fig. 53 - Porzione della travatura della fig.52 sollecitata dai carichi di esplorazione.

Si osserva che, se a partire da una fondamentale qualunque si riportassero le frecce η (fig.52a) e poi da un punto qualunque P si conducessero le parallele ai lati P_1P_2 e P_2P_3 della poligonale ottenuta, queste intercetterebbero su una verticale posta a distanza H da P un segmento dato da $H\delta$ nella scala delle frecce. Viceversa quindi se su detta verticale riportiamo le quantità $H\delta$ calcolate come sopra con carichi di esplorazione nelle terne di nodi 0-1-2, 1-2-3, ..., 4-5-6 otteniamo come poligono funicolare il poligono di inflessione, ossia la spezzata che dà gli spostamenti dei nodi del corrente considerato (*).

(*) Infatti con le notazioni della fig.54, se le rette p e p' sono parallele rispetto a P_1P_2 e P_2P_3 ed e, f un'orizzontale qualunque, si ha:

$$\frac{\eta_2 + \bar{\eta}_2 - \eta_1 - \bar{\eta}_1}{l_1} = \frac{d}{H} \quad , \quad \frac{\eta_3 + \bar{\eta}_3 - \eta_2 - \bar{\eta}_2}{l_2} = \frac{d'}{H}$$

(continua)

La determinazione degli spostamenti dei nodi di una travatura reticolare si può anche effettuare con il procedimento grafico seguente.

Occorre anzitutto determinare gli allungamenti delle varie aste, espressi da

$$\zeta_i = N_i l_i / EA_i$$

Supponiamo che si siano determinati gli spostamenti $\vec{\eta}^P, \vec{\eta}^Q$ di due nodi P, Q (fig. 55) di una travatura; questi vettori siano riportati a partire da una origine O in OP', OQ' . Sia R un nodo collegato a P e Q rispettivamente dalle aste 1, 2. La proiezione del vettore $Q'R'$ (che rappresenta la differenza $\vec{\eta}^R - \vec{\eta}^Q$) sulla direzione QR deve essere uguale all'allungamento ζ_2 dell'asta 2, mentre la proiezione di $P'R'$ (ossia della differenza $\vec{\eta}^R - \vec{\eta}^P$) su PR deve misurare l'allungamento ζ_1 . Quindi per trovare l'estremo R' del vettore $\vec{\eta}^R$ basta riportare ζ_1 a partire da P' nella direzione e nel verso PR , se il suo segno è positivo (nel senso opposto se ζ_1 è negativo, ossia se l'asta si ac-

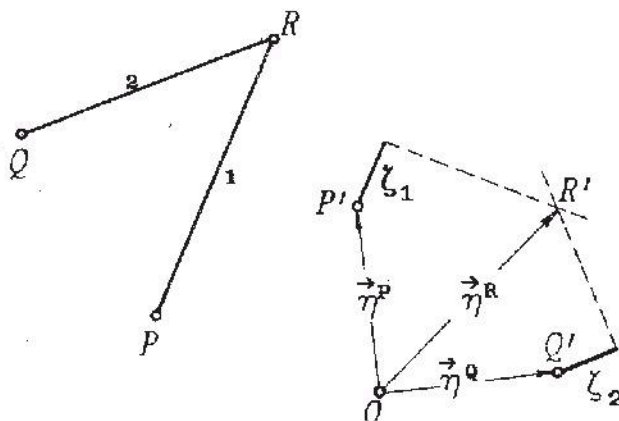


Fig. 55 - Costruzione di Williot per un nodo.

(continua nota da pagina precedente)

e quindi, poiché è

$$(\bar{\eta}_2 - \bar{\eta}_1)/l_1 = (\bar{\eta}_3 - \bar{\eta}_2)/l_2$$

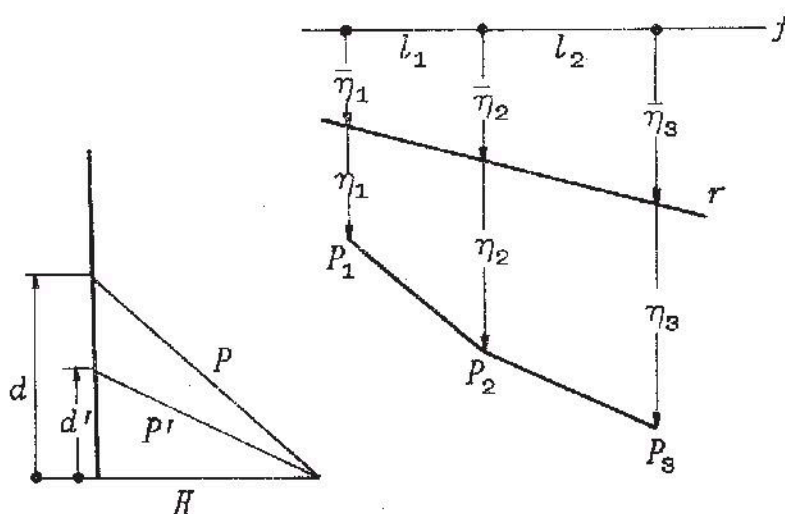


Fig. 54

si ottiene

$$\delta = (d - d')/H$$

corcia) e condurre poi una normale all'asta dall'estremo del vettore aggiunto; poi, effettuata l'analogia costruzione a partire da Q' in base all'allungamento ζ_2 , nell'intersezione delle due normali si individua R' .

La costruzione, detta di Williot, si può così effettuare procedendo di nodo in nodo per una travatura del tipo di quella della fig. 40. Per una struttura secondo lo schema della fi-

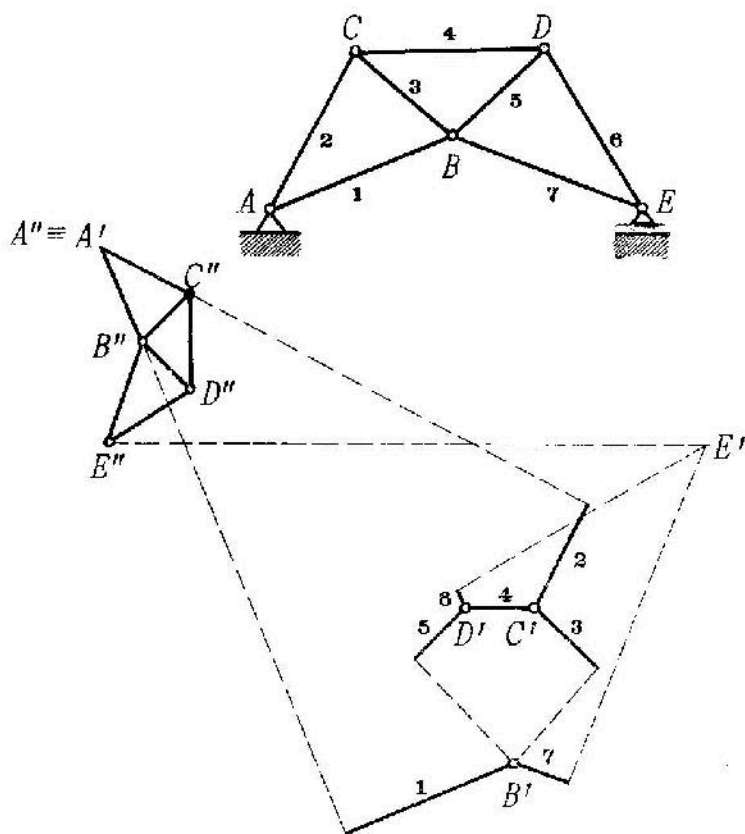


Fig. 56

gura 56, poiché non si ha modo di iniziare la costruzione da due punti fissi, si può procedere per falsa posizione. Fissiamo arbitrariamente il punto C e supponiamo che lo spostamento di D si verifichi nella direzione CD . Quindi si inizia il diagramma di Williot da un punto C' e si segna come spostamento di D un vettore $C'D'$ diretto secondo CD , uguale all'allungamento dell'asta. Si trovano poi, con la costruzione prima indicata, i punti B', E', A' , successivamente (*). Gli spostamenti così trovati vanno corretti per tener conto che il punto A non si sposta e che lo spostamento di E deve

essere orizzontale. Per quanto riguarda la prima condizione basta sottrarre ai vettori trovati il vettore $C'A'$, ossia assumere A' come origine dei vettori spostamento. Riguardo alla seconda condizione, si nota che gli spostamenti ottenuti comportano un abbassamento $A'E'$ di E che deve essere corretto imprimendo alla struttura una rotazione addizionale intorno ad A . I vettori che rappresentano gli spostamenti dovuti a questa rotazione costituiscono una figura omotetica a

(*) Gli allungamenti ζ sono segnati in figura col numero della relativa asta; quelli delle aste 2, 4, 3 sono supposti negativi.

quella che si sposta, rotata di 90° rispetto ad essa (*); ad individuare questi spostamenti di rotazione, basta dunque segnare $A''B''C''D''E''$ simile alla $ABCDE$ con $A''E''$ verticale e E'' all'altezza di E' . Con ciò la costruzione è ultimata: gli spostamenti dei punti B, C, D, E saranno rispettivamente rappresentati da $B''B', C''C', D''D', E''E'$.

IV.6 - Flessione delle travi diritte. Mediante l'equazione dei lavori [41] e l'espressione [42] si possono determinare tutti gli elementi che si ritengano necessari ad individuare lo stato di deformazione elastica di una travatura qualsiasi comunque caricata; oltre a questo procedimento del tutto generale, esistono metodi per la determinazione delle deformazioni che in casi particolari possono sensibilmente facilitare tale calcolo. Essi sono deducibili dal procedimento generale mediante speciali scelte dei carichi di esplorazione.

Si consideri un tronco PQ di trave ad asse rettilineo, sollecitato da sforzi M, N, T noti: assumeremo come sistema b le deformazioni che questi producono. Indichiamo con φ in rotazione di una sezione generica, positiva nel senso che porta l'asse $+y$ su $+z$. Volendo determinare la rotazione relativa delle sezioni estreme del tronco, applicheremo a queste, come azioni di esplorazione, due coppie U_c opposte: così il rapporto L_e/U_c rappresenterà la rotazione cercata. In queste condizioni su tutte le sezioni del tronco è $M^a = U_c$, $N^a = T^a = 0$. Quindi è:

$$\varphi^Q - \varphi^P = \int_P^Q \kappa \, dz \quad [53]$$

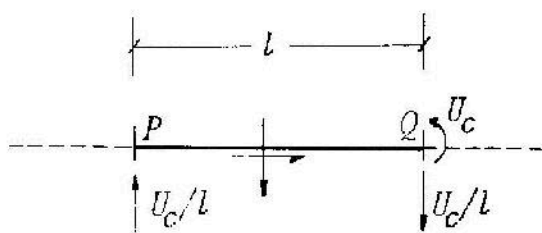
Facendo tendere a zero la lunghezza del tronco, si ottiene

$$d\varphi/dz = \kappa = M/EJ \quad [54]$$

Si noti che nella [53] non appaiono termini dipendenti dal taglio: questo quindi non influisce sulle rotazioni relative delle sezioni. Allo stesso tronco si applichi ora il sistema di carichi fittizi della fig. 57. Nell'espressione di L_e

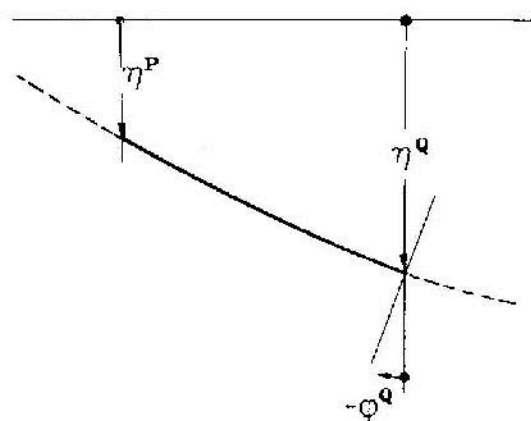
(*) Se gli spostamenti ψr (fig. 48) corrispondenti ad una rotazione si riportassero a partire dal centro di rotazione C nelle direzioni dei raggi r , si otterrebbe una figura omotetica a quella in movimento. Poiché detti spostamenti sono da riportare in direzione perpendicolare ai raggi stessi, si ottiene una figura omotetica e girata di 90° .

figura il lavoro che le forze U_c/l fanno per gli spostamenti η^P, η^Q dei due estremi del tratto e il lavoro della coppia U_c per la rotazione della sezione Q . Sarà quindi:



$$\frac{L_e}{U_c} = \frac{\eta^Q - \eta^P}{l} + \varphi^Q \quad [55]$$

Per il calcolo di L_i si trascurerà l'effetto del taglio; si nota che nel tratto PQ è $M^a = (P \angle Q)U_c$, $N^a = 0$ e quindi:



$$\frac{L_i}{U_c} = \int_P^Q (P \angle Q) \frac{M dz}{EJ} \quad [56]$$

Interessa particolarmente considerare la relazione alla quale questa equazione conduce quando si faccia tendere a zero la lunghezza l del tratto. Si nota a tal riguardo che, poiché la funzione $(P \angle Q)$ varia fra 0 e 1 e la quantità M/EJ

Fig. 57 - Carichi fittizi per la deduzione della [55].

si mantiene finita, l'integrale dell'espressione di L_i tende a zero come la lunghezza del tratto. Quindi l'equazione $L_e = L_i$ dà:

$$\frac{d\eta}{dz} + \varphi = 0 \quad [57]$$

Il diagramma che rappresenta le frecce η in funzione della coordinata z è detto *linea elastica* della trave. Dalla [57] risulta che la pendenza $d\eta/dz$ di questa linea (*) ha valore uguale e di segno opposto alla rotazione φ . Questa relazione ha un importante significato geometrico: se le deformazioni dovute al taglio sono trascurabili, le sezioni si dispongono normalmente alla linea elastica; ossia sezioni e asse della trave si mantengono perpendicolari nella deformazione. Sostituendo φ nella [54] dalla [57] si ottiene l'equa-

(*) Al solito le pendenze si intendono misurate come rapporti di incrementi di ordinate e ascisse, lette nelle relative scale. Fra gli angoli misurati sul disegno e quelli reali intercorrono relazioni del tipo [39].

zione differenziale della linea elastica in assenza di deformazioni di taglio

$$\frac{d^2\eta}{dz^2} = - \frac{M}{EJ} \quad [58]$$

La quantità $d^2\eta/dz^2$ dà la curvatura, ossia il reciproco del raggio di curvatura r , della linea elastica nei limiti di approssimazione che conseguono al trascurare $(d\eta/dz)^2$ rispetto a 1 (*). Per quanto riguarda i segni, la [58] indica che, se M è positivo, la convessità della linea elastica si volge dal lato delle y positive; dove M si annulla si ha un flesso della deformata; dove M è negativo, la linea elastica volge la concavità verso $+y$.

Si osservi l'analogia fra le relazioni precedentemente viste:

$$d^2M/dz^2 = -p = dT/dz \quad [18], [16]$$

$$d^2\eta/dz^2 = -M/EJ = -d\varphi/dz \quad [58], [54]$$

Il confronto permette di concludere che tutti i procedimenti mediante i quali dal diagramma del carico p si ottiene quello del taglio T e quello del momento flettente M , per la trave diritta con deformazioni di taglio trascurabili possono essere usati per ottenere dal grafico delle curvature M/EJ le rotazioni φ e quindi le frecce η . In particolare: la linea elastica può essere ottenuta come funicolare nel diagramma delle curvature considerato come diagramma di carico (**); il taglio in queste condizioni rappresenta con segno cambiato le rotazioni φ delle sezioni (teorema di Mohr).

Si ricorda che, tracciata la funicolare di un dato diagramma di carico, si deve individuare, in base alle condizioni statiche di vincolo, la fondamentale dalla quale vanno letti in ordinate i momenti; similmente, tracciata la funicolare

(*) L'esatta espressione della curvatura $1/r$ si ottiene dividendo la quantità $d^2\eta/dz^2$ per $(1 + \varphi^2)^{3/2}$. Posta l'ortogonalità delle sezioni e della linea elastica, la relazione discende più direttamente dalla [54] quando si osservi che è $dz = r d\varphi$.

(**) A precisare le scale di rappresentazione si noti che, diviso il diagramma delle curvature in strisce, per ognuna si dovrà considerare come carico la quantità $(M/EJ) \Delta z$ essendo Δz la larghezza della striscia e (M/EJ) il valore medio della curvatura. Se si misura la distanza polare H nella scala del disegno, si riporteranno nel relativo poligono al posto delle forze le lunghezze $(M/EJ)H \Delta z$ nella scala delle frecce, che può fissarsi a piacere.

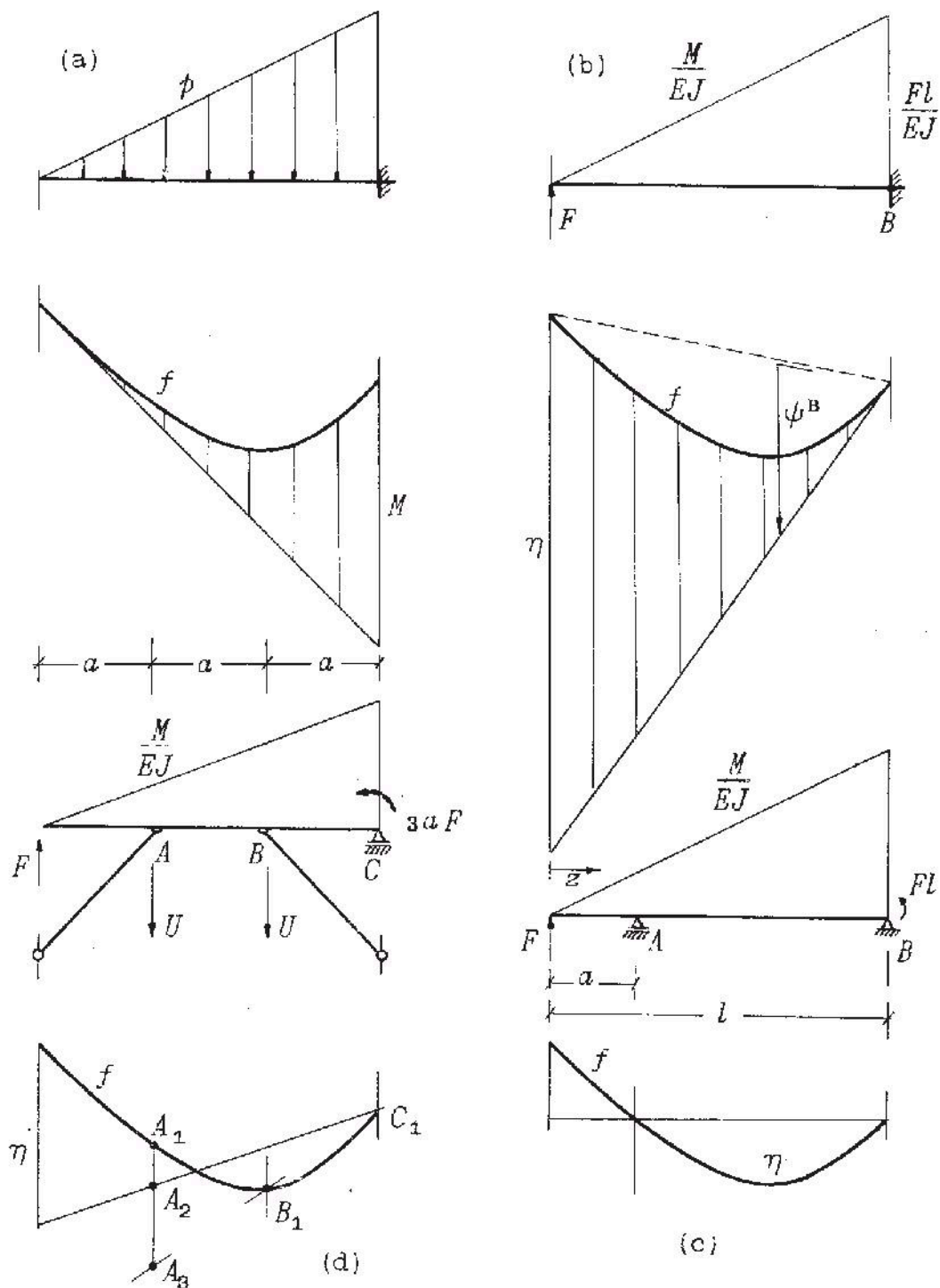


Fig. 58 - (a) Momenti in una trave a sbalzo soggetta a carico triangolare.

(b) Freccie in una trave a sbalzo con diagramma triangolare di curvature.

(c) Freccie in una trave appoggiata con diagramma triangolare di curvature.

(d) Freccie in una trave con vincoli obliqui, curvature come sopra. La retta di riferimento C_1A_2 è trovata proiettando B_1 in A_3 sulla verticale di A_2 e costruendo A_3 con la relazione $(A_1A_2/A_1A_3) = 1/3$.

Si noti che la medesima funicolare f serve nei quattro grafici, con differenti fondamentali.

di un diagramma di curvature, si deve determinare la fondamentale dalla quale son da leggere le frecce, in base alle condizioni cinematiche imposte dai vincoli, condizioni in generale diverse da quelle che gli stessi vincoli impongono ai momenti. Ad esempio, per una trave a sbalzo (fig. 58 a, b) per i momenti si hanno le condizioni $M = 0$, $T = dM/dz = 0$ per $z = 0$; per le frecce si ha $\eta = 0$, $\varphi = -d\eta/dz = 0$ per $z = l$. Il poligono funicolare (segnato come curva continua) e' lo stesso nei due casi perche' si sono considerati diagrammi triangolari di carico e di curvature; ma per i momenti le ordinate sono lette dalla tangente all'estremo libero, per le frecce dalla tangente all'estremo opposto.

Nel caso di trave appoggiata (fig. 58c) la fondamentale per la lettura delle frecce e' tracciata in modo che sia nullo lo spostamento degli appoggi, se questi sono fissi. Se gli spostamenti in corrispondenza dei vincoli sono assegnati, di essi si dovra' tener conto nel tracciare la fondamentale. Talvolta si richiedera' previamente un esame della situazione di vincolo, da condurre in generale mediante l'equazione dei lavori virtuali. Così nel caso della fig. 58d, applicando due carichi di esplorazione U in A e B si trovano momenti $M^A = 0$ e quindi, trascurando gli effetti degli sforzi assiali, si conclude che deve essere per qualsiasi condizione di carico $\eta^A + \eta^B = 0$. In base a questa si traccia la fondamentale come e' indicato in figura. Per una trave Gerber (fig. 59), si traccia in primo luogo la fondamentale per ciascuno tratti ad appoggi fissi (tratto CD in figura): gli spostamenti dei tratti che si articolano su quelli si ottiene in conseguenza. Volendo, si puo' tracciare una funicolare con un solo polo per l'intera travatura Gerber e si tracciano conseguentemente poi le fondamentali, una per ciascuno dei tratti fra loro incernierati.

Occorre dunque tener presente che dal teorema di Mohr e corollari si ottengono spostamenti e rotazioni a meno di un moto rigido. Così ad es.: la reazione in P che si trova considerando un tratto PQ di trave diritta come semplicemente appoggiato in P e Q e caricato dal diagramma delle curvature misura la rotazione della tangente in P *relativamente* alla corda PQ della linea elastica: se P e Q non si spostano, quella reazione misura la rotazione assoluta.

Ad esempio, il diagramma triangolare di curvature della fig. 58b, considerato come diagramma di carico su una trave appoggiata ai due estremi, darebbe in B una reazione

$$\frac{2}{3} \frac{Fl}{EJ} - \frac{1}{2} = \frac{Fl}{3EJ}$$

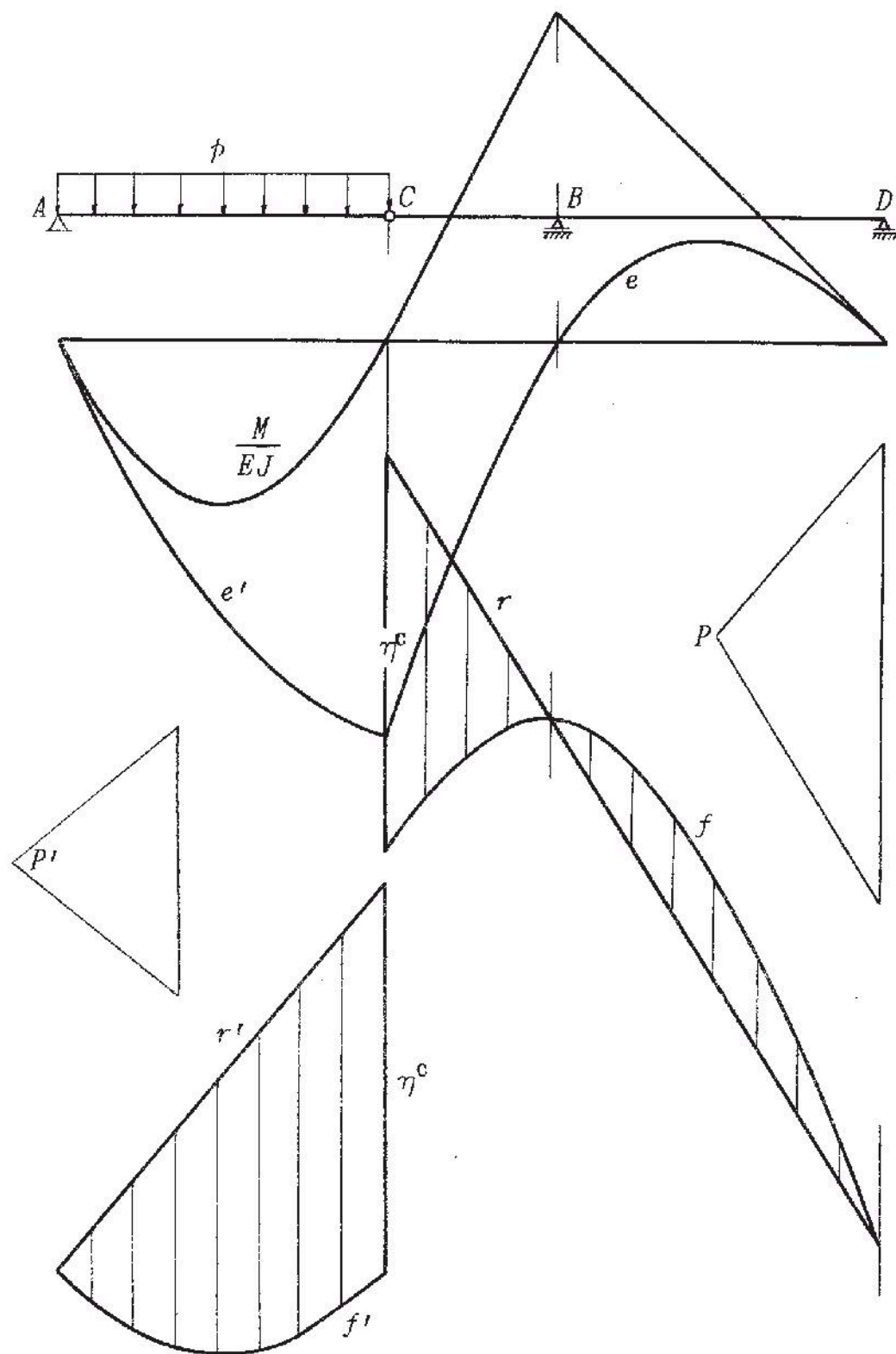


Fig. 59 - Costruzione della linea elastica per una trave Gerber mediante funicolari. Col polo P si costruisce la funicolare f : abbassando su questa le verticali degli appoggi B e D si individua la fondamentale r . Trovata così la freccia η_c per la funicolare f' costruita con polo P' si determina la fondamentale r' .

Questa quantità misura la rotazione ψ^B della tangente in B alla linea elastica rispetto alla corda, tratteggiata in figura; non la rotazione assoluta che in quella sezione è nulla.

IV.7 - Deformazioni dovute al taglio. Quando si considerino gli effetti del taglio, mentre le [53] e [54] sussistono invariate, nella [56] si aggiunge al secondo membro la quantità

$$\frac{1}{l} \int_p^a \frac{T}{GA_y} dz$$

essendo $T^a = U_c/l$ per i carichi fittizi della fig. 57. Questa espressione per $l \rightarrow 0$ vale T/GA_y . Indicando con $\varphi + \varphi_t$ e $\eta + \eta_t$ le rotazioni e le frecce che si calcolano tenendo conto del taglio si ha:

$$\frac{d(\varphi + \varphi_t)}{dz} = \frac{M}{EJ}, \quad \frac{d(\eta + \eta_t)}{dz} + \varphi + \varphi_t = \frac{T}{GA_y}$$

Sottraendo da queste rispettivamente le [54] e [57] si ottiene:

$$d\varphi_t/dz = 0, \quad d\eta_t/dz + \varphi_t = T/GA_y \quad [59], [60]$$

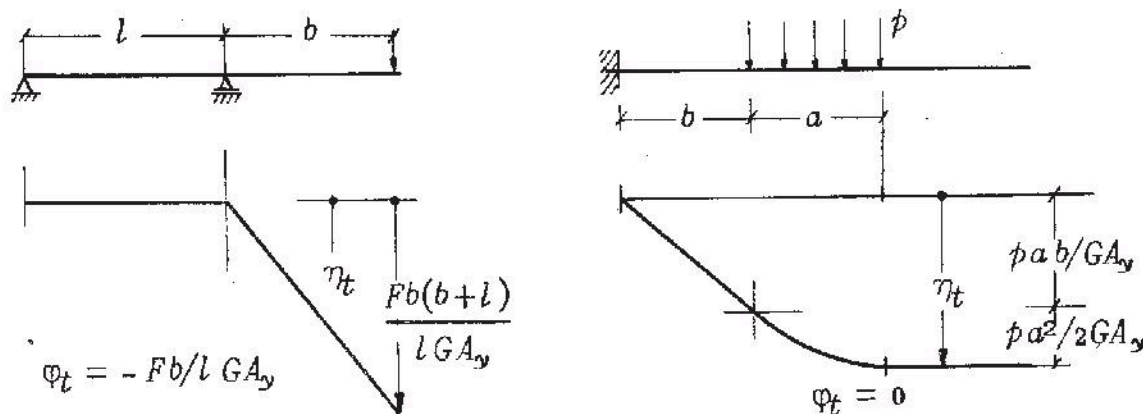


Fig. 60 - Frecce prodotte dagli effetti del taglio.

Le quantità φ_t, η_t rappresentano le correzioni da aggiungere a φ e η rispettivamente per considerare gli effetti del taglio. Risulta che questo produce una rotazione costante delle sezioni e un diagramma di frecce aggiuntive legato al taglio dalla relazione [60]. Applicazioni di queste equazioni sono presentate nella fig. 60.

IV.8 - Calcolo analitico delle deformate di flessione. La determinazione analitica della linea elastica può essere condotta in base alla [58]: una prima integrazione conduce al calcolo delle pendenze $d\eta/dz$, una seconda dà le frecce η . La prima operazione introduce una costante di integrazione (la rotazione della sezione iniziale); la seconda apporta una costante ancora (la freccia iniziale). Le due costanti sono individuate dalle condizioni di vincolo, come per la costruzione grafica era individuata la posizione della fondamentale di riferimento della linea funicolare. Consideriamo, ad esempio, il caso della fig.58 c; con le notazioni ivi indicate si ha:

$$\frac{d^2\eta}{dz^2} = -\frac{Fz}{EJ}, \quad \frac{d\eta}{dz} = -\frac{Fz^2}{2EJ} + C_1, \quad \eta = -\frac{Fz^3}{6EJ} + C_1z + C_2$$

Le costanti C_1, C_2 sono individuate dalle condizioni:

$$C_1a + C_2 = Fa^3/6EJ, \quad C_1l + C_2 = Fl^3/6EJ$$

Per il calcolo di singoli parametri di deformazione, ad es. la freccia o la rotazione in una data sezione, è più conveniente il procedimento generale di applicazione dell'equazione dei lavori virtuali. Per il computo degli integrali [48] conviene far uso della formula di Simpson:

$$\int_P^Q f dZ = (f^P + 4f^M + f^Q)l/6 \quad [61]$$

essendo l la lunghezza dell'intervallo di integrazione, f^P , f^Q e f^M i valori della funzione integranda f ai due estremi e nel punto di mezzo. La [61] fornisce valori esatti dell'integrale se la funzione integranda è un polinomio di terzo grado in Z : altrimenti i risultati saranno affetti da errore tanto più sensibile quanto più accidentato sia il diagramma di f . Quando questo presenti discontinuità occorre frazionare l'intervallo di integrazione.

Altre formule utili per l'applicazione sono le seguenti:

$$\int (P \angle Q) dZ = \int (Q \angle P) dZ = l/2 \quad [62]$$

$$\int (P \angle Q)^2 dZ = \int (Q \angle P)^2 dZ = l/3 \quad [63]$$

$$\int (P \angle Q)(Q \angle P) dZ = l/6 \quad [64]$$

che si provano immediatamente con le definizioni [23]. Nelle

[62], come nel seguito quando entri nella funzione integranda il fattore $(P \angle Q)$ o $(Q \angle P)$ si intende che i limiti stanno nei punti P, Q .

Si svilupperanno alcune applicazioni del procedimento generale.

a) **Trave a sbalzo soggetta ad un carico concentrato.** Supponiamo in primo luogo che l'incastro sia perfetto, ossia che esso impedisca completamente gli spostamenti e la rotazione della sezione vincolata. In tal caso, per il sistema di carichi di esplorazione della fig. 61a viene a far lavoro solo la forza nella sezione $z = z_1$; quindi L_e/U misurerà la freccia in quella sezione. Con la [41], per EJ costante, si ottiene:

$$\eta(z=z_1) = \frac{Fz_1}{6EJ} \left[z_1 l + 4 \frac{z_1}{2} \left(l - \frac{z_1}{2} \right) \right] = \frac{Fz_1^2}{6EJ} (3l - z_1) \quad [65]$$

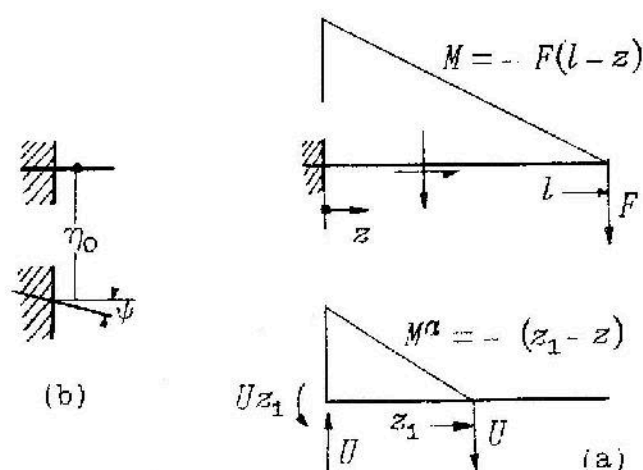


Fig. 61 - Trave a sbalzo con carico concentrato all'estremo libero. (a) Carichi di esplorazione per il calcolo di $\eta(z_1)$. (b) Cedimento del vincolo.

E' facile controllare che questa espressione soddisfa alla [58] e alle condizioni di vincolo $\eta = d\eta/dz_1 = 0$ per $z_1 = 0$.

Se l'incastro subisce un certo abbassamento η_0 e una rotazione ψ , anche le azioni fittizie applicate a quella sezione fanno lavoro; quindi dalla [41] si ottiene:

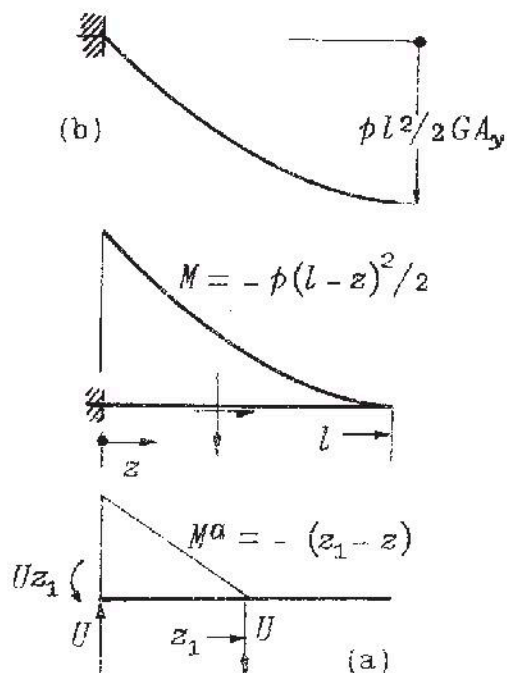
$$\eta - \eta_0 - \psi z_1 = \frac{Fz_1^2}{6EJ} (3l - z_1)$$

Dunque le frecce indicate dalla [65] rappresentano nel caso di incastro imperfetto gli spostamenti verticali a partire dalla tangente alla linea elastica.

Per la sezione dove il carico e' applicato si ha, con incastrato perfetto:

$$\eta = Fl^3/3EJ$$

b) **Trave a sbalzo soggetta a carico uniforme.** Nella fig.62 e' riportato il diagramma dei momenti, simile a quello delle curvature posto che sia EJ costante. Supponendosi l'incastrato perfetto, il lavoro dei carichi di esplorazione fornisce la freccia nella sezione $z = z_1$. Si ottiene cosi' dalla [41]:



$$\begin{aligned} \eta_{z=z_1} &= \frac{p z_1}{6 EJ} \left[z_1 \frac{l^2}{2} + 4 \frac{z_1}{2} \frac{(l - z_1/2)^2}{2} \right] = \\ &= \frac{p z_1^2}{24 EJ} (6l^2 - 4l z_1 + z_1^2) \end{aligned}$$

Anche qui e' facile controllare che la [58] e le condizioni di vincolo sono verificate.

c) **Trave appoggiata caricata su uno sbalzo.** Per una trave di sezione costante appoggiata in H e K (figura 63) soggetta ad una forza trasversale nel punto L dello sbalzo, siano da calcolare le rotazioni della tangente alla linea elastica su due appoggi e la freccia sotto il carico.

Fig. 62 - Trave a sbalzo con carico uniformemente ripartito. (a) Carichi di esplorazione per il calcolo di $\eta(z_1)$. (b) Freccie addizionali dovute al taglio.

Per determinare la rotazione φ^H si applicano i carichi fittizi della fig.63a. Di questi solo la coppia U_c fa lavoro ed e' $L_e/U_c = \varphi^H$. Con i valori indicati per i momenti M^a e M^b dalla [41], [64] si ottiene:

$$\varphi^H = Fbl/6EJ$$

Per determinare la rotazione della sezione K si adoperano i carichi di esplorazione della fig.63b con i quali si ha $L_e/U_c = -\varphi^K$. Con le [41], [63] si ottiene:

$$\varphi^K = -Fbl/3EJ$$

Per la determinazione della freccia η^L valgono i cari-

chi della figura 63c con i quali si ha:

$$\eta^L = \frac{Fb^2}{EJ} \left[\int (H \angle K)^2 dz + \int (L \angle K)^2 dz \right] = \frac{Fb^2}{EJ} \frac{L+b}{3}$$

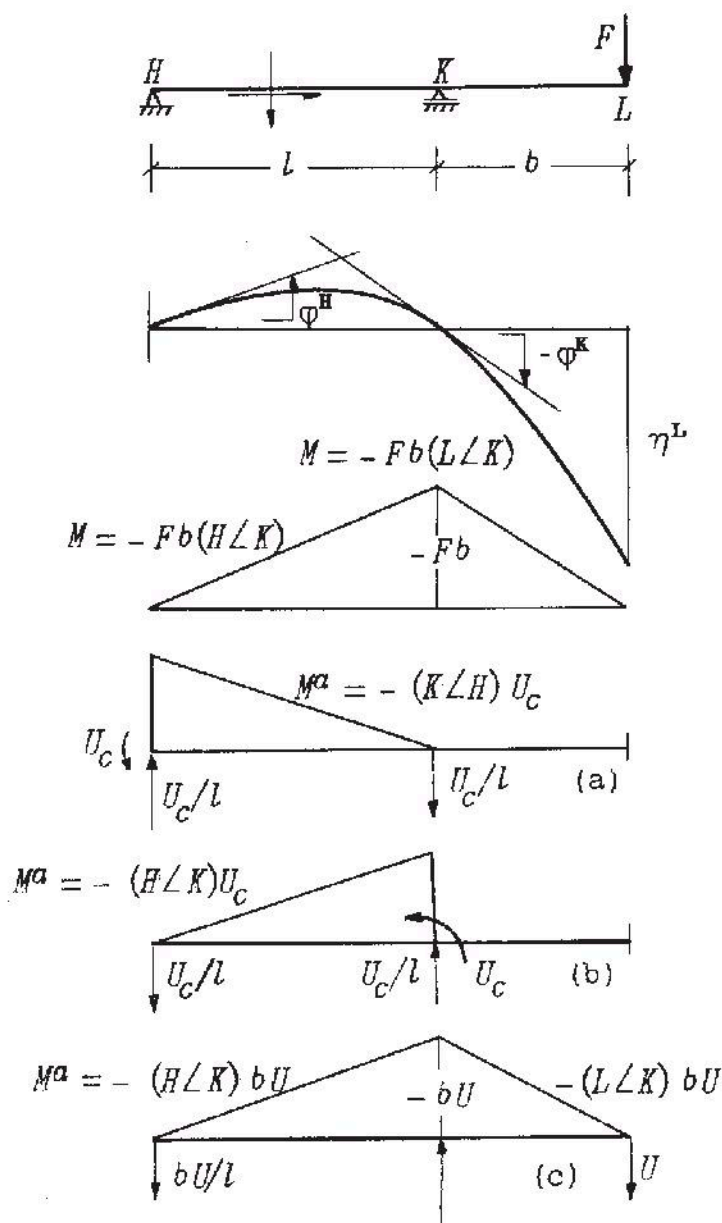


Fig. 63 - Trave appoggiata caricata sullo sbalzo. (a) Calcolo della rotazione in H. (b) Idem in K. (c) Freccia in L.

d) Rotazione delle tangenti sugli appoggi di una campata. Siano H, K i punti di appoggio di una campata nella quale i momenti flettenti siano rappresentati mediante un'espressione del tipo [24].

Per determinare la rotazione φ^H si usano i carichi fit-

tizi della fig. 64a, coi quali risulta $L_1/UL = \varphi^H$. Così, per la trave a sezione costante, mediante le [63], [64] si trova (*)

$$-\varphi^H = \int_l (K \angle H) \frac{\tilde{M} dz}{EJ} + \frac{M^H l}{3EJ} + \frac{M^K l}{6EJ} \quad [66]$$

Il primo addendo di questa espressione dipende dai carichi applicati nella campata. Nel caso in cui insista una forza F a distanza b da K (figura 64b) il diagramma dei momenti può essere ottenuto sottraendo al triangolo $HK'K$, che nell'intervallo HK è espresso da $(H \angle K)Fb$, il triangolo $H'KK'$ che nell'intervallo PK è espresso da $(P \angle K)Fb$. In questo intervallo è $(K \angle H) = (K \angle P)b/l$. Si trova quindi

$$\int (K \angle H) \tilde{M} dz = Fb \left[\int (K \angle H)(H \angle K) dz - \frac{b}{l} \int (K \angle P)(P \angle K) dz \right]$$

Sviluppando mediante la [64] e tenendo presente che $l^2 - b^2 = a(l+b)$ si ha la rotazione per $M^H = M^K = 0$

$$-\varphi^H = Fab(l+b)/6lEJ \quad [67]$$

Fig. 64 - Calcolo delle rotazioni delle tangenti sugli appoggi.

Se la campata è soggetta ad un carico p uniforme, dal diagramma dei momenti (figura 64c)

per la [61] si ottiene:

$$-\varphi^H = \frac{pl^2}{8EJ} \frac{4l}{2} \frac{1}{6} = \frac{pl^3}{24EJ}$$

(*) Si osservi che le deformazioni dovute al taglio, che non influenzano le rotazioni relative, danno un contributo nella rotazione φ^H dato da:

$$\frac{1}{l} \int_l \frac{\tilde{T} dz}{GA_y} - \frac{M^K - M^H}{GA_y l}$$

Le espressioni della rotazione φ^K si ottengono da quelle di $-\varphi^H$ scambiando le quantità riferentisi all'appoggio H con quelle relative all'appoggio K . Si osserva che i risultati sono validi anche se i punti H e K si spostano, purché gli angoli trovati si intendano misurati rispetto alla corda che congiunge le posizioni di H e K a deformazione avvenuta.

e) Linea elastica di una trave soggetta a carichi concentrati (fig. 65). Il punto O si trovi all'estremo libero di una trave a sbalzo; da questo punto viene misurata la coordinata z e sia z_i la coordinata della sezione P_i dove agisce la forza F_i ; nella figura 65a è segnato il diagramma dei momenti dovuti a questo carico; nella figura 65b sono indicati i momenti prodotti dai carichi di esplorazione. Per questi è $L_e/U = \eta - \eta_0 + z\varphi_0$; i relativi momenti sono riportati nella fig. 65c. Supponendo che la trave abbia sezione costante si ottiene:

$$\begin{aligned} \int \frac{M^a}{U} \frac{M dz}{EJ} &= \\ &= \frac{F_i(z-z_i)^2}{EJ} \int (P_i/P)(P/P_i) dz = \\ &= \frac{F_i(z-z_i)^3}{6EJ} \end{aligned}$$

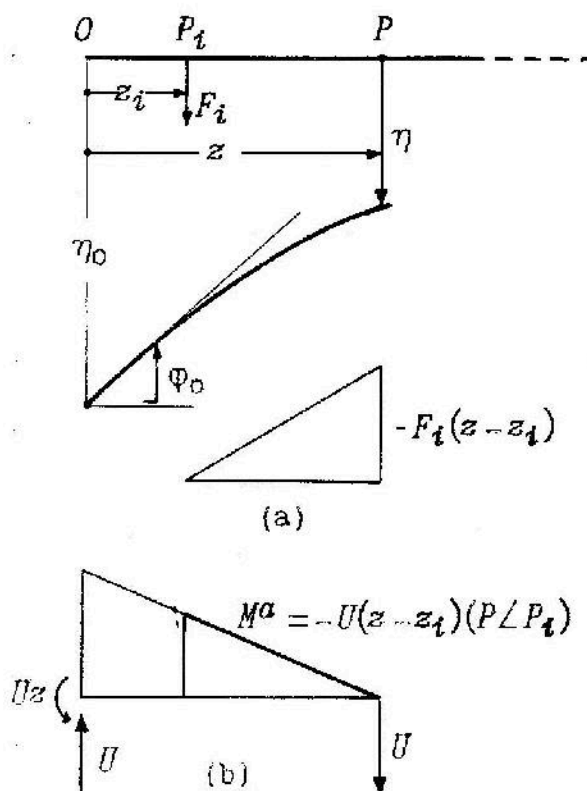


Fig. 65 - Calcolo delle frecce prodotte da un carico concentrato.

Quindi per la [41], se più carichi F_i sono compresi fra O e la sezione P che si considera, si ottiene in questa

$$\eta = \eta_0 - z\varphi_0 + \sum F_i(z-z_i)^3/6EJ$$

Con questa espressione si possono calcolare le frecce per qualunque trave dritta in condizioni generali di vincolo; bisognerà caso per caso, determinare η_0 e φ_0 in base alle condizioni geometriche imposte alla linea d'asse e comprendere fra le forze F_i le reazioni di eventuali vincoli contenuti nel tratto z .

f) Angolo di due corde consecutive della linea elastica. Siano A_{i-1} , A_i , A_{i+1} (fig. 66) tre punti di una trave diritta; siano η_{i-1} , η_i , η_{i+1} le frecce in quei tre punti. Nel tronco

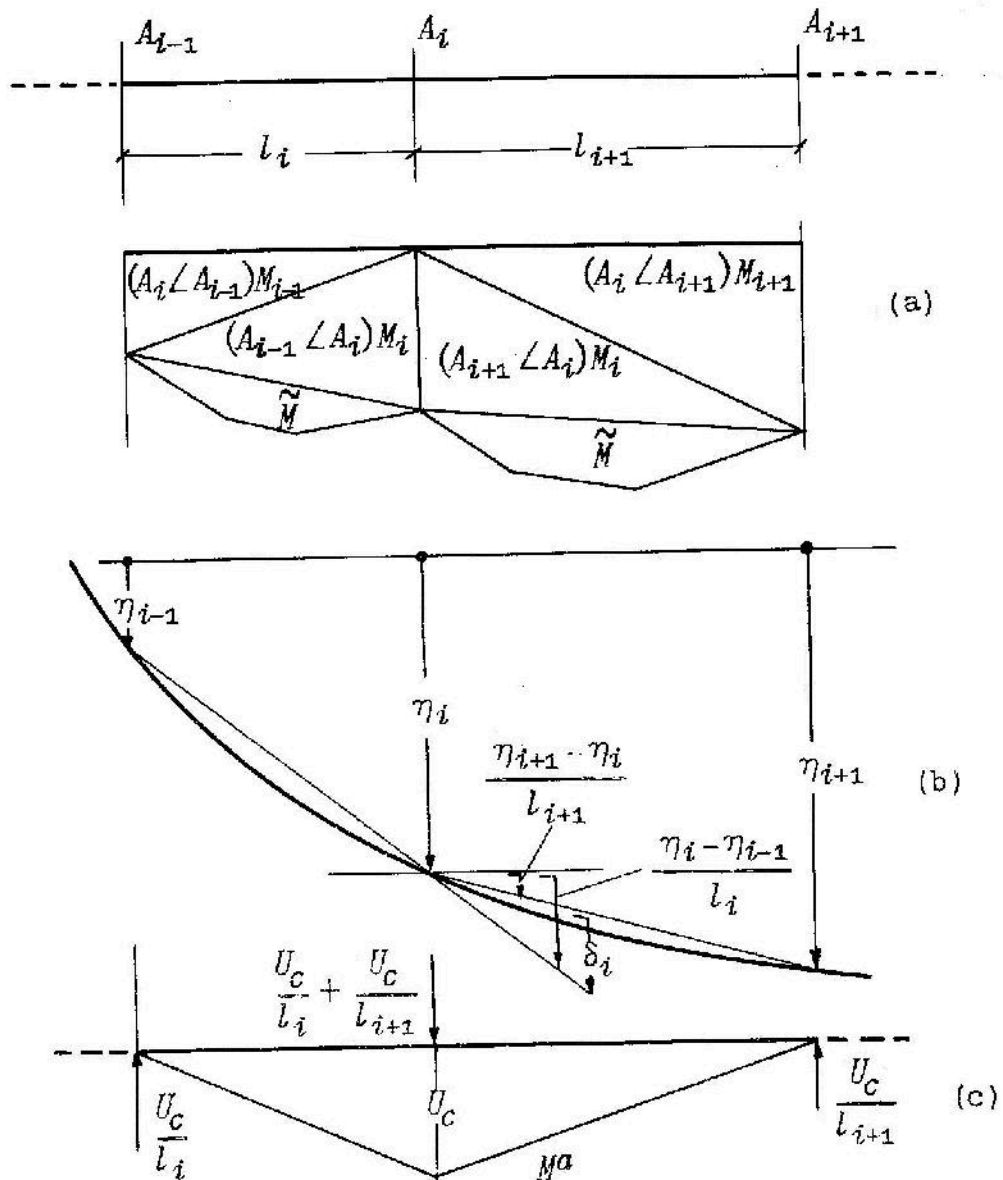


Fig. 66 - Angolo di due corde della linea elastica.

l_i fra A_{i-1} e A_i , come nel successivo l_{i+1} fra A_i e A_{i+1} i momenti siano rappresentati mediante espressioni [24]; siano EJ_i e EJ_{i+1} le rigidità flessionali, costanti nei due tratti. Si applichino alle tre sezioni i carichi di esplorazione della fig. 66c. Questi danno luogo al lavoro $L_e = U_c \delta_i$ essendo

$$\delta_i = \frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{l_i} - \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{l_{i+1}}$$

Questa quantita' rappresenta l'angolo che fanno le due corde consecutive della linea elastica, quotato nella fig. 66 b. L'equazione [41] da' quindi:

$$\delta_i = \int \frac{M^a}{U_c} \frac{M dz}{EJ}$$

l'integrale essendo esteso dalla sezione A_{i-1} alla A_{i+1} ; in questo tratto i momenti M^a assumono l'andamento indicato nella fig. 66c. Sostituendo i momenti M scomposti secondo la [24], come indica la fig. 66a e facendo uso delle [63], [64] si ottiene (*):

$$\delta_i = \tilde{K}_i + \beta_i M_{i-1} + 2(\beta_i + \beta_{i+1}) M_i + \beta_{i+1} M_{i+1} \quad [68]$$

essendo (**)

$$\beta_i = l_i / 6EJ_i, \quad \beta_{i+1} = l_{i+1} / 6EJ_{i+1} \quad [69]$$

$$\tilde{K}_i = \int (A_{i-1} \angle A_i) \frac{\tilde{M} dz}{EJ} + \int (A_{i+1} \angle A_i) \frac{\tilde{M} dz}{EJ} \quad [70]$$

Applichiamo la [68] al calcolo della freccia nella sezione di applicazione di una forza F in una trave appoggiata di sezione costante (fig. 67). Si scrive la [68] con $i = 1$, intendendo che A_0 e A_2 siano le sezioni di appoggio, A_1 quel-

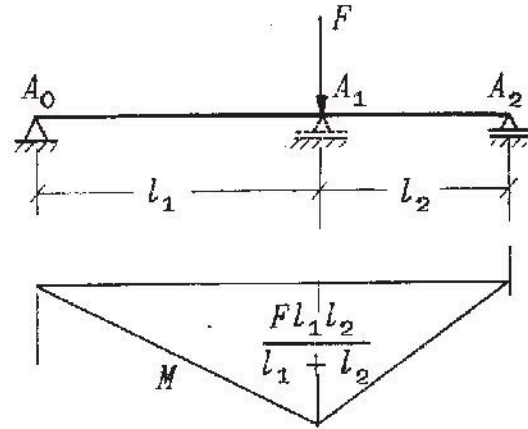


Fig. 67 - Trave appoggiata trattata come trave continua con appoggio cedevole.

(*) Se la rigidezza EJ varia da sezione a sezione i termini contenenti i fattori β nella [68] assumono la forma seguente:

$$M_{i-1} \int (A_{i-1} \angle A_i) (A_i \angle A_{i-1}) \frac{dz}{EJ} + M_i \int (A_{i-1} \angle A_i)^2 \frac{dz}{EJ} + \\ + M_i \int (A_{i+1} \angle A_i)^2 \frac{dz}{EJ} + M_{i+1} \int (A_{i+1} \angle A_i) (A_i \angle A_{i+1}) \frac{dz}{EJ}$$

(**) $\tilde{K}_i$ si puo' interpretare come la somma delle reazioni che si avrebbero in corrispondenza dell'appoggio A_i caricando con i rispettivi diagrammi delle curvature $\tilde{M}/EJ$ la trave di luce l_i appoggiata in A_{i-1} e A_i e la successiva appoggiata in A_i e A_{i+1} .

la di applicazione del carico. In questo caso e':

$$M_0 = M_2 = 0, \quad M_1 = Fl_1 l_2 / (l_1 + l_2) \\ \tilde{M} = 0, \quad \tilde{K}_1 = 0, \quad \eta_0 = \eta_2 = 0$$

Si ha quindi

$$\eta_1 \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) = \frac{Fl_1 l_2}{l_1 + l_2} \left(\frac{l_1}{3EJ_1} + \frac{l_2}{3EJ_2} \right)$$

e, posto $J_1 = J_2 = J$

$$\eta_1 = Fl_1^2 l_2^2 / 3EJ(l_1 + l_2)$$

g) **Aggregati di travi rettilinee.** Ci riferiamo direttamente ad un esempio il quale mostra le particolarità del calcolo di deformazioni per le travi isostatiche aventi per linea d'asse una spezzata. Lo schema della fig. 68, vincolato e caricato come ivi indicato, e' simmetrico rispetto all'asse ss ; esso e' formato dai tratti AG , GH , HL e simmetrici, di rigidità EJ , EJ_1 , EJ_2 , rispettivamente; i momenti flettenti nei tratti AG , HL sono indicati nella fig. 68a; nel tratto GH il momento e' costante.

Volendo calcolare la freccia in G si applicano i carichi di esplorazione della fig. 68b ai quali corrispondono i momenti della figura 68c; nel tratto GHL e nel suo simmetrico, M^a e' costan-

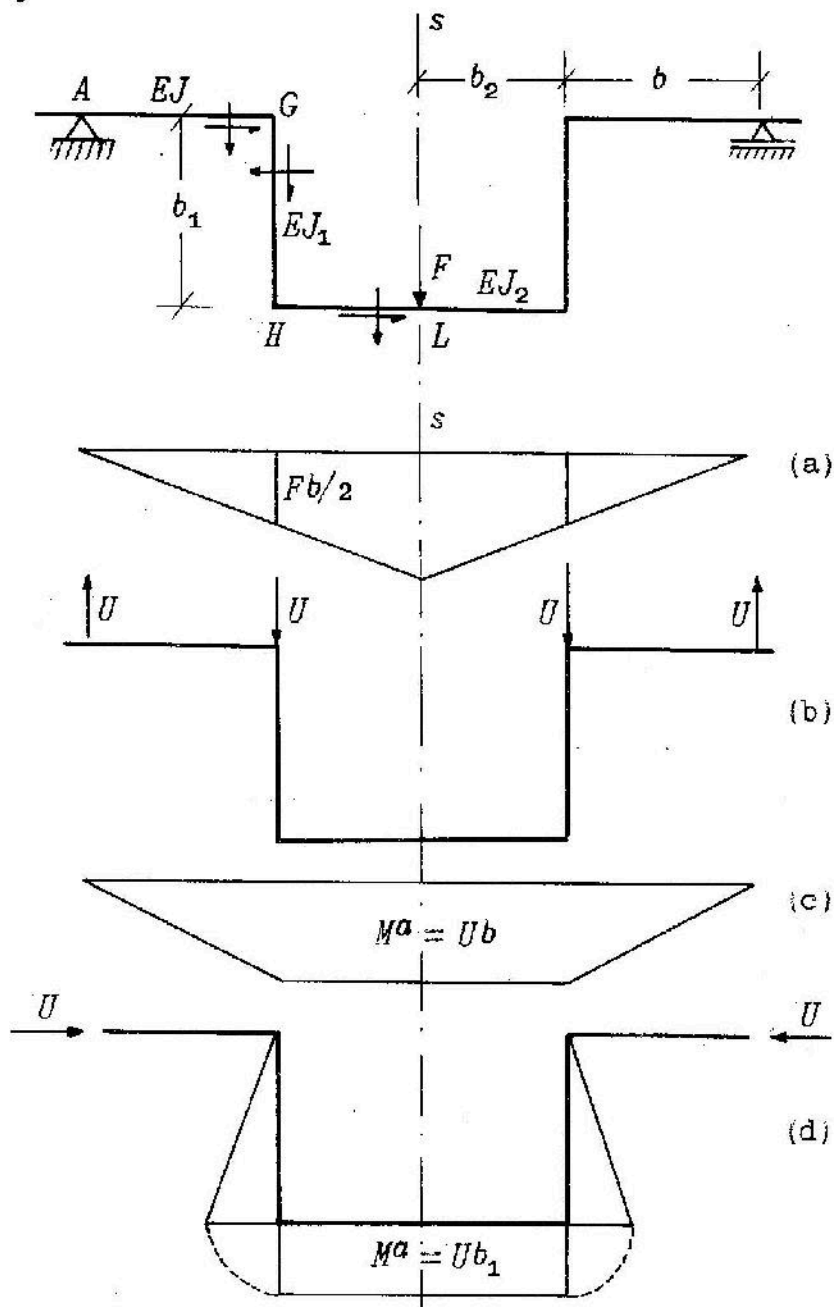


Fig. 68 - Deformazioni di un albero a gomito.

te. Si trova quindi con facile calcolo:

$$\eta^0 = Fb \left(\frac{b^2}{6EJ} + \frac{bb_1}{2EJ_1} + \frac{bb_2}{2EJ_2} + \frac{b_2^2}{4EJ_2} \right)$$

Per calcolare la rotazione φ della sezione A si adoperano due coppie fittizie opposte applicate a questa sezione e alla sua simmetrica, le quali danno M^a costante su tutte le sezioni. Così si trova:

$$-\varphi^A = F \left(\frac{b^2}{2EJ} + \frac{bb_1}{2EJ_1} + \frac{bb_2}{2EJ_2} + \frac{b_2^2}{4EJ_2} \right)$$

Volendo determinare lo spostamento orizzontale relativo ξ del punto A rispetto al suo simmetrico si adoperano i carichi fittizi della fig. 68d; con i momenti ivi indicati si trova

$$\xi = Fb_1 \left(\frac{bb_1}{2EJ_1} + \frac{bb_2}{EJ_2} + \frac{b_2^2}{2EJ_2} \right)$$

IV.9 - Travi curve. Sia c la curva piana (fig. 69) che rappresenta l'asse della trave. In un suo punto O poniamo l'origine di un sistema cartesiano ortogonale $\bar{y}, \bar{z}$. Rispetto a questo, gli assi locali y, z in un punto generico P della linea d'asse siano rotati di un angolo α nel senso che porta l'asse $+\bar{y}$ su $+\bar{z}$. In un punto S dell'asse stesso applichiamo un carico fittizio U nella direzione $\bar{y}$ e ad esso facciamo equilibrio con una forza ed una coppia applicate alla sezione O . Distinguendo con indice 0 le quantità relative all'origine e con indice 1 quelle della sezione S si ha

$$M^a = U(\bar{z} - \bar{z}_1) \quad , \quad N^a = -U \sin \alpha \quad , \quad T^a = U \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} \eta_1 - \eta_0 + \varphi_0 \bar{z}_1 &= \int \frac{M}{EJ} (\bar{z} - \bar{z}_1) dZ - \int \frac{N}{EA} \sin \alpha dZ + \\ &+ \int \frac{T}{GA_y} \cos \alpha dZ \end{aligned} \quad [71]$$

essendo gli integrali estesi dalla sezione O alla sezione S ; in essi figurano le caratteristiche M, N, T della sollecitazione che produce le deformazioni in esame.

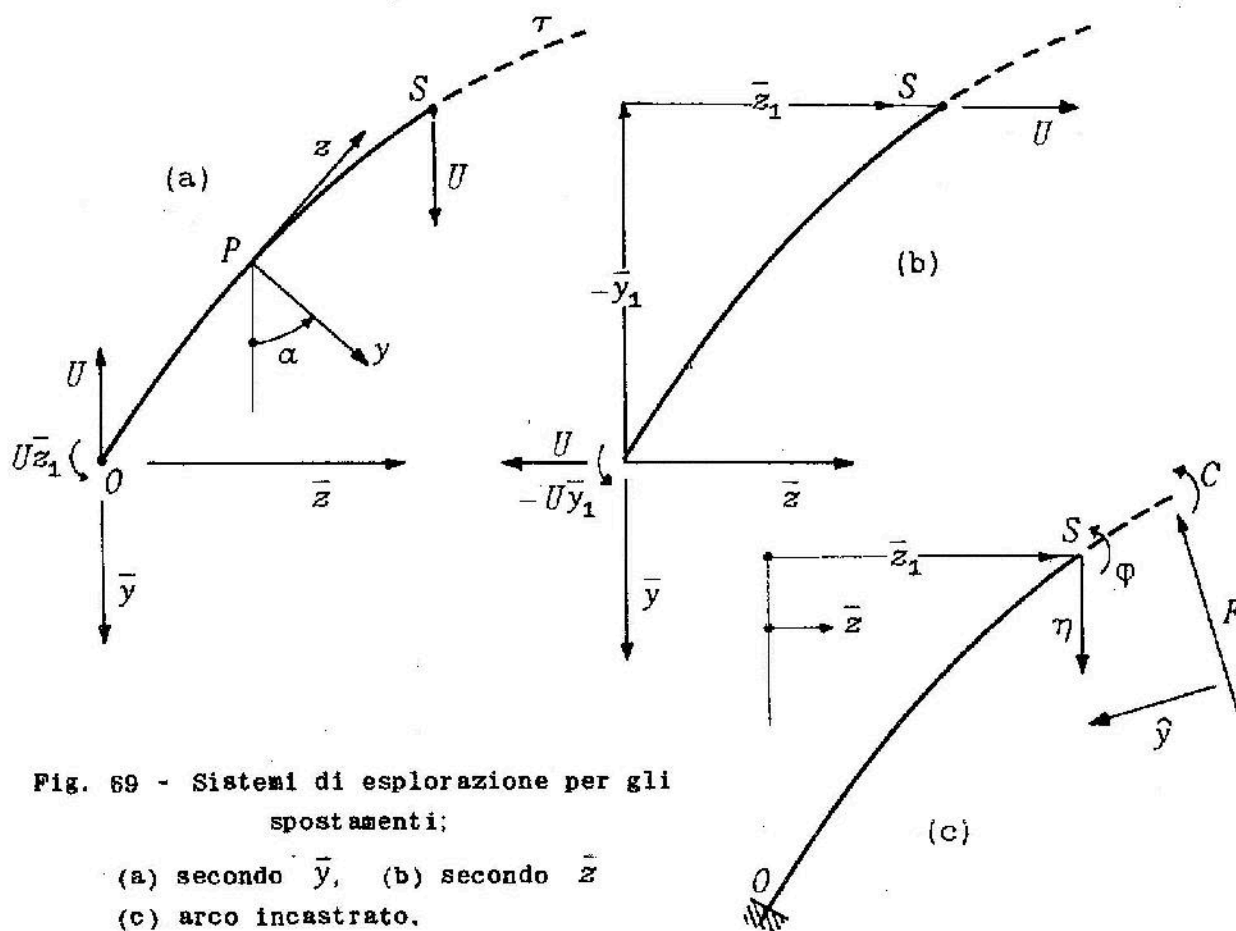
Applicando alla sezione O e ad una sezione qualunque due coppie fittizie uguali e contrarie si trova, come per la

trave diritta, la relazione:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_0^Z \frac{M}{EJ} dZ \quad [72]$$

Tenendo conto della relazione $d\varphi = MdZ/EJ$ che si deduce differenziando la [72], si trova che

$$d[(\varphi - \varphi_0)(\bar{z} - \bar{z}_1)] = (\bar{z} - \bar{z}_1) \frac{M}{EJ} dZ + (\varphi - \varphi_0) d\bar{z}$$



Si integrino ambo i membri fra le sezioni O e S . Il primo membro da zero perché dei due fattori in $[\]$ il primo si annulla in O , il secondo in S . Al secondo membro il secondo dei due integrali si può scrivere nella forma

$$\int (\varphi - \varphi_0) d\bar{z} = \int \varphi d\bar{z} - \varphi_0 \bar{z}_1$$

mentre il primo coincide col primo della [71]. Il valore così trovato può essere sostituito nella [71] la quale, tenuto pre-

sente che lungo la curva c e'

$$\sin \alpha dZ = -d\bar{y} \quad , \quad \cos \alpha dZ = d\bar{z}$$

assume la forma

$$\eta - \eta_0 = - \int_0 \varphi d\bar{z} + \int_0 \frac{N}{EA} d\bar{y} + \int_0 \frac{T}{GA_y} d\bar{z} \quad [73]$$

Gli integrali si estendono dalla sezione 0 alla sezione a cui si riferisce il valore η a primo membro. Nella [73] come nella [72] si è omissso il simbolo relativo alla sezione finale poichè non v'è luogo ad ambiguità.

La [73] vale per gli spostamenti in una direzione qualsiasi purchè si sostituisca a $d\bar{y}$ la proiezione dell'archetto dZ in quella direzione e a $d\bar{z}$ la proiezione del medesimo su una direzione rotata di 90° nel senso $\bar{y} \rightarrow \bar{z}$. In particolare per gli spostamenti nella direzione $\bar{z}$ si sostituirà nella [73] $d\bar{y}$ con $d\bar{z}$ e $d\bar{z}$ con $-d\bar{y}$.

Spesso si riduce l'espressione a secondo membro della [73] al primo addendo, trascurando i termini derivanti dallo sforzo normale e dal taglio. In quest'ordine di approssimazione, derivando due volte la [73] si trova:

$$\frac{d^2\eta}{d\bar{z}^2} = - \frac{d\varphi}{d\bar{z}} = - \frac{M}{EJ} \frac{dZ}{d\bar{z}} = - \frac{M}{EJ \cos \alpha} \quad [74]$$

Si presenta dunque analogia fra la [74] e la corrispondente espressione [58] per la trave diritta, e quindi possibilità di adottare in questo caso i metodi grafici precedentemente accennati. Si deve però tener presente:

- che la variabile di integrazione non è misurata secondo l'asse della trave;
- che il fattore $\cos \alpha$ che qui divide la curvatura può far sì che il metodo cada in difetto; quando α raggiunga 90° , le espressioni integrande divergono, mentre ciò non avviene nel caso della [73];
- che, anche trascurando gli effetti di N e T gli spostamenti η non rappresentano gli spostamenti totali; le componenti normali hanno lo stesso ordine di grandezza. La quantità data dalla [74] non rappresenta la curvatura: solo nel caso in cui α sia piccolo si che si possa sostituire 1 a $\cos \alpha$ può affermarsi che $d^2\eta/d\bar{z}^2$ rappresenta la *variazione* di curvatura della trave.

Applichiamo le [71], [72] ad un arco incastrato nella sezione 0 (fig. 69c). Indichiamo con dw la quantità dZ/EJ ,

detta *peso elastico* dell'elemento dZ . Se l'arco e' soggetto ad una coppia C , e quindi $M \equiv C$, si deduce

$$\varphi = C \int_0^s dw, \quad \eta = C \int_0^s (\bar{z} - \bar{z}_1) dw \quad [75]$$

Ossia: la rotazione della sezione terminale e' uguale al prodotto della coppia applicata per il peso elastico dell'arco; lo spostamento e' proporzionale al momento statico di quel peso rispetto alla retta secondo la quale si misurano gli spostamenti.

Se i momenti M sono dovuti all'applicazione di una forza F alla sezione terminale, con retta d'azione comunque situata nel piano, indicando con $\hat{y}$ le distanze da questa, si ha

$$\varphi = F \int_0^s \hat{y} dw, \quad \eta = F \int_0^s \hat{y} (\bar{z} - \bar{z}_1) dw \quad [76], [77]$$

Ossia: la rotazione e' proporzionale al momento dei pesi elastici rispetto alla retta d'azione della forza; lo spostamento e' proporzionale al momento centrifugo dei pesi elastici rispetto alle due rette, quella d'azione della forza e quella lungo la quale si misurano gli spostamenti.

Queste proprieta' costituiscono i fondamenti di un'elegante trattazione per l'analisi delle deformazioni delle travi curve, la teoria dell'ellisse d'elasticita'.