

CAPITOLO II

TRAVATURE PIANE SOLLECITATE NEL LORO PIANO EQUILIBRIO DEGLI SFORZI

II.1 - Le caratteristiche di sollecitazione. Si considereranno aggregati di travi forniti di un piano di simmetria che ne contiene la linea d'asse. Si supponga che in tale piano giacciono tutte le forze, carichi e reazioni vincolari.

Sul piano della sezione, la traccia del piano di simmetria da una retta rispetto alla quale la sezione stessa è simmetrica; tale retta contiene il baricentro G e viene assunta come asse y (fig. 10). L'asse x è la normale per G .

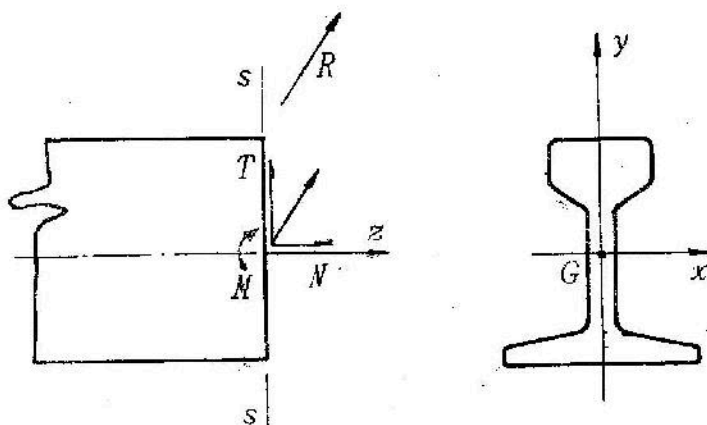


Fig. 10 - Caratteristiche di sollecitazione M, N, T .

L'azione a cui una data sezione $s-s$ è soggetta è sempre riducibile ad una forza R o ad una coppia nel piano di simmetria. La componente di R sulla normale alla sezione viene indicata con N e si chiama *sforzo normale*. La componente tangente alla sezione si dice *sforzo tangenziale* e si indica con T . Il momento rispetto al baricentro G della sezione (*),

(*) Quando si tratta di sistemi piani di forze, si suole dire "momento rispetto ad un punto G " mentre la locuzione esatta sarebbe "momento rispetto alla retta normale al piano passante per G ".

costituisce il momento flettente M . Se l'azione risultante si riduce ad una coppia sarà ovviamente $N = T = 0$.

Per definire i segni di M , N e T occorre precisare i versi positivi degli assi y e z , coincidente quest'ultimo con il senso in cui cresce la coordinata Z lungo l'asse. Diremo che lo sforzo N è positivo se agisce nel verso positivo di z sulla faccia positiva (e quindi nel verso negativo sulla faccia negativa). È ovvio che tale sollecitazione tende ad allungare le fibre longitudinali della trave: essa viene chiamata *trazione*, mentre lo sforzo opposto, che produce accorciamenti, è detto *compressione*. Il momento flettente M sarà considerato positivo se sulla faccia positiva agisce nel senso di portare l'asse $+y$ a sovrapporsi a $+z$; ovviamente questa sollecitazione produce trazione nelle fibre longitudinali aventi coordinata y positiva. Il taglio T sarà considerato positivo se agisce nel verso $+y$ sulla faccia positiva della sezione.

Secondo queste definizioni il segno di N non dipende dalle convenzioni relative ai versi positivi di y e z ; invece quello di M dipende dal verso dell'asse y e quello di T dipende da entrambi gli assi. Perciò, prima di scrivere alcuna equazione in cui queste quantità intervengano, si indicherà sullo schema strutturale, ramo per ramo della linea d'asse, il verso delle z crescenti e quello delle y , segnando due frecce incrociate (fig. 12).

Le quantità M , N e T sono le tre caratteristiche di sollecitazione simmetriche rispetto al piano di simmetria che contiene la linea d'asse. Le altre tre, che avranno definizione antisimmetrica, sono identicamente nulle nelle situazioni che qui si considerano.

II.2 - Condizioni di equilibrio. Il calcolo dello stato di tensione in una qualsiasi travatura è dunque ricondotto alla determinazione, sezione per sezione, delle caratteristiche M , N , T . Le considerazioni di equilibrio, essenziali in ogni caso alla risoluzione della struttura, risultano qui notevolmente semplificate rispetto al caso generale del § I.4 dal fatto che forze e coppie giacciono tutte nel piano di rappresentazione (che è quello di simmetria).

Per le travature piane, l'operazione di isolare la parte della quale si esamina l'equilibrio, operazione che sempre deve precedere ogni considerazione di statica, viene visualizzata nella rappresentazione dello schema strutturale segnando sul piano di simmetria una linea chiusa che separa questa parte

dal resto (linea di distacco). Nelle condizioni che si considerano per la parte in esame, entrano in gioco forze e coppie agenti dall'esterno sui punti contenuti entro la linea di distacco; in particolare, forze e coppie provenienti da quei legami che la linea stessa viene a spezzare; inoltre, le eventuali forze d'inerzia. Si osservi che, quando la linea di distacco debba passare presso un punto dove si congiungono più rami della linea d'asse, dovrà chiaramente indicarsi quale dei rami la linea taglia. Si traccera' perciò la linea di distacco ad una certa distanza dal punto di incrocio, pur intendendosi che tale distanza sia da trattare come nulla.

Le forze saranno segnate sul disegno con una freccia ed un simbolo, secondo le convenzioni generali (§ I.3). Per le coppie, invece del vettore rappresentativo normale al piano, si segnerà una freccia curva accanto alla lettera che le indica. Individuate mediante la linea di distacco forze e coppie del sistema da considerare, se alcune di queste sono note nel loro valore numerico, si potrà comporre prima di procedere alla scrittura delle equazioni di equilibrio, se lo si ritiene opportuno. Le forze potranno essere composte con poligoni funicolari o con poligoni di successive risultanti. Le coppie vanno solo sommate algebricamente. Per comporre una forza F con una coppia C si sposterà la F del segmento C/F in posizione tale che rispetto ad un punto della nuova retta d'azione la primitiva F dia momento C .

Le equazioni di equilibrio alla traslazione si possono scrivere nella forma [1] potendosi qui rilevare dal disegno l'angolo compreso fra la direzione positiva convenzionale della F e la direzione positiva su cui si proietta. Se le due direzioni sono parallele, il fattore $\cos \alpha$ assumerà il valore $+1$ o -1 secondo che esse siano cospiranti o no; con questa norma si scrive la [1]:

$$\sum (\pm) F = 0 \quad [6]$$

Le equazioni di equilibrio alla rotazione assumono la forma:

$$\sum (\pm) C + \sum (\pm) bF = 0 \quad [7]$$

La prima sommatoria si estende a tutte le coppie. Assunto un verso positivo dei momenti, poniamo quello orario, si apporrà segno positivo nella [7] alle coppie il cui verso convenzionale sia orario, negativo alle altre. La seconda sommatoria si estende a tutte le forze; ciascun termine è preceduto dal segno $+$ o $-$ secondo che F , agendo nel verso della relativa freccia, eserciti momento orario o antiorario.

Nelle [6]-[7] possono intervenire anche carichi distribuiti lungo tratti della linea d'asse. Nella definizione di un tale carico deve specificarsi la coordinata a cui esso è riferito, oltre alla direzione in cui esso agisce. Ad esempio, per un carico verticale ripartito su una trave inclinata di un angolo α sull'orizzontale, si può indicare con p il carico riferito alla lunghezza misurata secondo l'asse della trave oppure il carico riferito alle proiezioni orizzontali: nel primo caso, per l'equazione di proiezione verticale, figurerà l'espressione $\int p dz$, nel secondo l'espressione $\int p d\bar{x} = \int p \cos \alpha dz$ se $\bar{x}$ è la coordinata orizzontale.

Per il sistema di forze e coppie individuate da una certa linea di distacco si dispone di tre equazioni di equilibrio; esse possono essere scritte in una delle forme seguenti:

- tre equazioni di momento rispetto a tre poli non allineati
- due equazioni di momento e una di proiezione su una direzione che non sia normale alla direzione della congiungente i due poli dei momenti
- un'equazione di momento e due di proiezione su direzioni distinte.

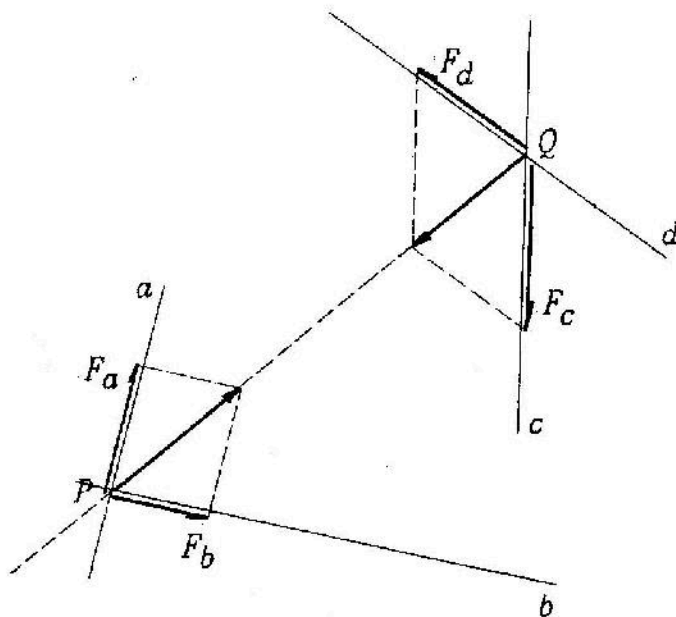


Fig. 11 - Sistema di 4 forze in equilibrio.

Se non si rispettassero le condizioni espresse nella scrittura delle tre equazioni oppure se ne scrivessero più di tre, si avrebbe un gruppo di relazioni *non indipendenti*, ossia tali che una di esse può dedursi come conseguenza dalle altre.

Come corollari delle condizioni d'equilibrio si presentano le conclusioni seguenti:

- se il sistema si riduce in tutto a tre forze con rette di azione non concorrenti, queste forze debbono essere nulle;
- se il sistema si riduce a quattro forze di rette d'azione a, b, c, d (fig.11) la risultante delle forze secondo a, b passa per il punto P d'intersezione delle due rette e per il punto Q d'intersezione delle altre due; la risultante delle prime due forze e' uguale e opposta a quella delle altre due.

La determinazione di due forze aventi rette d'azione date a, b o di una forza passante per il punto P d'intersezione con direzione qualunque sono questioni equivalenti. Percio' i corollari enunciati possono assumere varie forme: ad es.: se il sistema si riduce a due sole forze, passanti rispettivamente per i punti P, Q , queste saranno uguali e opposte e dirette secondo la PQ . Si osservi ancora che altri sottocasi possono presentarsi quando una delle rette vada all'infinito, ossia una delle forze si riduca ad una coppia; ad es.: se il sistema e' formato da tre forze F_a, F_b, F_c e una coppia, la risultante di F_a e F_b deve essere parallela a F_c .

II.3 - Vincoli nel piano. Per la struttura della fig.12 si possono determinare le caratteristiche di sollecitazione in qualsiasi sezione se le forze applicate sono date. In particolare le tre condizioni d'equilibrio relative alla linea di distacco 1 conducono a determinare M, N e T per la sezione I dove la struttura e' ancorata al terreno. Il vincolo ivi esistente e' percio' triplo; esso viene chiamato *incastro*. In verita', attraverso qualunque sezione si stabilisce un vincolo triplo fra le parti di struttura che stanno ai due lati; difatti, anche se costruttivamente la situazione relativa alla sezione I ha caratteri particolari, non e' errato affermare che esista un incastro presso qualunque altra sezione. Il fatto che siano cosi' indefiniti numero e posizione degli incastri non ha alcuna conseguenza nel seguito.

Vincoli che lasciano un grado di liberta' al moto relativo dei due pezzi collegati sono la *cerniera* e la *coppia prismatica*.

La cerniera e' un'articolazione che permette alle parti collegate la rotazione relativa intorno ad un dato punto. La articolazione si considera priva d'attrito: quindi essa trasmette una forza passante per un punto assegnato, e avente intensita' e direzione arbitrarie. La reazione si puo' anche rappresentare mediante le due componenti, ad esempio, orizzontale e verticale. In ogni caso due parametri sono necessari a

definirla; perciò il vincolo e' doppio.

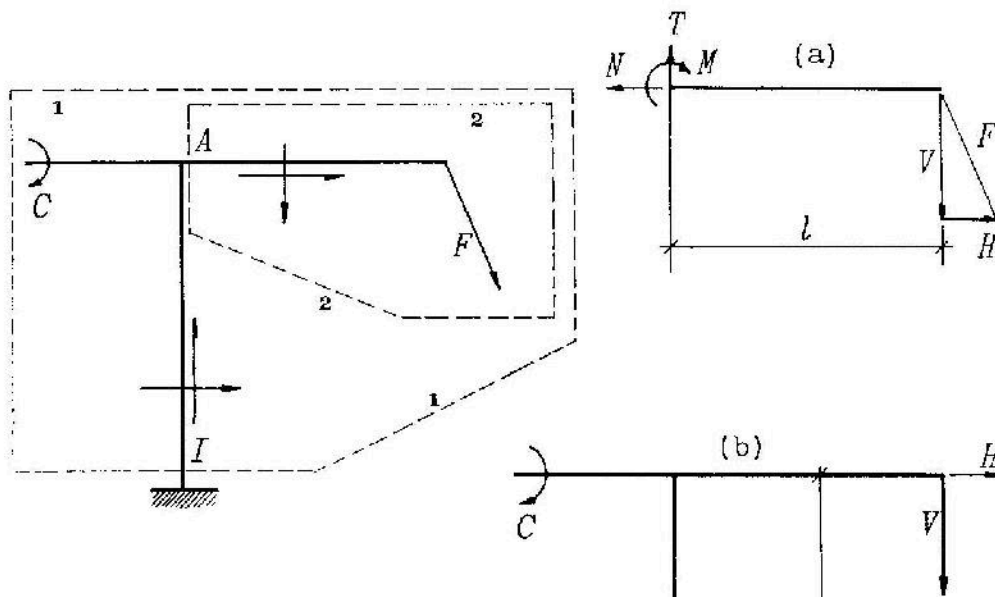


Fig. 12 - Corpo semplice incastrato ad un estremo.

(a) Calcolo delle sollecitazioni in A. Linea di distacco 2

$$2 \left\{ \begin{array}{l} \leftarrow N - H = 0 \quad (*) \\ \uparrow T - V = 0 \\ A) \quad M + Vl = 0 \end{array} \right.$$

(b) Calcolo delle sollecitazioni in I. Linea di distacco 1

$$1 \left\{ \begin{array}{l} \leftarrow T - H = 0 \\ \uparrow -N - V = 0 \\ I) \quad M + C + Vl + Hh = 0 \end{array} \right.$$

(*) Le frecce presso le equazioni indicano i versi positivi di proiezione o di momento. I numeri indicano la linea di distacco.

Se la cerniera e' disposta lungo l'asse di una trave (nel qual caso la si puo' indicare mediante un circoletto, fig. 13) essa annulla il momento flettente della sezione dove essa e' situata. Talvolta un'articolazione di questo tipo puo' essere disposta nel punto di incrocio di piu' travi. Sono possibili allora differenti situazioni che occorre distinguere esaminando le disposizioni costruttive adottate. Generalizzando le considerazioni della fig. 13 si puo' dire che un'articolazione fra n travi o aggregati di travi e' equivalente a $n - 1$ cerniere.

La coppia prismatica o guida consente una traslazione relativa delle due parti collegate in una determinata direzione.

Se tale direzione viene disposta parallelamente all'asse della trave (fig.14 a,b) vi si realizza la condizione $N = 0$; se essa e' disposta normalmente, si ha la condizione $T = 0$.

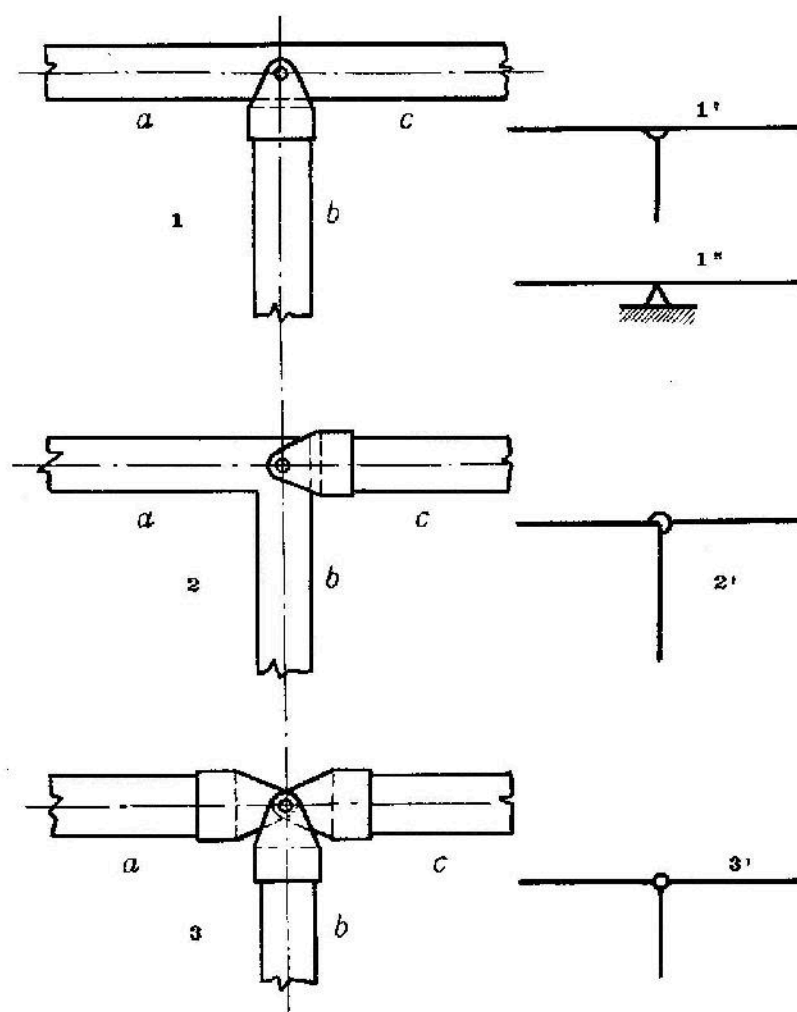


Fig. 13 - Nella disposizione 1 si annulla il momento nella sezione terminale della trave b , mentre le a e c sono solidali; la rappresentazione schematica e' data in $1'$. L'analoga situazione, in cui la trave verticale e' sostituita dal terreno e' usualmente rappresentata com'e' indicato in $1''$. Nella disposizione 2 le travi a, b sono solidali, mentre si annulla il momento nella sezione terminale della trave c (schema della fig. $2'$). Nella disposizione 3 si annullano i momenti flettenti nelle sezioni terminali delle tre travi. L'articolazione equivale a due cerniere: una fra a e b , una fra b e c ; fra a e c esiste di conseguenza liberta' di rotazione per composizione di moti.

Vincolo semplice e' quello della fig.15a, detto *appoggio*: la sua reazione e' individuata da un solo parametro, l'intensita', poiche' la sua retta d'azione e' fissata. Questo vincolo si puo' interpretare come la combinazione in serie di una coppia prismatica (collegante il terreno al sostegno s) e di una cerniera (che articola la trave sul sostegno s). Una dispo-

sizione equivalente si può ottenere disponendo due cerniere in serie, con interposta bielletta (fig. 15b).

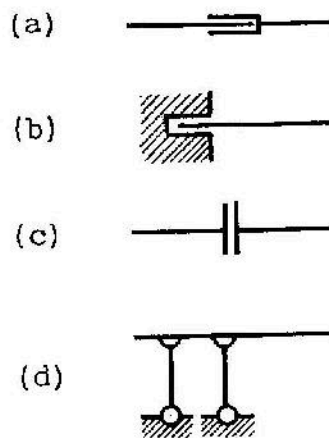


Fig. 14 - Coppie prismatiche: *a, b* disposizioni che annullano lo sforzo normale in una sezione generica o all'incastro al terreno; *c* coppia prismatica che rende $T = 0$, *d* disposizione equivalente a *b*.

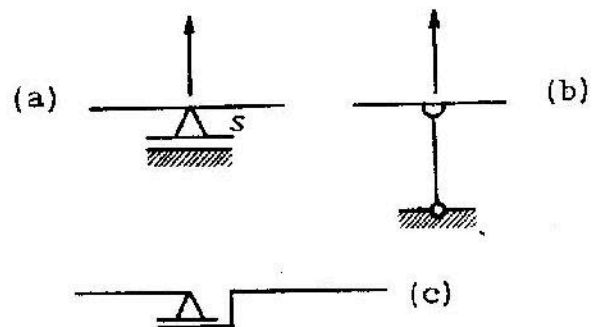


Fig. 15 - Vincoli semplici: *a* appoggio di una trave al terreno, *b* dispositivo equivalente, *c* appoggio in un punto di una trave, annullante momento flettente e sforzo normale nella sezione dove è disposto.

Si osservi che, mentre la disposizione di due vincoli doppi in serie dà luogo ad un vincolo semplice, due vincoli semplici disposti in parallelo creano un vincolo doppio: così il dispositivo della fig. 14d crea la medesima situazione della fig. 14b.

II.4 - Grado di iperstaticità di una travatura. Nello schema della fig. 12 si possono calcolare le caratteristiche di sollecitazione in qualunque sezione in base alla sola conoscenza dei carichi applicati. Ciò è possibile solo quando l'asse della struttura è una linea che non si chiude mai su se stessa e l'unico vincolo (incastro) è collocato in una sezione terminale. In ogni altro caso la determinazione delle caratteristiche di sollecitazione deve essere preceduta dal calcolo delle reazioni dei vincoli esistenti nello schema strutturale. Se una parte della struttura, svincolata dal resto, presenta una linea d'asse semplice o ramificata ma non chiusa, quando siano note tutte le forze che su questa agiscano, si possono determinare le caratteristiche M, N e T in qualunque sezione; anzi si potrà scegliere fra due vie (equivalenti) nel calcolo delle sollecitazioni in una sezione prefissata, potendosi considerare l'equilibrio dell'una o dell'altra porzione che il taglio praticato in questa sezione viene a separare.

Chiameremo *corpo semplice* un siffatto costituente della struttura. Il primo passo nell'analisi di uno schema strutturale consiste nel conteggio dei vincoli da eliminare per ridurre la struttura a corpi semplici isolati. Se per ridurre la struttura a corpi semplici si deve troncare un numero i di incastrici, c di cerniere, p di coppie prismatiche e g di appoggi, le reazioni incognite saranno in numero di $3i + 2(c + p) + g$. D'altra parte per ciascuna delle parti staccate si disporrà di tre equazioni di equilibrio; se m sono i corpi semplici in cui si è scomposta la struttura si avranno $3m$ equazioni. Prima di chiudere, però, questo conteggio occorre esaminare se le $3m$ equazioni di equilibrio siano tutte indipendenti. Qui occorre distinguere il caso di una struttura vincolata al terreno da quello di una struttura del tutto libera, come sarebbe la membratura di un aereo. In questo secondo caso le forze esterne nel loro complesso vanno assegnate in modo da soddisfare a 3 condizioni di equilibrio; quindi, assicurato l'equilibrio di $m - 1$ corpi costituenti, quello dello m -simo risulterà di conseguenza. Ovvero, in altre parole, se si vorranno considerare separatamente $3m$ equazioni di equilibrio, si dovranno lasciare indeterminate in grandezza tre delle forze (o tre parametri equivalenti) sicché l'equilibrio globale risulterà soddisfatto di conseguenza. In definitiva, ad ogni modo, si avranno $3(m - 1)$ equazioni disponibili. Per la struttura vincolata al terreno, le equazioni di equilibrio (3 per ciascuno dei corpi staccati da quello) sono fra loro indipendenti; se nel computo del numero m dei corpi si includerà il terreno, si avranno ancora $3(m - 1)$ equazioni indipendenti. Concludendo, l'eccedenza nel numero delle incognite rispetto a quello delle equazioni è rappresentata dalla quantità:

$$h = 3i + 2(c + p) + g - 3(m - 1) \quad [8]$$

Se risulta $h = 0$, ciò vorrà dire che il numero delle equazioni fornite dalla statica eguaglia il numero delle reazioni incognite, e quindi, escluse situazioni anomale che saranno considerate a parte, quelle reazioni potranno essere calcolate risolvendo il sistema di equazioni lineari e successivamente si potranno determinare le caratteristiche M, N, T su qualunque sezione. La struttura si dice in tal caso staticamente determinata o isostatica. Alcuni schemi isostatici sono rappresentati nella fig. 16.

Se risulta $h < 0$, ossia se si hanno più equazioni dalla statica che incognite da calcolare, la struttura è *labile* ossia incapace di raggiungere una configurazione di equilibrio statico. Sarà allora l'intervento delle forze di inerzia a

rendere possibile l'equilibrio. Si consideri ad esempio il caso della fig. 17. L'equilibrio dei momenti intorno ad A viene soddisfatto introducendo come nuova incognita l'accelerazione angolare; restano così definite le forze d'inerzia, nell'ipotesi che la trave sia indeformabile, e successivamente si possono scrivere le due equazioni di equilibrio alla traslazione che individuano la reazione in A .

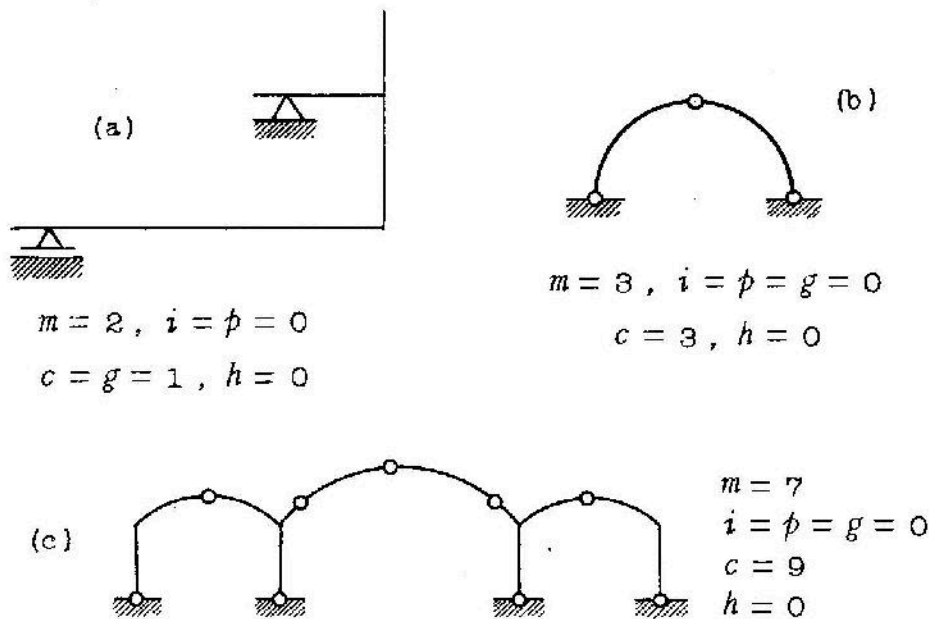


Fig. 16 - Schemi isostatici.

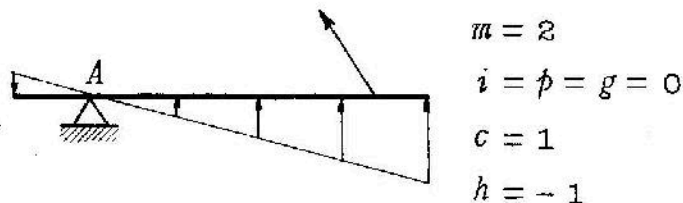


Fig. 17 - Schema labile.

Se risulta $h > 0$, il sistema è detto *iperstatico*: h è il numero di equazioni che dovrebbero aggiungersi a quelle della statica e rendere determinato il sistema; esso viene chiamato *grado di iperstaticità* della struttura. Circa il computo di h deve osservarsi quanto segue.

a) Nella definizione di corpo semplice si è posta la condizione che la linea d'asse non sia chiusa su se stessa. Questa restrizione è necessaria affinché, note le forze applicate al corpo si possano calcolare le caratteristiche di sollecitazione in una sezione qualunque. Ciò non avverrebbe per il

telaio della fig. 18: la linea di distacco per una sezione qualsiasi A , per chiudersi deve tagliare una seconda volta la linea d'asse e introduce quindi più incognite di quante possano calcolarsi dalle tre equazioni di equilibrio. Se si tronca uno dei lati in una sezione I lo schema diventa isostatico,

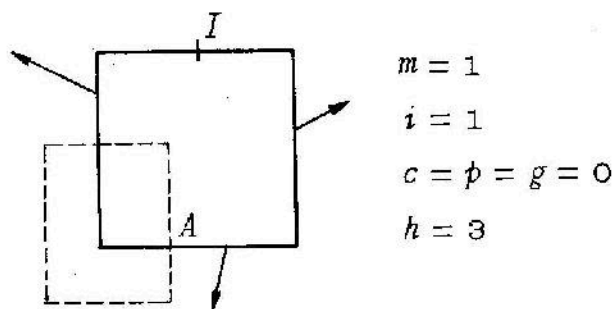


Fig. 18 - Telaio soggetto a forze assegnate.
La linea di distacco taglia l'asse in due (o più) sezioni.

cioè tale che in qualunque sezione si possono avere le caratteristiche di sollecitazione con le sole equazioni della statica. In qualunque caso si dovranno quindi contare nel numero i tutti i tagli che occorre effettuare sulla linea d'asse perché essa non formi circuiti chiusi. Questi tagli sono marcati con la lettera I nelle figure. Si deve notare che, anche se si praticasse un numero di tagli superiore allo strettamente necessario, nessun errore ne deriverebbe nel computo di h : infatti un taglio in più, mentre incrementa di un'unità il valore di i produce lo stesso effetto su m e quindi lascia inalterato h .

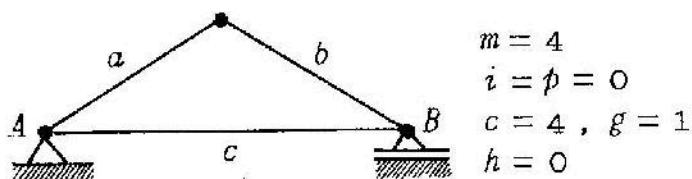


Fig. 19 - In A si articolano tre corpi (a, c e il terreno) e quindi la cerniera è doppia. In B si ha una cerniera e un appoggio insieme.

b) Circa il conteggio delle cerniere si deve tener presente quanto si è notato con riferimento alla fig. 13 per le articolazioni multiple: l'articolazione vale per un numero di cerniere pari a quello dei corpi che vi concorrono meno uno.

c) Analoghe considerazioni valgono nel caso in cui un appoggio è combinato con cerniere. Così nel caso della fig. 19, il vincolo in B andrebbe considerato come un appoggio sol-

tanto, se gli elementi b, c fossero ivi solidali; se sono incernierati l'uno all'altro il vincolo conta per un appoggio più una cerniera.

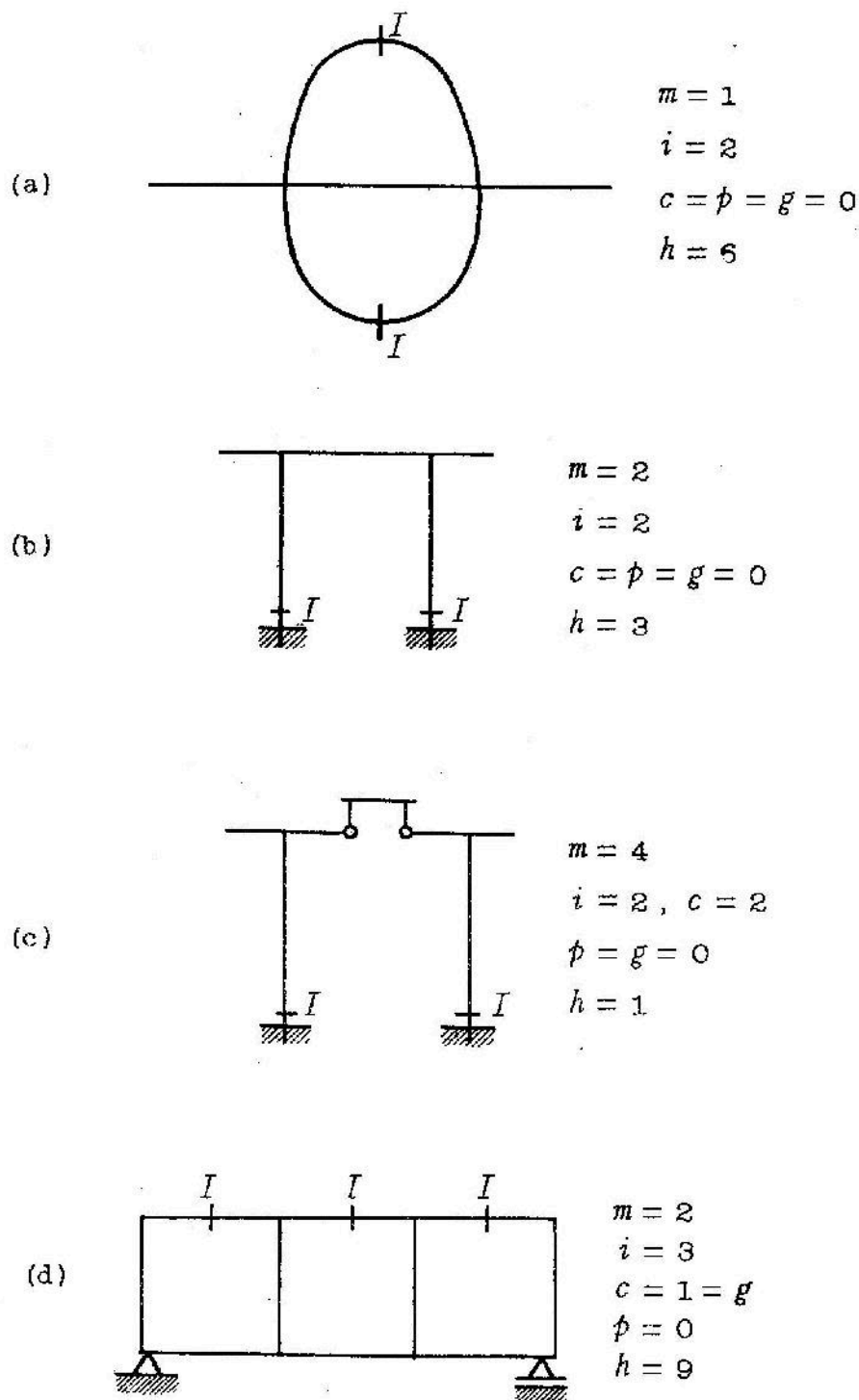


Fig. 20 - Schemi iperstatici.

d) Nel computo del numero m va incluso il terreno se la struttura è vincolata ad esso.

Tali considerazioni trovano applicazione nelle figg. 15-20.

II.5 - Determinazione delle reazioni. Il calcolo delle sollecitazioni nella struttura isostatica con schema composto da m corpi semplici va preceduto, di regola, dalla risoluzione delle $3m - 3$ equazioni di equilibrio. Di solito si trova modo di porre queste equazioni in forma tale che la loro risoluzione possa procedere per successivi passi in ciascuno dei quali e' da risolvere un'equazione o due, in altrettante incognite, le altre reazioni contenute in queste equazioni essendo gia' calcolate nei passi precedenti. La pratica suggerisce, caso per caso, gli accorgimenti atti a ridurre la risoluzione del sistema a questa forma. Tuttavia alcuni criteri generali utili per gli schemi piu' frequenti possono essere enunciati.

a) In questa fase preliminare, le linee di distacco vanno tracciate in modo da tagliare vincoli semplici o doppi. Se invece si taglia la linea d'asse in una sezione generica, si vengono a introdurre le tre caratteristiche di sollecitazione ad essa relative e quindi le tre equazioni disponibili non potranno fornire indicazioni sui valori delle altre incognite.

b) Se si puo' tracciare una linea di distacco che tagli tre vincoli semplici, in generale c'e' vantaggio ad affrontare la risoluzione di questo problema come primo passo. Le tre condizioni di equilibrio relative a quella linea forniscono direttamente le reazioni incognite. L'equazione dei momenti rispetto al punto di concorso delle rette d'azione di due reazioni fornisce il valore della terza; se le due rette menzionate sono parallele, la terza reazione e' ottenuta da un'equazione di proiezione (fig. 21). La risoluzione puo' anche effettuarsi per via grafica, sulla base delle considerazioni relative alla fig. 11.

c) Le condizioni d'equilibrio corrispondenti ad una linea di distacco che tronchi 4 vincoli semplici vanno necessariamente concatenate ad altri sistemi di equazioni relativi a differenti linee di distacco. Alcuni esempi mostreranno come un'opportuna scelta delle incognite e delle equazioni possa ridurre il sistema al minimo concatenamento.

Uno schema isostatico abbastanza frequente e' quello con $m = 3$ corpi collegati a due a due da un vincolo doppio; un

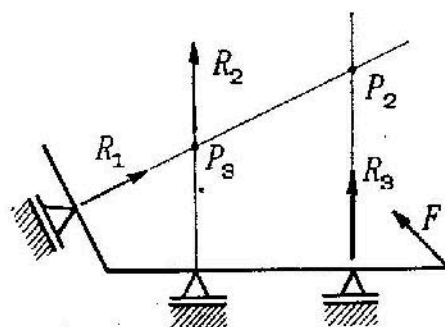


Fig. 21 - Schema con 3 vincoli semplici. Dall'equazione di proiezione orizzontale si ha R_1 ; R_2 e R_3 sono date dalle equazioni dei momenti rispetto a P_2 e P_3 .

esempio ne e' l'arco a tre cerniere (fig.22) dove i semiarchi a, b sono incernierati fra loro e al terreno. Sono segnate in figura le tre linee di distacco che possono tracciarsi in modo da tagliare con ciascuna due vincoli doppi.

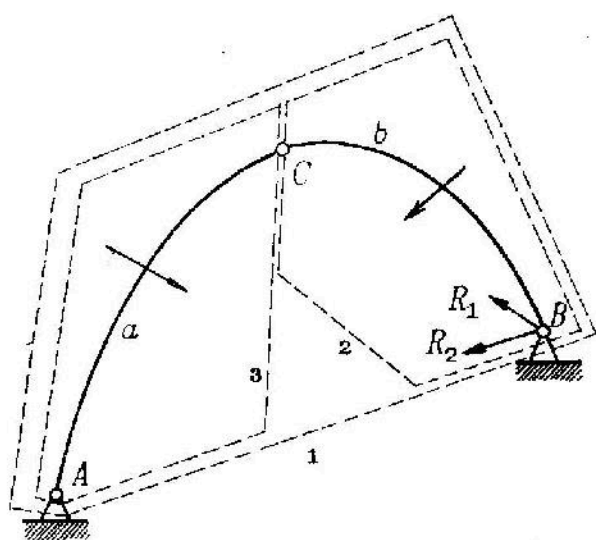


Fig. 22 - Arco a tre cerniere. Schema di risoluzione.

- 1 { A } fornisce R_1
2 { C } fornisce R_2 .

reazione in B in una componente verticale R_1 e una R_2 diretta secondo la AB , si potranno calcolare le due incognite dalle medesime equazioni, con la sola complicazione che la R_1 prima calcolata entra anche nella seconda equazione. Se si adottano per la stessa reazione componenti orizzontali e verticali, le due medesime equazioni risultano concatenate.

Trovata in un modo o nell'altro la reazione in B , le sollecitazioni sono immediatamente calcolabili in qualunque sezione. Talvolta puo' convenire procedere dal calcolo della reazione in C : cio' puo' farsi mediante le equazioni di momento rispetto ad A e B rispettivamente per le linee di distacco 3 e 2.

a, b sono incernierati fra loro e al terreno. Sono segnate in figura le tre linee di distacco che possono tracciarsi in modo da tagliare con ciascuna due vincoli doppi. Se si scompone la reazione in B nelle R_1 e R_2 rispettivamente dirette secondo BC e BA si possono separatamente calcolare le due incognite seguendo lo schema indicato presso la figura. Se invece si scompone la

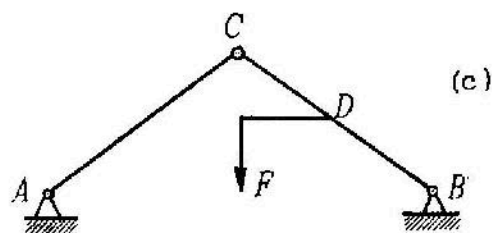
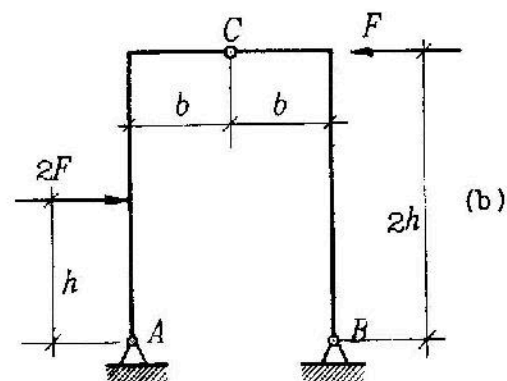
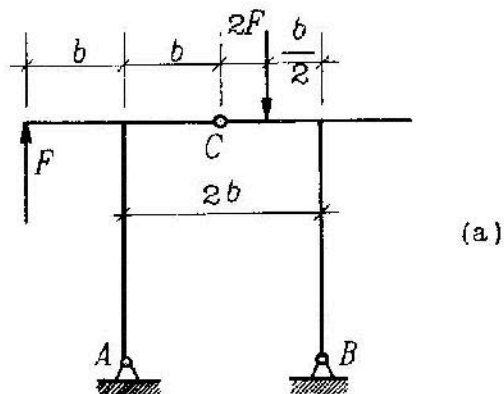


Fig. 23 - Schemi a 3 cerniere.

Schemi analoghi sono presentati nelle figg. 23 a, b, c. Si dimostra facilmente che, per le condizioni di carico indicate, nel caso della fig. 23a la reazione in C e' orizzontale; nel caso della fig. 23b la reazione in B e' nulla; nel caso della fig. 23c il taglio nel tratto DB e' nullo. Uno schema similare e' indicato nella fig. 24: le componenti R_1 (diretta secondo BC) e R_2 (normale alla guida prismatica in A) della reazione in B possono essere separatamente calcolate nel modo indicato in figura.

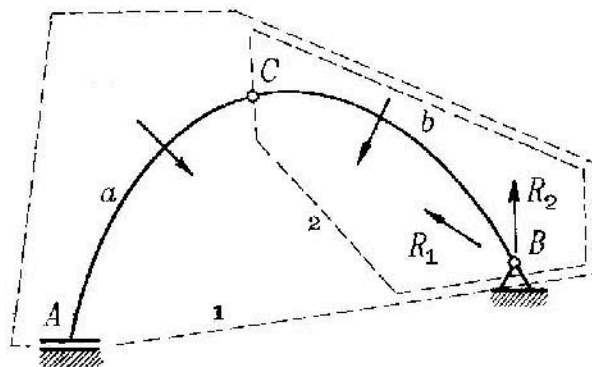


Fig. 24 - Schema con 2 cerniere e una coppia prismatica.

- 1 { $\rightarrow$ fornisce R_1
 2 { C } fornisce R_2 .

Uno schema con $m = 4$ corpi e' presentato in figura 25. La linea di distacco 1 che taglia tre vincoli semplici serve al calcolo di R_1 ; le componenti R_2 e R_3 della forza che la trave b trasmette alla a si ottengono successivamente come e' indicato nello schema. Nell'ultima equazione intervengono le tre reazioni.

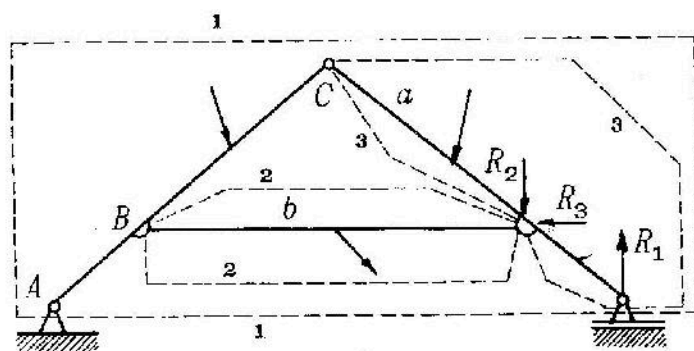


Fig. 25 - Schema isostatico $m = 4$.

- 1 { A } fornisce R_1
 2 { B } fornisce R_2
 3 { C } fornisce R_3 .

Uno schema piu' complesso, con $m = 5$ e' indicato nella figura 26. Si assumono come incognite le forze che alla trave a trasmettono il terreno e la trave b . Stabilendo che le componenti R_3 e R_4 passino rispettivamente per B e per A si ottiene che le prime due equazioni indicate nello schema contengano solo le incognite R_1 e R_2 . Le altre due equazioni

contengono oltre alle R_1 e R_2 previamente calcolate, le incognite R_3 ed R_4 .

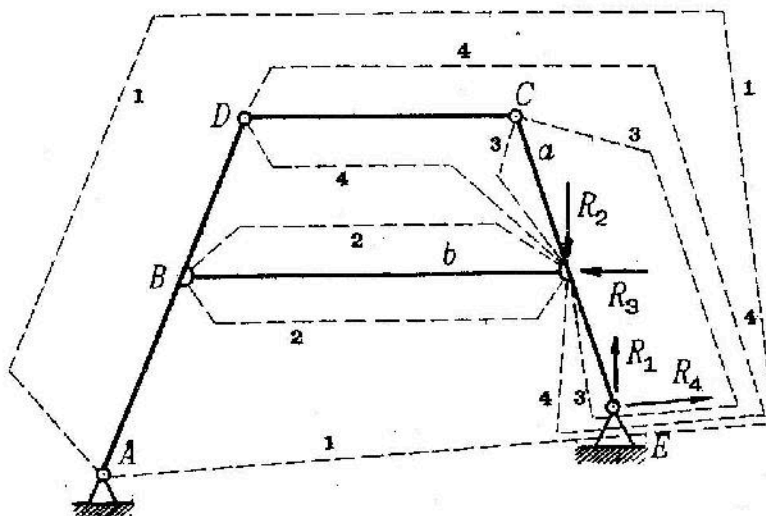


Fig. 26 - Schema isostatico $m = 5$.

- 1 { A } fornisce R_1
- 2 { B } fornisce R_2
- 3 { C }, 4 { D } danno due equazioni in R_3 e R_4 .

In ogni caso, ultimata la risoluzione del sistema indicato, le altre reazioni si calcolano immediatamente.

II.6 - Schemi strutturali anomali. Perché le reazioni vincolari in un dato schema strutturale siano calcolabili con le equazioni della statica occorre in primo luogo che sia $h = 0$. Questa condizione non è peraltro sufficiente. Come è noto dalla teoria delle equazioni lineari, occorre che sia diverso da zero il determinante formato dai coefficienti delle incognite. Un controllo numerico di tale condizione sarebbe estremamente laborioso. Conviene piuttosto valersi di una proprietà dei sistemi lineari a determinante nullo: l'esistenza di soluzioni omogenee. In termini di statica questa può enunciarsi come segue: lo schema strutturale è anomalo se esiste un sistema di reazioni che soddisfi alle equazioni della statica senza che intervengano carichi esterni. Una situazione difettosa nel senso qui esaminato si avrebbe, ad esempio, in un corpo soggetto a tre vincoli semplici (come quello della fig. 21) qualora le rette d'azione di R_1 , R_2 e R_3 concorressero in un punto. In questo caso si potrebbe assegnare un valore a R_1 e si troverebbero valori di R_2 e R_3 atti a stabilire l'equilibrio, dato che le tre forze siano concorrenti. Un altro caso anomalo

ovviamente e' quello della fig.27a, ossia lo schema della figura 22, con le cerniere allineate. Qui si puo' dare valore arbitrario alla componente orizzontale della reazione della cerniera A e l'equilibrio e' sempre possibile. Lo schema della fig.27b e' anomalo se la guida prismatica in C e' normale alla AB : infatti in tal caso una forza in A diretta secondo la AB potrebbe essere trasmessa dal collegamento in C . Lo schema della fig.27c e' difettoso se la retta d'azione della reazione d'appoggio in C e le congiungenti le cerniere A, B e D, E passano per un medesimo punto P ; infatti in tal caso l'equilibrio del corpo b potrebbe sussistere per un assegnato valore dalla reazione in C grazie alle forze trasmesse dalle parti a e c . Lo schema della fig.27d, analogo a quello della fig.23 e' anomalo se le rette AH, BE e CD concorrono in un punto P ; infatti allora, assegnato un certo sforzo secondo la trave BE , con opportuno valore dello sforzo secondo CD si possono soddisfare le condizioni di equilibrio alla rotazione per i corpi a e b intorno ai punti A e H rispettivamente.

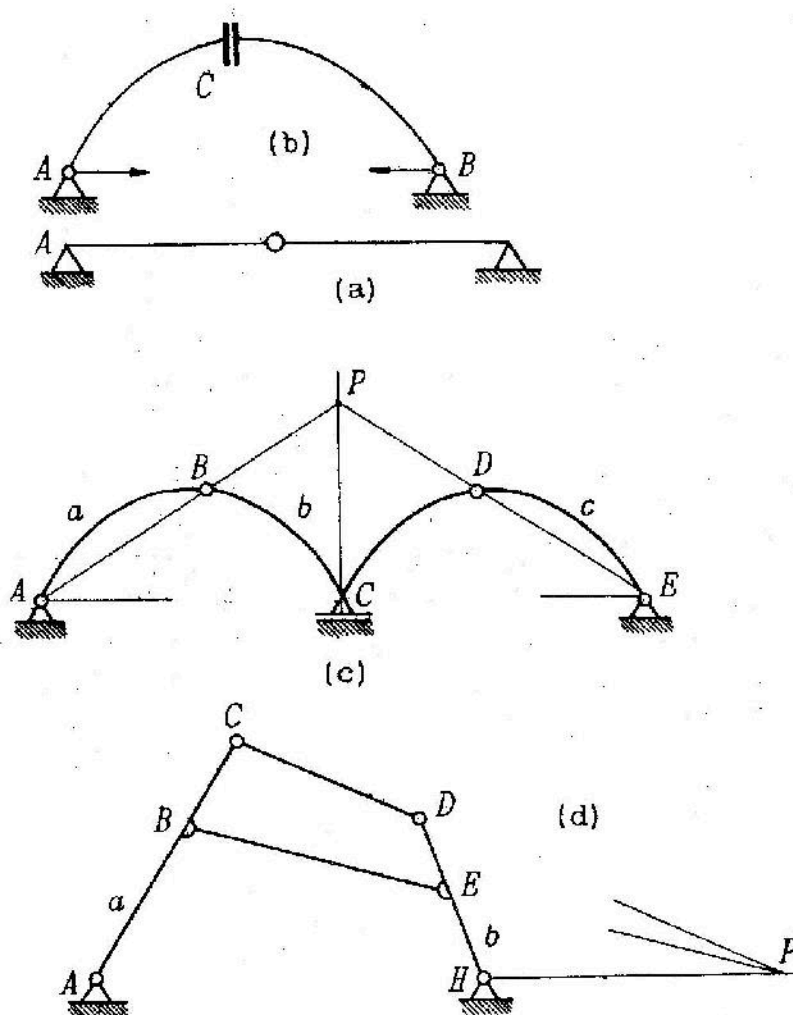


Fig. 27 - Schemi anomali.

Sebbene sia assai improbabile che nel disegno di una struttura si incorra in uno schema anomalo, e' importante sapere riconoscere tali difetti per evitare difficoltà nella risoluzione delle strutture iperstatiche.

Si osservi che lo schema strutturale e' difettoso non soltanto quando e' anomalo nel senso rigoroso definito delle prove anzidette, ma anche quando esso si avvicina ad uno schema anomalo: infatti in tali condizioni esso dà luogo a sollecitazioni rilevanti sotto carichi limitati. Si pensi, ad esempio, ad uno schema prossimo a quello della fig. 27a, ossia con tre cerniere quasi allineate: un piccolo carico verticale basta a dar luogo a forti sollecitazioni nella struttura.

Si osservi che il determinante dei coefficienti delle incognite potrebbe annullarsi pur per uno schema strutturale perfetto, se si scrivono equazioni non indipendenti. Ciò accade, ad esempio, quando per una porzione isolata di struttura si scrivano due equazioni di momento ed una di proiezione su una direzione normale alla congiungente i poli di momento; o anche, per lo schema della fig. 22 se si scrivono equazioni di proiezione su una data direzione per i corpi a, b e per l'insieme. Si noti però che se si scrivesse un'equazione di equilibrio alla rotazione intorno ad A per il corpo a , una intorno a B per il corpo b e poi una rispetto ad un punto allineato con A e B per l'insieme dei due corpi, si avrebbero tre equazioni indipendenti.

II. 7 - Diagrammi delle sollecitazioni nelle travi rettilinee. Ridotta la struttura ad un complesso di corpi semplici isolati, soggetti a forze (carichi o reazioni) tutte note il calcolo delle caratteristiche di sollecitazione in qualunque sezione non richiede altri concetti oltre quelli esposti nel § II. 2. Tuttavia poiché sovente di tali caratteristiche si debbono costruire diagrammi che ne rappresentano la legge di variazione lungo la linea d'asse, conviene tener presenti alcuni concetti e metodi atti a rendere più spedito il tracciamento dei grafici.

Si consideri (fig. 28) un tratto di trave ad asse rettilineo di lunghezza l delimitato dalle sezioni P, Q . La coordinata Z si identifica qui con la z misurata da una sezione prefissata. Fissate le direzioni degli assi si segnano i versi positivi delle caratteristiche di sollecitazione per le sezioni estreme. In una sezione intermedia R e' applicata una forza di componenti H, V secondo y e z ed una coppia C nel verso yz . Le condizioni di equilibrio per le proiezioni

su y e z per i momenti rispetto a P si scrivono:

$$N^Q - N^P + H = 0, \quad T^Q - T^P + V = 0, \quad [9], [10]$$

$$M^Q - M^P - T^Q l + C = 0 \quad [11]$$

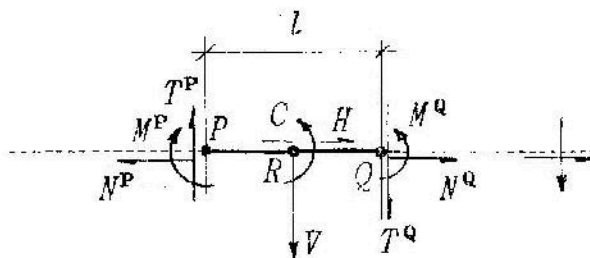


Fig. 28 - Equilibrio di un tratto di trave rettilinea.

Se facciamo tendere l a zero accostando i punti P e Q a R mentre H, V, C mantengono il loro valore, si ottengono per le differenze $\Delta N = N^Q - N^P$, $\Delta T = T^Q - T^P$, $\Delta M = M^Q - M^P$ le espressioni:

$$\Delta N = -H, \quad \Delta T = -V, \quad \Delta M = -C \quad [12], [13], [14]$$

Concludiamo: nella sezione in cui e' applicato un carico concentrato H secondo z lo sforzo assiale presenta una variazione brusca misurata da $-H$; parimenti presso il carico concentrato V diretto secondo y si ha la variazione $-V$ nel taglio e presso la coppia concentrata C si ha la variazione $-C$ nel valore del momento flettente.

Supponiamo ora che le forze H, V e la coppia C provengano da azioni distribuite nell'intervallo PQ , delle quali esse rappresentino le risultanti. Allora le differenze Δ tenderanno a zero con la stessa rapidita' di l , poiche' altrettanto avviene delle quantita' H, V e C . Al limite $l \rightarrow 0$ scriviamo:

$$H/l = p_h, \quad V/l = p, \quad C/l = m$$

indicando dunque con p_h l'intensita' del carico parallelo alla trave, con p l'intensita' del carico trasversale, con m l'intensita' della distribuzione di coppie flettenti, tutte computate in R e riferite alle lunghezze misurate secondo l'asse. Dividendo per l le [9]-[11] e considerando che al limite le differenze Δ divise per l rappresentano le derivate rispetto a z si ottiene:

$$dN/dz + p_h = 0, \quad dT/dz + p = 0, \quad dM/dz + m = T \quad [15], [16], [17]$$

Dunque: la pendenza del diagramma degli sforzi normali e' data

da $-p_h$, quella del diagramma del taglio da $-p$, quella del diagramma dei momenti flettenti, ove il carico di coppie m sia nullo, e' data dal taglio (*). Dove non v'e' carico distribuito, taglio e sforzo normale si mantengono costanti, mentre il momento flettente varia linearmente. Dove c'e' un carico trasversale uniforme, la legge di variazione del taglio e' lineare, quella del momento flettente parabolica.

Queste proprieta', col sussidio di pochi calcoli numerici, permettono un rapido tracciamento dei diagrammi di M, N e T , in presenza di forze o coppie concentrate (fig. 29). Anche in

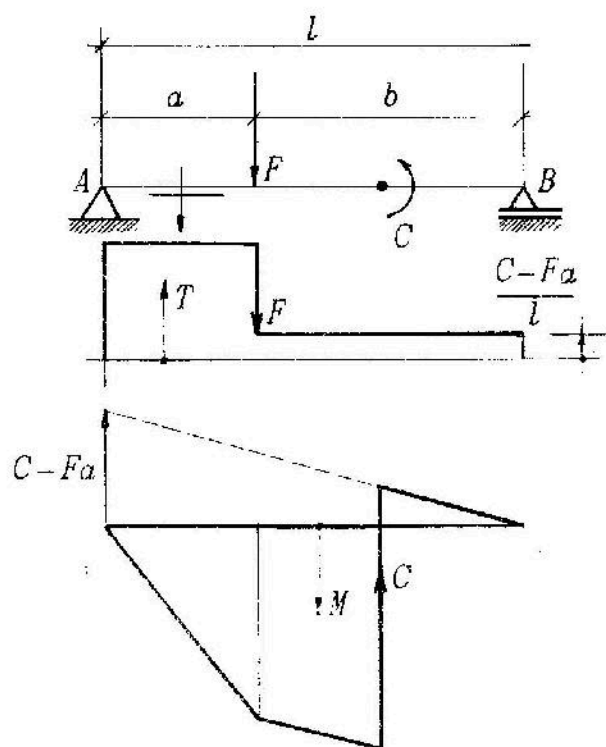


Fig. 29 - Trave appoggiata soggetta ad una forza e ad una coppia. Diagrammi di T e M . Il grafico di M viene iniziato da B col tratto rettilineo fin sotto la coppia qui subisce il salto C e prosegue con la stessa pendenza fino alla forza F ; l'ultimo lato ha in A ordinata nulla.

presenza di carichi uniformemente distribuiti i diagrammi sono rapidamente tracciati tenendo presenti le proprieta' della parabola (fig. 30) (**).

Per un aggregato di travi rettilinee, le [12]-[17] sono sufficienti per tracciamento dei grafici di M, N, T con il sussidio delle equazioni di equilibrio per gli incroci o punti di piegatura. Ad esempio, le condizioni di equilibrio alla rotazione per un nodo (fig. 31) dove concorrono piu' travi si scrive annullando la somma dei momenti flettenti nelle sezioni di estremita', presi con segno positivo o negativo secondo il loro verso.

Nel seguito concentreremo la nostra attenzione sui diagrammi di M e T e considereremo casi in cui

(*) La pendenza di un diagramma si intende sempre misurata mediante il rapporto fra incrementi di ordinate e di ascisse, entrambi letti nelle rispettive scale.

(**) Nel tracciato dei diagrammi si sono rispettate le convenzioni usuali circa i segni del momento e del taglio e per la rappresentazione di queste quantita', riportando i tagli positivi verso l'alto e i momenti positivi verso il basso.

$m = 0$: in tale ipotesi dalle [16], [17] si ha:

$$d^2M/dz^2 = -p \quad [18]$$

Questa relazione, come del resto le [15] - [17], vale fuori delle sezioni dove sono applicati carichi concentrati.

Per una determinazione sistematica dei diagrammi di T e M si possono usare le relazioni:

$$T = T_0 - \int_0^z p \, dz - \sum V \quad [19]$$

$$M = M_0 + \int_0^z T \, dz - \sum C \quad [20]$$

Gli integrali si estendono da una sezione O fissata a piacere alla sezione corrente; M_0 e T_0 sono i valori relativi alla sezione O ; le sommatorie si estendono a tutte le forze V o coppie C con-

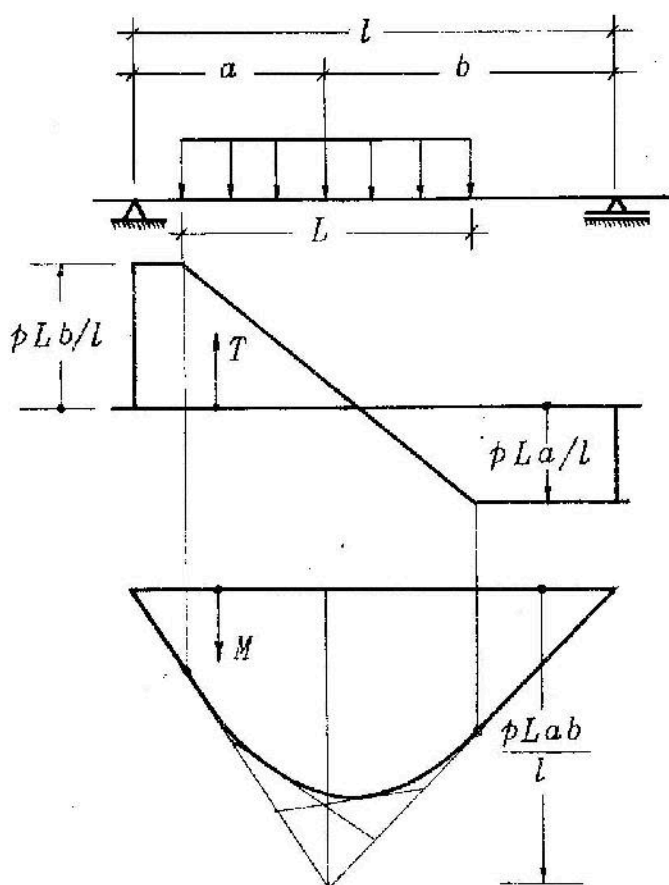


Fig. 30 - Trave appoggiata soggetta a carico parziale uniforme.

tenute nel tratto fra le due sezioni. Le [19] e [20] sono ottenute integrando le [13] e [17] per $m = 0$, tenendo conto delle [13], [14]. Per il computo degli integrali si possono adottare procedimenti analitici (quando si abbiano espressioni semplici di p) o grafici o numerici.

Se sulla trave agiscono solo carichi concentrati V si può usare per M l'espressione:

$$M = M_0 + T_0 z - \sum V_i (z - z_i) \quad [21]$$

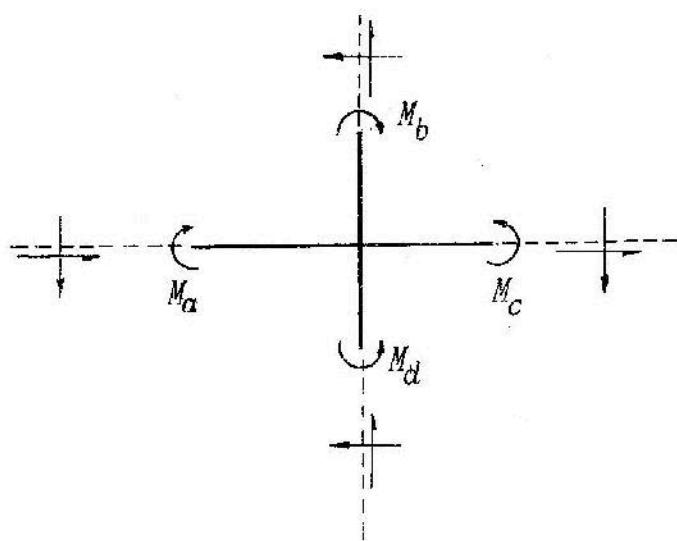


Fig. 31 - Equilibrio di un nodo alla rotazione.

$$M_a + M_b - M_c - M_d = 0$$

essendo z_i la coordinata della sezione dove agisce il carico V_i e gli altri simboli essendo definiti come sopra. Questa relazione, che si giustifica direttamente mediante la condizione di equilibrio relativa alla linea di distacco marcata nella fig. 32a', alla rotazione intorno a P , si presta al calcolo grafico. La fig. 32 si riferisce al caso $M_0 = T_0 = 0$.

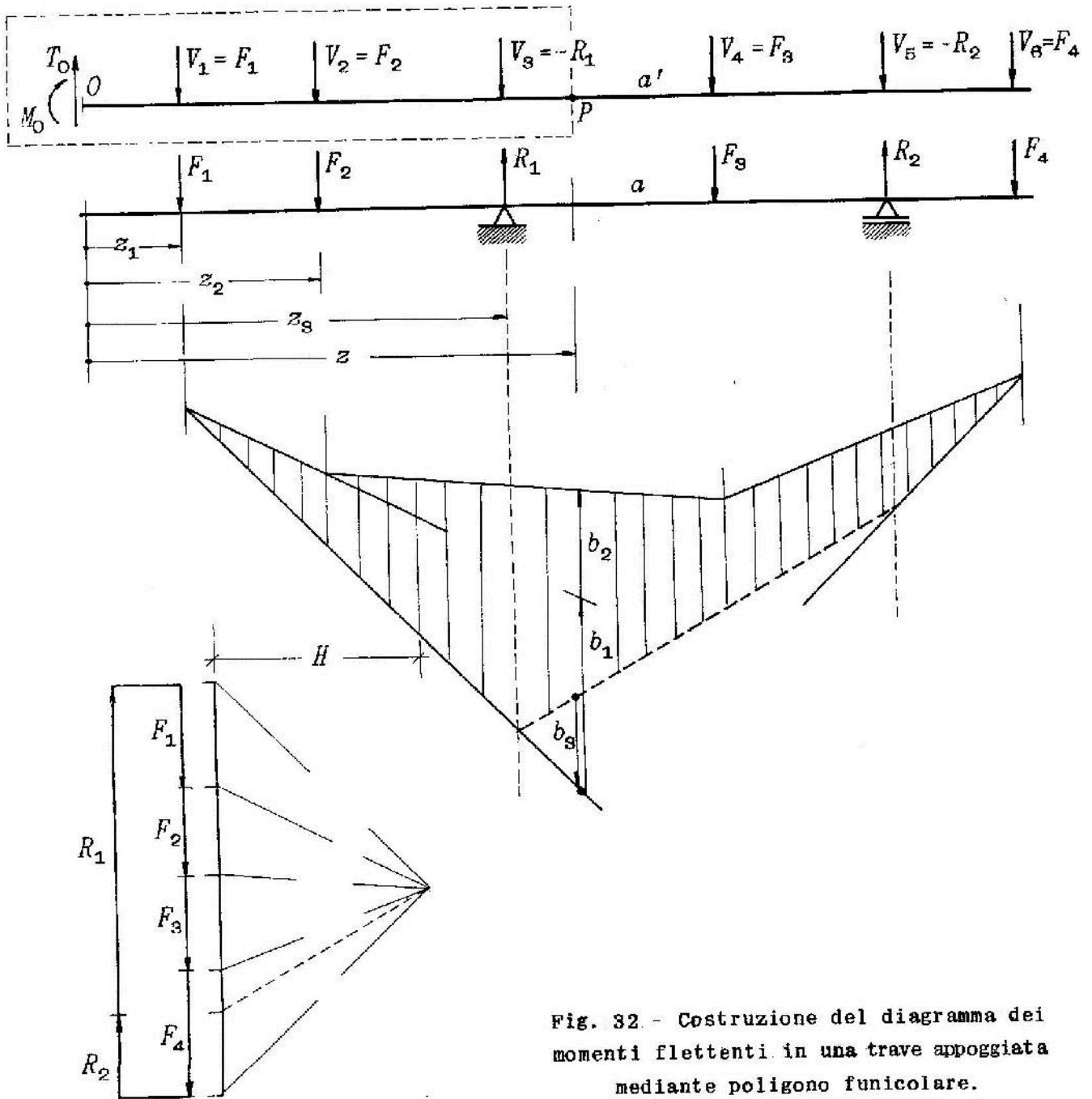


Fig. 32 - Costruzione del diagramma dei momenti flettenti in una trave appoggiata mediante poligono funicolare.

Se le forze V vengono connesse mediante un poligono funicolare costruito con distanza polare H , il segmento b_i che i lati intersecantisi in corrispondenza del carico V_i intercet-

tano sulla verticale di coordinata z obbedisce alla proporzione:

$$(z - z_i)/b_i = H/V_i$$

posto che b_i sia letto nella scala delle coordinate z e H in quella delle forze F : il prodotto $Hb_i = V(z - z_i)$ potrà essere ottenuto leggendo b_i in una scala di momenti ricavata moltiplicando la scala del disegno per la forza H . Così il segmento verticale compreso fra il primo e l'ultimo dei lati del poligono connettenti un gruppo di forze misurerà il momento di queste forze rispetto ai punti della verticale stessa. Nel caso della fig. 32 e' $M_0 = T_0 = 0$; intersecando con le due verticali d'appoggio il primo e l'ultimo lato del poligono che connette tutti i carichi si trova il lato di chiusa (segnato a tratto) e, corrispondentemente, le reazioni R_1, R_2 d'appoggio sul poligono delle forze. Si ottiene così l'intero diagramma dei momenti flettenti, segnato con tratti verticali in figura.

Se le forze (carichi e reazioni) sono tutte note, si potrà connetterle nell'ordine in cui sono disposte (trave a' della fig. 32); il poligono funicolare avrà primo e ultimo lato coincidenti e da questo lato si leggeranno i momenti.

Anche quando il diagramma dei momenti flettenti sia stato tracciato per altra via e' opportuno interpretarlo come poligono funicolare dei carichi, per tenerne presenti le proprietà. Ad esempio: le tangenti estreme ad un tratto del diagramma (o i lati estremi del tratto, se essendo i carichi concentrati, la linea e' una poligonale) intercettano su una verticale qualunque un segmento che misura il momento (rispetto ad un punto della verticale) dei carichi insistenti sul tronco di trave a cui il tratto di diagramma si riferisce.

II.8 - Scomposizione dei momenti nelle travi diritte. Si consideri un tratto PQ (fig. 33) di trave ad asse rettilineo. Qualunque valore assumano i momenti M^P, M^Q , e' sempre possibile verificare le condizioni di equilibrio per il tronco considerato: basta determinare T^P e T^Q in modo da soddisfare alle condizioni di equilibrio alla rotazione intorno a P e Q . In particolare si considererà il caso in cui sia $M^P = M^Q = 0$; i momenti che in queste condizioni si troveranno per le sezioni intermedie del tratto saranno indicati con $\tilde{M}$, gli sforzi di taglio con $\tilde{T}$: queste sono le sollecitazioni che si avrebbero in quel tratto se esso fosse appoggiato ai due estremi. Rimossi poi i carichi che producono i momenti $\tilde{M}$ (chiamati

ti momenti semplici) si consideri il tronco stesso soggetto a momenti M^P, M^Q nelle sezioni estreme. Il taglio in queste condizioni sarà costante e dato da

$$T^* = (M^Q - M^P)/(z^Q - z^P) \quad [22]$$

mentre i momenti assumono andamento lineare. Introduciamo le funzioni

$$(P \angle Q) = \frac{z - z^P}{z^Q - z^P}, \quad (Q \angle P) = \frac{z^Q - z}{z^Q - z^P} \quad [23]$$

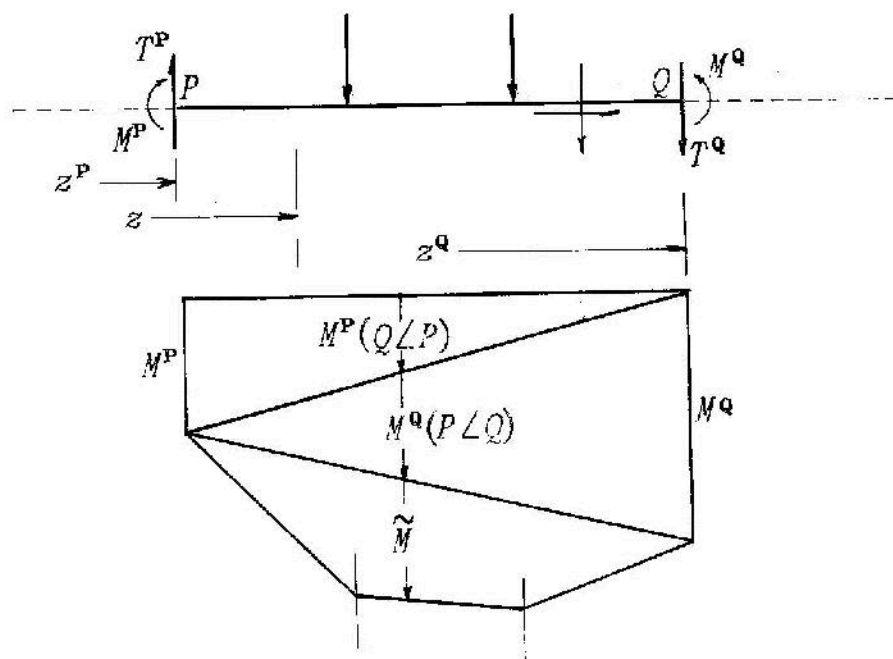


Fig. 33 - Scomposizione del grafico dei momenti flettenti nella trave rettilinea.

La funzione $(P \angle Q)$ è rappresentata nel tratto PQ da un diagramma lineare che assume ordinate 0 e 1 rispettivamente in P e Q ; il grafico di $(Q \angle P)$ è anche lineare, con ordinate 1 e 0 rispettivamente in P e Q . La funzione $M^Q(P \angle Q)$ rappresenta il diagramma dei momenti che nel tratto considerato si avrebbero in assenza di carichi esterni, per $M^P = 0$; la funzione $M^P(Q \angle P)$ corrisponde alla condizione $M^Q = 0$, con carichi nulli. Per sovrapposizione di effetti, in una situazione generale, si avrà (*).

(*) Con riferimento alle proprietà delle equazioni differenziali ordinarie lineari, la funzione $\tilde{M}$ si può interpretare come integrale particolare dell'equazione [18], mentre i primi due addendi nella [24] rappresentano due soluzioni indipendenti dell'omogenea associata $d^2M/dz^2 = 0$.

$$M = M^P(Q \angle P) + M^Q(P \angle Q) + \tilde{M} \quad [24]$$

$$T = \tilde{T} + T^* \quad [25]$$

Queste espressioni trovano utile applicazione in molti problemi. Ad esempio: si debbano determinare i momenti flettenti in una trave appoggiata soggetta ad una data distribuzione di carico in un tratto PQ (fig. 34), essendo noti i momenti e il taglio nel tratto stesso nel caso di appoggio sulle sezioni P e Q . Le reazioni di appoggio in A e B sono rispettivamente date, con le notazioni della figura, dalle relazioni:

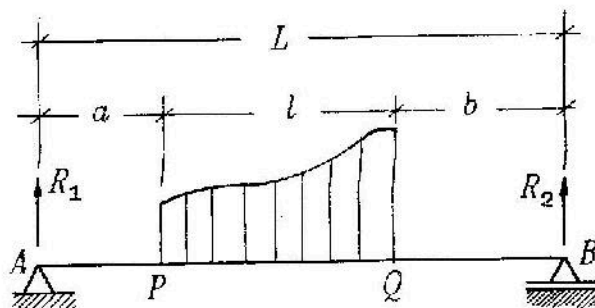


Fig. 34 - Trave appoggiata con carico parziale.

$$R_1 L = (b + l) \tilde{T}^P - b \tilde{T}^Q,$$

$$R_2 L = a \tilde{T}^P - (a + l) \tilde{T}^Q$$

che si ottengono considerando che T^P e $-T^Q$ sono due forze equivalenti al sistema di carichi agente sul tratto PQ . Si trovano così le espressioni dei momenti:

$$M^P = a R_1, \quad M^Q = b R_2$$

Così dalla [24] si hanno i momenti nel tratto PQ ; mentre il tratto AP e per il tratto QB si ha rispettivamente

$$M = (A \angle I) M^P, \quad M = (B \angle Q) M^Q$$

II.9 - Travi Gerber. Si indicano con questo nome le travi ad asse rettilineo vincolate al terreno da una cerniera e un numero n di appoggi, rese isostatiche dall'introduzione di $n - 1$ cerniere inserite nelle varie campate in modo che in nessuna campata si trovino più di due cerniere e che fra due cerniere non stia mai più di una campata. Le restrizioni indicate circa la posizione delle cerniere valgono ad evitare situazioni anomale del tipo considerato nel § II.6.

Il calcolo di queste strutture può essere effettuato col procedimento generale, previa calcolazione delle reazioni vincolari. Così ad esempio, nel caso della fig. 35, si possono calcolare anzitutto le reazioni che il tratto $C_1 C_2$ (che può trattarsi come trave appoggiata), trasmette alle parti adiacenti.

Così il tratto $A_1A_2C_1$ è da considerare come soggetto, oltre ai carichi esterni, alla reazione trasmessa dalla trave C_1C_2 . Il tronco $C_2A_3C_3$ è da considerare come appoggiato in A_3 e C_3 ; così si trova la reazione trasmessa all'ultimo tronco, appoggiato in A_4 e A_5 .

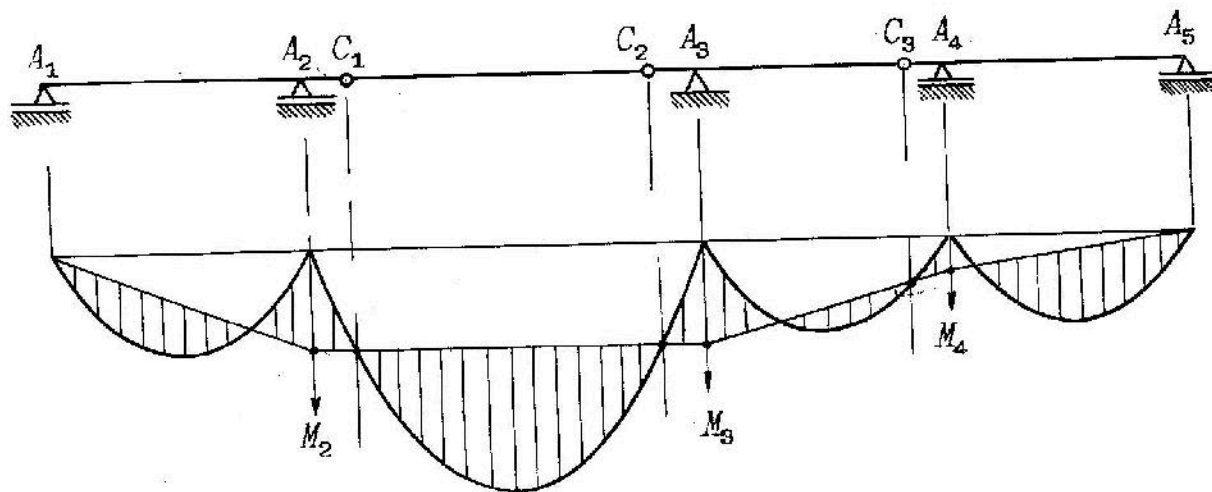


Fig. 35 - Momenti flettenti in una trave Gerber.

Un procedimento differente può essere sviluppato sulla base delle espressioni [24], [25]; si ottengono per questa via direttamente i momenti flettenti costruendo i grafici $\tilde{M}$ per ciascuna campata come se essa fosse semplicemente appoggiata e indipendente dalle altre, e spostando poi la fondamentale di riferimento in modo da verificare le condizioni imposte dalla presenza delle cerniere. Si consideri ad esempio il caso della fig. 35 nell'ipotesi che tutte le campate siano uniformemente caricate. I momenti $\tilde{M}$ in questo caso sono dati da:

$$\tilde{M} = pz(l-z)/2$$

essendo z la coordinata misurata da un estremo, l la luce della campata e p il carico trasversale uniforme. Si parte dalla campata A_2A_3 e si proiettano verticalmente le due cerniere C_1, C_2 sul grafico dei momenti $\tilde{M}$; si ottengono così i momenti M_2, M_3 sugli appoggi A_2 e A_3 . Quindi nella campata A_1A_2 il diagramma dei momenti risultanti è ottenuto con riferimento alla retta $(A_1/A_2)M_2$. Per la campata A_3A_4 , proiettata la cerniera C_3 sul diagramma dei momenti $\tilde{M}$ si ottiene M_4 ; infine nella campata A_4A_5 i momenti finali sono ottenuti sommando ai momenti $\tilde{M}$ le quantità $(A_5/A_4)M_4$.

II. 10 - Travi curve. Si consideri un tronco di trave la cui linea d'asse e' costituita dalla curva c (fig. 36). Sia $\vec{t}$ il versore tangente, $\vec{n}$ il versore normale orientato verso il centro di curvatura; quindi, come e' noto dalla geometria differenziale, poiche' la coordinata Z e' misurata lungo la curva c , sara':

$$d\vec{t}/dZ = \vec{n}/r, \quad d\vec{n}/dZ = -\vec{t}/r \quad [26]$$

essendo r il raggio di curvatura nel punto considerato. La risultante delle caratteristiche di sollecitazione puo' esprimersi vettorialmente nella forma:

$$\vec{R} = N\vec{t} + T\vec{n} \quad [27]$$

posto che l'asse y venga orientato nel verso di $\vec{n}$. Sia $\vec{p}dZ$ la forza elementare agente sul tratto dZ : la si scomporra' nelle direzioni di $\vec{t}$ e $\vec{n}$ scrivendo:

$$\vec{p} = p_h\vec{t} + p\vec{n} \quad [28]$$

Per l'equilibrio alla traslazione dell'elemento dZ nel suo piano deve essere:

$$d\vec{R} + \vec{p} dZ = 0$$

Dividendo per dZ ed effettuando le derivazioni si ottiene:

$$(dN/dZ + p_h - T/r)\vec{t} + (dT/dZ + p + N/r)\vec{n} = 0 \quad [29]$$

Le due espressioni in parentesi devono essere separatamente nulle per l'equilibrio. Dalla prima si deduce che per l'equazione [15], quando si passi dalla trave ad asse diritto alla trave curva deve aggiungersi a secondo membro il termine T/r ; dalla seconda risulta che nella [16] va aggiunto a primo membro il termine N/r . Si osservi che l'equazione $dM/dZ = T$ sussiste ancora. Se la trave fosse flessibile al punto da rendere trascurabili i momenti M , dovrebbero essere anche piccoli i termini in T : le equazioni di equilibrio si ridurrebbero allora alle note equazioni dei flessibili. Per i casi ordinari ($M, T \neq 0$) l'uso delle due equazioni per il calcolo di N e T non e' comodo a causa del loro concatenamento: conviene piuttosto determinare le caratteristiche di sollecitazione mediante considerazioni dirette di equilibrio.

Si consideri ad esempio una trave incastrata, con asse a forma di un quarto di circonferenza. Col riferimento della

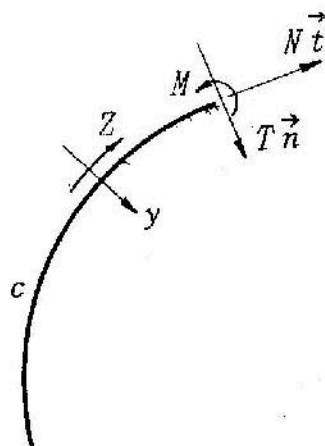


Fig. 36 - Trave ad asse curvo.

fig. 37 sarà $Z = ra$. La trave sia soggetta ad un carico radiale uniforme p . Le forze agenti sull'arco AE possono essere sostituite dalle equivalenti indicate in figura. Quindi si ricavano subito le espressioni:

$$\begin{aligned} M &= pr^2(\sin \alpha - 1) \\ N &= pr(\sin \alpha - 1) \\ T &= pr \cos \alpha \end{aligned} \quad [30]$$

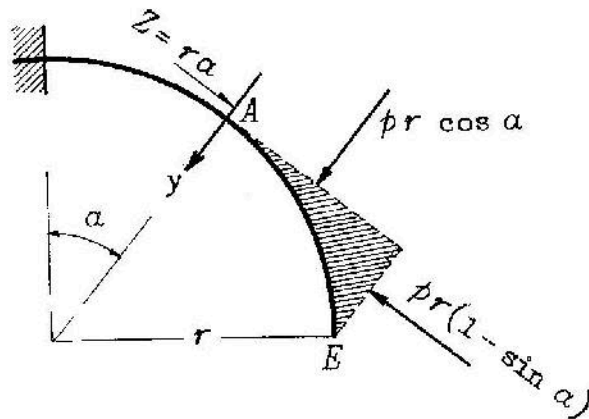


Fig. 37

Si controlla facilmente che queste verificano le tre condizioni di equilibrio $dM/dZ = T$, $dN/dZ = T/r$, $dT/dZ + p + N/r = 0$.