

IL CARICO DI PUNTA

X.1 - Lo schema semirigido dell'asta pressoflessa. Si consideri la struttura della fig.141: una trave appoggiata, formata da due tronchi rigidi di ugual lunghezza h separati da un tratto di rigidezza EJ e lunghezza $l \ll h$. La trave sia soggetta a due forze F trasversali, applicate alle estremita' del tratto centrale, e ad una forza P agente nella direzione AB . Il tratto centrale sia cosi' corto che il momento

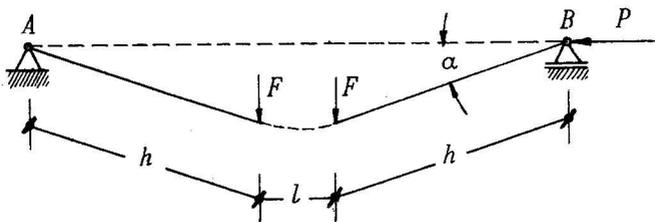


Fig. 141 - Schema semirigido dell'asta presso flessa.

flettente vi si possa ritenere costante e quindi espresso da

$$M = \frac{2EJa}{l} \quad [163]$$

essendo $2a$ l'angolo di rotazione relativa delle sezioni estreme. Per esaminare le condizioni di equilibrio nella posizione deformata si puo' far uso dell'equazione dei lavori, introducendo una deformazione virtuale corrispondente ad una variazione δa di a ed assumendo come sistema $[a]$ quello degli sforzi in esame. Lo spostamento del punto di applicazione delle forze F vale $\delta(h \sin a) = h \cos a \delta a$ mentre quello nella direzione della forza P e' dato da $-2\delta(h \cos a) = 2h \sin a \delta a$. D'altra parte il lavoro L_i e' dato da $M^a M^b l / EJ$, dove M^a va espresso secondo la [163], mentre per M^b vale l'analogha espressione $2EJ\delta a / l$. Si ottiene quindi l'equazione:

$$2Fh \cos \alpha \delta \alpha + 2Ph \sin \alpha \delta \alpha = \frac{4EJ\delta \alpha}{l} \alpha .$$

Dividendo per $2h\delta\alpha$ e ponendo $P_c = 2EJ/hl$ si ottiene

$$F \cos \alpha + P \sin \alpha = \alpha P_c . \quad [164]$$

Supponendo α molto piccolo, scriviamo la [164] nella forma

$$F = \alpha(P_c - P) . \quad [165]$$

Secondo questa equazione, la proporzionalita' fra F e α sussiste per ogni valore che si assegni a P . In particolare, a $F = 0$ corrisponde la posizione di equilibrio ad asse rettilineo ($\alpha = 0$). Pero' la sovrapposizione degli effetti e' qui lecita solo per quanto riguarda il carico trasversale, non per quello longitudinale. Questo non produce una deformazione ad-

ditionale semplicemente proporzionale, come nei problemi precedenti s'e' trovato, ma opera in via indiretta; esso interviene nel rapporto fra F e α e fa si' che, crescendo P dal valore zero, si richieda una forza F sempre piu' piccola per produrre una data inflessione. Per un valore fisso di F , la relazione $P(\alpha)$ e' rappresentata da una delle curve della fig. 142; queste iperboli indicano un aumento assai rapido di α quando P si avvicina a P_c . La retta $P = P_c$ e' il loro comune asintoto. Per $P = P_c$ non si trova una configurazione d'equilibrio, per piccolo che sia il valore di F .

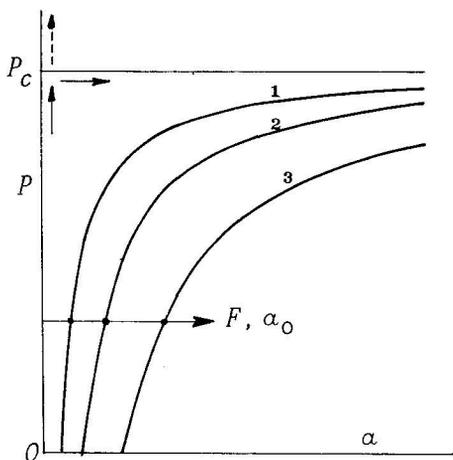


Fig. 142 - Diagramma sforzi deformazioni dell'asta pressoflessa.

Invece per $F = 0$ con $P = P_c$ sussiste l'equilibrio qualunque sia il valore di α ; per $P > P_c$ si puo' ottenere l'equilibrio a condizione che la F operi in senso opposto all'inflessione, contrastandola.

Un fenomeno del tutto analogo si manifesta se la trave presenta un disassamento iniziale, ossia se, prima che agiscano carichi, il sistema si trova in una posizione deviata corrispondente ad un valore α_0 di α . Rispetto al caso antecedente si deve modificare l'espressione [163] sostituendovi α

con $\alpha - \alpha_0$, angolo che rappresenta la rotazione relativa legata alla sollecitazione applicata. Si ottiene quindi, per $F = 0$, invece della [165], l'equazione:

$$\alpha_0 P_c = \alpha(P_c - P) \quad [166]$$

Le linee che rappresentano la variazione di α al crescere di P sono ancora quelle della fig.142; su ognuna α_0 e' il valore di α per $P = 0$. Al diminuire di α_0 l'iperbole tende a degenerare nel diagramma spezzato, formato dal segmento OP_c e dalla retta $P = P_c$.

Per $\alpha_0 = 0$ e $F = 0$ (asta inizialmente diritta, caricata solo assialmente), finche' $P < P_c$, non vi puo' essere equilibrio che per $\alpha = 0$; e questa e' una posizione d'equilibrio stabile, perche' per produrre una inflessione occorre applicare una F avente lo stesso senso dello spostamento. Per $P = P_c$ si ha una situazione di equilibrio indifferente: qualunque sia α la [165] e' soddisfatta con $F = 0$. Per $P > P_c$ nella posizione $\alpha = 0$ si ha ancora equilibrio, ma instabile: infatti in una posizione deviata si richiede un'azione contrastante ($\alpha/F < 0$). La linea degli equilibri, dopo aver seguito il segmento OP_c , si biforca nel ramo $P = P_c$ degli equilibri indifferenti e nel ramo $\alpha = 0$ degli equilibri instabili.

X.2 - La stabilita' elastica. L'ipotesi semplificativa delle deformazioni piccolissime e' stata utilizzata di continuo nei capitoli precedenti. In particolare, le equazioni di equilibrio sono state scritte sempre facendo riferimento alla configurazione indeformata, mentre in realta' e' nella posizione deformata che l'equilibrio si stabilisce. Di queste semplificazioni e' legittimo valersi nella generalita' dei casi, con la riserva espressa che, se qualche problema rivela all'esame approfondito fenomeni non contemplati dalla teoria lineare, le conclusioni di quella debbono ritenersi applicabili a sollecitazioni di entita' esigua. Nel paragrafo precedente si e' considerato un problema tipico fra quelli per i quali la teoria lineare risulta inadeguata. La fig.143 da' la rappresentazione dell'equazione [164] valida per inflessioni comunque grandi. Nell'ambito della teoria usuale, dovendo trascurarsi i termini quadratici in α come pure i prodotti di α per la forza P quella equazione dovrebbe ridursi a $F = \alpha P_c$. Con questa relazione si puo' studiare solo quanto avviene in prossimita' dell'origine, nella fig.143, ossia nella zona a doppio tratteggio. La [165], pur poggiando sull'assunzione che l'angolo

α sia piccolo, tiene conto del prodotto αP . E' l'effetto di questo termine che fa apparire i fenomeni indicati dalla fig. 142: in particolare la biforcazione che la linea degli stati di equilibrio per l'asta di

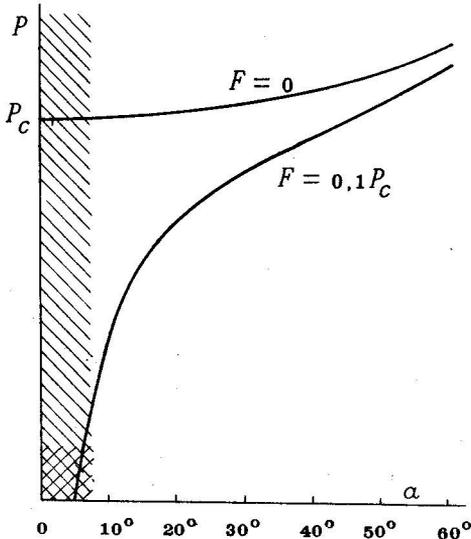


Fig. 143 - Rappresentazione della equazione [164].

ritta senza carichi trasversali presenta per $P = P_C$. La quantità P_C e' detta *carico critico*: esso e' caratterizzato dal fatto che a partire da tale carico appare una nuova possibilita' di stati di equilibrio, nella configurazione d'inflexione laterale. La trattazione che si fonda sulla [165] e' in grado di esaminare i fenomeni che avvengono nella striscia del grafico 143, in prossimita' dell'asse delle ordinate (zona tratteggiata). La fig. 142 rappresenta quindi l'immagine, con ascisse ingrandite della striscia anzidetta. In essa la curva $F = 0$ della figura 143, ad ordinate lentamente

te crescenti appare come una orizzontale, le curve trascendenti $F = \text{costante}$ appaiono trasformate in iperboli. Questa teoria *linearizzata*, ossia semplificata dalla omissione dei termini quadratici negli spostamenti e' dunque in grado di individuare il carico critico, e quindi i limiti della stabilita' dell'equilibrio elastico. Occorre segnalare che esistono fenomeni per i quali la analisi non puo' essere limitata alla considerazione dei termini lineari negli spostamenti, pur supponendosi che questi siano piccoli (comportamento delle pareti sottili curve a carichi ultracritici).

Esistono ancora fenomeni, sempre nel campo elastico, per i quali occorre svincolarsi completamente dalla assunzione dei piccoli spostamenti. Abbandonando la teoria linearizzata si

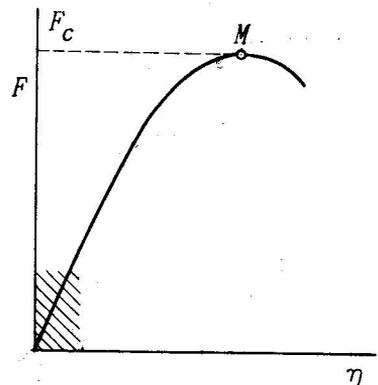


Fig. 144 - Collasso di scatto.

possono studiare fenomeni come quello schematicamente indicato nella fig. 144: esistono strutture per le quali il diagramma forze deformazioni presenta un massimo M , oltre il quale nel ramo discendente non può sussistere equilibrio stabile sotto una forza F costante; quando la forza cresce oltre il valore F_c si manifesta una deformazione istantanea che porta dal punto M ad una nuova posizione di equilibrio, in generale con deformazioni inaccettabili; più frequentemente in M si verifica il cedimento istantaneo della struttura (*collasso di scatto*). La teoria lineare è in grado di esaminare solo la parte iniziale tratteggiata del grafico.

Per il fenomeno del carico di punta in campo elastico la teoria linearizzata fornisce indicazioni sufficienti per le applicazioni pratiche, in tutto il campo di valori di P . Quando sia $P \ll P_c$ si può applicare la teoria lineare.

X.3 - L'asta caricata di punta. Si consideri una trave di sezione costante, vincolata in B mediante una cerniera (figura 145), guidata all'altro estremo mediante un appoggio ed ivi soggetta ad una forza P diretta secondo la retta AB che coincide con l'asse dell'asta scarica. Nelle articolazioni A, B siano disposti contrasti elastici i quali oppongono alla rotazione della linea d'asse momenti proporzionali alla rotazione stessa. Si esamineranno le condizioni di equilibrio della trave inflessa (che inizialmente è un'asta compressa) facendo uso della teoria linearizzata: si supporranno cioè le frecce η piccole, come nei capitoli precedenti, ma si terrà conto dei momenti che nascono dal carico P in conseguenza delle inflessioni dell'asse. Così, per l'equilibrio del tronco compreso fra l'estremo A e la sezione z (fig. 145a), si ha

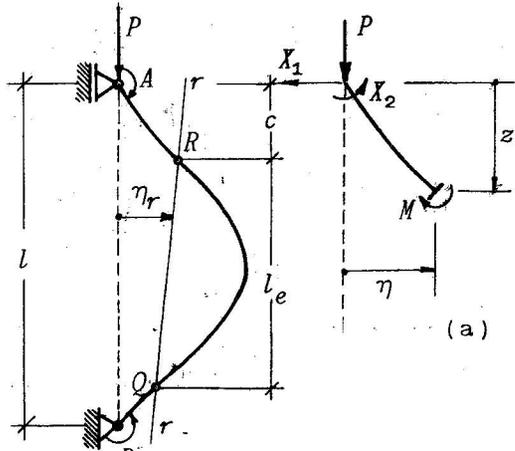


Fig. 145 - L'asta caricata di punta.

essendo X_1 la reazione dell'appoggio A , X_2 il momento op-

$$M = P\eta + X_1z + X_2 \quad [167]$$

posto dal contrasto elastico ivi esistente. Poiche' nei limiti di approssimazione ammessi e' $M = - EJd^2\eta/dz^2$ si ottiene

$$EJ \frac{d^2\eta}{dz^2} + P\eta + X_1z + X_2 = 0 \quad [168]$$

Poniamo la soluzione generale di questa equazione nella forma

$$\eta = \eta_r + C \sin \frac{\pi}{l_e}(z - c) \quad [169]$$

essendo C, c, l_e costanti ed essendo η_r l'integrale particolare

$$\eta_r = - X_1z/P - X_2/P \quad [170]$$

E' facile controllare che la [168] risulta identicamente soddisfatta dalla [169] se e'

$$\pi/l_e = \sqrt{P/EJ} \quad [171]$$

Confrontando la [170] con la [167] si vede che la linea $\eta = \eta_r$ e' una retta lungo la quale $M = 0$; questa e' la retta r d'azione della forza risultante di P e delle reazioni del vincolo A (fig.145) a cui la trave e' soggetta. La [169] indica che la linea elastica e' tracciata riportando le ordinate di una sinusoida a partire dalla retta menzionata. Pur essendo la sinusoida deformata dal riferimento obliquo, i punti di flesso permangono nelle sezioni dove l'argomento della funzione seno della [169] assume valore nullo o multiplo di π . Percio' l_e rappresenta la distanza di due flessi successivi della linea elastica, punti in cui questa o il suo prolungamento ideale incrocia la r . La distanza l_e , detta lunghezza *equivalente* o lunghezza *libera di flessione*, definisce il carico critico $P = P_c$ per il quale la trave si trova in equilibrio nella posizione inflessa, carico che si ricava dalla [171]

$$P_c = \pi^2 \frac{EJ}{l_e^2} \quad [172]$$

La determinazione del carico critico per una data condizione di vincolo per la trave di sezione costante, e' dunque equivalente alla determinazione della lunghezza libera. Vedremo per alcuni casi di maggior interesse applicativo come si conduca tale calcolo.

I) **Asta incernierata agli estremi** (fig. 146). In questo caso la forza a cui la trave inflessa e' soggetta deve restare diretta secondo la AB ; A e B sono due punti di flesso e percio' e' $l_e = l$.

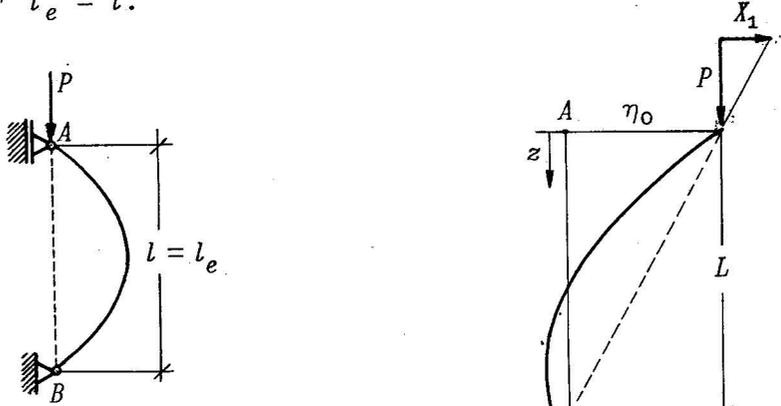


Fig. 146 - Asta incernierata.

II) **Asta incastrata alla base** (fig. 147), soggetta all'estremo libero ad una forza che passa sempre per un punto C situato ad una distanza L dall'estremo A . Detta η_0 la freccia in A , l'equazione della retta d'azione della forza a cui la trave e' sottoposta e'

Fig. 147 - Asta incastrata soggetta ad una forza per C .

$$\eta_r = \eta_0 (1 - z/L)$$

Sostituendo questa espressione nella [169] e tenendo presente che e' $c = 0$ perche' in A sta un punto di flesso, dalle condizioni di vincolo in B ($\eta = 0, d\eta/dz = 0$ per $z = l$) si hanno le equazioni

$$\eta_0 \left(1 - \frac{l}{L}\right) + C \sin\left(\pi \frac{l}{l_e}\right) = 0 = -\frac{\eta_0}{L} + \frac{\pi}{l_e} C \cos\left(\pi \frac{l}{l_e}\right) \quad [173]$$

Da queste equazioni si ha la relazione

$$\frac{\pi}{l_e} (L - l) + \text{tang}\left(\pi \frac{l}{l_e}\right) = 0 \quad [174]$$

Questa e' un'equazione trascendente dalla quale si puo'

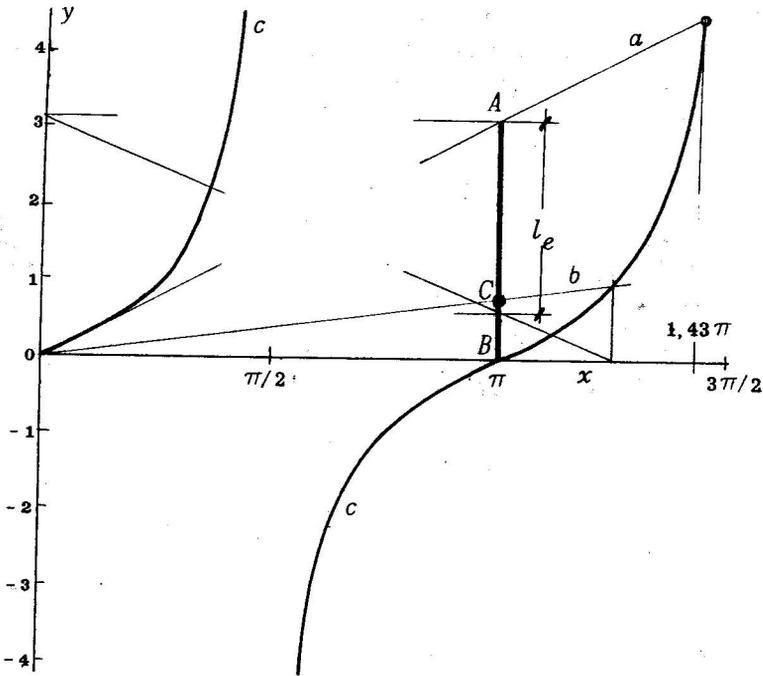


Fig. 148 - Risoluzione grafica della [174]. Posto $x = \pi l / l_e$ si traccia la curva c , $y = \tan x$, e la si interseca con la retta b , $y = \frac{l-L}{l} x$. La retta a corrisponde al caso della fig. 151; essa e' tangente alla curva c nell'origine. La retta b si traccia proiettando C dall'origine; riportata l'asta AB nella scala e nella posizione indicata: la costruzione da' anche la lunghezza libera.

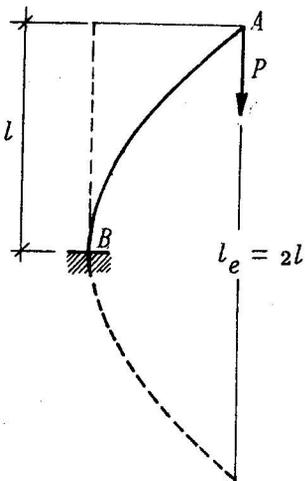


Fig. 149 - Asta incastrata soggetta a forza verticale.

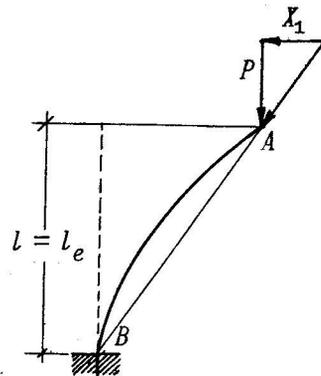


Fig. 150 - Asta incastrata con carico passante per la sezione d'incastro.

ricavare l_e , ad es., col procedimento grafico della fig.148 (*). In particolare si trova:

a) se durante l'inflessione della trave la forza P mantiene direzione costante (ossia e' $L = \infty$) e' $l_e = 2l$ (fig.149);

b) se la forza passa sempre per il punto B (ossia e' $L = l$) (figura 150) risulta $l = l_e$; il carico critico e' lo stesso della trave incernierata di ugual lunghezza;

c) il caso della trave incernierata in alto (fig.151) rientra nel caso considerato, quando si ponga nella [174] e relativa deduzione $L = 0$, $\eta_0 = 0$, $\eta_0/L \neq 0$. La [174] da' in questo caso $l_e/l \approx 0,7$;

d) se la forza passa sempre per un punto situato piu' in alto di A risulta $l_e > 2l$; il carico critico e' tanto piu' basso quanto piu' C si avvicina ad A .

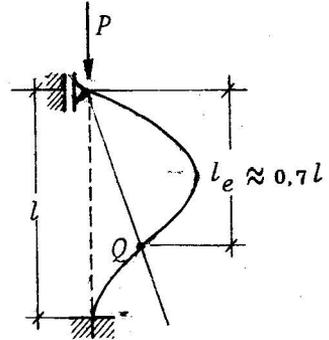


Fig. 151 - Asta con incastro e appoggio.

L'esempio considerato e' istruttivo anche perche' mostra come sul valore critico influisca il modo di variare del carico a cui l'asta e' sottoposta, dipendentemente dall'inflessione dell'asta stessa.

III) Asta incastrata agli estremi. Supponendo l'inflessione simmetrica

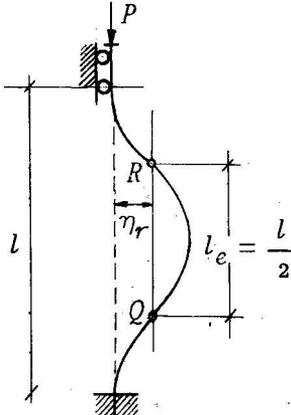


Fig. 152 - Asta incastrata.

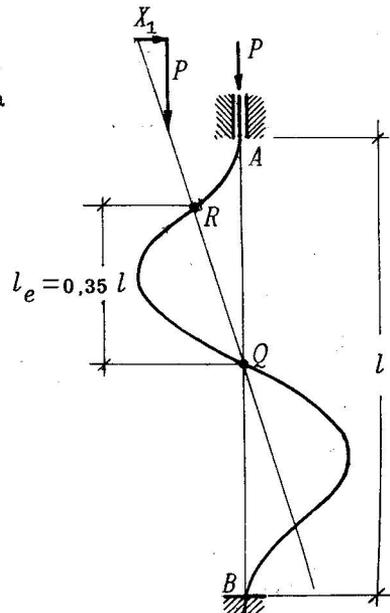


Fig. 153 - Inflessione antisimmetrica dell'asta incastrata.

(*) In questo, come in ogni altro caso, si prende in considerazione la radice che da' il valore piu' alto per l_e e quindi il piu' basso valore del carico critico.

rispetto alla mezzzeria (fig.152) deve essere $\eta_r = \text{costante}$. Quindi perche' sia $d\eta/dz = 0$ per $z = 0$ e per $z = l/2$ deve essere $c = l_e/2$, $l/2 - c = l_e/2$ e quindi $l_e = l/2$.

L'inflessione potrebbe assumere la forma antisimmetrica indicata nella fig.153. In queste condizioni la situazione di meta' dell'asta non differisce da quella dell'asta intera della fig.151; questa deformazione corrisponde dunque ad una lunghezza libera piu' piccola di quella dell'inflessione simmetrica. Ottenendosi cosi' un carico critico piu' elevato, la soluzione va scartata.

X.4 - Il calcolo del carico critico. La [169] con la [170] permette di determinare il carico critico per la trave di sezione costante, quando si tenga conto delle condizioni al contorno. Nella formulazione generale queste si traducono in un sistema di equazioni lineari omogenee nelle costanti $X_1, X_2, C \sin(\pi c/l_e), C \cos(\pi c/l_e)$, variamente semplificabili nei casi specifici. Per eliminazione (come appare dall'esempio delle [173] dopo eliminazione di η_0) ci si riduce ad un'equazione del tipo

$$Cf(l/l_e) = 0 \quad [175]$$

dove f e' una funzione che dipende dai parametri geometrici e di vincolo. Per un generico valore di P (e quindi di l_e) la [175] ammette solo la soluzione $C = 0$: si ritrova cioe' la soluzione banale $\eta \equiv 0, X_1 = 0, X_2 = 0$ ossia la configurazione di equilibrio senza inflessione laterale. Il valore piu' basso di P che annulli f , ossia il valore minimo di P per il quale la trave possedga una configurazione inflessa di equilibrio e' il carico critico P_c . Di solito la discussione viene limitata all'equazione $f = 0$, la [174] nel caso sopra considerato, e se ne ricerca la prima radice senza menzionare la eventualita' $C = 0$.

Per la condizione di carico critico per la quale $f = 0$, C puo' assumere valore qualunque: il sistema e' in equilibrio indifferente rispetto alle inflessioni. Dalle equazioni scritte e' possibile determinare la legge di distribuzione ma non l'entita' delle deformazioni e sollecitazioni relative a $P = P_c$: queste possono assumere valori grandi arbitrariamente, o meglio, esorbitanti dal campo di piccole deformazioni che la teoria linearizzata e' in grado di considerare. Questa che cosi' si ottiene e' la soluzione del problema omogeneo, che nel caso della fig.142 corrisponde alla situazione $F = 0$ o $\alpha_0 = 0$. Per studiare il caso della struttura soggetta a carichi trasversali, naturalmente con $P < P_c$, si dovrebbe affrontare

il problema non omogeneo. Una valutazione approssimata delle sollecitazioni e delle deformazioni nella situazione combinata si può dedurre dalla [165]: detta \bar{a} la deformazione che si calcolerebbe con la teoria lineare, ossia $\bar{a} = F/P_C$ quella data dalla teoria linearizzata si ottiene dividendo \bar{a} per il fattore $1 - P/P_C$. Applicando questo divisore a tutte le deformazioni e sollecitazioni che nella trave si deducono dalla teoria lineare si ha un'idea dell'effetto di amplificazione prodotto dall'approssimarsi del carico critico.

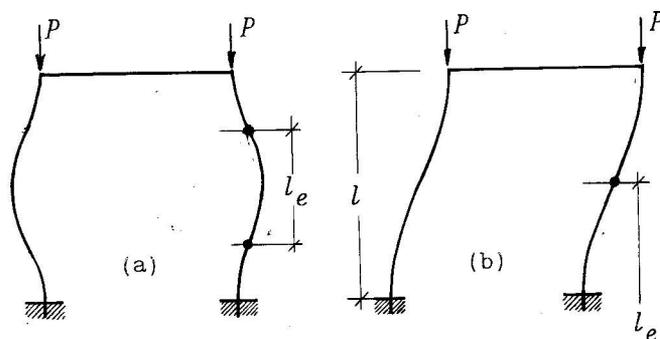


Fig. 154 - Inflessione laterale di un portale con traversa rigida.

Il calcolo del carico critico, anche quando si possa far uso di una soluzione del tipo [169] richiede la previsione qualitativa della forma di instabilità che presumibilmente è la più pericolosa. Si consideri ad es., il portale della fig. 154, soggetto a due forze uguali in corrispondenza dei piedritti. Supponiamo che la rigidezza della traversa sia di molto superiore a quella dei piedritti sicché possa ritenersi che le sezioni terminali di questi non subiscano rotazione apprezzabile. Data la simmetria della struttura e dei carichi si è portati a prevedere una forma di instabilità simmetrica come quella della fig. 154a. A questa corrisponde $l_e = l/2$. Invece la condizione più grave è quella presentata nella fig. 154b per la quale evidentemente si ha $l_e = l$. In base a questa osservazione preliminare si può passare alla determinazione quantitativa del carico critico: se il calcolo fosse impostato in base all'assunzione di una deformazione simmetrica si sopravvaluterebbe di molto la capacità di resistenza della struttura. Posto che la traversa abbia una rigidezza EJ_1 diversa da quella EJ dei montanti, si esprime facilmente la relazione fra momenti e rotazioni agli estremi della traversa stessa, relazione che impone per la sezione estrema del montante la

condizione

$$\frac{bM}{6EJ_1} = \frac{d\eta}{dz} \quad [176]$$

Nell'uso dell'espressione [169] si dovrà considerare che $\eta_r = \text{costante}$ poiche' la forza X_1 deve mancare per l'equilibrio della traversa in direzione orizzontale. L'espressione si riduce alla forma

$$\eta = C \left[1 - \cos\left(\pi \frac{z}{l_e}\right) \right] \quad [177]$$

dovendo verificare le condizioni $\eta = 0$, $d\eta/dz = 0$ per $z = 0$. Sostituendo nella [176] a η la sua espressione e a M la quantità $-EJd^2\eta/dz^2$, ambedue per $z = l$, si ottiene, tolto il fattore C ,

$$\text{tang}\left(\pi \frac{l}{l_e}\right) = -\frac{\pi bJ}{6J_1 l_e}$$

Il valore di l_e puo' essere calcolato con l'uso del grafico della fig. 148. Basta trovare l'intersezione della curva $y = \text{tang } x$ con la retta $y = -bJx/6J_1 l$. Per $J/J_1 = 0$ si ritrova $l_e = l$, mentre per $J_1/J = 0$ risulta $l_e = 2l$.

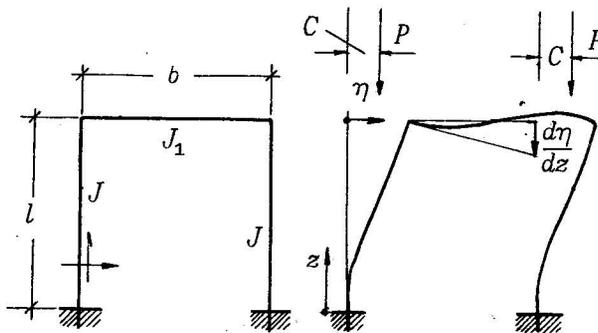


Fig. 155 - Inflessione laterale di un portale.

Per travi di sezione variabile, come per schemi strutturali piu' complessi la determinazione del carico critico viene effettuata con procedimenti di approssimazione sui quali qui non abbiamo modo di soffermarci.

X.5 - Relazioni fra tensione critica e snellezza. Note le dimensioni di un'asta e calcolata, in base alle condizioni di vincolo, la sua lunghezza libera, dalla [172] si ha il carico di compressione per il quale l'asta, ammesso che il materiale si comporti elasticamente, giunge al limite di resistenza per il fenomeno dell'inflessione laterale. Dalla [172], dividendo ambo i membri per la sezione A dell'asta ed indicando con $\rho = \sqrt{J/A}$ il raggio d'inerzia, si ottiene l'espressione della σ per la quale la situazione critica viene raggiunta (*):

$$\sigma_E = \frac{\pi^2 E \rho^2}{l_e^2}$$

Si chiama *snellezza* il rapporto l_e/ρ e si scrive quindi

$$\sigma_E = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad [178]$$

L'inflessione laterale qui considerata mantiene l'asse della trave nel pds. che contiene l'asse y delle sezioni. Analoga deformazione si puo' presentare in un piano perpendicolare al precedente, se anche questo e' pds. (**). In questo secondo caso possono essere differenti le condizioni di vincolo agli estremi dell'asta e quindi la lunghezza libera. La snellezza nei due casi puo' essere dunque differente, sia per la diversa lunghezza libera sia per il diverso raggio d'inerzia. La tensione critica va quindi calcolata mediante la [178] intendendosi che λ e' la *snellezza massima* ossia il maggiore dei due valori che competono alle due direzioni di inflessione.

Il comportamento delle aste soggette a carico di punta viene comunemente compendiato in un grafico nel quale si riportano in funzione della snellezza i valori σ_c di σ per i quali si produce il collasso dell'asta. La legge di Eulero [178] vi e' rappresentata da una iperbole cubica (fig.156) la

(*) In questo Capitolo, a differenza dagli altri si tratteranno come positive le σ di compressione e le ϵ corrispondenti.

(**) Se la sezione presenta due assi di simmetria si possono produrre inflessioni laterali nella direzione dell'uno o dell'altro; esiste anche una terza forma di instabilita', con torsione delle sezioni intorno all'asse baricentrico. Se vi e' un solo asse di simmetria, puo' aversi la pressoflessione euleriana solo nella direzione di questo, mentre le altre due forme di instabilita' implicano insieme una certa torsione. Se manca del tutto la simmetria (ad es., per un profilato a L a lati disuguali) tutte e tre le possibili forme di instabilita' sono commiste a torsione.

quale con le sue ordinate continuamente decrescenti all'aumentare di λ mostra l'azione di indebolimento che la lunghezza dell'asta esercita nel fenomeno in esame. Una sola curva vale per aste comunque vincolate grazie all'introduzione della lunghezza libera nella snellezza. Peraltro e' ovviamente solo una

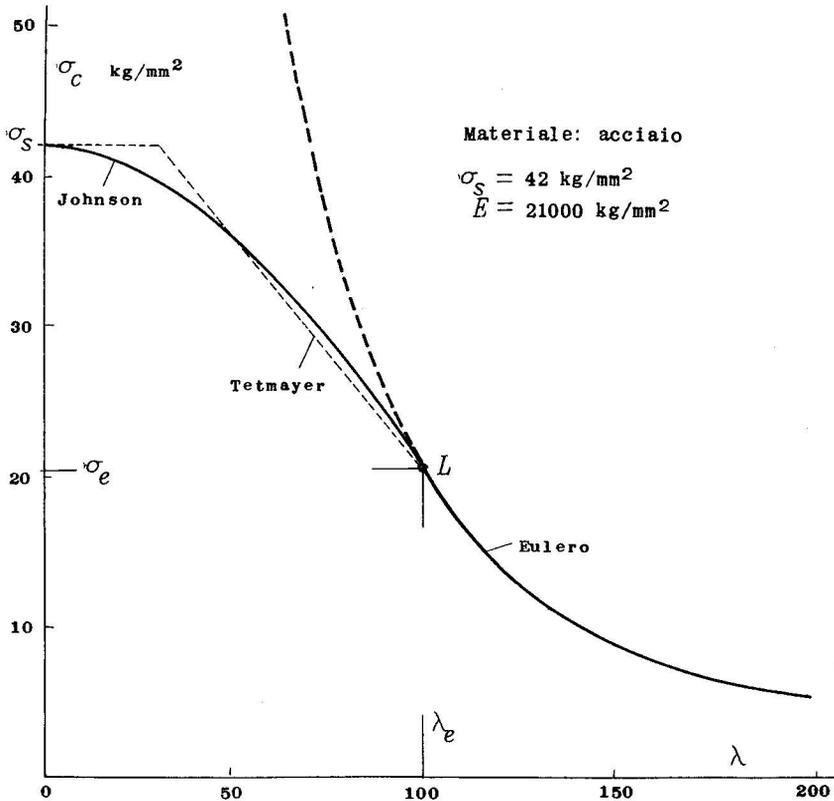


Fig. 156 - Grafico delle tensioni critiche per un acciaio.

parte della curva che puo' ritenersi valida. Infatti l'analisi su cui la [178] si fonda presuppone il comportamento elastico del materiale che costituisce l'asta. La [178] puo' dunque adottarsi se la σ che essa fornisce sia inferiore al limite elastico σ_e . Il punto L della curva di Eulero che segna il limite del ramo utilizzabile e' quello per cui sussiste l'eguaglianza $\sigma_E = \sigma_e$; a questo, secondo la [178] corrisponde una snellezza che indichiamo con λ_e , espressa da (*)

$$\lambda_e = \pi \sqrt{E/\sigma_e} \quad [179]$$

(*) Per un ordinario acciaio da costruzione λ_e non e' lontana dal valore 100.

Per snellezze inferiori a questa si entra in un campo in cui l'esame del comportamento dell'asta presenta difficoltà considerevoli. Il materiale cessa di comportarsi elasticamente prima che abbia inizio il fenomeno del cedimento laterale. Il fenomeno viene ad essere influenzato dall'andamento della caratteristica $\sigma(\epsilon)$ che differisce notevolmente da un materiale all'altro. Per le difficoltà dell'indagine teorica in questo campo è particolarmente prezioso il sussidio dell'esperienza. Infatti la legge di variazione della tensione critica per le aste corte viene spesso rappresentata con leggi empiriche (*). Fra le espressioni più comunemente adottate citiamo quelle lineari (di Tetmayer)

$$\sigma_c = a - b\lambda \quad [180]$$

e quelle quadratiche

$$\sigma_c = a - b\lambda - c\lambda^2 \quad [181]$$

essendo a, b, c coefficienti determinati per via sperimentale.

Fra le formule quadratiche, è largamente impiegata quella di Johnson che possiamo scrivere nella forma

$$\sigma_J = \sigma_S - \frac{\sigma_S^2}{4\sigma_E} \quad [182]$$

dove σ_S è la tensione di snervamento, σ_E è la tensione data dalla [178]. Ovviamente la curva rappresentata dalla [182] è una parabola ad asse verticale, avente il vertice nel punto $\lambda = 0$, $\sigma_c = \sigma_S$ (fig. 156). Questa curva è tangente alla curva di Eulero nel punto in cui $\sigma_E = \sigma_S/2$. Quindi l'adozione della formula di Johnson implica l'assunzione che la curva di Eulero debba essere seguita solo fino ad una tensione $\sigma_S/2$. Anche se in realtà σ_E può essere alquanto diverso da $\sigma_S/2$, la eventuale inesattezza nella ubicazione del punto L ha scarsa influenza sui risultati poiché le due curve sono tangenti. Mediante la [182] il calcolo della tensione critica è facile anche senza uso di grafici: dalla [178] si calcola σ_E ; se questo valore risulta inferiore a $\sigma_S/2$, lo si adotta senz'altro come tensione critica σ_c ; se esso supera $\sigma_S/2$ lo si sostituisce nella [182] e si assume $\sigma_c = \sigma_J$.

(*) A rigore sarebbe discutibile l'estensione alle aste corte del concetto di lunghezza libera, col quale si tiene conto delle condizioni di vincolo per le aste in campo elastico. Però, in mancanza di dati più precisi e in considerazione del fatto che per le aste corte la variazione di λ ha scarsa influenza, si ammette valida l'estensione.

La [182] indica il valore σ_s per la tensione massima raggiungibile nel caso limite $\lambda \rightarrow 0$. In realta' questo valore puo' essere superato sottoponendo a compressione elementi cortissimi. Pero' gli elevati carichi raggiungibili in questo campo, in cui il cedimento avviene per schiacciamento, hanno scarsa importanza per le applicazioni pratiche. In linea di massima si puo' ritenere che la [182] indica tensioni poco inferiori a quelle che effettivamente le aste corte possono sopportare.

D'altra parte si deve tenere presente che il valore σ_s come tensione massima raggiungibile per $\lambda \rightarrow 0$ puo' essere adottato per sezioni compatte ma non per sezioni a pareti sottili, come sarebbe un profilato ottenuto per piegatura da un sottile foglio di lamiera. Per queste sezioni i fenomeni di *cedimento* locale possono ribassare notevolmente la tensione critica. Il collasso ha qui inizio con un'alterazione di forma della sezione (ad es., ovalizzazione di un tubo, infossamento localizzato di una sottile parete cilindrica), a differenza dalla pressoflessione euleriana nella quale le sezioni mantengono la loro forma invariata. In certe costruzioni questi fenomeni vengono evitati dando sufficiente spessore alle parti che costituiscono la sezione dell'asta; ad es., ove si adottino i profilati normali da laminazione, i cedimenti locali non sono da temere. Invece per le sezioni sottili, usate specialmente in aviazione, un apposito esame deve fornire il valore della tensione per cui questi fenomeni si possono presentare su un'asta molto corta (*). Il valore di questa tensione va posto nella [182] a sostituire σ_s .

Si segnala infine che i valori sopra indicati rappresentano le tensioni per le quali si prevede il collasso dell'asta, dovuto alla pressoflessione euleriana piu' o meno aggravata dalla menomazione delle caratteristiche del materiale che ha oltrepassato i limiti elastici o dai fenomeni di cedimento locale. Si intende che nelle applicazioni si deve stabilire un certo margine di sicurezza fra le tensioni di lavoro e quelle di collasso. I coefficienti di sicurezza, dettati ordinariamente da prescrizioni regolamentari, stabiliscono il rapporto fra la tensione di collasso e quella effettivamente ammissibi-

(*) Naturalmente anche i cedimenti locali sono influenzati dalla lunghezza dell'asta e scompaiono col tendere della lunghezza a zero; percio' la determinazione della corrispondente tensione critica deve essere fatta su aste abbastanza corte perche' l'inflexione laterale di tipo euleriano risulti praticamente esclusa, ma non tanto corte che i cedimenti locali siano ostacolati.

le; talvolta per essi sono fissati differenti valori a seconda della snellezza, per tener conto del differente grado di attendibilita' delle previsioni teoriche o sperimentali circa il pericolo di collasso dell'asta caricata di punta. Questi elementi sono tenuti in conto da un procedimento di calcolo delle aste compresse chiamato *metodo omega*. Questo si fonda sull'uso di un coefficiente ω tabulato opportunamente, il quale rappresenta il fattore per cui va moltiplicata la sollecitazione di compressione per tener conto degli effetti dell'inflexione laterale. La legge di variazione di ω in funzione di λ (la quale parte sempre dal valore $\omega = 1$ per $\lambda = 0$) dipende dal materiale adottato.

X.6 - La teoria di Engesser-Shanley. Già nel 1888 Engesser suggerì, per il calcolo della tensione critica per un'asta compressa oltre il limite elastico, il valore

$$\sigma_c = \frac{\pi^2 E_t}{\lambda^2} \quad [183]$$

essendo E_t il *modulo tangente*, ossia la derivata $d\sigma/d\epsilon$ (figura 157) determinata per $\sigma = \sigma_c$. Se si suppone infatti che tutte le fibre dell'asta durante l'inflexione laterale seguano la caratteristica $\sigma(\epsilon)$, poichè nell'esame dell'equilibrio sotto il carico critico vanno considerate le *variazioni* che le tensioni subiscono nel passaggio dalla posizione di asta rettilinea a quella di asta inflessa, appare naturale che si debba sostituire nella formula di Eulero al modulo $E = (d\sigma/d\epsilon)_{\sigma=0}$ che vale in campo elastico, il valore corrispondente per $\sigma = \sigma_c$. Contro questa affermazione venne obiettato che non tutte le fibre seguono la medesima caratteristica: in-

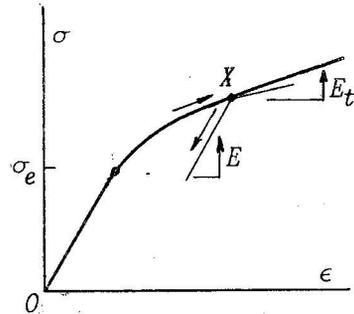


Fig. 157 - Caratteristica $\sigma(\epsilon)$ tipica.

fatti quelle per le quali la deformazione decresce, subiscono variazioni di tensioni proporzionali a E non a E_t . La teoria del *doppio modulo*, successivamente sviluppata, tiene in conto questo fatto: essa attribuisce il modulo E_t a quella parte di sezione per la quale l'inflexione laterale porta ad un aumento di deformazioni, mentre all'altra parte, nella quale la deformazione è in diminuzione, viene assegnato il modulo E . Il carico critico, in analogia con quanto vale per il

fenomeno di Eulero, viene definito come il valore di P per il quale esista possibilita' che l'asta trovi in posizione inflessa, sotto lo stesso carico un equilibrio indifferente rispetto all'entita' dell'inflessione; quando cio' si verifica, l'incremento di sforzo in una parte della sezione eguaglia la diminuzione che contemporaneamente si produce nell'altra parte. Questa proprieta' stabilisce il confine fra le due parti di sezione operanti con differente modulo. Si ottiene cosi' una tensione critica che puo' ancora scriversi nella forma semplice

$$\sigma_c = \frac{\pi^2 E_r}{\lambda^2} \quad [184]$$

Pero' il modulo E_r che qui appare deve essere calcolato caso per caso, in base alla forma della sezione. Si trovano cosi' per E_r valori intermedi fra E_t ed E . In particolare, per la sezione formata da due aree uguali collegate da un'anima di sezione trascurabile si ottiene

$$E_r = \frac{2EE_t}{E + E_t}$$

mentre per la sezione rettangolare si ha

$$\sqrt{E_r} = \frac{2\sqrt{EE_t}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_t}}$$

Piu' recentemente (*) Shanley mosse una critica sostanziale alla teoria del doppio modulo: la tensione data dalla [184] indica il carico che, qualora sia raggiunto, da' origine a condizioni di equilibrio indifferente, come avveniva in campo elastico. Ma prima di raggiungere quel carico, l'asta, anche se la sua deformazione iniziale sia infinitamente piccola, va inflettendosi lateralmente in misura gradualmente crescente col carico, quando questo oltrepassa il valore dato dalla [183]. Per chiarire il fenomeno conviene far riferimento allo schema di asta semirigida della fig. 158. L'asta e' formata da due tronchi indeformabili di lunghezza h e da un tratto intermedio di lunghezza $l \ll h$. La sezione di questo e' costituita da due aree A uguali collegate da un'anima di sezione trascurabile e di lunghezza $2a$. Con semplici considerazioni geometriche si trova che se α_0 e' il valore dell'angolo α prima che il ca-

(*) F.R. Shanley - Inelastic Column Theory - Journ. Aeron. Sciences, 1947, p. 261.

rico sia applicato, sarà'

$$l(\epsilon_1 - \epsilon_2) = 4a(a - a_0) \quad [185]$$

essendo ϵ_1 gli accorciamenti delle fibre che si trovano sul contorno 1, concavo, ϵ_2 gli accorciamenti delle fibre opposte 2. Indicando con P_1 e P_2 i valori delle compressioni sopportate dalle due aree A , per l'equilibrio si ha

$$\begin{aligned} 2P_1 &= P(1 + ha/a) \\ 2P_2 &= P(1 - ha/a) \end{aligned} \quad [186]$$

Se le fibre 1, raggiunto un certo punto X del diagramma $\sigma(\epsilon)$ proseguono nella loro deformazione in senso crescente, trascurando la curvatura del diagramma (fig. 157), possiamo scrivere

$$P_1 = P_x + AE_t(\epsilon_1 - \epsilon_x) \quad [187]$$

essendo $P_x = A\sigma_x$ ed essendo ϵ_x, σ_x le coordinate di X . Invece se le fibre 2, raggiunto il punto X , subiscono una diminuzione di deformazione, e'

$$P_2 = P_x + AE(\epsilon_2 - \epsilon_x) \quad [188]$$

Con queste relazioni si può studiare l'intero fenomeno. Nelle figure 159 e 160 sono presentati alcuni risultati ottenuti per $E_t = 0,5E$. Si è indicato con P_t

il carico critico calcolato con la [183], con P_r quello che corrisponde alla [184]. La legge di variazione di P_1 e P_2 col carico, per una certa deformazione iniziale, è rappresentata dalle linee a, b della fig. 159. In una prima fase ambedue gli sforzi crescono con P ; in questa fase il fenomeno può essere seguito con le [185]-[188] modificate, con E_t al posto di E . Raggiunto un certo valore di P , la curva di P_2 , a partire dal punto X , mostra una diminuzione. Se il materiale seguisse ancora la caratteristica delle deformazioni crescenti, i valori di P_1 e P_2 varierebbero secondo le linee a tratto della stessa figura. Invece, intervenendo il modulo E nella [188] dove P_x è il valore di P_2 corrispondente al punto X , si trova che il fenomeno procede secondo le linee a tratto continuo.

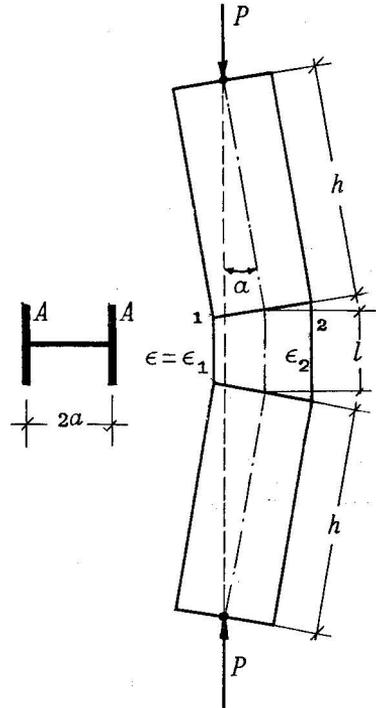


Fig. 158

La corrispondente relazione fra inflessioni e carico e' rappresentata nella fig.160; fino al punto X che corrisponde alla

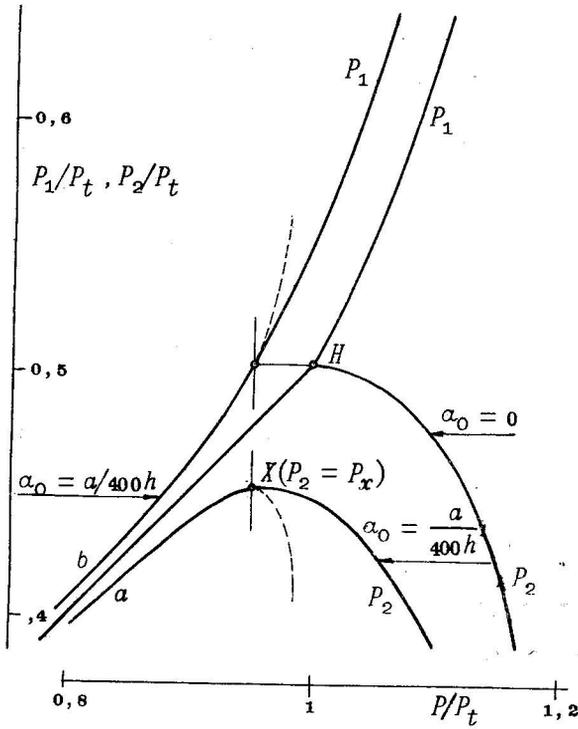


Fig. 159

situazione per la quale P_2 raggiunge il massimo, le deformazioni si mantengono esigue. Oltre quel punto la legge incrementale devia dalla linea a tratto che ha per asintoto il valore $P = P_t$, e si dirige verso l'asintoto $P = P_r$. Risultata quindi che l'incremento di rigidezza che comporta la presenza del modulo E nella [188] modera l'incremento di deformazione a confronto con le inflessioni che si produrrebbero se anche le fibre 2 reagissero secondo il modulo E_t . Pero' l'incremento prosegue indicando effetti rilevanti. Il comportamento dell'asta inizialmente diritta puo' pensarsi come caso limite, per $\alpha_0 \rightarrow 0$. L'asta si mantiene

diritta fino al punto H

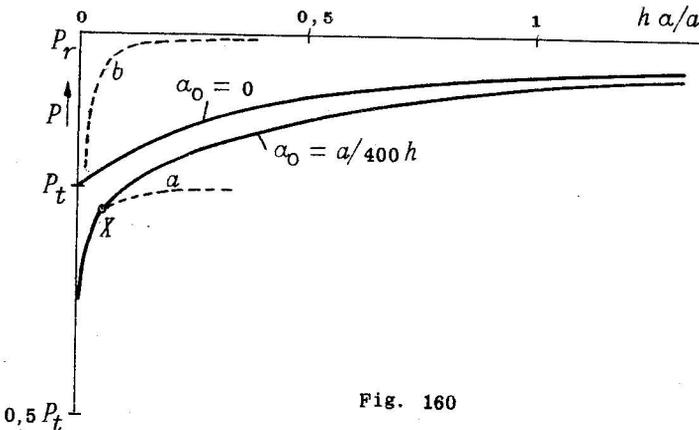


Fig. 160

(fig.159) corrispondente a $P = P_t$; da questo punto P_2 va decrescendo mentre P_1 cresce rapidamente; la corrispondente

legge di variazione delle deformazioni e' rappresentata nella fig. 160.

Da questa analisi si traggono le conclusioni seguenti. L'asta con una, sia pure, piccolissima deformazione iniziale, prima di raggiungere il carico dato dalla [184] presenta una inflessione rapidamente crescente. E' vero che le fibre che si trovano dal lato convesso (le quali per la sola inflessione dell'asta dovrebbero allungarsi) subiscono un regresso nel loro accorciamento e quindi presentano una rigidezza maggiore di quella corrispondente alla tangente alla curva $\sigma(\epsilon)$; pero' la deformazione (e con questa, la sollecitazione nelle fibre piu' caricate) assume per carichi poco superiori a P_t valori assai piu' grandi di quelli che si potrebbero prevedere in base al valore di P_r . Infatti, se si applicasse la [166] ponendo per P_c il valore P_r per la stessa deformazione iniziale a cui si riferisce la curva a della fig. 160 si troverebbe la linea b punteggiata; il confronto mostra l'importanza del fenomeno ricavato da Shanley. Si deve ancora osservare che altri fattori contribuiscono ad aggravare la situazione dell'asta quando l'inflessione ha avuto inizio: fra questi, la curvatura $d^2\sigma/d\epsilon^2$ della caratteristica, in conseguenza della quale le fibre piu' caricate reagiranno con sforzi inferiori a quelli qui previsti in base ad una caratteristica rettilinea. Si conclude che il carico P_t e' assai piu' prossimo a quello di collasso che il carico P_r . In accordo coi risultati sperimentali si puo' quindi ritenere che la *formula del modulo tangente* [183] rappresenti con sufficiente precisione la tensione di collasso. Essa ha il pregio di mettere in relazione il comportamento delle aste corte con la caratteristica $\sigma(\epsilon)$ del materiale; col suo uso si possono prevedere con sufficiente fondamento le proprieta' di aste costituite con materiali differenti purché di questi si conoscano le caratteristiche (*).

Va infine sottolineato il valore concettuale della teoria di Shanley: essa mostra che la condizione di equilibrio indifferente che caratterizza la situazione critica nel senso classico puo' condurre ad erronee conclusioni e che e' necessario esaminare il processo del cedimento nella sua graduale evoluzione, specialmente in campo anelastico.

(*) Dalla [183] si calcola immediatamente il valore di λ per cui una certa tensione critica viene raggiunta, poiche' E_t e' una funzione nota di σ ; invece il calcolo di σ_c per una data snellezza non puo' effettuarsi direttamente perche' questa dipendenza $E_t(\sigma)$ non e' rappresentabile con un polinomio semplice. I calcoli di tentativo sono pero' facilitati se si ricava λ come funzione di σ_c e si traccia la curva corrispondente nella fig. 156.

Finito di stampare il 30 settembre 1963
nella Litografia Artigiana
MASSAZA & SINCHETTO
Via Mazzini, 24 - TORINO