

APPENDICE

A1. Deduzione vettoriale della dilatazione. Indichiamo con $\vec{\xi}$ il vettore che va dall'origine O al punto generico P : ossia, se $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sono i versori degli assi sui quali si misurano le coordinate x, y, z , scriviamo

$$\vec{\xi} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad [A1]$$

Se P e' un punto di una curva a definita in forma parametrica esprimendo x, y, z come funzioni di una variabile ξ_a , in modo che a ciascun valore di questa corrisponda un determinato punto della curva, e viceversa, l'arco elementare di a sara' dato da $d\vec{\xi} = \vec{\xi}' d\xi_a$ indicandosi con $\vec{\xi}'$ la derivata $\partial\vec{\xi}/\partial\xi_a$ (*). Indichiamo con h_a il modulo di $\vec{\xi}'$: se per ξ_a si assume lo sviluppo della curva a misurato da un suo punto qualsiasi, e' $h_a = 1$. Il versore tangente alla curva e' dato da $\vec{a} = \vec{\xi}'/h_a$: esso e' costante se a e' una retta.

Nella deformazione il punto P viene in P' (fig.2); la curva a si trasforma nella a' ; il vettore che va da O al punto generico della a' e' rappresentato da $\vec{\xi} + \vec{\eta}$, essendo $\vec{\eta}$ il vettore spostamento che si scrive

$$\vec{\eta} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \quad [A2]$$

Lo stesso parametro ξ_a puo' servire a definire il punto generico della curva a' , in modo che punti corrispondenti nella deformazione abbiano uguale coordinata ξ_a : anche le componenti u, v, w saranno funzioni assegnate di ξ_a . L'arco elementare di a' e' espresso da $(\vec{\xi}' + \vec{\eta}') d\xi_a$. Il rapporto fra la lunghezza di questo arco e la lunghezza originaria $h_a d\xi_a$ rappresenta per definizione il numero $1 + \epsilon_a$. Scriviamo quindi

$$h_a(1 + \epsilon_a) = \sqrt{(\vec{\xi}' + \vec{\eta}') \cdot (\vec{\xi}' + \vec{\eta}')}$$

(*) Nelle applicazioni si ha di solito un insieme di curve come la a , ciascuna definita fissando i valori di certi parametri: per questo usiamo il segno di derivata parziale a indicare che questi parametri sono tenuti fissi mentre ξ_a viene variato al percorrere la curva a .

e quindi

$$\epsilon_a = \sqrt{1 + (2\vec{\xi}' \cdot \vec{\eta}' + \vec{\eta}' \cdot \vec{\eta}')/h_a^2} \quad [A3]$$

Trascurandosi i quadrati degli spostamenti, a fronte dei termini lineari si dovrà cancellare l'addendo $\vec{\eta}' \cdot \vec{\eta}'$ in parentesi; inoltre sviluppando in serie la radice, si arresterà lo sviluppo al secondo termine. Si trova così

$$h_a \epsilon_a = \vec{\xi}' \cdot \vec{\eta}' \quad [A4]$$

Si noti che l'espressione [A3] dà il valore esatto della dilatazione anche nel caso di spostamenti finiti, ossia quando sia $\vec{\eta}'$ dello stesso ordine di $\vec{\xi}'$. Ad es., se il corpo effettua una rotazione di 180° intorno all'asse z , si ha

$$\vec{\xi}' + \vec{\eta}' = -x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$$

e quindi

$$\vec{\xi}' + \vec{\eta}' = (-a_x\vec{i} - a_y\vec{j} + a_z\vec{k})h_a$$

se a_x, a_y, a_z sono i coseni direttori della tangente alla a , ossia le componenti di \vec{a} . Sostituendo nella [A3] le espressioni $\vec{\xi}' = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})h_a$, $\vec{\eta}' = (-2a_x\vec{i} - 2a_y\vec{j})h_a$ si trova esattamente $\epsilon_a = 0$. Invece la [A4] darebbe il risultato erroneo $\epsilon_a = 2a_z^2 - 2$.

A2. Deduzione vettoriale dello scorrimento. Per il medesimo punto P passi una curva b (fig. 2) lungo la quale si stabilisce la coordinata ξ_b . L'arco elementare della curva b è rappresentato dal vettore $\vec{\xi}' d\xi_b$, indicandosi con $\vec{\xi}'$ la derivata $\partial\vec{\xi}/\partial\xi_b$. Si indica con h_b il modulo di $\vec{\xi}'$. Si supponga che nel punto P sia $\vec{\xi}' \cdot \vec{\xi}' = 0$: ossia, che le curve a e b si taglino ad angolo retto.

Nella deformazione le curve a, b si trasformano nelle a', b' (fig. 2) passanti per P' . Indichiamo con γ_{ab} il complemento dell'angolo che le tangenti alle a', b' formano in P' . Poiché i vettori $\vec{\xi}' + \vec{\eta}'$, $\vec{\xi}' + \vec{\eta}'$ sono tangenti alle due curve sarà

$$\sin \gamma_{ab} = (\vec{\xi}' + \vec{\eta}') \cdot (\vec{\xi}' + \vec{\eta}') / |\vec{\xi}' + \vec{\eta}'| |\vec{\xi}' + \vec{\eta}'| \quad [A5]$$

Il prodotto scalare che figura a numeratore viene ridotto a $\vec{\xi}' \cdot \vec{\eta}' + \vec{\xi}' \cdot \vec{\eta}'$ tenendo conto dell'ortogonalità $\vec{\xi}' \cdot \vec{\xi}' = 0$ e trascurando i termini quadratici negli spostamenti; esso è dunque piccolo come gli spostamenti. Conseguentemente si potrà sostituire $\sin \gamma_{ab}$ con γ_{ab} e nel denominatore del secondo membro il modulo di $\vec{\xi}' + \vec{\eta}'$ può essere sostituito con h_a

e quello di $\vec{\xi}' + \vec{\eta}'$ con h_b . Si ha quindi

$$h_a h_b \gamma_{ab} = \vec{\xi}' \cdot \vec{\eta}' + \vec{\xi}' \cdot \vec{\eta}' \quad [A6]$$

L'espressione [A5] da' risultati esatti anche nel caso di spostamenti finiti. Ad es., per una rotazione del corpo di 180° intorno a z , e'

$$\vec{\xi}' + \vec{\eta}' = (-\beta_x \vec{i} - \beta_y \vec{j} + \beta_z \vec{k}) h_b$$

se si indicano con $\beta_x, \beta_y, \beta_z$ i coseni direttori della tangente alla curva b ; l'espressione a secondo membro della [A5] si annulla perche' viene a contenere a numeratore il fattore $a_x \beta_x + a_y \beta_y + a_z \beta_z = 0$. Invece la [A6] da' il risultato erroneo $\gamma_{ab} = 4a_z \beta_z$.

A3. Dilatazioni e scorrimenti in coordinate ortogonali o cilindriche. Le [A4] e [A6] hanno il pregio di fornire immediatamente le espressioni delle componenti di deformazione in qualsiasi riferimento. Così in coordinate cartesiane, se si assumono per le linee a, b rette parallele agli assi x, y rispettivamente, e si pone $\xi_a = x$, $\xi_b = y$, si ha

$$\vec{\xi}' = \vec{i}, \quad \vec{\xi}' = \vec{j}, \quad \vec{i} \cdot \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \vec{i} \cdot \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \vec{j} \cdot \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

e quindi dalla [A4] si ottiene subito la [1] e dalla [A6] la [4].

Consideriamo ora il sistema di coordinate cilindriche, vantaggiosamente adoperato in problemi relativi a corpi dotati di simmetria assiale. La coordinata z , secondo l'asse di versore \vec{k} (fig. A1) e' qui misurata come nel riferimento cartesiano. Differiscono le altre coordinate: r , distanza radiale di P , misurata normalmente a \vec{k} , nella direzione del versore \vec{r} , e ϑ , longitudine, angolo che il piano per P e per l'asse z fa col piano xz . Si ha quindi

$$\vec{\xi} = r \vec{r} + z \vec{k} \quad [A7]$$

$$\vec{r} = \vec{i} \cos \vartheta + \vec{j} \sin \vartheta \quad [A8]$$

Indicando con \vec{t} il versore normale al piano per P e per l'asse z , si ha

$$\vec{t} = -\vec{i} \sin \vartheta + \vec{j} \cos \vartheta = d\vec{r}/d\vartheta \quad [A9]$$

$$d\vec{t}/d\vartheta = -\vec{r} \quad [A10]$$

Per gli spostamenti si scrive la definizione

$$\vec{\eta} = u\vec{r} + v\vec{t} + w\vec{k} \quad [\text{A11}]$$

che introduce le componenti radiale u , circonferenziale v e assiale w dello spostamento. Le espressioni di $\partial\vec{\eta}/\partial r$ e $\partial\vec{\eta}/\partial z$ sono immediate perché \vec{r}, \vec{t} e \vec{k} non dipendono da r né da z . Nella derivazione rispetto a θ si tengono presenti le [A9], [A10] e si trova

$$\frac{\partial\vec{\eta}}{\partial\theta} = \left(\frac{\partial u}{\partial\theta} - v\right)\vec{r} + \left(\frac{\partial v}{\partial\theta} + u\right)\vec{t} + \frac{\partial w}{\partial\theta}\vec{k} \quad [\text{A12}]$$

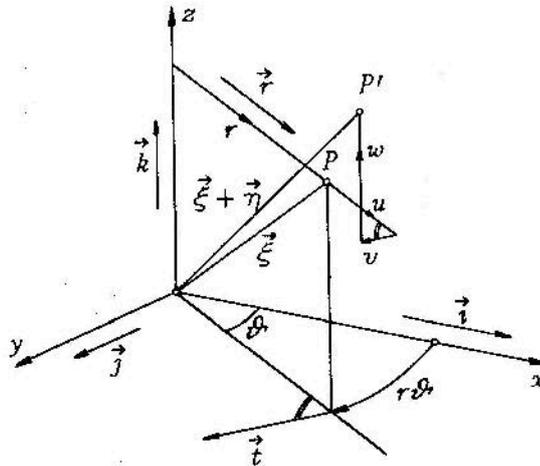


Fig. A1

Inoltre, quando si prenda come linea a un parallelo $r = \text{cost}$, $z = \text{cost}$, si ha $h_a = r$; così dalle [A4] e [A6] si trovano con facile calcolo le espressioni delle dilatazioni $\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_z$ delle fibre parallele a \vec{r}, \vec{t} e \vec{k} rispettivamente e degli scorrimenti

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, & \epsilon_\theta &= \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r\partial\theta}, & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta} - v\right), & \gamma_{\theta z} &= \frac{\partial w}{r\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \gamma_{zr} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \end{aligned} \quad [\text{A13}]$$

A4. Scorrimenti e dilatazioni su direzioni arbitrarie. Scelte per le curve a, b due rette ortogonali di coseni direttori $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ e $\beta_x, \beta_y, \beta_z$, misurando lungo queste le coordinate ξ_a, ξ_b , si ha

$$\alpha_x = \frac{\partial x}{\partial \xi_a}, \quad \alpha_y = \frac{\partial y}{\partial \xi_a}, \quad \dots, \quad \beta_z = \frac{\partial z}{\partial \xi_b}, \quad h_a = h_b = 1$$

Secondo la derivazione delle funzioni implicite si ha dunque

$$\vec{\eta} = \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial x} \alpha_x + \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial y} \alpha_y + \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial z} \alpha_z \quad [A14]$$

$$\vec{\eta}' = \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial x} \beta_x + \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial y} \beta_y + \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial z} \beta_z \quad [A15]$$

Quindi la [A6] si puo' scrivere

$$\begin{aligned} \gamma_{ab} = & \left(\alpha_x \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial y} + \alpha_z \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial z} \right) \cdot (\beta_x \vec{i} + \beta_y \vec{j} + \beta_z \vec{k}) + \\ & + (\alpha_x \vec{i} + \alpha_y \vec{j} + \alpha_z \vec{k}) \cdot \left(\beta_x \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial x} + \beta_y \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial y} + \beta_z \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad [A16]$$

Raccogliendo separatamente i termini che contengono a fattore $\beta_x, \beta_y, \beta_z$ si ottiene

$$\gamma_{ab} = \beta_x D_x + \beta_y D_y + \beta_z D_z \quad [A17]$$

essendo

$$\begin{aligned} D_x &= 2\epsilon_x \alpha_x + \gamma_{xy} \alpha_y + \gamma_{zx} \alpha_z \\ D_y &= 2\epsilon_y \alpha_y + \gamma_{yz} \alpha_z + \gamma_{xy} \alpha_x \\ D_z &= 2\epsilon_z \alpha_z + \gamma_{zx} \alpha_x + \gamma_{yz} \alpha_y \end{aligned} \quad [A18]$$

Indichiamo con \vec{d}_a il vettore di componenti D_x, D_y, D_z , ottenuto mediante la trasformazione [A18] dal versore \vec{a} della retta a ; indichiamo con \vec{d}_b il vettore che si ottiene con analoga trasformazione dal versore $\vec{b} = \beta_x \vec{i} + \beta_y \vec{j} + \beta_z \vec{k}$ della retta b . Si trova cosi' che la [A16] puo' essere posta nelle due forme equivalenti

$$\gamma_{ab} = \vec{a} \cdot \vec{d}_b = \vec{b} \cdot \vec{d}_a \quad [A19]$$

Confrontando la [A4] con la [A6] si nota che da questa seconda si ottiene il valore di $2\epsilon_a$ al posto di γ_{ab} quando si sostituisca alla direzione \vec{b} la stessa \vec{a} . Quindi dalla [A17] si ha

$$2\epsilon_a = \alpha_x D_x + \alpha_y D_y + \alpha_z D_z = \vec{a} \cdot \vec{d}_a \quad [A20]$$

A5. Direzioni principali della deformazione. Secondo la [A19] risulta $\gamma_{ab} = 0$ comunque si scelga il vettore \vec{b} normale ad \vec{a} qualora \vec{d}_a sia parallelo ad \vec{a} . Secondo la [A19] il modulo del vettore \vec{d}_a in queste condizioni e' dato da $2\epsilon_a$. L'eguaglianza $\vec{d}_a = 2\epsilon_a \vec{a}$ si traduce in tre equazioni lineari omogenee nei coseni a_x, a_y, a_z . Queste ammettono soluzione se e' nullo il determinante dei coefficienti

$$D = \begin{vmatrix} 2\epsilon_x - 2\epsilon_a & \gamma_{xy} & \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} & 2\epsilon_y - 2\epsilon_a & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{yz} & 2\epsilon_z - 2\epsilon_a \end{vmatrix} \quad [A21]$$

La condizione $D = 0$ costituisce un'equazione di terzo grado in ϵ_a le cui tre radici $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$, sempre reali, sono dette *dilatazioni principali*. La direzione lungo la quale si verifica la dilatazione rappresentata da una delle radici e' ottenuta risolvendo due delle equazioni scalari di cui D e' il determinante, insieme con la relazione $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 1$.

Se \vec{a} e \vec{b} sono le direzioni relative alle radici ϵ_1 e ϵ_2 sara' $\vec{d}_a = 2\epsilon_1 \vec{a}$, $\vec{d}_b = 2\epsilon_2 \vec{b}$. Tenendo presente l'eguaglianza $\vec{d}_a \cdot \vec{b} = \vec{d}_b \cdot \vec{a}$ si conclude che, se $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$, deve essere $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$: ossia, le direzioni lungo le quali si hanno le dilatazioni principali sono fra loro ortogonali.

Se alla direzione \vec{a} si da' una variazione infinitesima $d\vec{a}$, il vettore $d\vec{a}$ essendo ortogonale ad \vec{a} in virtu' della relazione $\vec{a} \cdot d\vec{a}$ che si ricava differenziando l'identita' $\vec{a}^2 = 1$, puo' essere espresso dal prodotto $\vec{b} \cdot dc$, essendo dc il modulo di $d\vec{a}$. Il corrispondente incremento di \vec{d}_a e' dato da $\vec{d}_b dc$. Quindi differenziando la [A20] si ha

$$2d\epsilon_a = \gamma_{ab} dc \quad [A22]$$

Questa espressione si annulla se \vec{a} e' direzione principale: quindi, per qualunque variazione infinitesima di direzione intorno ad una direzione principale, la variazione prima della dilatazione e' nulla.

A6. Condizioni di congruenza. Indicando con X, Y, Z le derivazioni $\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z$, si effettuano su ciascuna delle relazioni [1]-[6] le derivazioni $X^2, Y^2, Z^2, XY, YZ, ZX$. Si ottengono cosi' $6 \cdot 6 = 36$ equazioni contenenti le derivate terze di u, v, w : ossia, ad es., per u , si hanno le derivate $X^3u, Y^3u, Z^3u, X^2Yu, Y^2Zu, Z^2Xu, XY^2u, YZ^2u, ZX^2u, XYZu$. Tali derivate in totale ammontano a 30; eliminandole si ricavano $36 - 30 = 6$

equazioni, che si scrivono

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad [\text{A23}]$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \quad [\text{A24}]$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \quad [\text{A25}]$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) \quad [\text{A26}]$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{yx}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) \quad [\text{A27}]$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad [\text{A28}]$$

A7. Proprietà di equilibrio delle tensioni. Si dice *uniforme* un campo di tensioni se i vettori $\vec{\sigma}_x, \vec{\sigma}_y, \vec{\sigma}_z$ (e quindi le loro componenti) non variano da punto a punto. Dalle condizioni di equilibrio per i campi uniformi si deducono facilmente certe relazioni, la cui estensione ai campi non uniformi è poi immediata:

a) Isoliamo dal corpo in tensione uniforme un cubo di lato Δ . Le forze sulle facce opposte sono uguali e contrarie: perché la risultante delle forze sul cubo sia nulla comunque questo sia scelto occorre che non vi siano forze di massa. Consideriamo ora una condizione di equilibrio alla rotazione. Siano \vec{a}, \vec{b} i versori normali alle facce che nella fig. 8b si proiettano nei segmenti OA, OB . Nella condizione d'equilibrio dei momenti rispetto allo spigolo per P normale ad \vec{a} e \vec{b} , delle tensioni esistenti sulle facce del cubo, intervengono solo le componenti parallele ad \vec{a} o \vec{b} ; fra queste le sole componenti i cui effetti non siano compensati dalle azioni contrarie esistenti sulle facce opposte sono le tensioni tangenziali τ_{ab}, τ_{ba} . Per l'equilibrio di tali momenti, omettendo il fattore comune Δ^3 , si ha l'equazione

$$\tau_{ab} = \tau_{ba} \quad [\text{A29}]$$

L'estensione di questa relazione al caso di campo non uniforme si effettua facendo tendere a zero la lunghezza Δ dei lati del cubo: appare così che nell'equazione considerata, ol-

tre ai termini $\tau_{ab}\Delta^3$, $\tau_{ba}\Delta^3$ entrano solo termini dell'ordine di Δ^4 (a meno che coppie dell'ordine di Δ^3 agiscano sulla massa racchiusa entro il cubo). Quindi la [A29] sussiste invariata per il campo non uniforme, al limite $\Delta \rightarrow 0$.

b) Si consideri un poliedro, staccato dal corpo in tensione uniforme. Sia \vec{a}_i il versore della normale uscente dalla faccia generica, di area A_i , sulla quale agisca il vettore tensione $\vec{\sigma}_i$. Per l'equilibrio del poliedro deve essere

$$\sum A_i \vec{\sigma}_i = 0 \quad [A30]$$

la sommatoria essendo estesa a tutte le facce.

Per estendere la [A30] al caso di tensioni non uniformi, si deve intendere che $\vec{\sigma}_i$ rappresenti il valor medio del vettore $\vec{\sigma}$ sulla faccia A_i e si deve includere la forza agente sulla massa del poliedro. Indicando con V il volume di questo e con $V\vec{f}$ la forza di massa, si ha

$$\sum A_i \vec{\sigma}_i + V\vec{f} = 0 \quad [A31]$$

c) Si consideri il tetraedro avente una faccia normale al versore $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, e tre facce sui piani coordinati (fig. A2). Se A e' l'area della faccia ABC , la PBC che ne costituisce la proiezione sul piano normale a x avra' l'area $a_x A$. Su questa la tensione $\vec{\sigma}_i$ e' data da $-\vec{\sigma}_x$, poiche', se $a_x > 0$,

la normale uscente avra' verso opposto all'asse x . Similmente saranno $-a_y A \vec{\sigma}_y$, $-a_z A \vec{\sigma}_z$ le forze sulle facce PAB e PAC . Quindi, dalla [A30], dividendo per A si ha l'espressione della tensione $\vec{\sigma}_a$ sulla faccia normale al versore \vec{a} :

$$\vec{\sigma}_a = a_x \vec{\sigma}_x + a_y \vec{\sigma}_y + a_z \vec{\sigma}_z \quad [A32]$$

L'espressione sussiste anche se il campo non e' uniforme, quando si faccia accostare indefinitamente la faccia ABC a P , si che V/A tenda a zero; al limite le $\vec{\sigma}$ che entrano nella [A32] rappresentano i valori in P .

d) Si consideri un cubo con spigoli paralleli agli assi x, y, z , staccato da un corpo in tensione non uniforme. I due addendi della [A31] relativi alle facce normali a x , a meno

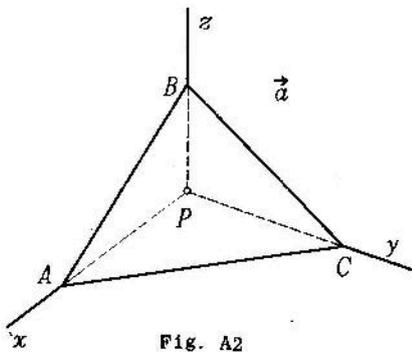


Fig. A2

di potenze superiori di Δ si possono scrivere

$$\left(\vec{\sigma}_x + \frac{\partial \vec{\sigma}_x}{\partial x} \Delta \right) \Delta^2, -\vec{\sigma}_x \Delta^2$$

Aggiungendo a questi i termini analoghi, relativi alle facce normali a y e a z , e il termine $\Delta^3 \vec{f}$, e infine dividendo per Δ^3 si ha l'equazione

$$\frac{\partial \vec{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\sigma}_z}{\partial z} + \vec{f} = 0 \quad [\text{A33}]$$

A8. Le tensioni principali. Dal vettore $\vec{\sigma}_a$ relativo ad una giacitura generica, di normale \vec{a} , si ottiene la componente tangenziale τ_{ab} nella direzione \vec{b} normale ad \vec{a} per proiezione: $\tau_{ab} = \vec{\sigma}_a \cdot \vec{b}$. Ci domandiamo se esista una direzione \vec{a} per la quale sia $\tau_{ab} = 0$ comunque si scelga \vec{b} , normale ad \vec{a} : per questo deve essere $\vec{\sigma}_a = \sigma_a \vec{a}$, essendo σ_a la relativa tensione normale. Ossia, secondo la [A32], deve essere

$$\sigma_a \vec{a} = \alpha_x \vec{\sigma}_x + \alpha_y \vec{\sigma}_y + \alpha_z \vec{\sigma}_z \quad [\text{A34}]$$

Per proiezione sui tre assi, da questa equazione vettoriale se ne ottengono tre scalari, lineari omogenee nei coseni direttori $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ della direzione cercata:

$$\begin{aligned} \alpha_x (\sigma_x - \sigma_a) + \alpha_y \tau_{xy} + \alpha_z \tau_{zx} &= 0 \\ \alpha_x \tau_{xy} + \alpha_y (\sigma_y - \sigma_a) + \alpha_z \tau_{yz} &= 0 \\ \alpha_x \tau_{zx} + \alpha_y \tau_{yz} + \alpha_z (\sigma_z - \sigma_a) &= 0 \end{aligned} \quad [\text{A35}]$$

Queste ammettono soluzione solo se e' nullo il determinante dei coefficienti. Eguagliando a zero tale determinante si ha un'equazione di terzo grado in σ_a le cui tre radici, sempre reali, rappresentano le tensioni principali $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. A ciascuna delle radici corrisponde una direzione che si individua risolvendo due delle equazioni [A35] insieme con l'identita' $\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 = 1$. Le tre direzioni cosi' ottenute sono ortogonali fra loro, come si dimostra in base alla [A29].

Siano $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3$ gli angoli che la direzione \vec{a} generica fa con le direzioni principali $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ e siano $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ i relativi coseni. Poiche' i vettori tensione per i piani coordinati di questo riferimento sono $\sigma_1 \vec{a}_1, \sigma_2 \vec{a}_2, \sigma_3 \vec{a}_3$, sara' per la [A32]

$$\vec{\sigma}_a = \alpha_1 \sigma_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \sigma_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \sigma_3 \vec{a}_3 \quad [\text{A36}]$$

Quindi, indicando con τ_a la tensione tangenziale risul-

tante nel piano normale ad \vec{a} , otteniamo

$$\sigma_a = \vec{\sigma}_a \cdot \vec{a} = a_1^2 \sigma_1 + a_2^2 \sigma_2 + a_3^2 \sigma_3 \quad [A37]$$

$$\sigma_a^2 + \tau_a^2 = \vec{\sigma}_a^2 = a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + a_3^2 \sigma_3^2 \quad [A38]$$

Da queste relazioni, con facile calcolo si ha

$$\sigma_a^2 + \tau_a^2 - \sigma_a(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_1(\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)a_1^2 - (a_2^2 + a_3^2)\sigma_1\sigma_3 \quad [A39]$$

Per a_1 costante, l'espressione a secondo membro ha valore costante perche' $a_2^2 + a_3^2 = 1 - a_1^2$; nel piano σ_a, τ_a i punti rappresentativi dell'equazione [A39] cadono allora su un cerchio che ha il centro nel punto di ascissa $(\sigma_2 + \sigma_3)/2$. D'altra parte, nel punto del corpo che si considera, le direzioni per le quali $\hat{\alpha}_1$ e' costante costituiscono un cono di semiapertura $\hat{\alpha}_1$ e asse \vec{a}_1 : le tensioni sulle giaciture normali alle generatrici di questo cono sono rappresentate da punti del cerchio anzidetto. In particolare stanno su questo cerchio (fig. 11) i punti B, C , corrispondenti rispettivamente ai piani paralleli alle direzioni \vec{a}_2, \vec{a}_3 (ossia aventi le normali nei piani $\vec{a}_1\vec{a}_3$ e $\vec{a}_1\vec{a}_2$, sempre inclinate di $\hat{\alpha}_1$ su \vec{a}_1). Quindi noto l'angolo $\hat{\alpha}_1$, il cerchio, del quale e' segnato in figura l'arco BC tratteggiato) e' subito individuato considerando che la BC taglia l'asse delle σ nel punto di ascissa σ_1 sotto un angolo complementare di $\hat{\alpha}_1$. Analogamente, in base all'angolo $\hat{\alpha}_3$, si determinano i punti D, E . Il cerchio che li contiene, con centro nel punto di ascissa $(\sigma_1 + \sigma_2)/2$ interseca il cerchio precedente nel punto P le cui coordinate rappresentano i valori di σ_a e τ_a . Così per una giacitura qualsiasi, noti gli angoli $\hat{\alpha}_1$ e $\hat{\alpha}_3$ si costruisce il punto rappresentativo della tensione in quel punto. Lo angolo $\hat{\alpha}_2$, legato a $\hat{\alpha}_1$ e $\hat{\alpha}_3$ dalla relazione $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$, puo' essere usato nella costruzione in sostituzione di uno degli altri due, con riferimento alla retta $\sigma = \sigma_2$.

A9. Deduzione analitica dell'equazione dei lavori virtuali.

Scriviamo, per il teorema di Gauss,

$$\int \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = \int (a_x P + a_y Q + a_z R) dS$$

l'integrale a primo membro essendo esteso al volume del corpo, quello a secondo alla superficie di contorno, a_x, a_y, a_z essendo i coseni direttori della normale ad essa e dS il suo ele-

mento di area. Posto

$$P = \vec{\sigma}_x^a \cdot \vec{\eta}^b, \quad Q = \vec{\sigma}_y^a \cdot \vec{\eta}^b, \quad R = \vec{\sigma}_z^a \cdot \vec{\eta}^b$$

tenendo presente la [A33], per l'integrando a primo membro si ottiene l'espressione

$$\vec{\sigma}_x^a \cdot \frac{\partial \vec{\eta}^b}{\partial x} + \vec{\sigma}_y^a \cdot \frac{\partial \vec{\eta}^b}{\partial y} + \vec{\sigma}_z^a \cdot \frac{\partial \vec{\eta}^b}{\partial z} - \vec{f}^a \cdot \vec{\eta}^b \quad [A40]$$

Il fattore di σ_x^a in questa espressione e' costituito da $\vec{i} \cdot (\partial \vec{\eta}^b / \partial x) = \epsilon_x^b$; quello di τ_{xy}^a e' dato da $\vec{j} \cdot (\partial \vec{\eta}^b / \partial x) + \vec{i} \cdot (\partial \vec{\eta}^b / \partial y) = \gamma_{xy}^b$. Analoghe considerazioni per gli altri termini mostrano che i primi tre addendi si riducono alla forma $(\sigma^a \cdot \epsilon^b)$. L'integrando del II membro, grazie alla [A32] da' la espressione $\vec{\sigma}_a^a \cdot \vec{\eta}^b$. Si ottiene quindi l'eguaglianza [16] con L_i^{ab} espresso secondo la [15] e

$$L_e^{ab} = \int \vec{f}^a \cdot \vec{\eta}^b dV + \int \vec{\sigma}_a^a \cdot \vec{\eta}^b dS \quad [A41]$$

Nel secondo integrale, il prodotto $\vec{\sigma}_a^a dS$ rappresenta la forza applicata all'elemento dS della superficie di contorno. Si osservi come nella trasformazione dell'espressione [A40] si e' fatto uso delle relazioni [1]-[6] della teoria lineare. La prova quindi implica la piccolezza degli spostamenti $\vec{\eta}^b$.

A10. Teoremi di minima energia. Con simboli da specificare caso per caso poniamo

$$W = \frac{1}{2} \int (\sigma \cdot \epsilon) dV - \sum \vec{F} \cdot \vec{\eta} \quad [A42]$$

I) Sia fissato un certo numero di spostamenti $\vec{\eta}$ e ad essi si estenda la sommatoria nella [A42]. Sia σ_1 una configurazione di tensioni in equilibrio sotto certi carichi, ovunque fissati eccetto per i termini della sommatoria anzidetta, dove le σ_1 danno certe forze \vec{F}_1 ; sia W_{f1} il valore di W che da' la [A42] per $\sigma = \sigma_1$, $\vec{F} = \vec{F}_1$, $\epsilon = \epsilon_1$ essendo queste le deformazioni corrispondenti alle σ_1 secondo la legge di Hooke. Sia $\sigma_2 = \sigma_1 + \Delta\sigma$ una configurazione in equilibrio sotto i medesimi carichi fissi, variando solo quelli della sommatoria che prendono i valori $\vec{F}_2 = \vec{F}_1 + \Delta\vec{F}$, e sia in queste condizioni $W = W_{f2}$; la corrispondente deformazione $\epsilon_2 = \epsilon_1 + \Delta\epsilon$ ve-

rifichi la condizione di congruenza

$$\int (\Delta\sigma \cdot \epsilon_2) dV = \Sigma \Delta\vec{F} \cdot \vec{\eta}_2 \quad [A43]$$

Sostituendo nella [A42] $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 - \Delta\sigma$, $\vec{F} = \vec{F}_1 = \vec{F}_2 - \Delta\vec{F}$, $\epsilon = \epsilon_1 = \epsilon_2 - \Delta\epsilon$, trasformando l'integrale come s'è fatto per dedurre la [27] dalla [24] e tenendo conto della [A43] si ottiene

$$W_{f_1} = W_{f_2} + \frac{1}{2} \int (\Delta\sigma \cdot \Delta\epsilon) dV \quad [A44]$$

L'integrale nella [A44] ha certamente valore positivo, per le proprietà dell'energia elastica; quindi è $W_{f_2} < W_{f_1}$. Ne segue che l'effettivo valore di W , corrispondente alla reale configurazione che soddisfa alla [A43] per qualunque sistema $\Delta\sigma$ è il minimo valore che W_f assuma per qualunque configurazione equilibrata. Questo teorema è una generalizzazione di quello di Menabrea, al quale esso si riduce se gli spostamenti che si assegnano sono tutti nulli. In più esso stabilisce un confronto fra due soluzioni equilibrate ma possibilmente entrambe non congruenti: per quella che verifica la [A43] si accerta la riduzione nel valore di W . L'espressione di σ_2 può contenere fattori indeterminati (iperstatiche) in un numero n : soddisfatte $n-1$ equazioni [A43] con l'aggiunta di una posizione arbitraria, quando si sostituisce questa ultima con un'equazione [A43] si viene a ribassare il valore di W .

Si rileva ancora la possibilità di varianti nell'applicazione che viene offerta dalla facoltà di ridurre o estendere la sommatoria. Infatti gli spostamenti che vi si pongono non sono necessariamente tutti noti a priori: alcuni possono esservi introdotti come incognite da calcolare. Con un maggior numero di addendi le condizioni per le tensioni sono meno stringenti; la loro classe corrispondentemente si amplia, accrescendosi in pari tempo il numero delle equazioni [A43], le quali possono fornire anche gli spostamenti che appaiono a fattori nella sommatoria. Il processo ha analogia con quanto si fa nel calcolo delle variazioni quando le condizioni sussidiarie vengono incluse, mediante i moltiplicatori di Lagrange nella funzione da minimizzare.

II) Sia fissato un certo numero di carichi \vec{F} e ad essi si estenda la sommatoria nella [A42]. Sia ϵ_1 una deformazione congruente sotto assegnati vincoli (fissi o mobili), per la quale gli spostamenti nella sommatoria assumono certi valori

$\vec{\eta}_1$; sia W_{S_1} il valore di W calcolato per $\epsilon = \epsilon_1$, $\vec{\eta} = \vec{\eta}_1$, con le tensioni σ_1 che corrispondono alle ϵ_1 secondo la legge di Hooke. Sia $\epsilon_2 = \epsilon_1 + \Delta\epsilon$ una configurazione congruente sotto i medesimi vincoli, per la quale gli spostamenti nella sommatoria, le tensioni e W assumano rispettivamente i valori $\vec{\eta}_2 = \vec{\eta}_1 + \Delta\vec{\eta}$, $\sigma_2 = \sigma_1 + \Delta\sigma$, W_{S_2} ; sia soddisfatta la condizione

$$\int (\sigma_2 \cdot \Delta\epsilon) dV = \Sigma \vec{F} \cdot \Delta\vec{\eta} \quad [A45]$$

Con analogo procedimento a quello che conduce alla [A44] si deduce una relazione formalmente identica a questa, solo W_f essendo sostituito da W_s ; si prova così che $W_{S_2} < W_{S_1}$. Ne segue che la deformazione effettiva, che soddisfa alla [A45] per qualunque sistema $\Delta\epsilon$, dà per W_s un valore più basso che qualunque altra configurazione congruente. Questo, quando nella sommatoria si includano tutti i carichi, è il teorema di minima energia potenziale totale.

Le considerazioni che si possono svolgere per W_s corrispondono in analogia a quelle relative a W_f . Si stabilisce un confronto fra due soluzioni congruenti ma possibilmente entrambe non equilibrate: per quella che soddisfa alla [A45] si accerta la riduzione nel valore di W . Anche qui, per togliere un addendo dalla sommatoria, si deve imporre un vincolo in più agli spostamenti.

Si osserva che le equazioni [A43] o [A45] che si deducono annullando la variazione prima di W , potrebbero direttamente essere scritte facendo uso dell'equazione dei lavori virtuali. Invece le ineguaglianze ottenute per W_f o W_s possono dare indicazioni addizionali di notevole importanza nella risoluzione approssimata di problemi d'elasticità. Vediamo come questi risultati si applichino ad una valutazione della rigidità di una struttura. Questa sia soggetta ad un sistema di forze di cui una (F_r) viene considerata come rappresentativa del sistema dei carichi; assumiamo come entità rappresentativa della deformazione il rapporto η_r fra il lavoro (virtuale) dei carichi nella deformazione effettiva e F_r : ossia poniamo per definizione di η_r l'espressione

$$L = \frac{1}{2} F_r \eta_r$$

Adottiamo come misura della rigidità R , il rapporto $F_r/\eta_r = F_r^2/2L$, L essendo il lavoro di deformazione, esprimibile come lavoro interno o esterno secondo il teorema di Clapeyron. Se tutte le forze che fanno lavoro nella deformazione vengono

considerate come note (ossia vengono escluse dalla sommatoria nel calcolo di W_f e incluse nel calcolo di W_s) nell'espressione di W_f si ha una valutazione approssimata per eccesso di L e in quella di W_s una valutazione approssimata per eccesso di $-L$ ossia per difetto di L . Quindi, approssimando la soluzione mediante una successione di soluzioni equilibrate ma non congruenti si valuta in difetto R ; invece, adoperando soluzioni congruenti ma non equilibrate si valuta R in eccesso. Lo scarto fra i due valori puo' servire utilmente come indice della bonta' dell'approssimazione raggiunta. Quanto piu' stringenti siano le condizioni di congruenza imposte alla prima successione di soluzioni o quelle di equilibrio prescritte per la seconda, tanto piu' dovra' ridursi quello scarto.

Conclusioni analoghe possono ottenersi considerando come assegnati gli spostamenti, assumendo uno di questi η_r come rappresentativo e valutando R col valore $2L/\eta_r^2$. Nell'espressione di W_f (che questa volta include i carichi nella sommatoria) si ha una valutazione per difetto di L e quindi di R ; in W_s invece si ha una valutazione in eccesso di L e di R .

A11. La funzione di torsione. La [98] risulta identicamente soddisfatta se si pone

$$\tau_x = G\theta \partial\zeta/\partial y \quad , \quad \tau_y = -G\theta \partial\zeta/\partial x \quad [A46'] [A46'']$$

essendo ζ una funzione di x, y regolarmente derivabile. Inoltre, per la [62], lungo il contorno deve essere

$$\tau_x dy - \tau_y dx = G\theta \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} dx + \frac{\partial\zeta}{\partial y} dy \right) = G\theta d\zeta = 0 \quad [A47]$$

Ossia ζ deve avere valore costante sul contorno, valore che puo' assumersi = 0 poiche' l'aggiunta di una costante alla ζ non ha influenza sulle [A46]. Comunque si assegni la ζ , purché sia nulla sul contorno, dalle [A46] si ottiene un sistema equilibrato di tensioni, il quale ha per risultante una coppia di momento

$$M_t = 2G\theta \int \zeta dA \quad [A48]$$

Infatti, su una striscia $b dx$ (fig. A3) limitata da due contigue parallele a y e dal contorno c , la risultante del-

le tensioni secondo x vale

$$dx \int \tau_x dy = G \vartheta' dx \int \frac{\partial \zeta}{\partial y} dy = 0$$

perche' $\zeta = 0$ agli estremi. Il momento di quelle tensioni e'

$$-dx \int \tau_x y dy = -G \vartheta' dx \int \frac{\partial \zeta}{\partial y} y dy = G \vartheta' dx \int \zeta dy$$

Sommando gli effetti di tutte le strisce, si trova che le tensioni τ_x equivalgono ad una coppia $G \vartheta' \int \zeta dA$; sommando l'uguale contributo delle τ_y si ottiene la [A48]. Da questa, tenendo conto della [103] si ha

$$J_t = 2 \int \zeta dA \quad [A49]$$

A definire la *funzione di torsione* ζ vale la condizione di congruenza che, con le [A46] da'

$$\partial^2 \zeta / \partial x^2 + \partial^2 \zeta / \partial y^2 = -2 \quad [A50]$$

Per la sezione semplicemente connessa il problema della torsione e' dunque ricondotto alla determinazione della funzione ζ che soddisfa alla [A50] nei punti della sezione e si annulla sul contorno.

La risoluzione sperimentale del problema sopra indicato puo' effettuarsi grazie all'*analogia della membrana*. Una pellicola *uniformemente tesa*, ossia tale che, in qualunque punto, con qualunque piano normale la si sezioni, eserciti forze normali alla sezione distribuite con la medesima intensita' t , viene sottoposta ad una pressione p uniformemente distribuita; il contorno della membrana viene vincolato ad una linea piana che riproduce il contorno della sezione; se gli spostamenti normali al piano che contiene tale linea sono piccoli rispetto alle dimensioni della membrana, indicati tali spostamenti con $p\zeta/t$, si trova che la condizione d'equilibrio della membrana e' data dalla [A50]. Il fenomeno della tensione superficiale da' modo di realizzare queste condizioni: la superficie di separazione di due liquidi non miscibili di ugual densita' costituisce una membrana uniformemente tesa, soggetta

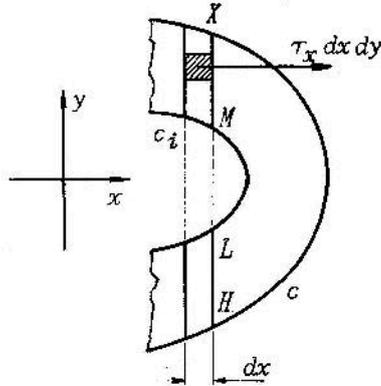


Fig. A3

solo a forze normali corrispondenti alla differenza di pressione che si crei fra i due liquidi. Intagliando in un diaframma un'apertura a spigoli vivi costituenti una figura piana simile alla sezione che si studia e rilevando gli spostamenti da questo piano che si producono nei punti della superficie di separazione vincolata a detto contorno, si ha modo di ottenere una funzione simile alla ζ ricercata. Per determinare il rapporto di scala basterà misurare l'inclinazione α del piano tangente al contorno alla membrana lungo la linea di contorno: l'equazione di equilibrio alla traslazione in direzione normale al piano di vincolo

$$A\phi = t \oint a \, dl$$

l'integrale essendo effettuato lungo la linea di contorno, permette di determinare il rapporto ϕ/t fra le ordinate della membrana e la ζ (*).

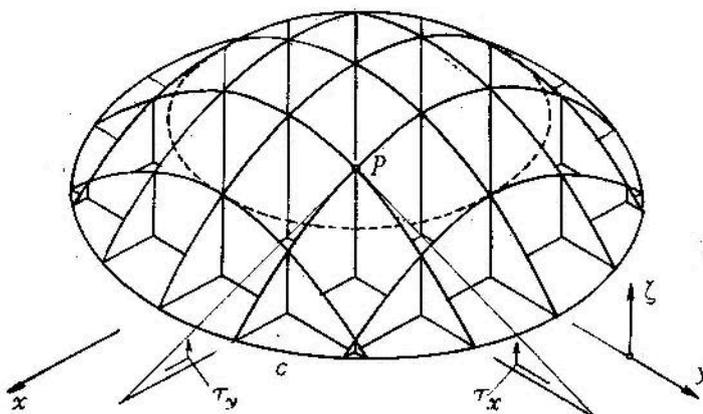


Fig. A4

Si osservi che la funzione ζ dà una soluzione completa del problema della torsione. La pendenza misura le tensioni τ (fig. A4); la direzione della linea di livello $\zeta = \text{costante}$ è parallela al vettore $\vec{\tau}$ e quindi da queste linee si hanno le traiettorie delle $\vec{\tau}$ (curve tangenti in ciascun punto alla $\vec{\tau}$); il volume racchiuso fra la superficie ζ e il piano base misura secondo la [A49] il modulo torsionale.

Numerosi metodi sono stati sviluppati per il calcolo approssimato della funzione ζ . Accenniamo a due procedimenti che conducono ad approssimare da parti opposte, ossia per eccesso e per difetto, la caratteristica J_t .

(*) Vedi nota a pag. 146.

a) Si pone per ζ un'espressione del tipo

$$\tilde{\zeta} = \sum C_i f_i \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad [A51]$$

essendo f_i funzioni di x, y opportunamente scelte, che si annullano sul contorno della sezione. Le costanti C vengono determinate mediante l'equazione dei lavori (scritta per un tratto $z = 1$)

$$M_t^a \vartheta^b = \int \tau^a \cdot \tau^b dA \quad [A52]$$

nella quale si pone per τ^b la tensione che corrisponde secondo le [A46] a $\zeta = \tilde{\zeta}$, con $\vartheta^b = \vartheta$; per τ^a si pone la tensione che corrisponde secondo le [A46] a $\zeta = f_i$ con $G\vartheta = 1$; quindi e' secondo la [A48]

$$M_t^a = 2 \int f_i dA$$

Così variando la scelta di f_i da f_0 a f_n si hanno $n+1$ equazioni lineari per i coefficienti C_0, \dots, C_n .

Per qualunque scelta delle C le τ derivanti da $\tilde{\zeta}$ soddisfano a tutte le condizioni di equilibrio nel solido soggetto ad un dato gradiente ϑ di torsione. Le condizioni di congruenza derivate dalla [A52] si possono interpretare come condizioni di minimo [A43] della quantità W_f definita nell'appendice A10, I), con

$$\int (\sigma \cdot \epsilon) dV = G\vartheta^2 J' \quad , \quad \sum \vec{F} \cdot \vec{\eta} = G\vartheta^2 J'' \quad [A53]$$

dove

$$J' = \int \left[\left(\frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial y} \right)^2 \right] dA \quad , \quad J'' = 2 \int \tilde{\zeta} dA \quad [A54]$$

Se $\tilde{\zeta}$ fosse esatta soluzione della [A50] sarebbe $J' = J'' = J_t$. Quando si siano soddisfatte tutte le [A52] si è realizzata l'eguaglianza $J' = J''$ e quindi $W_f = -G\vartheta^2 J'/2$. Quindi, in virtù del teorema di minimo si può affermare che $J' < J_t$. Ossia, la soluzione approssimata che si trova fornisce per J_t un valore inferiore al vero.

b) Si pone ora per ζ un'espressione

$$\tilde{\zeta} = f_0 + \sum C_i f_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad [A55]$$

dove f_0 è una funzione che soddisfa alla [A50], ma, naturalmente, non si annulla sul contorno (ad es.: $f_0 = -x^2$); le f_1, \dots, f_n sono funzioni armoniche, le quali soddisfano cioè

alla [A50] con secondo membro nullo. Per qualunque scelta delle C , le τ che si calcolano sostituendo l'espressione [A55] nelle [A46] danno luogo a deformazioni congruenti con un valore fissato a piacere di ϑ' . Esse però non realizzano la condizione di equilibrio al contorno [62]. Scriviamo ancora la equazione dei lavori [A52] assumendo come sistema a le $\vec{\tau}$ che derivano dalla [A55] e come sistema b le $\tau_x = \partial f_i / \partial y$, $\tau_y = -\partial f_i / \partial x$. Si osserva che queste ultime tensioni verificano la [99] con $k_3 = 0$, ossia con $\vartheta' = 0$. Quindi il primo membro della [A52] è nullo in questo caso: i termini noti delle equazioni derivano dalla funzione f_0 . Variando la scelta di f_i da f_1 a f_n si hanno n equazioni di equilibrio, che determinano le costanti C_1, \dots, C_n . Queste equazioni si possono interpretare come condizioni di minimo [A45] della quantità W_S definita nell'appendice A10, II), con l'integrale espresso secondo le [A53] e [A54]. La quantità $\sum \vec{F} \cdot \vec{\eta}$ è qui nulla perché le sole forze assegnate, quelle sul contorno della sezione, sono nulle. Quindi qui risulta $W_S = G\vartheta'^2 J' / 2$. Il teorema di minimo assicura che la soluzione approssimata fornisce per J_t il valore J' superiore al vero.

A12. Ingobbamento delle sezioni nella torsione. In generale, la sollecitazione di torsione nel solido di St. Venant dà

luogo a spostamenti w per i quali le sezioni non restano piane. Considereremo il caso delle sezioni sottili, aperte o chiuse, ossia semplicemente o più volte connesse.

Consideriamo un arco PQ di linea media (fig. A5), lungo il quale si misura la coordinata l come sviluppo, da P verso Q . Indichiamo con $G\vartheta' \hat{\tau}$ la componente di tensione tangente alla linea. Poniamo per un momento che l'asse x abbia la direzione della tangente all'arco in un punto A : così dalla [6] e dalla [36'''] si ha

$$G\vartheta' \hat{\tau} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad [A56]$$

Se r è la distanza del centro C di rotazione della sezione dalla tangente in A , e $u = r\vartheta'$; quindi, posto $w = \vartheta' \hat{w}$, tornando alla coordinata l in

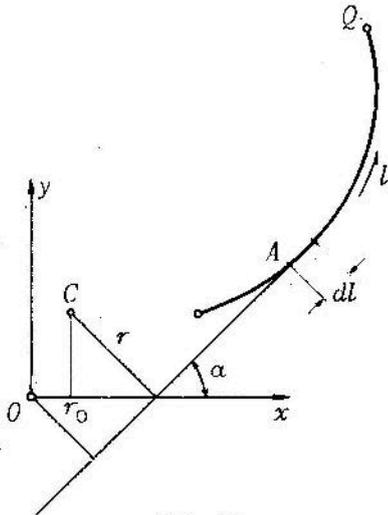


Fig. A5

sostituzione di x , si ha

$$d\hat{w}/dl = \hat{\tau} - r \quad [\text{A57}]$$

Se la rotazione delle sezioni avvenisse intorno all'asse z , di traccia O , gli spostamenti u, v secondo le [104] sarebbero $u = -\vartheta'zy$, $v = \vartheta'zx$ essendo la coordinata z misurata dalla sezione dove $\vartheta = 0$. Dando al solido una rotazione $\vartheta' y^C$ nel senso zx intorno all'asse y della sezione $z = 0$ e una rotazione $\vartheta' x^C$ nel senso yz intorno all'asse x di quella sezione, gli spostamenti nel piano della sezione z diventano

$$u = \vartheta' z(y^C - y) \quad , \quad v = \vartheta' z(x - x^C) \quad [\text{A58}]$$

Con ciò si è portato il centro di rotazione da O in C . Indicando con $\vartheta' \hat{w}_0$ gli spostamenti w che si avrebbero se il centro di rotazione fosse in O , si ha

$$\hat{w} = \hat{w}_0 + x^C y - y^C x \quad [\text{A59}]$$

Sostituendo questa espressione nella [A57] e considerando che è, con le notazioni della figura, $dy/dl = \sin \alpha$, $dx/dl = \cos \alpha$, $r - y^C \cos \alpha + x^C \sin \alpha = r_0$, si trova

$$dw_0/dl = \hat{\tau} - r_0 \quad [\text{A60}]$$

come si sarebbe ottenuto ponendo in partenza il centro di rotazione in O . Per integrazione dalla [A60] si possono calcolare gli spostamenti col centro arbitrariamente fissato nell'origine: poi mediante la [A59] si effettua il passaggio alla nuova posizione di C .

Consideriamo, ad es., il caso di un tubo circolare aperto lungo la generatrice $\alpha = \pm \pi$, gli angoli α essendo misurati nel centro del cerchio di sezione. In questo caso, trattandosi di sezione aperta è $\hat{\tau} = 0$ e quindi si ha $w_0 = -r_0 \alpha$: il cerchio si deforma in elica cilindrica. Se invece la sezione fosse chiusa, si troverebbe naturalmente $\hat{w} = 0$: infatti è $\hat{\tau} = r_0$, secondo le [107] e [108]. Per una sezione chiusa, a cassone rettangolare con due lati di lunghezza b e spessore s e due di lunghezza c e spessore cs/b , si trova che $\hat{\tau}$ vale $c/2$ per i lati lunghi b e $b/2$ per quelli lunghi c . Quindi, ponendo l'origine degli assi nel centro del rettangolo si trova $\hat{w}_0 = 0$ su tutta la sezione: la torsione non produce ingobbamento della sezione.

A13. La trave cava con setti longitudinali. Il calcolo di una sezione del tipo rappresentato nella fig. A6, può effettuarsi facilmente se si adotta l'approssimazione delle sezioni sot-

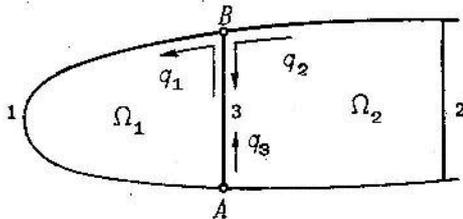


Fig. A6

tili. Allora a individuare la distribuzione degli sforzi basta conoscere i flussi nei rami $A1B$, $A2B$, $A3B$ che compongono la sezione. Queste quantità sono soggette alla condizione di equilibrio $q_1 = q_2 + q_3$. Inoltre si ha da scrivere l'equazione di equilibrio dei momenti; tenendo conto della relazione fra i flussi per considerare il flusso nel ramo 3 come creato dal confluire dei flussi q_1 e $-q_2$, si può uguagliare il momento M_t alla somma della coppia dovuta al flusso q_1 che percorre il circuito chiuso $A3B1A$ e della coppia dovuta al flusso q_2 nel circuito $A2B3A$. Indicando con Ω_1 , Ω_2 le aree racchiuse rispettivamente dai due circuiti scriviamo

$$M_t = 2q_1\Omega_1 + 2q_2\Omega_2 \quad [A61]$$

Si osserva che integrando la [A59] o la [A60], lungo un circuito chiuso il primo membro deve annullarsi se gli spostamenti w debbono essere continui. Quindi si ha per ogni circuito chiuso entro la sezione

$$\oint \hat{\tau} dl = 2\Omega \quad [A62]$$

essendo Ω l'area racchiusa, e $\hat{\tau} = q/Gs\hat{\vartheta}$. Scritta la [A62] per i due circuiti ed eliminato $\hat{\vartheta}$ si ha un'equazione che, insieme con la [A61] permette di determinare i flussi:

$$\begin{aligned} q_1/(\lambda_2\Omega_1 + \lambda_3\Omega) &= q_2/(\lambda_1\Omega_2 + \lambda_3\Omega) = \\ &= q_3/(\lambda_2\Omega_1 - \lambda_1\Omega_2) = M_t/2(\lambda_1\Omega_2^2 + \lambda_2\Omega_1^2 + \lambda_3\Omega^2) \end{aligned} \quad [A63]$$

dove

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$$

e $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sono i valori di $\int dl/s$ calcolati rispettivamente per rami $A1B$, $A2B$ e $A3B$. Infine, calcolando anche $\hat{\vartheta} = M_t/GJ_t$ dalle equazioni precedenti si ha

$$J_t = 4(\lambda_1\Omega_2^2 + \lambda_2\Omega_1^2 + \lambda_3\Omega^2)/(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1) \quad [A64]$$

Si osserva che il flusso q_3 dipende dalla differenza

$\lambda_2 \Omega_1 - \lambda_1 \Omega_2$ il cui valore e' ordinariamente assai minore che i fattori a cui gli altri flussi sono proporzionali. In generale quindi q_s ha entita' trascurabile; se detta differenza si annulla, la sezione si comporta come se il diaframma non esistesse e la [A64] riconduce alla [111].

Analogamente si puo' svolgere il calcolo per le sezioni con piu' setti. I flussi nei setti, mediante equazioni di equilibrio per i nodi di unione alla parete esterna, si esprimono in funzione dei flussi nei circuiti confinanti. Si scrivono poi le [A62] per ciascuno dei circuiti e l'equazione di equilibrio dei momenti. Si hanno cosi' equazioni sufficienti a determinare i flussi incogniti e il modulo torsionale della sezione.

A14. Il problema analitico del taglio. La determinazione rigorosa delle $\vec{\tau}$ come funzioni delle coordinate x, y procede dall'equazione [50] che puo' scriversi

$$\partial \tau_x / \partial x + \partial \tau_y / \partial y + k_1' x + k_2' y = 0 \quad [A65]$$

e della [61] con la condizione al contorno [62]. Riferendoci ad una generica sezione semplicemente connessa, indichiamo con $\vec{\tau}'$ le tensioni che si ottengono ponendo $k_1' = 0, k_2' = 1$ nella [A65] e cancellando i termini a secondo membro della [61]. Le componenti di $\vec{\tau}'$ possono essere scritte nella forma

$$\tau_x' = - \partial \zeta_x' / \partial y, \quad \tau_y' = \partial \zeta_x' / \partial x - y^2 / 2 \quad [A66]$$

Con cio' la [A65] resta identicamente soddisfatta, mentre la [61] esige che sia $\partial^2 \zeta_x' / \partial x^2 + \partial^2 \zeta_x' / \partial y^2 = 0$, ossia che ζ_x' sia funzione armonica. I valori di ζ_x' sono fissati dalla condizione al contorno

$$\left(\frac{\partial \zeta_x'}{\partial x} - \frac{y^2}{2} \right) dx + \frac{\partial \zeta_x'}{\partial y} dy = d\zeta_x' - \frac{y^2}{2} dx = 0$$

Quindi lungo il contorno deve essere

$$\zeta_x' = \frac{1}{2} \int y^2 dx \quad [A67]$$

L'integrazione e' effettuata a partire da un punto che puo' fissarsi ad arbitrio, perche' l'aggiunta di una costante a ζ_x' non ne altera gli effetti. La [A67] stabilisce in modo univoco i valori di ζ_x' , poiche' compiendo l'intero giro del contorno si ha $\oint y^2 dx = 0$.

Tenendo presente la formula di Green

$$\int (\partial P / \partial x + \partial Q / \partial y) dA = \oint (P dy - Q dx) \quad [A68]$$

con $P = 0$, $Q = -\zeta'_x - xy^2/2$ si trova

$$\int \tau'_x dA - J_{xy} = \oint (\zeta'_x + xy^2/2) dx = 0$$

mentre con $P = \zeta'_x - 3xy^2/2$, $Q = 0$ si ha

$$\int \tau'_y dA - J_x = \oint (\zeta'_x - 3xy^2/2) dy = - \oint (y^3 dx + 3xy^2 dy) / 2 = 0$$

Dunque le tensioni [A66] hanno una risultante le cui proiezioni su x e y valgono rispettivamente J_{xy} e J_x . Esse infatti corrispondono ad una forza tagliante nel piano di traccia s_1 (fig. 42), nelle condizioni cioè per cui x è l'asse neutro di flessione.

Inoltre, ponendo nella [A68]

$$P = \zeta (\partial \zeta'_x / \partial x - y^2/2) \quad , \quad Q = \zeta (\partial \zeta'_x / \partial y)$$

si trova che

$$\int \vec{\tau}' \cdot \vec{t}_t dA = 0 \quad [A69]$$

Poniamo nella formula di Green $P = x\zeta'_x$, $Q = y\zeta'_x$. Si trova

$$M'_z + 2 \int \zeta'_x dA + \int xy^2 dA / 2 = \oint \zeta'_x (x dy - y dx) \quad [A70]$$

essendo M'_z il momento delle tensioni $\vec{\tau}'$ rispetto all'origine degli assi. Ponendo poi

$$P = \zeta'_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \zeta \frac{\partial \zeta'_x}{\partial x} \quad , \quad Q = \zeta'_x \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \zeta \frac{\partial \zeta'_x}{\partial y}$$

si trova

$$2 \int \zeta'_x dA = \oint \zeta'_x \hat{\tau} dl \quad [A71]$$

indicandosi con $\hat{\tau}$ la tensione tangente al contorno che si verifica sotto un momento per cui sia $G\hat{\theta} = 1$; dl è l'elemento di contorno. Introducendo gli spostamenti \hat{w}_0 definiti in A12 si ha

$$d\hat{w}_0 = \hat{\tau} dl - x dy + y dx$$

Con questa relazione e con la [A71], mediante integrazioni per parti lungo il contorno si trasforma la [A70] come segue

$$2M_z' = \oint \hat{w}_0 y^2 dx - \int xy^2 dA \quad [A72]$$

Così il calcolo del momento delle $\vec{\tau}'$ è ricondotto alla risoluzione del problema della torsione.

Indichiamo ora con $\vec{\tau}''$ le tensioni tangenti lungo il contorno le cui componenti soddisfano alle

$$\partial \tau_x'' / \partial x + \partial \tau_y'' / \partial y = 0 \quad [A73]$$

$$\frac{\partial \tau_y''}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x''}{\partial y} = \frac{\nu}{1 + \nu} (x + c_x) \quad [A74]$$

con c_x costante. È facile provare che, come le $\vec{\tau}$ di torsione, le $\vec{\tau}''$ hanno risultante nulla, qualunque sia il valore assegnato alla costante c_x . Scrivendo

$$\tau_x'' = - \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{\partial \zeta_x''}{\partial y}, \quad \tau_y'' = \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{\partial \zeta_x''}{\partial x} \quad [A75]$$

il calcolo delle $\vec{\tau}''$ è ricondotto alla determinazione di una funzione che si annulla sul contorno della sezione e che soddisfa all'equazione

$$\partial^2 \zeta_x'' / \partial x^2 + \partial^2 \zeta_x'' / \partial y^2 = x + c_x \quad [A76]$$

Ponendo $P = x \zeta_x''$, $Q = y \zeta_x''$ nella [A68] si trova il valore del momento M_z'' rispetto all'asse z delle $\vec{\tau}''$:

$$M_z'' = - \frac{2\nu}{1 + \nu} \int \zeta_x'' dA \quad [A77]$$

Se si pone successivamente

$$P = \zeta_x'' \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad Q = \zeta_x'' \frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

$$P = \zeta \frac{\partial \zeta_x''}{\partial x}, \quad Q = \zeta \frac{\partial \zeta_x''}{\partial y}$$

risultano provate le eguaglianze

$$\int \left(\frac{\partial \zeta_x''}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_x''}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) dA = 2 \int \zeta_x'' dA = - \int \zeta (x + c_x) dA \quad [A78]$$

Così si può esprimere il momento M_z'' mediante la funzione di torsione.

Le tensioni $\vec{\tau}''$ aggiunte alle $\vec{\tau}'$ danno luogo ad una configurazione di sforzi che soddisfa a tutte le condizioni prescritte per le $\vec{\tau}$ di taglio. La scomposizione, suggerita dal Weber, presenta notevoli vantaggi di chiarezza. Le tensioni $\vec{\tau}'$ soddisfano alle condizioni di equilibrio e, per $\nu = 0$, anche a quelle di congruenza. Le $\vec{\tau}''$ intervengono a rendere congruente la deformazione, in presenza della contrazione trasversale.

Il calcolo delle tensioni corrispondenti a $k_1' = 1, k_2' = 0$ procede in modo perfettamente analogo a quello sopra indicato. Si può definire anche qui una prima distribuzione di tensioni $\vec{\tau}'$ espresse da

$$\tau_x' = -\partial \zeta_y' / \partial y + x^2/2, \quad \tau_y' = \partial \zeta_y' / \partial x \quad [A79]$$

dove ζ_y' è una funzione armonica che assume sul contorno della sezione i valori

$$\zeta_y' = -\frac{1}{2} \int x^2 dy \quad [A80]$$

La risultante di queste tensioni ha componenti J_y e J_{xy} rispettivamente su x e y . A queste tensioni si aggiungono le

$$\tau_x'' = -\frac{\nu}{1+\nu} \frac{\partial \zeta_y''}{\partial y}, \quad \tau_y'' = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\partial \zeta_y''}{\partial x} \quad [A81]$$

dove ζ_y'' è una funzione, nulla sul contorno, che sulla sezione verifica l'equazione

$$\partial^2 \zeta_y'' / \partial x^2 + \partial^2 \zeta_y'' / \partial y^2 = y + c_y \quad [A82]$$

Le costanti c_x, c_y restano da determinare in base alle condizioni con le quali, convenzionalmente si distingue la situazione di taglio esente da torsione; se si adotta la posizione $k_3 = 0$, è da porre $c_x = c_y = 0$; se si adottano le [130], si può calcolare c_x annullando l'espressione [A76] e c_y dalla analoga. Così restano definite le $\vec{\tau}''$, mentre le $\vec{\tau}'$ automaticamente soddisfano alle [130] in virtù della [A69].

A15. Travi cave a pareti sottili. Queste strutture sono ordinariamente costituite da elementi longitudinali di rinforzo (correnti) collegati da pannelli di piccolo spessore. Nel calcolo si può ritenere che le tensioni σ_z si concentrino in un certo numero di punti (baricentri dei correnti) e che fra l'uno

e l'altro di questi corrono archi di parete nei quali si abbiano solo tensioni tangenziali. Dalla [119] si riconosce che lungo questi archi esenti da tensioni σ_z il flusso q deve mantenersi costante.

Assegnando i numeri d'ordine dispari $1, 3, \dots, i, \dots, 2n-1$ agli n correnti (fig. A7), si indichi con N_i lo sforzo nel corrente i , risultante delle σ_z che si suppongono uniformemente distribuite sulla sua sezione. Si indica con q_{i+1} il flusso nel pannello che collega i correnti i e $i+2$. Dalla [119] si ottiene

$$q_{i-1} - q_{i+1} = dN_i/dz \quad [A83]$$

Sia q_{i+1}^* il flusso che si avrebbe nel pannello $i+1$ se fosse nullo il flusso q_0 nel pannello che unisce i correnti $2n-1$ e 1 . Sommando alla [A80] le analoghe, recanti al posto di i gli indici $i-2, \dots, 1$ si trova

$$-q_{i+1}^* = d(N_1 + \dots + N_i)/dz. \quad [A84]$$

Considerando che le tensioni nei correnti sono espresse dalla [85] si ottiene

$$-q_{i+1}^* = \frac{T_y^*}{J_y}(x_1 A_1 + \dots + x_i A_i) + \frac{T_x^*}{J_x}(y_1 A_1 + \dots + y_i A_i) \quad [A85]$$

essendo x_i, y_i le coordinate del baricentro del corrente i , di sezione A_i . Il flusso che va dal corrente i al successivo e' dato da

$$q_{i+1} = q_{i+1}^* + q_0 \quad [A86]$$

Con cio' i flussi possono essere tutti calcolati quando sia noto q_0 . Per la determinazione di questa incognita, se e' data in grandezza e posizione la forza tagliante, bastera' scrivere l'equazione dei momenti rispetto ad un polo qualsiasi, ossia uguagliare il momento della forza applicata al momento M_q dei flussi che si puo' esprimere mediante la relazione

$$M_q = 2q_0 \Omega + 2q_2^* \Omega_2 + \dots + 2q_{2n-2}^* \Omega_{2n-2} \quad [A87]$$

Le aree Ω_i sono definite come mostra la fig. A7 per Ω_2 . Il primo addendo della [A87] rappresenta il momento dovuto all'addendo q_0 che appare in tutte le [A86]; il suo fattore Ω

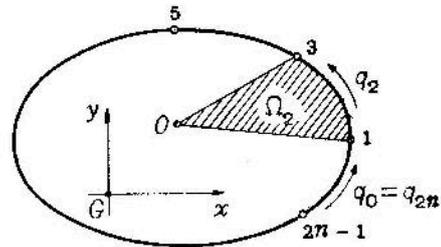


Fig. A7

e' l'area racchiusa dalla linea che costituisce la sezione della parete.

Se si vuole calcolare la sezione nelle condizioni di taglio esente da torsione (nel qual caso si conoscono T_x, T_y ma non la posizione della forza tagliante) si determina q_0 in base alla condizione di torsione nulla che, adottando la formulazione [130] si scrive

$$\oint q dl/s = q_0 \oint dl/s + \oint q^* dl/s = 0 \quad [A88]$$

gli integrali essendo estesi all'intero circuito. Calcolato cosi' q_0 , si adopera la [A87] per determinare la posizione della forza tagliante. Il calcolo, ripetuto per due diverse direzioni della forza tagliante, conduce ad individuare per intersezione il centro di taglio.

La [A88] e' ottenuta dalla [130] considerando che, qui $\vec{\tau} \cdot \vec{t}_t dA = (q/s)(1/2 \Omega s) s dl$, essendo Ω l'area racchiusa dalla linea media. Se si adotta la condizione $k_s = 0$ a definire la situazione di taglio puro, per l'espressione [A88] si ha il valore

$$\begin{aligned} \oint (\tau_x dx + \tau_y dy) &= \int (\partial \tau_y / \partial x - \partial \tau_x / \partial y) dA = \\ &= \nu (k_2 \delta_y - k_1 \delta_x) / (1 + \nu) \end{aligned} \quad [A89]$$

come si prova facendo uso della [A68] e della [61]; si indicano con δ_x e δ_y i momenti statici rispetto agli assi x, y baricentrici dell'area Ω delimitata dalla linea media. La [A88] risponde piu' precisamente alle condizioni che si attuano in pratica, essendo la struttura fornita di diaframmi trasversali poco deformabili che elidono praticamente l'effetto della contrazione trasversale.

A16. Trave cava con due fiancate parallele. Come applicazione della teoria del § A15 consideriamo lo schema di struttura alare bilongherone rappresentato nella fig. A8. I correnti 1,3 con l'anima compresa costituiscono una trave che diciamo longherone anteriore; il longherone posteriore e' formato dai correnti 5,7 e dall'anima che li collega. Sia G' il baricentro delle aree 1,3 e G'' quello delle aree 5,7. Il baricentro G della sezione sta sulla $G'G''$ alla distanza $b' = bA''/A$ dalla trave anteriore, essendo $A = A' + A''$, $A' = A_1 + A_3$, $A'' = A_5 + A_7$. Con facile calcolo si trova

$$J_x = J' + J'' + m^2 J_y, \quad J_{xy} = m J_y, \quad J_y = b^2 A' A'' / A \quad [A90]$$

essendo J', J'' i momenti d'inerzia dei due longheroni rispetto agli assi paralleli a x per G' e G'' rispettivamente e m l'inclinazione della $G'G''$ su x .

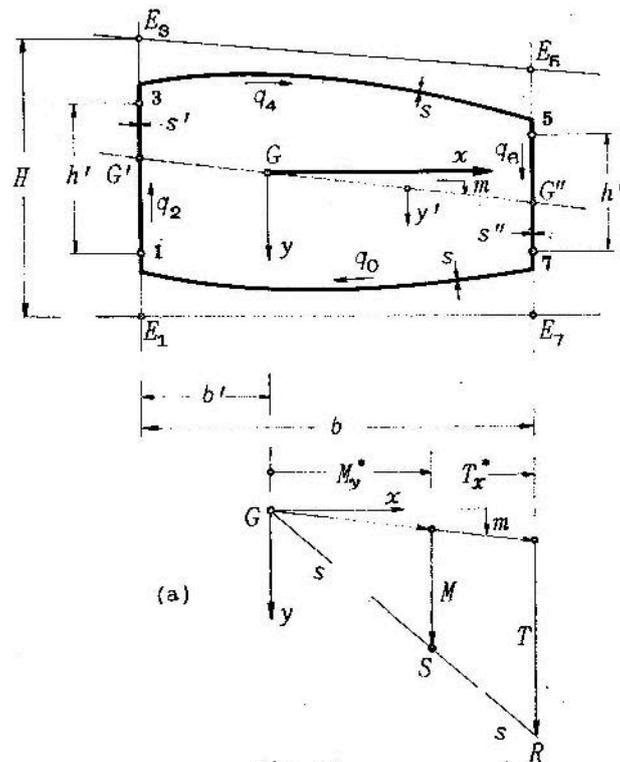


Fig. A8

L'asse y e'asse neutro nella flessione deviata prodotta da carichi contenuti nel piano di traccia $G'G''$; in queste condizioni dalla [85], con $M_x^* = N = 0$, si hanno le tensioni $-M_y^*/bA'$ e M_y^*/bA'' rispettivamente nei longheroni anteriore e posteriore.

La linea $G'G''$ funziona da asse neutro quando il piano di sollecitazione sia parallelo a y . Detto M il momento M_x in queste condizioni ($M_y = 0$) e indicando con y' le coordinate misurate nella direzione y a partire dalla $G'G''$, dalla [85] si hanno le tensioni

$$\sigma_z = My'/(J' + J'') \quad [A91]$$

Dalla coppia generica nel piano di sollecitazione s (figura A8) rappresentata mediante una forza in S e una in G , si ottengono i momenti M_y^* e M con la costruzione indicata (poco diversa da quella suggerita nella fig. 28). Similmente da

una forza tagliante rappresentata dal vettore GR si ottengono le componenti T e T_x^* .

Nelle condizioni $T_x = 0$, $T_y = T$ si hanno i flussi

$$q = q_0 - \frac{TJ'}{h'(J' + J'')} , \quad q_4 = q_0 , \quad q_6 = q_0 + \frac{TJ''}{h''(J' + J'')} \quad [A92]$$

La condizione [A88] si traduce nella equazione:

$$q_0 \left(\frac{2b}{s} + \frac{h'}{s'} + \frac{h''}{s''} \right) = \frac{T}{J' + J''} \left(\frac{J'}{s'} - \frac{J''}{s''} \right) \quad [A93]$$

essendo s' , s'' gli spessori delle anime 1-3 e 5-7 ed essendo s lo spessore delle pareti 3-5 e 1-7; lo sviluppo di quegli archi, in via di approssimazione, e' ritenuto uguale alla distanza b fra le fiancate. Si osserva che, per la [A93], qualora sia $J'/s' = J''/s''$ il flusso e' nullo nelle pareti 3-5, 7-1. In tal caso la forza tagliante divide la distanza fra i due longheroni in ragione inversa alle rigidezze di quelle travi: ossia il centro di taglio si trova sulla verticale baricentrica dei momenti d'inerzia J' e J'' .

Per una forza tagliante parallela alla $G'G''$ si ottengono i flussi

$$\begin{aligned} q_2 &= q_0 + T_x^* A_1 / b A' , & q_4 &= q_0 + T_x^* / b , \\ q_6 &= q_0 + T_x^* A_7 / b A'' \end{aligned} \quad [A94]$$

Dalla [A88] si ottiene

$$\begin{aligned} q_2 \left(\frac{2b}{s} + \frac{h'}{s'} + \frac{h''}{s''} \right) &= \\ &= \frac{T_x^*}{b} \left[\left(\frac{A_1}{A'} - \frac{A_7}{A''} \right) \frac{h''}{s''} + \frac{A_1 - A_3}{A'} \frac{b}{s} \right] \end{aligned} \quad [A95]$$

I flussi q_2 e q_6 si annullano se $A_1 = A_3$, $A_5 = A_7$; allora si ha $q_4 = -q_0 = T_x^* / 2b$. La risultante dei flussi in tali condizioni agisce secondo la mediana del trapezio $E_1 E_3 E_5 E_7$ i cui lati $E_3 E_5$ e $E_1 E_7$ rappresentano rispettivamente le rette d'azione delle risultanti di flussi costanti negli archi 3-5 e 7-1 (*assi di risultante* dei due archi). Quando oltre alle condizioni formulate, sussista l'eguaglianza $J'/s' = J''/s''$ il centro di taglio si trova nell'intersezione di detta mediana con la verticale baricentrica di masse J' , J'' . In pratica esso non e' mai molto discosto da tale posizione.

Rispetto al polo E_3 il momento dei flussi e' dato da

$$M_q = q_0 b H + q_6 b h'' \quad [A96]$$

A17. Travi cave con setti longitudinali. Per le sezioni piu' volte connesse, a pareti sottili, il calcolo dei flussi puo' farsi in base alla [119] quando si conosca il flusso in un pannello per ciascuno dei circuiti che formano le pareti di contorno insieme coi setti. A determinare questi flussi valgono le equazioni [A88] che vanno scritte per ciascun circuito, se si vuole determinare la configurazione di taglio senza torsione, in assenza di contrazioni trasversali. Se invece si vogliono determinare le sollecitazioni corrispondenti ad un'assegnata forza trasversale, si scrivono per ciascun circuito le equazioni

$$\oint q dl/s = 2G\theta \Omega_i \quad [A97]$$

essendo Ω_i l'area che il circuito racchiude. In queste equazioni, oltre alle incognite sopra menzionate appare il gradiente di torsione. Si aggiunge pero' l'equazione di equilibrio dei momenti rispetto ad un asse normale alla sezione; con cio' il sistema resta completato.

Ad es., per la sezione della fig. A9, con 6 correnti, avendosi due circuiti, la [A88] va scritta due volte per le condizioni di taglio puro. Supponendo che la sezione sia simmetrica rispetto all'asse y e caricata da una forza lungo quell'asse, bastera' scrivere la [A88] per meta' sezione:

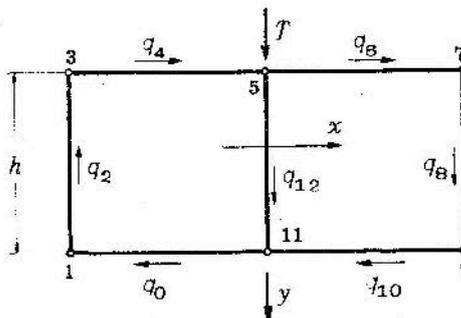


Fig. A9

$$q_0\lambda_0 + q_2\lambda_2 + q_4\lambda_4 + q_{12}\lambda_{12} = 0$$

essendosi indicati con λ i valori di $\int dl/s$ per i rami omnimi. I flussi sono calcolati da questa equazione e dalle condizioni di equilibrio e di simmetria:

$$q_2 = q_0 - T A_1 y_1 / J_x, \quad q_4 = q_0 - T(A_1 y_1 + A_3 y_3) / J_x, \quad q_8 = -q_4$$

$$q_8 = -q_2, \quad q_{10} = -q_0, \quad q_{12} = 2q_2 + T/h$$

A18. Ingobbamento delle sezioni soggette a taglio. Come per la torsione, così per il taglio, le sezioni si distorcono in conseguenza degli spostamenti w . Per il calcolo di questi spostamenti, essendo note le tensioni, si dovranno integrare le espressioni

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \tau_x/G - \partial u/\partial z \quad [A98]$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \tau_y/G - \partial v/\partial z \quad [A99]$$

Consideriamo, ad es., il caso di una sezione rettangolare, ammessa valida, secondo la [121] l'espressione $\tau_y = T(h^2 - y^2)/2J$ dove h è la semialtezza, $T = T_y$ e $J = J_x$. Distinguendo con indice zero i valori relativi al baricentro ($y = 0$) si trova dalla $\partial v/\partial y = -\nu\sigma_z/E$

$$v - v_0 = -\nu My^2/2EJ$$

Quindi la [A99] dà

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 - \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{2 + \nu}{4 + 4\nu} \frac{T}{GJ} y^2 \quad [A100]$$

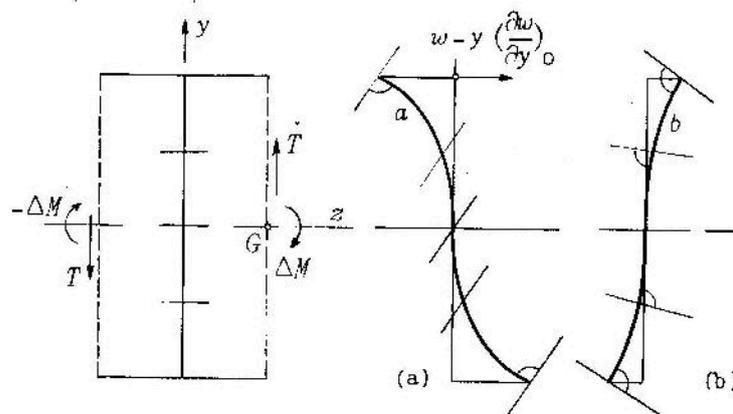


Fig. A10

Quindi, rispetto alla tangente in corrispondenza del baricentro, il grafico degli spostamenti w risulta rappresentato da un termine in y^3 ; questa deformazione conferisce un andamento sinuoso alla fibra disposta secondo l'asse y . Nella fig. A10 sono riportati gli spostamenti $w - y(\partial w/\partial y)_0$, rappresentando separatamente la deformazione che si avrebbe traslasciando l'ultimo termine nella [A99] (fig. A10a) e la deformazione a questo dovuta (fig. A10b). Per la prima parte le fibre inizialmente normali alla sezione restano parallele e si

dispongono perpendicolarmente alla deformata a in corrispondenza degli estremi della sezione, dove e' $\tau = 0$. Per l'altra parte, dovuta al coefficiente ν , riportata nella fig. A10b con ordinate ingrandite 4 volte, per $\nu = 0,3$, le fibre si dispongono normalmente alla linea b ; questa deformazione e' legata all'incremento ΔM che ha segni opposti ai due lati della sezione.

A19. Determinazione del centro di taglio come centro di torsione. Le condizioni [147] che costituiscono l'espressione del vincolo imponibile come condizione di rotazione nulla intorno agli assi x, y , servono a definire la posizione del centro di torsione, altrimenti indeterminata. Sostituendovi le espressioni [A59] degli spostamenti riferiti a \mathcal{D} si hanno le equazioni:

$$x^C J_x - y^C J_{xy} + \int \hat{w}_0 y dA = 0 \quad [A101]$$

$$y^C J_y - x^C J_{xy} + \int \hat{w}_0 x dA = 0 \quad [A102]$$

Calcolate le quantita' \hat{w}_0 in base alla [A60], mediante le [A101], [A102] si ottengono le coordinate x^C, y^C del centro di torsione. Si osserva che la [A60] vale per una sezione anche non sottile e permette di determinare la differenza nelle quantita' \hat{w}_0 fra due punti della sezione, comunque si scelga la linea che li collega; da essa si ha \hat{w}_0 a meno di una costante additiva che puo' determinarsi annullando il valore di $\hat{w}_0 dA$.

Per quanto riguarda il calcolo del centro di taglio, nella Appendice A14 si e' provato che, ammesse le [130], il momento delle tensioni $\vec{\tau}''$ di Weber risulta nullo. Resta il momento delle $\vec{\tau}'$, espresso dalla [A72] nel caso in cui la risultante delle $\vec{\tau}'$ abbia una componente J_{xy} su x e una componente J_x su y ; se il centro di taglio coincide con il centro di torsione il momento M'_z deve essere uguale alla somma dei due primi addendi nella [A101]. Facendo uso della [A68] con $P = 0$, $Q = \hat{w}_0 y^2$ si ha

$$\oint \hat{w}_0 y^2 dx = -2 \int \hat{w}_0 y dA - \int (\partial \hat{w}_0 / \partial y) y^2 dA$$

Se nell'espressione [A46''] sostituiamo τ_y con la sua espressione $G(\partial w / \partial y + \partial v / \partial z)$ nella quale si ponga $w = \hat{w}_0 \mathcal{D}$, $v = x \mathcal{D}$

si trova

$$\partial \hat{w}_0 / \partial y = -x - \partial \zeta / \partial x$$

Sostituendo questa espressione nell'integrale che la contiene e considerando che il termine relativo alla funzione ζ di torsione si annulla perché $\zeta = 0$ sul contorno della sezione, si conclude che

$$\oint \hat{w}_0 y^2 dx = \int xy^2 dA - 2 \int \hat{w}_0 y dA \quad [A103]$$

Con ciò resta provato che il momento M'_z dato dalla [A72] ha il valore che si otterrebbe ponendo nel centro di torsione una forza di componenti J_{xy}, J_x secondo x e y . Analoga dimostrazione potrebbe svolgersi per le tensioni date dalle [A77]-[A79]: dunque i due centri, di taglio e di torsione, coincidono nella formulazione qui indicata.

(*) Per la sezione più volte connessa, delimitata da un contorno esterno c e da uno o più contorni interni c_i , la condizione [A47] deve sussistere lungo ciascuna di queste curve. Quindi, posto $\zeta = 0$ sul contorno esterno, ζ assumerà determinati valori costanti lungo ciascuno dei contorni interni. Il momento delle τ è ancora espresso dalla [A48], ponendosi $\zeta = \text{costante}$ nelle cavità. Ciò può provarsi con ragionamento analogo a quello svolto a pag. 129: se la striscia parallela a y taglia un contorno interno c_i in L e M (fig. A3), il momento delle tensioni τ_x sul tratto HL è proporzionale a $\int_H^L \zeta dy - \zeta^L y^L$; quello relativo al tratto MK è proporzionale a $\int_M^K \zeta dy - \zeta^M y^M$; quindi la somma è proporzionale a $\int_H^K \zeta dy$, con ζ costante da L a M .

Per realizzare l'analogia della membrana, questa dovrebbe, lungo ciascun contorno interno, ancorarsi ad un piano parallelo a quello contenente il contorno esterno; tale piano dovrebbe assumere la posizione di equilibrio che corrisponde alle opposte azioni della pressione sull'area Ω_i racchiusa dalla linea c_i e delle trazioni della membrana. Infatti lungo ciascuna linea come c_i la derivata normale della funzione ζ deve soddisfare alla condizione

$$2 \Omega_i = \oint (\partial \zeta / \partial n) dl .$$

Questa relazione si prova mediante la [A57], osservando che lungo ogni circuito chiuso deve essere $\oint d\hat{w} = 0$. Le difficoltà nella attuazione sperimentale della condizione anzidetta possono essere facilmente superate con metodi di falsa posizione.

Finito di stampare il 30 novembre 1963
nella Litografia Artigiana
MASSAZA & SINCHETTO
Via Mazzini, 24 - TORINO