

CAPITOLO IX

LA TEORIA DELLE TRAVI

IX.1 - Tensioni nelle travi. Nei Capitoli V-VIII si sono individuate alcune soluzioni rigorose del problema dell'equilibrio elastico per il solido di St.Venant: stati di tensione e deformazione che soddisfano punto per punto alle condizioni di equilibrio e di congruenza in un corpo cilindrico di materiale elastico, isotropo e omogeneo. Questi stati si possono creare in un corpo siffatto a condizione di applicare sulle basi tensioni distribuite secondo le leggi indicate dalla medesima teoria. In particolare, ad es., per sollecitare il corpo a sforzo normale puro, si dovrebbero applicare alle basi tensioni σ_z uniformemente distribuite. In realta' non e' facile realizzare questa situazione. Anche volendo sottoporre il corpo alla prova semplice di compressione, si hanno deviazioni dai presupposti. In primo luogo, le sezioni terminali del corpo, come tutte le altre, debbono subire una dilatazione (in relazione al coefficiente di Poisson) e questa deve essere consentita senza che nascano tensioni tangenziali al contatto fra il corpo e i piatti della macchina di prova. In secondo luogo, occorrerebbe che i piatti stessi restassero piani. Alquanto piu' difficile sarebbe attuare a rigore una prova di torsione, applicando sulle sezioni terminali del corpo tensioni solo tangenziali, sebbene quelle sezioni si ingobbino.

Cosa avviene nel solido di St.Venant quando si carichino le basi con azioni distribuite secondo leggi diverse da quelle prima trovate? Siano σ'_z e $\vec{\tau}'$ tensioni normali e tangenziali applicate alla base $z = 0$ con distribuzione arbitraria (fig.49a) e siano N, \dots, M_z le caratteristiche di sollecitazione che, secondo le [63]-[68] corrispondono come azioni risultanti a queste tensioni. A queste sollecitazioni, secondo le soluzioni dei Capitoli V-VIII, corrispondono certe tensioni $\sigma_z, \vec{\tau}$ i cui valori per $z = 0$ indichiamo con $\sigma_{z0}, \vec{\tau}_0$ (figura 49b). Le differenze $\sigma'_z - \sigma_{z0} = \sigma''_{z0}$, $\vec{\tau}' - \vec{\tau}_0 = \vec{\tau}''_0$ costituiscono un sistema *nullo*, ossia avente risultante e momento risultante nullo (fig.49c). Si richiederebbe un nuovo, piu' complesso studio per determinare le tensioni $\sigma''_z, \vec{\tau}''$ nel cor-

po che le azioni $\sigma''_{z0}, \vec{\tau}''_0$ applicate alla base $z = 0$ produrrebbero. Alle tensioni addizionali $\sigma''_z, \vec{\tau}''$ si riferisce il *principio di St. Venant*: se su una porzione di un corpo elastico si applica un sistema di forze nullo, ossia globalmente in equilibrio, si produce uno stato di tensione parimenti localizzato, ossia avente effetti irrilevanti fuori di una regione

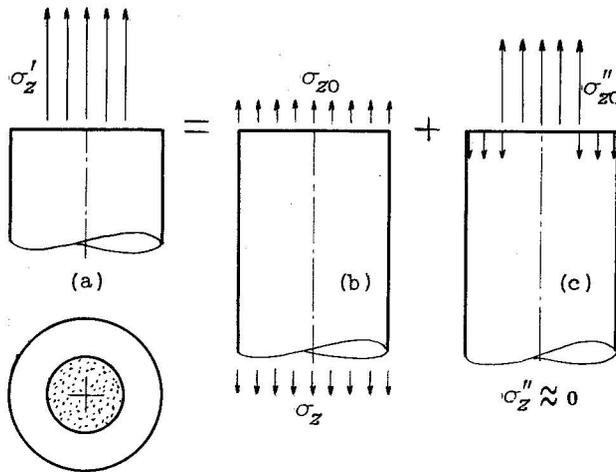


Fig. 49 - Tensioni non uniformi sulla base di un cilindro.

del corpo la cui estensione e' piccola se piccole sono le dimensioni della zona caricata. Dove queste tensioni addizionali siano trascurabili, li' le tensioni prodotte dalle azioni $\sigma'_z, \vec{\tau}$ arbitrariamente distribuite eguagliano i valori che si calcolano in base alle risultanti di dette azioni secondo le formule della teoria di St. Venant. Nella *teoria delle travi* (detta talvolta teoria *elementare* delle travi per distinguerla da analisi piu' approfondite) si trascurano le tensioni addizionali, dando la massima estensione a questa semplificazione. Quindi, sezione per sezione, le tensioni si calcolano come se il corpo si estendesse da una parte e dall'altra della sezione stessa in forma di solido di St. Venant: cioe', nei corpi che si trattano come travi, le tensioni su ciascuna sezione si fanno dipendere dalle caratteristiche di sollecitazione nella sezione stessa secondo le espressioni gia' viste, che si compendiano nelle seguenti

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_y^*}{J_y} x + \frac{M_x^*}{J_x} y \quad [85]_{\text{ripetuta}}$$

$$\vec{\tau} = M_t \vec{t}_t + T_x \vec{t}_x + T_y \vec{t}_y \quad [128]_{\text{ripetuta}}$$

A giustificare tale procedimento non basta il principio di St. Venant, poichè si trascurano le tensioni addizionali anche nella zona prossima alle accidentalità che le generano. È stato detto nel § I.1 della Parte I a quale vasta categoria di strutture le [85], [128] si ritengono applicabili. La giustificazione viene fornita dalle ricerche sperimentali o dall'indagine analitica, mediante le quali si ottiene una valutazione degli errori inerenti al calcolo secondo le [85], [128]. Le divergenze dello stato effettivo di tensione dalla configurazione calcolata con la teoria delle travi hanno le loro origini nelle deviazioni della linea d'asse dall'andamento rettilineo, nelle variazioni di forma e dimensioni delle sezioni, oltre che nelle sezioni dove i carichi sono applicati con leggi difformi da quelle espresse dalle [85], [128]. Queste accidentalità operano come *sorgenti di tensioni correttive*; da quelle origini le perturbazioni si propagano con legge decrescente più o meno rapida. Delle tensioni correttive si daranno cenni nel Capitolo seguente.

IX.2 - Tensioni principali e condizioni di resistenza. In un punto qualsiasi P della sezione di una trave comunque caricata (fig. 50) si determinino secondo le [85], [128] la tensione σ_z e il vettore $\vec{\tau}$.

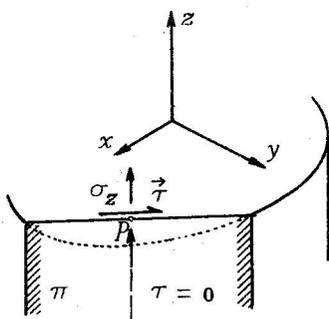


Fig. 50

Si conduca per P un piano π parallelo al vettore $\vec{\tau}$ e all'asse z . Su questo piano di sezione longitudinale la tensione tangenziale deve essere nulla. Infatti per le [48] la sola componente che potrebbe esistervi è quella parallela a z ; ma questa deve essere nulla per la reciprocità delle τ (fig. 8), per la quale questa τ è uguale alla componente di $\vec{\tau}$ normale a π , nulla per costruzione. Dunque, poiché sul piano π manca la tensione tangenziale, la direzione ad esso normale corrisponde ad una delle tensioni principali; e poiché normalmente a π manca anche la σ , si conclude che questa tensione principale è nulla. Dunque, in qualunque punto P di una sezione la retta r normale al vettore $\vec{\tau}$ è direzione principale dello stato di tensione. Detta σ_z la relativa tensione principale, nulla, si consideri il fascio di piani che ha per sostegno la r : ad ogni piano del fascio corrisponde un punto del cerchio di Mohr che taglia l'asse delle

σ in corrispondenza delle altre due tensioni principali σ_1, σ_3 . Il piano della sezione e' uno del fascio: esso individua il punto S del cerchio (fig.51) la cui ordinata e' data dal modulo τ del vettore $\vec{\tau}$. Un altro piano del fascio e' quello normale a $\vec{\tau}$. Su questo si ha la medesima τ , mentre la tensione σ e' nulla (sempre per le [48]). Si trova cosi' il punto N il quale deve essere riportato dalla parte delle τ negative, per quanto si e' notato a proposito della fig.9. Con cio' il cerchio di Mohr e' individuato: infatti i punti S e N debbono essere estremi di un diametro, per il fatto che corrispondono a direzioni ortogonali e pertanto, secondo la costruzione della fig.10, debbono stare su due rette proiettanti da A fra loro normali. Appare immediatamente dalla figura che il raggio del cerchio di Mohr, che rappresenta la tensione tangenziale massima fra quelle che si hanno sui piani del fascio menzionato, vale

$$\tau_{\max} = \sqrt{\sigma_z^2/4 + \tau^2} \quad [135]$$

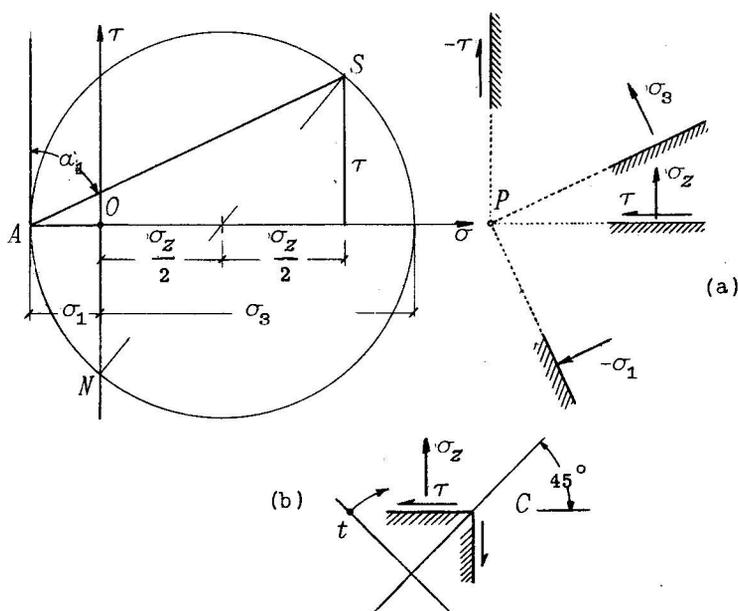


Fig. 51

Le due tensioni principali sono quindi

$$\sigma_1 = \sigma_z/2 - \tau_{\max} \quad , \quad \sigma_3 = \sigma_z/2 + \tau_{\max} \quad [136]$$

Poiche' $\tau_{\max} > |\sigma_z|/2$ si desume che in qualunque caso di sollecitazione, secondo la teoria delle travi, delle tre tensioni principali una e' negativa, una e' nulla e una e' positiva.

Se però manca la τ , due tensioni principali sono nulle e le relative direzioni sono indeterminate: infatti, se nel punto P è $\vec{\tau} = 0$, su ogni piano parallelo a z si hanno in P tensioni nulle.

Dalla costruzione della fig.51, restano individuate, oltre che le tensioni principali σ_1, σ_3 , le direzioni che loro corrispondono, rispettivamente parallela e normale alla AS (fig.51a). Si osserva che, nota la direzione della $\vec{\tau}$, sono immediatamente individuate le direzioni delle tensioni principali in assenza di σ_z : le fibre tese e compresse sono indicate con t e c nella fig.51b. La presenza della σ_z fa rotare le direzioni principali in modo che la direzione t si accosti alla z , se $\sigma_z > 0$, o in modo che le si accosti la c , se $\sigma_z < 0$.

In base ai valori delle tensioni principali si stabilisce il ragguaglio fra lo stato di sollecitazione creato dall'azione combinata di σ_z e $\vec{\tau}$ e lo stato di tensione uniassica nel quale usualmente si determinano le caratteristiche del materiale.

Se si può adottare la teoria I del IV.8, perché il materiale lavori in campo elastico deve controllarsi che sia $\sigma_3 \leq \sigma_e, \sigma_1 \geq \sigma_{-e}$.

Se vale la teoria II, le condizioni sono

$$\sigma_3 - \nu\sigma_1 \leq \sigma_e, \quad \sigma_1 - \nu\sigma_3 \geq \sigma_{-e}$$

Con $\nu = 0,3$, mediante le [135], [136] le ineguaglianze si pongono nella forma

$$\sigma_{1d} = 0,35\sigma_z + 0,65\sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_e \quad [137]$$

$$0,35\sigma_z - 0,65\sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau^2} \geq \sigma_{-e} \quad [138]$$

Per la teoria III deve essere

$$\sigma_{1d} = \sigma_3 - \sigma_1 = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_e \quad [139]$$

Per le teorie IV e V si deve controllare che il cerchio di Mohr della fig.51 non tagli le rette limite della fig.23a o la curva involuppo propria del materiale.

Per la teoria VI si ha

$$\sigma_{1d}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3 = \sigma_z^2 + 3\tau^2$$

Quindi la condizione per il limite di elasticità è

$$\sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_e \quad [140]$$

Adoperando l'espressione più rispondente al materiale

adottato, in uno stato di sollecitazione combinata, con $\tau \neq 0$, si dovrà ricercare sulla sezione in esame il punto in cui σ_{1d} assuma il massimo valore assoluto, per le teorie come la III e la VI che non fanno distinzione di segno o quello in cui le tensioni ideali positiva e negativa più si accostano ai rispettivi limiti, per le teorie che distinguono il limite σ_e da $-\sigma_e$. In genere, la ricerca rigorosa di tale punto sarebbe assai complessa: l'indagine viene di solito limitata a qualche tentativo.

Talvolta i punti più sollecitati sono facilmente individuati e si può giungere ad espressioni esplicite della tensione ideale in funzione delle caratteristiche di sollecitazione. Ad es., per una sezione circolare o anulare soggetta ad un momento flettente M e ad un momento torcente M_t essendo $\sigma_z = Mr/J$ nelle fibre più sollecitate a flessione ed essendo nelle medesime fibre raggiunto il valore più alto di τ , ossia $\tau = M_t r/J_p$, sostituendo queste espressioni nella [137] e tenendo presente che qui è $J_p = 2J$ si trova

$$\sigma_{1d} = (0,35M + 0,65 \sqrt{M^2 + M_t^2})r/J \leq \sigma_e \quad [141]$$

Confrontando questa espressione con quella della flessione semplice si constata che la quantità in parentesi viene a sostituire il momento M : tale quantità è chiamata perciò momento *flettente ideale*. Se invece si adotta la [135] o la [140] il momento flettente ideale risulta dato da $\sqrt{M^2 + M_t^2}$ o da $\sqrt{M^2 + 3M_t^2/4}$. In ogni caso, con questi momenti si riduce al calcolo di una trave inflessa la determinazione del cimento del materiale prodotto dall'azione simultanea dei momenti flettente e torcente. Ancora secondo la [140], per la sezione circolare soggetta a sforzo assiale e torsione, l'effetto del momento torcente può essere tenuto in conto aumentando la tensione prodotta dallo sforzo assiale secondo il fattore $\sqrt{1 + 12M_t^2/N^2r^2}$.

In casi più complessi, o per la forma della sezione o per la caratteristica del materiale (ad es., quando si ritenga valida la teoria V) se lo stato di sollecitazione dipende da due parametri (ad es., momento torcente e flettente) si costruiscono le curve di *interazione*; ossia, in un piano avente per coordinate i due parametri si traccia una curva che rappresenta la situazione limite per diverse combinazioni di valori dei due parametri. Se il punto rappresentativo di una data sollecitazione combinata cade all'interno della curva di interazione, la situazione critica non viene raggiunta. Viceversa situazioni rappresentate da punti esterni alla curva di interazione portano al superamento del limite in questione.

IX.3 - Caratteristiche di moto rigido delle sezioni. La generalizzazione dei risultati ottenuti per il solido di St. Venant al calcolo delle deformazioni delle strutture che vengono trattate come travi non è così immediata come l'estensione delle [85], [128] a queste strutture. Ciò perché le sezioni del solido di St. Venant si deformano e quindi la congruenza delle deformazioni nella trave reale non può essere stabilita che in modo approssimato; ovviamente il criterio di tale approssimazione è in certa misura arbitrario. L'arbitrarietà è eliminata nella maniera più naturale esigendo che la deformazione risulti congruente al controllo dell'equazione dei lavori, quando le tensioni dei sistemi a e b siano calcolate mediante le [85], [128].

Consideriamo un solido di St. Venant che pensiamo diviso in tronchi, ciascuno caricato in modo differente, cosicché fra la sezione terminale di un tronco e la iniziale del successivo le caratteristiche di sollecitazione presentino certe differenze che indichiamo con

$$\begin{aligned} Q_x &= -\Delta T_x, & Q_y &= -\Delta T_y, & Q_z &= -\Delta N, & C_x &= -\Delta M_x; \\ C_y &= -\Delta M_y, & C_z &= -\Delta M_z \end{aligned} \quad [142]$$

In base alla teoria che precede si sa calcolare lo stato di deformazione che si produrrebbe in ciascun tronco se esso fosse isolato e caricato sulle basi secondo le [85], [128]. In generale le sezioni affacciate si deformeranno in modo che non sarà possibile metterle a contatto per ricostituire un corpo continuo. Quindi lo stato di tensione che si produce quando questo contatto forzatamente esista, ossia quando la serie di tronchi formi un'unica trave presenterà certe deviazioni rispetto alla configurazione indicata dalle [85], [128]. S'è detto che delle tensioni addizionali (o correttive) che derivano da queste perturbazioni non si tiene conto nella teoria delle travi. Quindi non si potrà stabilire in modo completo la congruenza delle deformazioni: del resto neanche l'equilibrio viene realizzato punto per punto sulle sezioni di giunzione dei tronchi, dove le caratteristiche di sollecitazione presentano le discontinuità [142]. Perciò tensioni e deformazioni si potranno determinare per una situazione ideale, nella quale si ammetterà che l'equilibrio locale e la connessione della struttura siano violati in corrispondenza delle giunzioni dei tronchi. Resta però da vedere come si stabilisce la posizione relativa dei tronchi deformati, eliminando mediante moti rigidi una parte delle dislocazioni esistenti nelle giunzioni. Si giunge ad una formulazione pienamente coerente imponendo che le dislocazioni residue non introducano errori nell'equazione dei

lavori: ossia annullando il termine che nella [18] rappresenta gli effetti di dislocazioni.

Supponiamo che la sezione di una trave effettui un moto rigido costituito di una traslazione di componenti η_x, η_y, η_z nelle direzioni x, y, z e di rotazioni $\varphi_x, \varphi_y, \vartheta$. Le rotazioni φ_x, φ_y avvengano intorno agli assi baricentrici x, y , mentre ϑ si effettua intorno all'asse parallelo a z per il centro di taglio. Con tale definizione delle rotazioni, η_x e η_y vengono a rappresentare lo spostamento del centro di taglio nel piano della sezione, mentre η_z dà lo spostamento normale in corrispondenza del baricentro. Alla sezione stessa sia applicato un sistema di tensioni le cui azioni risultanti siano rappresentate da T_x, T_y, N, M_x, M_y secondo le [63]-[67] e dal momento torcente M_t rispetto all'asse parallelo a z per il centro di taglio. Queste tensioni vengono designate come sistema a per il calcolo di L_e^{ab} in relazione agli spostamenti di moto rigido anzidetti, che indichiamo con $\vec{\eta}_r^b$. Risulta così

$$L_e^{ab} = \int \vec{\sigma}^a \cdot \vec{\eta}_r^b dA = T_x \eta_x + T_y \eta_y + N \eta_z + M_x \varphi_x + M_y \varphi_y + M_t \vartheta \quad [143]$$

Sia ora $\vec{\eta}$ lo spostamento di un punto della sezione quale risulta dalla situazione ideale studiata nei Capp.V-VIII. Scriveremo

$$\vec{\eta} = \vec{\eta}_r + \vec{\eta}_d \quad [144]$$

indicando con $\vec{\eta}_d$ lo spostamento corrispondente alla deformazione *intrinseca* della sezione, definito dalla condizione che, comunque si scelgano le tensioni $\vec{\sigma}^a$, sempre che le componenti normali siano espresse secondo la [85] e i componenti tangenti secondo la [128] risulti

$$\int \vec{\sigma}^a \cdot \vec{\eta}_d dA = 0 \quad [145]$$

ossia

$$\int \vec{\sigma}^a \cdot \vec{\eta} dA = \int \vec{\sigma}^a \cdot \vec{\eta}_r dA \quad [146]$$

La [146] permette di individuare il moto rigido contenuto negli spostamenti $\vec{\eta}$. Nella teoria delle travi prescindiamo dagli spostamenti $\vec{\eta}_d$ e consideriamo le sezioni come animate di moto rigido. Per le caratteristiche di questo moto, rappresentate dalle quantità $\eta_x, \eta_y, \eta_z, \varphi_x, \varphi_y, \vartheta$ si pongono le condizioni di congruenza: in altre parole, si impone l'assenza di discontinuità nella giunzione dei tronchi dove si hanno

le variazioni [142], ossia i carichi $Q_x, Q_y, Q_z, C_x, C_y, C_z$. Viene così a sparire completamente dalla [18] la dislocazione segnalata. Degli spostamenti $\vec{\eta}_d$ si terrà invece conto nella correzione della teoria delle travi, ossia nella determinazione delle tensioni addizionali capaci di elidere le discontinuità che il primitivo sistema ha lasciato.

Così, quando si afferma che in una sezione della trave manca lo spostamento η_z , si indica l'annullarsi del lavoro dello sforzo N , rappresentato da σ_z uniformemente distribuite; e quindi si ha

$$\int w dA = 0$$

L'annullarsi delle rotazioni φ_x, φ_y significa l'attuarsi delle condizioni

$$\int w x dA = 0 \quad \int w y dA = 0 \quad [147]$$

Le condizioni [147] sono atte ad assicurare l'annullarsi del lavoro delle caratteristiche M_x, M_y .

Nel § VII.2 del Vol. I si è provato che l'asse elastico, luogo dei centri di taglio, contiene i centri di torsione delle sezioni: ossia che, nel solido soggetto a torsione le sezioni ruotano intorno all'asse elastico. Per la prova si è assunto come sistema a quello delle tensioni provocate da una forza trasversale incidente all'asse elastico, come sistema b quello delle deformazioni di torsione in esame. Constatato che $L_i = 0$ si è concluso che la forza trasversale applicata alla sezione libera fa lavoro nullo e quindi che quella sezione ruota intorno all'asse elastico. Si sarebbe dovuto considerare che, nella deformazione di torsione la sezione B di base si ingobba, presentando spostamenti w^b per i quali fanno lavoro le tensioni σ_z^a . D'altra parte, se con moti rigidi del corpo facciamo sì che tali spostamenti verificino le condizioni [147], le tensioni di flessione che la forza tagliante fittizia produce sulla base B faranno lavoro nullo. Quindi la conclusione formulata sussiste: il centro di torsione coincide col centro di taglio in virtù delle condizioni [147]. Di queste appunto si può fare uso per determinare il centro di taglio. (Appendice A19).

IX.4 - Espressione dei lavori virtuale interno e di deformazione. Di tali lavori si sono già date le espressioni nel § VI.3 per la parte relativa alle σ_z e nel § VIII.4 per la parte relativa alle $\vec{\tau}$. Qui non c'è che da sommare le due espressioni per considerare il caso più generale di sollecitazione di una trave:

$$L_i^{ab} = \int \left(\frac{N^a N^b}{EA} + \frac{M_x^a M_x^b}{EJ_x} + \frac{M_y^a M_y^b}{EJ_y} + \frac{T_x^a T_x^b}{GA_x} + \frac{T_y^a T_y^b}{GA_y} + \frac{M_t^a M_t^b}{GJ_t} \right) dZ \quad [148]$$

$$L = \int \left(\frac{N^2}{2EA} + \frac{M_x^2}{2EJ_x} + \frac{M_y^2}{2EJ_y} + \frac{T_x^2}{2GA_x} + \frac{T_y^2}{2GA_y} + \frac{M_t^2}{2GJ_t} \right) dZ \quad [149]$$

La variabile di integrazione Z si intende misurata lungo la linea d'asse della trave, che può essere curva nella estensione dei risultati della soluzione rigorosa alla teoria delle travi. Gli assi x, y sono qui principali d'inerzia della sezione.

Si osservi che se la sezione presenta due assi di simmetria, il centro di taglio coincide con il baricentro e le definizioni delle caratteristiche di moto rigido e di sollecitazione si semplificano; il momento M_t coincide con M_z e la rotazione φ avviene intorno all'asse della trave. Quando non si abbia tale simmetria la determinazione del centro di taglio è necessaria per una esatta valutazione delle deformazioni (non delle tensioni, per le quali darebbe complicazioni non gravi l'assunzione del baricentro come polo dei momenti torcenti). Si ricorda che la definizione di momento torcente come *momento rispetto all'asse elastico* è necessaria per la validità delle espressioni [148], [149] che altrimenti dovrebbero contenere addendi con prodotti $T M_t$.

IX.5 - Deformazioni delle travi diritte. Applichiamo la espressione [148] all'analisi delle deformazioni di un tronco di trave ad asse diritto. In questo caso la coordinata Z si può far coincidere con la z misurata con l'origine del riferimento in una sezione del corpo. Nella fig.52 è schematicamente rappresentato il tronco di trave compreso fra le sezioni P, Q ; sono indicati gli assi e le notazioni per le due sezioni; G sono i baricentri, C i centri di taglio delle due sezioni.

Se si adopera come sistema di esplorazione una forza unitaria agente secondo l'asse z (fig.52a) con versi opposti per le due facce del tronco, essendo in questo caso nulle tut-

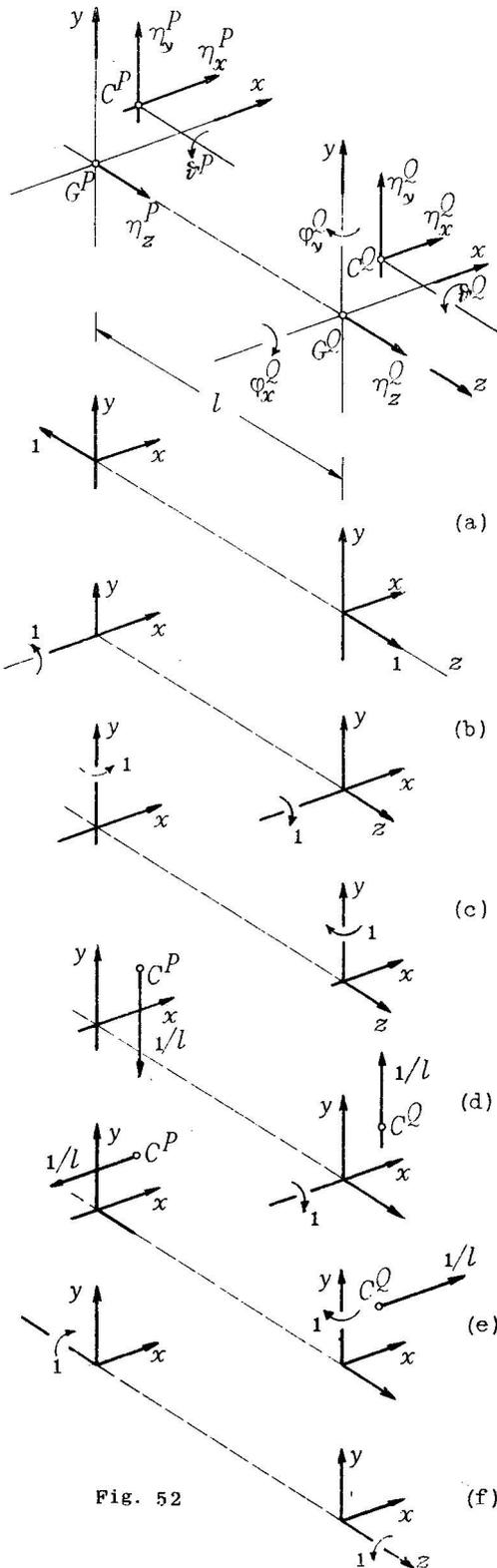


Fig. 52

te le componenti del sistema a fatta eccezione per $N^a = 1$, il lavoro interno per $l \rightarrow 0$ si puo' scrivere Ndz/EA ; il lavoro esterno rappresenta lo spostamento relativo delle due facce $d\eta_z$ misurato come variazione di distanza dei due baricentri. Si ha quindi

$$d\eta_z/dz = N/EA \quad [150]$$

Con una coppia di esplorazione unitaria agente nel piano yz (fig.52b) con versi opposti sulle due facce, si annullano tutte le caratteristiche del sistema a ad eccezione di $M_x^a = 1$. Il lavoro esterno misura la rotazione relativa delle due facce $d\phi_x$, se si considera un tronco elementare. Si ha quindi, come s'e' visto nel IV.6 del Volume I (*)

$$d\phi_x/dz = M_x/EJ_x \quad [151]$$

Analogamente per l'altro asse (fig.52c) si trova

$$d\phi_y/dz = M_y/EJ_y \quad [152]$$

Con il sistema di esplorazione della fig.52d, operando come s'e' visto nel § IV.6 del Vol. I per $l \rightarrow 0$ si giunge all'equazione

$$d\eta_y/dz + \phi_x = T_y/GA_y \quad [153]$$

(*) Se x, y non sono assi principali, nelle [151], [152] si deve porre M_x^*, M_y^* invece che M_x, M_y .

Analogamente il sistema della fig.52e conduce alla relazione

$$d\eta_x/dz + \varphi_y = T_x/GA_x \quad [154]$$

Il sistema della fig.52f conduce all'equazione già trovata [103]

$$d\vartheta/dz = M_t/GJ_t \quad [155]$$

Si rileva che le [150]-[155] valgono per la trave rettilinea. In ogni altro caso conviene servirsi direttamente dell'equazione dei lavori, dalla quale del resto possono dedursi le relazioni corrispondenti a quelle sopra indicate per i casi più generali.

IX.6 - Unioni longitudinali nelle travi. Si trova spesso conveniente nelle costruzioni collegare insieme più travi parallele per costituire una trave unica. Così nel caso della fig.53, la piattabanda t , i cantonali c_1, c_2 e l'anima a che isolatamente potrebbero costituire altrettante travi, vengono

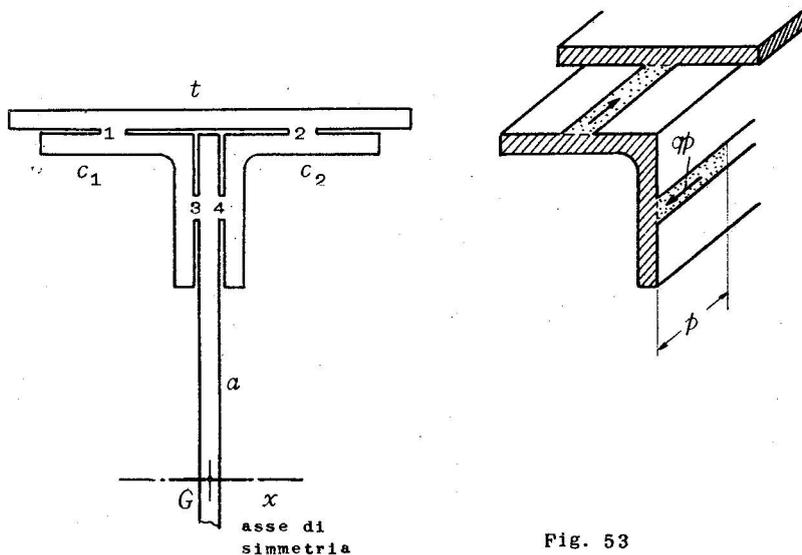


Fig. 53

collegate insieme a costituire un complesso più rispondente alle finalità di progetto. Perché questo collegamento sia efficiente, cioè affinché il complesso possa essere considerato come un'unica sezione, occorre che fra un costituente e l'altro si trasmettano le azioni che la teoria delle travi indica come derivanti dalla loro solidarietà. Se si taglia una trave con un piano parallelo al suo asse z , fatta eccezione per il

caso in cui la trave sia soggetta a sforzo normale e momenti flettenti costanti, si trova che fra le facce del taglio si esercitano tensioni tangenziali nella direzione z . Queste tensioni debbono trasmettersi attraverso il collegamento che nella figura e' supposto realizzato lungo strisce longitudinali di larghezza costante. Il flusso di tensione q attraverso un tale collegamento rappresenta la forza che vi si trova distribuita nella direzione z per tratto unitario, nello spaccato longitudinale. Se il collegamento e' affidato ad un adesivo disposto lungo la striscia, le proprieta' di resistenza dell'unione debbono assicurare la trasmissione delle tensioni $\tau = q/s$, dove s e' la larghezza della striscia. Di solito il collegamento e' stabilito mediante un'unione discontinua, formata da chiodi o bulloni posti a distanza ϕ (passo) uno dall'altro, allineati nella direzione z : quindi la forza tagliante in ciascun chiodo di una fila sara' data dal prodotto $q\phi$. Nel caso di una sezione soggetta a taglio, il flusso q va calcolato secondo la [121] o la [122] in base al momento statico della parte di sezione che si staccerebbe se il chiodo si tranciasse. Cosi', per una forza tagliante normale all'asse x , nel caso della fig.53, per il calcolo del flusso attraverso l'unione 1 si dovra' tener conto del momento statico di meta' piattabanda (dato che l'unione 1 lavora in parallelo con la 2 nel collegare piattabanda e cantonali). Per il flusso attraverso l'unione 3 si terra' in conto il momento statico relativo a meta' piattabanda e al corrente c_1 . Lo stesso taglio si trova nella sezione 4 del chiodo: al contatto fra questo e l'anima si dovra' trasmettere la somma degli sforzi taglianti nelle due sezioni del chiodo.

Le medesime considerazioni valgono per le sezioni reagenti a torsione. Le quattro file di chiodi che stabiliscono i collegamenti fra lamiera e profilati nel caso della fig.36 lavorano in parallelo: lo stesso flusso $M_t/2\Omega$ va tenuto in conto per il calcolo degli sforzi nei chiodi delle quattro serie.