

IL TAGLIO NEL SOLIDO DI St. VENANT

VIII.1 - L'equazione fondamentale d'equilibrio. Se in una sezione del solido di St. Venant soltanto la sollecitazione T_x (o la T_y) e' differente da zero, ai due lati di essa si trovano momenti flettenti M_y (o, rispettivamente, M_x) crescenti proporzionalmente alla distanza dalla sezione dove tali momenti sono nulli. Dunque la sollecitazione di taglio non puo' mai separarsi da quella di flessione. Le tensioni $\vec{\tau}$ si accompagnano in questo caso a tensioni σ_z calcolabili in funzione dei momenti secondo le medesime relazioni viste nel Capitolo VI. L'equazione di equilibrio [50] viene a contenere, oltre ai termini della [98], la derivata $\partial\sigma_z/\partial z$ che, per quanto s'e' detto, e' da considerare come termine noto. Dunque nel campo del vettore $\vec{\tau}$ non e' piu' nulla la divergenza. Segnata una linea l_1 all'interno della sezione, si potra' ancora definire il flusso q attraverso di essa mediante la [100]; ma non si potra' piu' affermare che se l_1 e' chiusa, il flusso che l'attraversa deve esser nullo. Dedurremo appunto una relazione fondamentale che lega tale flusso alle tensioni σ_z .

In un punto qualsiasi della linea l_1 , la componente $\vec{\tau} \cdot \vec{n}$ del vettore $\vec{\tau}$ sulla normale alla linea e' uguale alla componente secondo z della tensione tangenziale che si trova nel punto stesso sezionando il corpo con un piano parallelo a z , tangente alla linea l_1 : cio' per quanto s'e' visto a proposito della fig. 8. Consideriamo (fig. 39) un tronco elementare del solido, delimitato da due sezioni distanti dz e isoliamo la parte staccata da un cilindro a generatrici parallele a z di cui la linea l_1 sia direttrice. Sulla parete di questo cilindro si esercitano secondo z le tensioni $\vec{\tau} \cdot \vec{n}$. La risultante delle forze $\vec{\tau} \cdot \vec{n} dl_1 dz$ e' data, per la [100], da $\dot{q} dz$, essendo \dot{q} il flusso totale attraverso la linea l_1 . Se la normale positiva e' volta verso l'esterno dell'area A_1 racchiusa da l_1 , la forza $\dot{q} dz$ ha il verso dell'asse z . D'altra parte, sull'elemento dA_1 dell'area A_1 si esercitano sulle facce z e $z + dz$ le forze $\sigma_z dA_1$ e $\left(\sigma_z + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} dz\right) dA_1$, le tensioni σ_z

avendo qui valori diversi sulle due facce poiche' i momenti flettenti variano da una sezione all'altra. La risultante delle σ_z sulle basi della porzione isolata, insieme con la forza qdz deve soddisfare alla condizione di equilibrio secondo z che, dividendo per dz , si scrive

$$\int_{A_1} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dA_1 + \overset{\circ}{q} = 0 \quad [119]$$

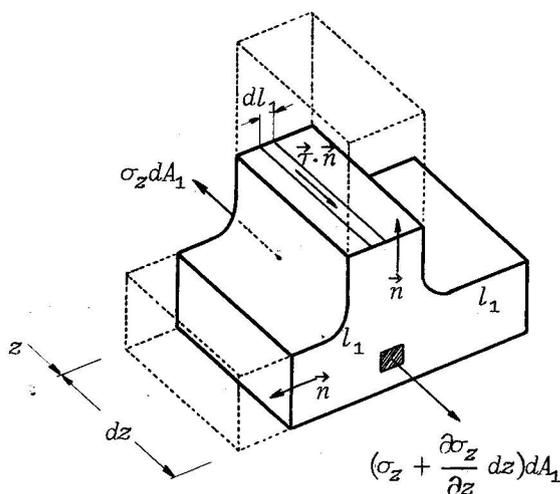


Fig. 39

Si deve osservare che questa equazione e' una conseguenza della [50], entrambe riferendosi a proiezioni su z . Essa comprende come caso particolare la proprieta' di flusso risultante nullo enunciata per la torsione, in assenza di tensioni σ_z .

La [119] costituisce la base per la trattazione approssimata del taglio, nella quale si rinuncia a verificare punto per punto la condizione di congruenza [61]. La trattazione rigorosa, fondata sulle [50] e [61], con la condizione al contorno [62], si riduce ad un problema analitico (Appendice A13) che presenta difficolta' dello stesso ordine di quello della torsione, ma con le maggiori complicazioni che derivano dal termine $\partial \sigma_z / \partial z$ nella [50] e dagli addendi in k_1, k_2 nella [61], gli uni e gli altri direttamente proporzionali al taglio poiche' provengono da derivazioni rispetto a z di termini proporzionali ai momenti flettenti.

VIII. 2 - La trattazione approssimata per le sezioni aperte.

Per le sezioni semplicemente connesse la [119] basta alla determinazione del flusso attraverso una linea (corda) che collegando due punti del contorno, taglia la sezione in due parti. Il flusso diviso per la lunghezza della corda da' il valor

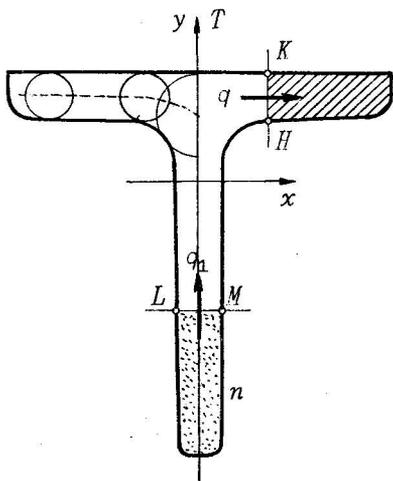


Fig. 40

medio della componente di $\vec{\tau}$ normale alla corda: perche' questo valor medio possa essere assunto per una valutazione approssimata delle tensioni esistenti, occorre che la corda sia, per quanto possa prevedersi, pressochè normale ai vettori $\vec{\tau}$. Ora, per sezioni relativamente sottili, dalla condizione di tangenza al contorno si puo' desumere la direzione approssimativa delle $\vec{\tau}$: ad es., per il profilato della fig.40 lungo la corda HK il vettore $\vec{\tau}$ sarà circa orizzontale, mentre lungo la corda LM esso sarà circa verticale; in accordo con queste previsioni sono tracciate le due corde. Assunta per la linea

l_1 una corda e l'arco di contorno che ne collega gli estremi, poiche' attraverso tale arco il flusso è nullo, dalla [119] si ha modo di calcolare il flusso attraverso la corda considerata. Nei casi in cui valga l'espressione [78'] di σ_z si ha

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{T_y^* y}{J_x} \quad [120]$$

essendo $T_y^* = dM_x^*/dz$. Così, mediante la [119] si ottiene

$$q = T_y^* \xi_x / J_x \quad [121]$$

In questa espressione, mentre J_x è, sempre, il momento di inerzia dell'intera sezione, ξ_x è il momento statico, rispetto all'asse x , della parte di essa contornata dalla linea l_1 ; q è il flusso entrante attraverso la linea l_1 . Si noti che, per una data corda, si puo' chiudere la linea l_1 in due modi (figura 41): con la scelta della fig.41a è $\xi_x > 0$ e quindi la

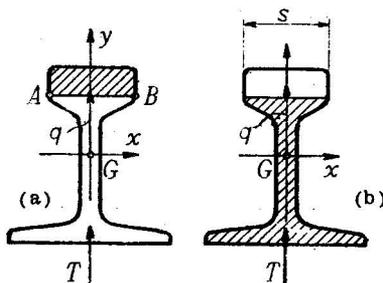


Fig. 41

l'asse x , della parte di essa contornata dalla linea l_1 ; q è il flusso entrante attraverso la linea l_1 . Si noti che, per una data corda, si puo' chiudere la linea l_1 in due modi (figura 41): con la scelta della fig.41a è $\xi_x > 0$ e quindi la

[121] indica un flusso entrante nell'area superiore tratteggiata; con la scelta della fig.41b, \bar{S}_x assume lo stesso valore con segno opposto, e quindi la [121] indica un flusso uscente dall'area inferiore tratteggiata, in accordo con quanto si era trovato prima.

Se x, y sono assi principali d'inerzia la distribuzione di flussi [121] corrisponde ad una forza tagliante agente secondo l'asse y ; se invece $J_{xy} \neq 0$, alla forza T_y^* secondo y si deve unire una forza $T_x^* = dM_y^*/dz = j_x T_y^*$ secondo la [78"]. Ossia, alla sezione si deve applicare una forza tagliante secondo la direzione s_1 della fig.42 per produrre i flussi [121].

Similmente, scambiando gli indici si ha

$$q = T_x^* \bar{S}_y / J_y \quad [122]$$

il momento statico \bar{S}_y , essendo calcolato rispetto all'asse y , sempre per l'area parziale.

Per produrre questi flussi si deve applicare una forza T_x^* secondo l'asse x ed una $j_y T_x^*$ secondo y : ossia la forza tagliante deve agire secondo la direzione s_2 della fig.42.

Se la forza tagliante T agisce in una direzione qualsiasi, la si scomporrà secondo s_1 e s_2 e si sovrapporranno gli effetti. Operando per via analitica si scriverà, indicando con T_x e T_y le componenti di T :

$$T_x = T_x^* + j_x T_y^* \quad [123]$$

$$T_y = T_y^* + j_y T_x^*$$

e quindi risolvendo si ha

$$\begin{aligned} T_x^* &= (T_x - j_x T_y) / (1 - j_x j_y) \\ T_y^* &= (T_y - j_y T_x) / (1 - j_x j_y) \end{aligned} \quad [124]$$

Si osserva che le espressioni sopra indicate sono assolutamente rigorose: l'approssimazione interviene quando dai flussi si passa alle tensioni dividendo per le corde.

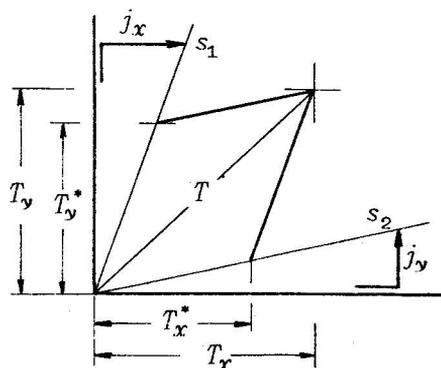


Fig. 42

VIII.3 - Applicazioni particolari. a) Il flusso massimo.
Tracciando corde parallele all'asse x , se b e' la lunghezza della corda generica risulta

$$d\mathfrak{S}_x/dy = - by$$

Quindi \mathfrak{S}_x , come funzione di y , e' continuamente decrescente al crescere di y e, sotto l'asse x , e' continuamente decrescente al crescere di $-y$. Dunque \mathfrak{S}_x ha un massimo solo per $y = 0$: percio' la corda baricentrica e' quella sulla quale il flusso raggiunge il massimo valore. La conclusione, naturalmente, non puo' estendersi alle τ , in generale. Solo se b e' costante in prossimita' del baricentro si puo' certamente affermare che esiste un massimo di τ per $y = 0$. Per il calcolo di q_{\max} si puo' fare uso delle espressioni

$$y_1 = J_1/\mathfrak{S}_1, \quad y_2 = J_2/\mathfrak{S}_2 = -J_2/\mathfrak{S}_1$$

indicandosi con J_1 e \mathfrak{S}_1 i momenti d'inerzia e statico rispetto all'asse x della parte di sezione $y > 0$, con J_2 e $\mathfrak{S}_2 = -\mathfrak{S}_1$ le quantita' corrispondenti per la parte $y < 0$. Quindi, posto $H = y_1 - y_2$, essendo $J_x = J_1 + J_2$, si ottiene, per una forza tagliante T secondo l'asse y (principale)

$$q_{\max} = T/H \quad [125]$$

H rappresenta la distanza fra il centro di pressione delle σ_z positive e quello delle σ_z negative, della sezione soggetta a flessione.

Ad es., per la sezione rettangolare, si ha $H = 2h/3$, se h e' l'altezza: il flusso massimo ha 1,5 volte il valore che corrisponderebbe ad una distribuzione uniforme.

b) Sezione a doppio T. Nei calcoli che seguono si considera la sezione come concentrata lungo la linea media. Questa semplificazione e' in accordo con il carattere approssimato che la trattazione possiede, presentando errori che tendono a zero col diminuire dello spessore.

Supposto costante lo spessore delle solette, i flussi lungo queste variano con legge lineare (fig.43). Nel punto di incrocio con l'anima i flussi nei due lati orizzontali confluiscono in quello verticale. Nell'anima essi hanno andamento parabolico. Il grafico per meta' sezione e' indicato nella figura. Per il flusso massimo conviene usare la [125]: H e' dato dai manuali e differisce poco dalla lunghezza dell'anima (fig.44).

Quando la sezione sia soggetta ad una forza tagliante agen-

te secondo l'asse x il flusso nell'anima e' nullo. Infatti il momento S_y della parte di sezione staccata da una corda tracciata lungo l'anima e' nullo. La forza tagliante e' sopportata in questo caso dalle due solette, operanti come due travi rettangolari in parallelo.

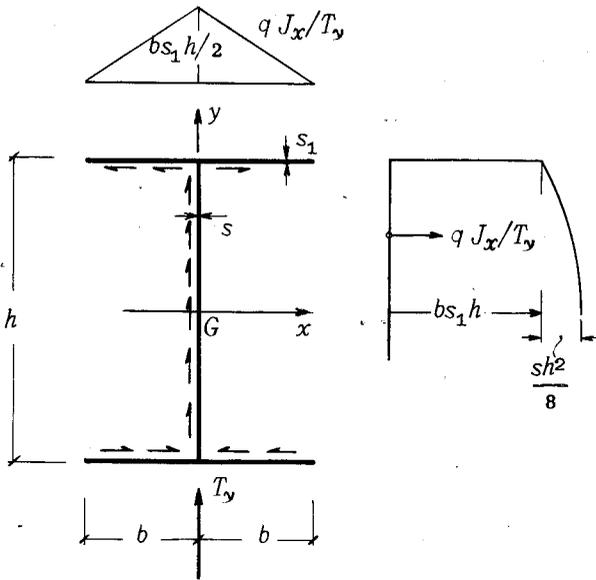


Fig. 43

La forza tagliante e' sopportata in questo caso dalle due solette, operanti come due travi rettangolari in parallelo.

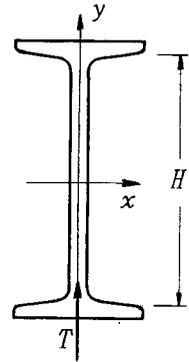


Fig. 44

c) Sezione anulare. Per il fatto che la sezione e' doppiamente connessa si presenta un'incognita nella distribuzione dei flussi.

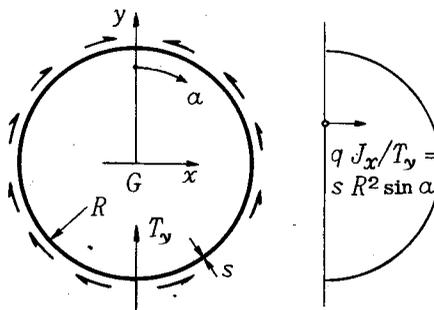


Fig. 45

Pero', a causa della simmetria, si puo' affermare che il flusso nei punti di intersezione della linea media con l'asse y e' nullo. La fig.45 indica notazioni e grafico dei flussi, riportati in funzione di y .

d) **Sezione anulare aperta.** Per la trave tubulare aperta lungo una generatrice, soggetta ad una forza tagliante normale al piano per l'asse che contiene la fenditura, i flussi sono indicati nella fig.46: essi si annullano sui margini della fenditura e raggiungono sulla generatrice opposta un valore doppio di quello che si avrebbe se la sezione non fosse aperta.

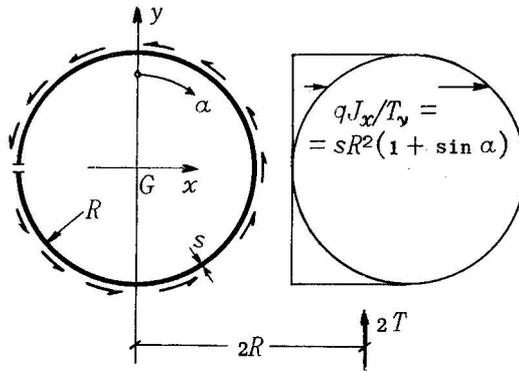


Fig. 46

e) **Profilato a C.** Sotto una forza tagliante parallela alla costa del profilato si hanno flussi distribuiti con legge lineare sulle due solette e con legge parabolica lungo la costa. I valori relativi a meta' sezione sono indicati nella fig.47.

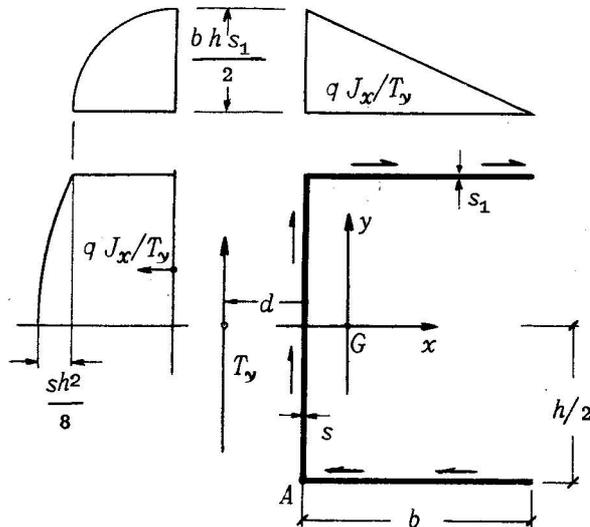


Fig. 47

f) Profilato a L a lati diseguali. Gli assi di riferimento x, y baricentrici paralleli ai lati non sono assi principali. Quindi i flussi [121] corrispondono ad una forza tagliante obliqua. Diagrammi e simboli sono indicati nella fig.48.

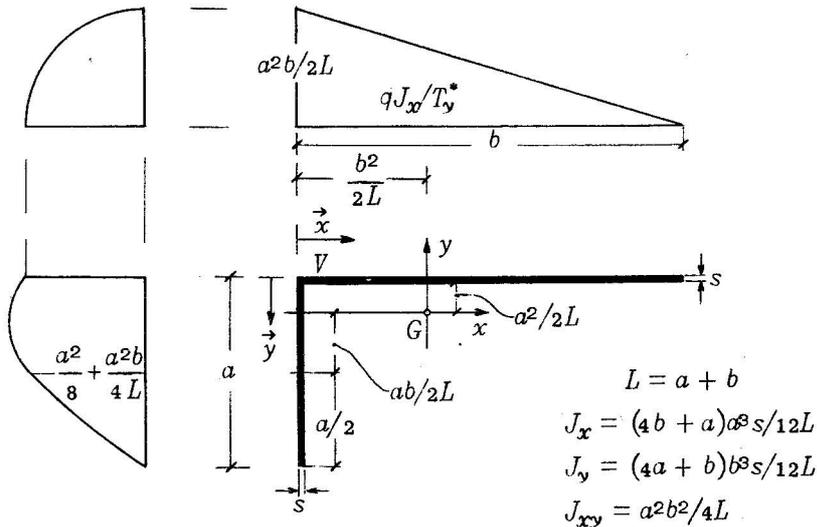


Fig. 48

In ogni caso si deve controllare che i flussi diano per risultante la forza applicata. Riportando, come s'è fatto nelle figg.43 - 48 i valori di $qJ_x/T_y = \delta_x$, in funzione di y , si deve constatare che l'area del diagramma rappresenti il momento d'inerzia J_x (*), come è richiesto dall'equazione

$$\int \delta_x dy = J_x \quad [126]$$

l'integrazione essendo estesa alla proiezione della linea media su y . Dal diagramma in funzione di x si deve ottenere J_{xy} , come è richiesto dalla relazione

$$\int \delta_x dx = J_{xy} \quad [127]$$

(*) A raffronto di questa espressione con la [97], si noti che nelle costruzioni delle fig.32,33 intervengono i momenti statici rispetto alla corda variabile, mentre nella [121] e conseguenti compaiono i momenti statici rispetto agli assi di riferimento, invariabili.

Per quanto riguarda le componenti parallele a y il controllo si esegue facilmente con la formula di Simpson, essendo indicati sui grafici i valori estremi e quello nel punto di mezzo. Per quanto riguarda le componenti parallele a x , queste danno somma nulla nei casi delle figg. 43-47. Per la fig. 48 il diagramma triangolare di qJ_x/T_y^* sul lato parallelo a x dà il valore $(b/2)(a^2b/2L) = J_{xy}$.

La risultante dei flussi così calcolati passa per il baricentro quando y è asse di simmetria della sezione. Nei casi delle figg. 46, 47, 48 ciò non accade. Nell'ultimo caso essa passa per il vertice V dove concorrono le forze sui due lati. Nel caso della fig. 46 scrivendo un'equazione di momento rispetto al centro del cerchio si trova che la risultante è spostata di $2R$ rispetto al centro stesso. Nel caso della figura 47, con un'equazione di momento rispetto al vertice A si trova che la risultante passa alla distanza

$$d = \frac{b}{2 + hs/3bs_1}$$

Se si trova la retta d'azione della risultante dei flussi per due diverse direzioni della forza tagliante, per il punto d'intersezione delle due rette passerà la risultante in ogni caso, come si prova per sovrapposizione di effetti. Diremo *centro di taglio* il punto per il quale passa la risultante dei flussi [121] e [122]. Una definizione più completa di tale punto, valevole anche per le sezioni più volte connesse sarà data nel § seguente.

VIII.4 - Espressione dei lavori virtuale interno e di deformazione. Dalla [73] risulta che l'aliquota di lavoro relativa alle tensioni σ_z si calcola indipendentemente da quella dovuta alle $\vec{\tau}$. Si possono perciò usare per la prima parte le espressioni del § VI.3, limitando ora il calcolo ai termini provenienti dalle $\vec{\tau}$. Queste tensioni dipendono dalle caratteristiche di sollecitazione M_t, T_x e T_y ; quindi, per il caso più generale, per sovrapposizione di effetti possiamo scrivere

$$\vec{\tau} = M_t \vec{t}_t + T_x \vec{t}_x + T_y \vec{t}_y \quad [123]$$

introducendo, in analogia con quanto s'è fatto per la torsione, i vettori \vec{t}_x, \vec{t}_y che rappresentano la tensione $\vec{\tau}$ corrispondente alle condizioni di carico parziale $T_x=1$ e $T_y=1$, rispettivamente; questi vettori, i cui moduli t_x, t_y hanno

dimensione di (lunghezza)⁻² non dipendono dalla sollecitazione applicata ma dalla forma della sezione.

Se analoghe espressioni [128] valgono per $\vec{\tau}^a$ e $\vec{\tau}^b$ si ha

$$\begin{aligned} \int \vec{\tau}^a \cdot \vec{\tau}^b dA &= M_t^a M_t^b \int t_t^2 dA + T_x^a T_x^b \int t_x^2 dA + T_y^a T_y^b \int t_y^2 dA + \quad [129] \\ &+ (M_t^a T_x^b + M_t^b T_x^a) \int \vec{t}_t \cdot \vec{t}_x dA + (M_t^a T_y^b + M_t^b T_y^a) \int \vec{t}_t \cdot \vec{t}_y dA + \\ &+ (T_x^a T_y^b + T_x^b T_y^a) \int \vec{t}_x \cdot \vec{t}_y dA \end{aligned}$$

Una notevole semplificazione in questa espressione, e soprattutto nelle sue applicazioni, si ottiene facendo sì che sia

$$\int \vec{t}_t \cdot \vec{t}_x dA = 0 = \int \vec{t}_t \cdot \vec{t}_y dA \quad [130'] [130'']$$

Queste condizioni sono realizzabili grazie alla libertà di scelta che esiste nella definizione *taglio puro*, ossia esente da torsione (*). Una forza tagliante di data intensità e direzione può essere applicata alla sezione con retta d'azione, poniamo, incidente all'asse z baricentrico. Restano definite le tensioni che questa produce e i coefficienti k_1^i, k_2^i, k_3 che la [61] contiene; viceversa, fissando k_1^i, k_2^i, k_3 resta definita la forza tagliante. Si potrebbe assumere questa situazione come corrispondente a momento torcente nullo: allora, quando la forza avrà altra retta d'azione si calcolerà il momento torcente come momento M_z e si sommeranno i relativi effetti. D'altra parte, senza alcuna maggior complicazione, si può invece risolvere come situazione di taglio puro il caso in cui la forza passi per un altro determinato punto, diciamo *centro di taglio*: il momento torcente si misura allora rispetto all'asse parallelo a z per il centro di taglio (*asse elastico*). Fra le diverse scelte che possono farsi nel definire la situazione di taglio esente da torsione, la più conveniente è certamente quella che conduce ad annullare gli integrali [130]. Fra le conseguenze che questi apporterebbero restando presenti nella [129] si noti, ad es., l'influenza sul gradiente di torsione \mathcal{D} : questo dipenderebbe non solo da M_t se-

(*) Fra le tensioni, diciamo, \vec{t}_{x0} corrispondenti ad una forza $T_x = 1$ passante per il baricentro e le \vec{t}_x relative alla forza $T_x = 1$, per un centro di coordinata baricentrica y sussiste la relazione $\vec{t}_x = \vec{t}_{x0} - y \vec{t}_t$ che sostituita nella [130'] fornisce y .

condo la [107], ma anche da T_x e T_y . Malgrado i vantaggi inerenti alle condizioni [130], dovute a Trefftz, diversi Autori adottano la condizione $k_3 = 0$ a caratterizzare l'assenza di torsione (*).

Nell'analisi svolta nei §§ VIII.1-3 non appare esplicitamente l'indeterminazione accennata; essa e' pero' contenuta gia' nella [119]: infatti, senza influire su questa equazione si potrebbe introdurre ad arbitrio un complesso di tensioni che dia flusso nullo, quale e' quello della torsione. Nella trattazione approssimata, non tenendosi in conto la [61], non appare la scelta fatta per la costante k_3 ; ma la supposizione che la risultante delle $\vec{\tau}$ su una corda si disponga secondo la tangente alla linea media porta in questo ambito di approssimazione a concordare con le [130]: infatti le tensioni t_t , di intensita' proporzionale alla distanza dalla linea media, danno valore nullo per l'integrale del prodotto $t_t t_x$ lungo la corda se t_x ha distribuzione uniforme. Dunque il centro di taglio definito nel § VIII.3 rappresenta il punto per il quale deve passare la forza tagliante per annullare il valore del gradiente di torsione ϑ' , secondo l'equazione dei lavori.

Il fattore $\int \vec{t}_x \cdot \vec{t}_y dA$ potrebbe essere eliminato mediante una rotazione degli assi, ossia, determinando le componenti della forza tagliante secondo due direzioni x', y' girate rispetto al riferimento originario di un certo angolo α_t (figura 109, Vol.I). Il valore di questo angolo e' calcolato con la relazione

$$\text{tang } 2\alpha_t = 2 \int \vec{t}_x \cdot \vec{t}_y dA / \int (t_x^2 - t_y^2) dA \quad [131]$$

Generalmente, pero', il fattore anzidetto ha scarsa importanza. Esso si annulla se la sezione possiede un asse di simmetria, x o y . Trascurandolo e ponendo

$$1/A_x = \int t_x^2 dA, \quad 1/A_y = \int t_y^2 dA \quad [132]$$

si scrive il lavoro interno, per l'aliquota corrispondente alle $\vec{\tau}$,

$$L_i^{ab} = \int (M_t^a M_t^b / GJ_t + T_x^a T_x^b / GA_x + T_y^a T_y^b / GA_y) dz \quad [133]$$

(*) Si ricorda che il secondo membro della [61] contiene il gradiente di torsione locale $\partial\omega/\partial z$, variabile da punto a punto per effetto di ν : annullare k_3 vuol dire annullarne il valore in corrispondenza del baricentro.

e il lavoro di deformazione

$$L = \int (M_t^2/2GJ_t + T_x^2/2GA_x + T_y^2/2GA_y) dz \quad [134]$$

Le quantità A_x, A_y sono caratteristiche della sezione aventi dimensione di un'area; hanno valore alquanto inferiore all'area della sezione. Per un profilato a doppio T (fig.44) si può porre $A_y = sH$ (s spessore dell'anima).

Per il profilato della fig.48, in base ai flussi ivi indicati ed a quelli che, per via del tutto analoga, si calcolano come proporzionali ai momenti statici S_y , si trovano i seguenti risultati:

sul lato a

$$\begin{aligned} st_x &= 1,5(a^2 - 4a\bar{y} + 3\bar{y}^2)/abL \\ st_y &= 1,5b(a^2 - \bar{y}^2)/a^3L + 6\bar{y}(a - \bar{y})/a^2L \end{aligned}$$

sul lato b

$$\begin{aligned} st_x &= 1,5a(b^2 - \bar{x}^2)/b^3L + 6\bar{x}(b - \bar{x})/b^2L \\ st_y &= 1,5(b^2 - 4b\bar{x} + 3\bar{x}^2)/abL \end{aligned}$$

le coordinate \bar{x}, \bar{y} essendo misurate dal vertice V . Quindi risulta

$$\begin{aligned} \int \bar{t}_x^2 dA &= 0,3(a^2 + 3ab + 4b^2)/b^2sL \\ \int \bar{t}_y^2 dA &= 0,3(b^2 + 3ab + 4a^2)/a^2sL \\ \int \bar{t}_x \cdot \bar{t}_y dA &= -0,15(a - b)^2/absL \end{aligned}$$

Per $b = 2a$ l'ultimo integrale ha valore 23 volte più piccolo che il minore degli altri due.