

CAPITOLO VII

LA TORSIONE NEL SOLIDO DI St. VENANT

VII.1 - Equazioni generali. La sollecitazione di torsione pura corrisponde ad un complesso di tensioni che su ogni sezione hanno per risultante una coppia contenuta nel piano della sezione stessa. Sono dunque nulle in questo caso tutte le caratteristiche di sollecitazione ad eccezione del momento torcente che possiamo *qui* indifferentemente indicare con M_z o M_t (*). Essendo $N = M_x = M_y = 0$ su tutte le sezioni risultano identicamente nulli i coefficienti k_0, k_1, k_2 della [56] e quindi sono dappertutto nulle le σ_z ; delle sei costanti della teoria solo k_3 e' diversa da zero.

A definire le tensioni τ_x, τ_y come funzioni di x, y valgono in questo caso l'equazione di equilibrio [50]

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} = 0 \quad [98]$$

e quella di congruenza [61]

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y} = k_3 \quad [99]$$

col sussidio della condizione [62] di tangenza al contorno.

Essendo identicamente nulle le componenti di tensione $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ saranno nulle le dilatazioni ϵ_x comunque si disponga l'asse x nel piano della sezione. Cio' significa che il moto dei punti di ogni sezione proiettato sul piano xy apparira' come moto rigido: rotazione di un angolo ϑ variabile da sezione a sezione. L'angolo ω definito dalla [58] assume in tutti i punti della sezione il valore ϑ ; quindi il secondo membro delle [57] e [61] assume il valore $k_3 = 2G\vartheta'$, essendo $\vartheta' = d\vartheta/dz$, costante nel solido di St. Venant.

(*) La coppia ha lo stesso momento rispetto a qualsiasi retta parallela a z . In un caso piu' generale si distinguera' il momento M_z rispetto all'asse baricentrico (momento torcente *baricentrico*) dal momento torcente vero e proprio M_t , valutato con riferimento al centro di taglio.

L'equazione [98] che esprime l'annullarsi della divergenza del vettore $\vec{\tau}$ suggerisce la realizzazione di un'analogia: se si considera il vettore $\vec{\tau}$ del piano xy come velocita' del moto piano di un fluido, questo dovra' essere incompressibile. La condizione di tangenza al contorno dice che la linea che delimita il campo deve essere impermeabile al fluido. Bastera' dunque porre un liquido qualsiasi in un recipiente cilindrico avente la stessa forma della superficie laterale del corpo in esame ed imprimere al liquido un moto piano (si' che ogni particella si muova in un piano normale alle generatrici del cilindro): il campo cosi' realizzato verifica le condizioni [98] e [62]. Purtroppo l'altra condizione che occorre a definire il moto fluido, la [99], nella analogia impone una condizione praticamente irrealizzabile: la rotazionalita' costante del moto fluido in tutti i punti della sezione. Sebbene la analogia sia inattuabile come mezzo sperimentale per la risoluzione del problema della torsione, essa resta concettualmente utile per la comprensione di varie proprieta' del campo di tensione in esame.

Fra i concetti che l'analogia idrodinamica suggerisce, particolarmente importante e' quello di *flusso* di tensione attraverso una linea, corrispondente alla portata fluida attraverso un setto di cui la linea stessa sia sezione:

$$q = \int \vec{\tau} \cdot \vec{n} \, dl \quad [100]$$

integrale esteso alla linea, di cui dl e' un arco elementare, delle componenti di $\vec{\tau}$ sulla normale \vec{n} alla linea. Se la linea e' chiusa, il flusso totale, attraverso di essa, delle tensioni $\vec{\tau}$ corrispondenti alla torsione deve essere nullo; cio' appare evidente per l'analogia esistente col campo di velocita' del fluido incompressibile: il volume di fluido racchiuso dal setto deve restare costante nel tempo.

Indichiamo con $M_t \vec{t}_t$ il vettore $\vec{\tau}$ corrispondente al momento M_t : \vec{t}_t rappresenta dunque la tensione riferita al momento torcente applicato; il suo modulo t_t ha dimensioni di (lunghezza)⁻². Per la scrittura del lavoro virtuale interno, se il sistema b e' formato solo dalle deformazioni di torsione, adottando anche per le tensioni del sistema a l'espressione $\vec{\tau}^a = M_t^a \vec{t}_t^a$ si ha

$$\int \vec{\tau}^a \cdot \vec{\tau}^b \, dA = M_t^a M_t^b \int t_t^2 \, dA$$

al solito, le integrazioni essendo estese all'area della se-

zione. Posto

$$1/J_t = \int t_t^2 dA \quad [101]$$

il lavoro virtuale interno, per la trave soggetta a torsione e' dato da

$$L_i^{ab} = \int M_t^a M_t^b dz / GJ_t \quad [102]$$

Applicando l'equazione dei lavori ad un tronco di lunghezza unitaria, con $M_t^a = 1$, essendo allora $L_e^{ab} = \vartheta'$, si ottiene

$$\vartheta' = M_t / GJ_t \quad [103]$$

Il *gradiente di torsione* $\vartheta' = d\vartheta/dz$ e' dunque proporzionale al momento torcente e inversamente proporzionale alla *rigidezza torsionale* GJ_t . Questa consta del modulo tangenziale G del materiale e del fattore J_t , proprio della sezione della trave. Le dimensioni di J_t risultano dalla [101] essere quelle di un momento d'inerzia di area. Diciamo *modulo torsionale* questa caratteristica; il suo calcolo e' ricondotto ad una integrazione quando si siano determinate le tensioni di torsione per la sezione in esame.

VII. 2 - Sezioni circolari. Consideriamo uno stato di deformazione per il quale in tutto il solido di St. Venant sia $w=0$

(ossia i punti delle sezioni non escano dal piano che li contiene), mentre gli spostamenti u, v siano quelli di una rotazione intorno all'origine (fig. 34)

$$u = -\vartheta' y, \quad v = \vartheta' x \quad [104]$$

Percio' sara' secondo le [36''], [36'''], [5] e [6]

$$\begin{aligned} \tau_x &= -G\vartheta' y \\ \tau_y &= G\vartheta' x \end{aligned} \quad [105]$$

dove $\vartheta' = d\vartheta/dz$ deve essere costante se si vuole che il campo di tensioni [105] rientri nella teoria

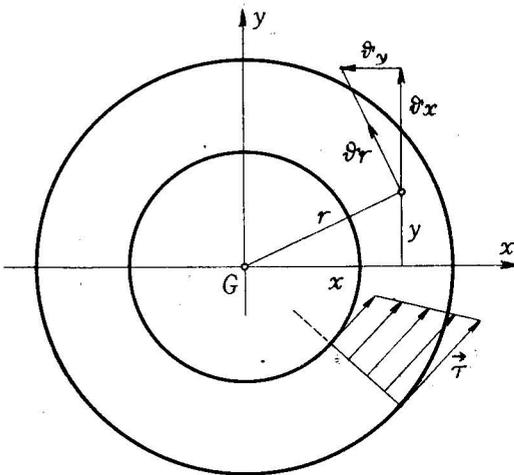


Fig. 34

di St. Venant verificando le [49]. Si controlla facilmente che le [98], [99] sono soddisfatte dalle [105]. Resta da considerare la condizione di tangenza al contorno. Le tensioni rappresentate dalle [105] sono normali ai raggi uscenti dall'origine: perche' esse risultino tangenti al contorno occorre che questo sia costituito da cerchi col centro nell'origine. Si conclude dunque: il problema della torsione per una sezione circolare o per una anulare, delimitata da due cerchi concentrici, viene risolto dalle [105]: le sezioni in questo caso si mantengono piane ($w = 0$). Per porre questo stato di tensione in relazione col momento applicato, si scrive l'equazione [68] che da'

$$M_z = G\theta' J_p \quad [106]$$

Si ottengono quindi le espressioni del gradiente di torsione

$$\theta' = M_t / GJ_p \quad [107]$$

e del modulo $\tau = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}$ del vettore $\vec{\tau}$ a distanza $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ dal centro

$$\tau = M_t r / J_p \quad [108]$$

Confrontando la [107] con la [103] si nota che in questo caso e' $J_t = J_p$, come anche avrebbe potuto trovarsi facendo uso della [101].

VII.3 - Sezioni cave. La sezione anulare costituisce un esempio di sezione cava o doppiamente connessa: il contorno di queste sezioni e' formato da due linee chiuse, una interna all'altra. Fra i due contorni si puo' definire una *linea media* della sezione come luogo dei centri dei cerchi tangenti ai due contorni e interni alla sezione (fig. 35). In un dato punto della linea media si puo' chiamare *spessore* il diametro del cerchio bitangente. Di solito la sezione e' *sottile*: ossia gli spessori sono cosi' piccoli rispetto alle altre dimensioni della sezione, che non e' necessaria una determinazione precisa della linea media: spesso si puo' confondere la linea media con l'uno o l'altro dei due contorni senza errore apprezzabile per i calcoli che qui occorrono.

Si isoli una parte di sezione mediante una linea chiusa formata da due tratti a_1, a_2 che vanno dall'uno all'altro contorno e due archi dei contorni medesimi. La proprieta' enunciata, l'annullarsi del flusso totale attraverso la linea chiusa, assicura che i flussi attraverso i tratti a_1 e a_2 debbono essere uguali e opposti, poiche' attraverso gli archi di con-

torno il flusso e' nullo. Se si definisce il segno di q in base ad un verso di percorrenza della linea media, si puo' affermare che il flusso q ha lo stesso valore attraverso ogni corda che collega i due contorni. Di questa proprieta', rigorosamente esatta, si fa uso per una valutazione approssimata delle tensioni in funzione del flusso: indicando con s lo spessore, si scrive

$$q = \tau s \quad [109]$$

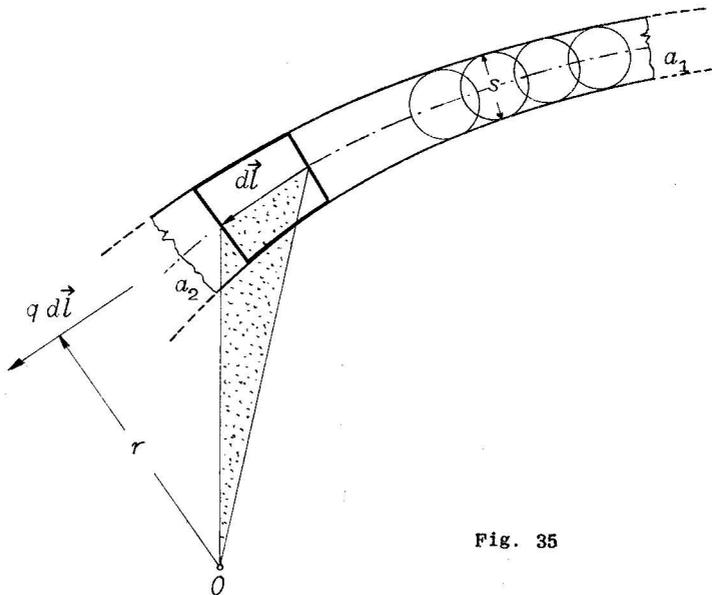


Fig. 35

Questa relazione, che a rigore da' il valor medio sulla corda s della componente di $\vec{\tau}$ normale alla corda stessa, viene utilizzata a rappresentare il modulo di $\vec{\tau}$, come costante nello spessore s . A migliorare la precisione di questa valutazione occorre che la corda sia tracciata in direzione normale alla linea media. Lo spessore s cosi' misurato praticamente coincide col diametro del cerchio bitangente ai contorni.

Nello stesso ambito di approssimazione sara' $q dl$ la risultante delle tensioni $\vec{\tau}$ sull'area delimitata da due corde tracciate agli estremi dell'elemento di linea media rappresentato dal vettore dl . Queste affermazioni rispondono alla reale situazione con approssimazione tanto migliore quanto piu' piccolo e' lo spessore rispetto alle dimensioni della linea media (ad es., al suo raggio di curvatura).

Il flusso q rappresenta dunque l'intensita' di distribuzione delle forze tangenti alla linea media. Per un arco AB di questa linea la risultante varra' $q \int dl = p \vec{c}$ essendo \vec{c} il

vettore che va dall'estremo A all'estremo B . Infatti la somma dei vettori $d\vec{l}$ distesi secondo la curva AB ne dà la corda. Si ha quindi la proprietà: la risultante di un sistema di forze tangenti ad un arco di linea qualsiasi, distribuite con intensità costante q e' parallela alla corda dell'arco ed e' misurata dal prodotto di q per la corda stessa. In particolare se la linea si chiude su se stessa, come la linea media di una sezione cava, la risultante e' nulla: infatti le \vec{r} nel loro complesso debbono essere equivalenti ad una coppia di momento M_t .

Per mettere in relazione il flusso q col momento applicato, si scrive la condizione di equilibrio alla rotazione intorno ad un punto O qualunque. Il momento della forza $q d\vec{l}$ e' rappresentato da $q r dl = 2 q d\Omega$ essendo dl la lunghezza dell'arco, r la distanza di $d\vec{l}$ da O , $d\Omega$ l'area coperta dal raggio vettore con origine in O quando il suo estremo percorre l'arco ($d\Omega$ area punteggiata nella fig. 35). Sommando i momenti elementari si ottiene

$$M_t = 2 q \Omega \quad [110]$$

essendo Ω l'area racchiusa dalla linea media della sezione, ossia la superficie coperta dal raggio vettore quando l'estremo percorre l'intera linea media. Se il polo O dei momenti e' situato fuori della linea media deve tenersi presente che le aree $d\Omega$ hanno segno opposto, per un dato senso di percorrenza del contorno, secondo che il raggio vettore giri nel senso positivo dei momenti o in quello contrario; così nel caso della fig. 36 si considererà positiva l'area a tratteggio orizzontale, negativa quella a tratteggio verticale e sarà in totale

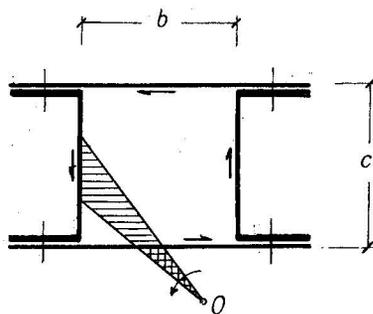


Fig. 36

tale $\oint d\Omega = bc$.

Sulla base delle espressioni [109], [110] si può calcolare il modulo J_t per la sezione cava facendo uso della [102]. In questo caso e'

$$t_t = q/s M_t = 1/2 s \Omega, \quad dA = s dl$$

Quindi si ha

$$J_t = \frac{4\Omega^2}{\oint dl/s} \quad [111]$$

L'integrale che figura a denominatore va esteso a tutta la linea media, a partire da un suo punto qualunque fino a tornare al punto stesso. Se la sezione e' formata da piu' archi a spessore costante, il numero che costituisce il denominatore della [111] e' dato dalla somma dei rapporti lunghezza/spessore, per i vari tratti che costituiscono la linea media. In particolare, se lo spessore e' costante su tutto lo sviluppo ϕ della linea media, risulta

$$J_t = 4 \Omega^2 s / \phi \quad [112]$$

VII.4 - Sezioni aperte a parete sottile. Si consideri una sezione rettangolare di lati b e s , con $b \gg s$. Disponiamo l'asse y baricentrico parallelamente ai lati lunghi (fig. 37).

E' intuitivo che, fatta eccezione per una zona prossima ai due lati corti, il vettore $\vec{\tau}$ deve avere direzione poco discosta da quella dell'asse y ; ossia deve essere $\tau_x \approx 0$. Da cio' segue secondo la [98] che τ_y deve essere funzione solo di x ; dalla condizione di congruenza [99] si ha quindi

$$d\tau_y/dx = 2G\vartheta' \quad [113]$$

Poiche' per $x = 0$ deve essere $\tau_y = 0$ per simmetria, si conclude che e'

$$\tau_y = 2G\vartheta' x \quad [114]$$

Ovviamente questa soluzione non vale in prossimita' dei lati corti, lungo i quali essa viola la condizione di tangenza [82]. Tuttavia essa fornisce risultati assai utili e, per la valutazione della rigidezza, notevolmente precisi. Tenendo presente la [103] si ha

$$t_t = 2G\vartheta' x / M_t = 2x / J_t \quad [115]$$

Sostituendo nella [102] si ottiene

$$J_t \approx 4 \int x^2 dA = bs^3/3 \quad [116]$$

In base alla soluzione rigorosa si trova che puo' aversi

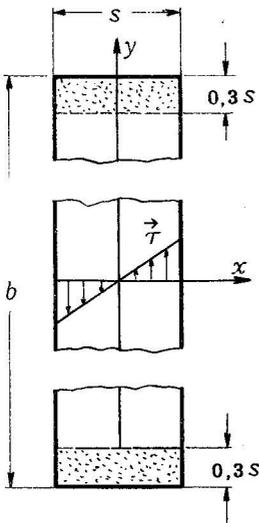


Fig. 37

una notevole approssimazione modificando la [116] come segue:

$$J_t = (b - 0,6s)s^3/3 \quad [117]$$

L'errore di questa espressione si mantiene inferiore al 3% in tutto il campo di valori di b/s da 1 (sezione quadrata) a ∞ e tende a zero quando b/s cresce indefinitamente. Alla [117] si puo'dare una rispondenza geometrica: la rigidezza della sezione si puo'calcolare con l'espressione [116] relativa alla striscia indefinita a condizione che si considerino inefficienti agli effetti del modulo J_t due porzioni della sezione staccate da parallele ai lati minori distanti da questi di $0,3s$ (aree punteggiate nella fig. 37).

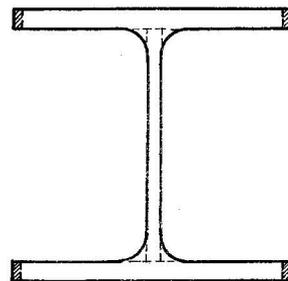


Fig. 38

Questi risultati vengono estesi con buona approssimazione alle sezioni aperte le quali possano considerarsi costituite da rettangoli allungati, accostati l'uno all'altro in modo che lungo la linea di unione stia il lato corto almeno di uno dei due rettangoli adiacenti. La rigidezza complessiva viene ottenuta come somma delle rigidezze delle parti nelle quali viene scomposta la sezione. Volendo introdurre la correzione indicata dalla [117] si riterra' inefficiente una porzione marginale di ciascun rettangolo, sul margine libero (fig. 38).

Analoga approssimazione si adotta per una sezione avente come linea media una curva qualunque: si scrive per tale caso

$$J_t = \frac{1}{3} \int s^3 dl \quad [118]$$

estendendo l'integrazione a tutta la linea media.

VII.5 - Considerazioni generali. Dei tipi di sezione che trovano ordinariamente impiego nelle costruzioni, il solo per il quale sia disponibile la soluzione esatta e' la sezione circolare o anulare (*). Altre sezioni, anche semplici come la rettangolare, richiedono per la risoluzione analitica del problema della torsione, l'adozione di metodi di approssimazione

(*) Altre soluzioni in termini finiti si riferiscono a sezioni assai poco usate nella tecnica.

analitici (Appendice A11) o numerici, coi quali invero la precisione dei calcoli puo' essere spinta fino al grado che si desidera. Per i casi particolarmente complicati per l'indagine analitica esistono metodi sperimentali, come quello basato sull'analogia della membrana (Appendice A11), i quali pero' richiedono apposita attrezzatura da laboratorio. D'altra parte, per l'uso corrente, sono disponibili soluzioni approssimate che permettono una discreta valutazione delle tensioni ed un calcolo notevolmente piu' preciso della rigidezza. Una netta distinzione esiste nel comportamento a torsione, fra le sezioni aperte (semplicemente connesse) e quelle chiuse (piu' volte connesse).

Per le sezioni aperte sottili (o almeno, non massicce) vale l'estensione della soluzione relativa alla striscia, indicata nel § VII.4. Il modulo torsionale si valuta con buona precisione mediante la [118]. A tale proposito si rileva come il comportamento a flessione e a torsione differiscano fra loro: qui le rigidezze delle varie parti nelle quali si e' scomposta la sezione (sempre che cio' sia fatto con tagli corti) si sommano semplicemente, mentre nella flessione la rigidezza complessiva e' ben maggiore, in generale, che la somma delle rigidezze parziali. L'intuizione circa l'andamento delle $\vec{\tau}$ e' sorretta dalla considerazione che attraverso qualunque corda il flusso deve essere nullo, e quindi debbono aversi componenti normali di versi opposti sulla stessa corda (fig. 37) e che presso il contorno la $\vec{\tau}$ deve disporsi tangente ad esso. A differenza dalla flessione (e dalla torsione delle sezioni circolari) la distanza dal baricentro non ha peso sulla intensita' della $\vec{\tau}$ (*). Le massime τ si hanno nelle zone concave del contorno: uno spigolo rientrante senza o con scarso arrotondamento darebbe luogo a tensioni altissime. Queste concentrazioni di sforzi vengono a dipendere dall'andamento locale della linea di contorno e possono essere valutate con buona approssimazione mediante formule in uso. Viceversa le tensioni svaniscono presso gli spigoli sporgenti, come nei vertici di un rettangolo.

Le sezioni cave presentano, a parita' di area, rigidezza e robustezza assai maggiore. La valutazione delle tensioni e del modulo torsionale secondo quanto e' detto nel § VII.3 e' notevolmente piu' precisa che per le sezioni aperte. La sezione ottima e' quella della trave tubulare sottile; ma un buon compor-

(*) A parte gli effetti di curvatura della linea media, le tensioni sul contorno possono calcolarsi con la formula $\tau = M_t s / J_t$ che si desume dalla [115].

tamento a torsione viene presentato da tutte le travi cave che racchiudano un'area non troppo piccola rispetto a quella della sezione anulare di ugual perimetro. Per una buona efficienza lo spessore di parete deve essere, per quanto e' possibile, uniforme.

Un'altra particolarita' della torsione nella teoria di St. Venant e' l'ingobbamento delle sezioni. Mentre la trave a sezione circolare o anulare soggetta a torsione mantiene le sezioni piane, ogni altra sezione aperta si trasforma in una superficie gobba: lo stesso fenomeno avviene, sia pure in misura generalmente ridotta, nelle sezioni cave. Lo studio di questa deformazione (Appendice A12) presenta interesse non per il fenomeno in se' ma per le conseguenze che esso ha nelle condizioni di vincolo. In pratica, infatti, e' impossibile vincolare la trave soggetta a torsione in modo da consentire questo ingobbamento. La situazione reale si discosta quindi sempre, piu' o meno, dalla soluzione sopra studiata che viene detta della "torsione secondo St. Venant". Si producono tensioni σ_z per ostacolato ingobbamento e si manifesta un aumento di rigidezza. Un esame approssimato del fenomeno sara' svolto nei §§ X.3 e X.4.

La torsione delle sezioni cave con setti longitudinali (sezioni piu' che due volte connesse) presenta problemi addizionali che, se la parete e' sottile, si trattano facilmente secondo gli schemi delle strutture iperstatiche (Appendice A13).