

CAPITOLO IV

LE PROPRIETA' DEL CORPO ELASTICO

IV.1 - Il corpo elastico. Consideriamo un elemento di volume dV di un solido e supponiamo di applicargli certe tensioni $\sigma_x, \dots, \tau_{zx}$. La particella manifesterà una certa deformazione di componenti $\epsilon_x, \dots, \gamma_{zx}$. Postuliamo anzitutto che i valori delle ϵ, γ siano legati alle σ, τ da leggi dipendenti solo dal materiale che costituisce la particella, le quali quindi, ad es., non mutino a seconda delle dimensioni dell'elemento: se la particella viene frazionata o le se ne aggrega un'altra, quelle leggi restino inalterate. Da ciò consegue un'importante proprietà di *similitudine*: se costituiamo due corpi simili perfettamente, anche nelle loro eventuali eterogeneità, tali cioè che ogni dimensione dell'uno stia alla corrispondente dell'altro in un rapporto fisso r , creando nei due corpi lo stesso stato di tensione si avranno le medesime componenti di deformazione. Le forze agenti sulle aree corrispondenti dovranno stare, come le aree, nel rapporto r^2 ; gli spostamenti corrispondenti staranno, come le lunghezze, nel rapporto r .

Il legame fra tensioni e deformazioni può assumere differenti forme. L'ipotesi più semplice è che, in qualunque fase di carico, crescente o decrescente, esista una corrispondenza biunivoca fra le σ, τ da una parte e le ϵ, γ dall'altra: ossia che ad un assegnato sistema di valori attuali per le sei grandezze di un gruppo corrisponda un determinato sistema di valori per le sei dell'altro gruppo. Il corpo che presenti questa proprietà si dice *elastico*. I *limiti elastici* sono costituiti da quegli stati di sollecitazione tali che la proprietà enunciata sussista per tensioni minori e cessi di valere per tensioni più alte.

È facile immaginare come una grande varietà di casi possa presentarsi invece con materiali non elastici. Il tempo può intervenire nel processo di deformazione che allora dipenderà dalla legge cronologica dell'operazione di carico. Anche nel caso di relazioni indipendenti dal tempo, le fasi antecedenti di carico possono farsi risentire nello stato attuale di de-

formazione, come avviene per le deformazioni plastiche. Dunque la postulata indipendenza della situazione attuale dal processo antecedente e' una proprieta' di grande peso; tanto che se si pretendesse di riscontrarla verificata nella struttura con assoluto rigore, nessun corpo si troverebbe qualificabile come elastico. Peraltro, restringendo opportunamente il campo entro cui si contengono le deformazioni, si puo' per molte costruzioni ammettere che sussista la corrispondenza biunivoca enunciata. Anzi, per deformazioni sufficientemente piccole si puo' ritenere che la legge di dipendenza sia lineare; ossia che ciascuna delle componenti di deformazione sia espressa da una combinazione lineare del tipo:

$$\epsilon_x = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + \dots + a_{16}\tau_{zx} \quad [19]$$

I fattori $a_{11}, \dots, a_{66}$ delle 6 relazioni [19] sono 36 costanti elastiche del materiale, i cui valori possono variare da un punto all'altro del corpo se il materiale non e' omogeneo. Le medesime proprieta' elastiche sono rappresentate da sei relazioni del tipo:

$$\sigma_x = b_{11}\epsilon_x + b_{12}\epsilon_y + \dots + b_{16}\gamma_{zx} \quad [20]$$

che si ottengono risolvendo le [19] come equazioni nelle tensioni. Queste relazioni esprimono nella forma piu' generale la cosi' detta *legge di Hooke*.

IV.2 - Conseguenze della linearita' delle equazioni fondamentali. Il sistema di sei equazioni alle derivate parziali costituito dalle condizioni di equilibrio [13] e dalle condizioni di congruenza [A25]-[A27] (*) si puo' adesso ridurre a contenere sei funzioni incognite, le quali possono essere le σ, τ se mediante le [19] eliminiamo le ϵ, γ dalle condizioni di congruenza. O anche, per altra via, possiamo nelle [20] sostituire le espressioni [1]-[6] delle ϵ, γ e poi, sostituendo nelle [13] le espressioni trovate per le σ, τ ottenere un sistema di tre equazioni negli spostamenti u, v, w . Per queste o per altre vie si giunge ad un sistema di equazioni *lineari* nelle derivate parziali delle funzioni incognite, che deve naturalmente essere completato dalle condizioni al contorno, le quali in generale prescrivono tensioni o spostamenti sulla superficie del corpo o stabiliscono relazioni fra forze e spo-

(*) Come s'e' osservato, le [A22]-[A24] possono essere aggregate alle condizioni al contorno quando si operi per questa via.

stamenti. Se anche queste relazioni sono lineari, ossia se in nessuna di esse appare una potenza o un prodotto di funzioni incognite, il problema in esame e' lineare.

Conseguenza importante della linearita' del problema e' la unicita' della soluzione. Come Kirchhoff provo', ogni problema d'elasticita' lineare ammette una soluzione unica. Percio' se per una struttura o per un elemento strutturale riusciamo a trovare certe funzioni che, assunte a rappresentare tensioni e deformazioni, verificano le condizioni di equilibrio con i carichi applicati e soddisfano alle condizioni di congruenza, attuando anche una definita configurazione di spostamenti nei punti ove questi sono prescritti, possiamo affermare che, tutte le volte che il corpo sia soggetto a quei carichi e gli siano impressi quegli spostamenti (o spostamenti che si riconducano a quelli mediante un moto rigido) lo stato di tensione sara' quello calcolato. Questa proprieta' e' importante poiche' apre la possibilita' di soluzioni indirette, fondate su indovinate posizioni circa le funzioni incognite.

Altra conseguenza importante della linearita' e' il principio di *sovrapposizione degli effetti*, del quale si e' detto nel § I.5 del Vol. I.

IV.3 - Considerazioni energetiche. La corrispondenza, lineare o no, fra tensioni e deformazioni supposta indipendente dallo sviluppo cronologico del processo, implica una importante conseguenza circa il lavoro speso nella deformazione. Supponiamo che nel passaggio da una configurazione I ad una II si percorrano due differenti successioni di deformazioni che indichiamo con c' e c'' , e si spendano due diversi ammontari di energia, che indichiamo con L' e L'' rispettivamente, considerandone come negativi i valori relativi al caso in cui il corpo faccia lavoro motore. Poniamo che sia $L'' > L'$, eventualmente permutando i simboli. Se dallo stato II si passa allo stato I percorrendo in senso inverso il processo c'' , si spende il lavoro $-L''$; quindi percorrendo il ciclo chiuso che da I porta a II per il processo c' e poi da II a I per il processo c'' invertito, ricaviamo dal corpo l'energia $L'' - L'$. Ma questa possibilita' e' ovviamente da escludere: quindi deve essere $L'' = L'$. In particolare, il lavoro speso per passare dallo stato di tensioni e deformazioni nulle (*stato naturale*) ad uno stato deformato qualunque sara' una funzione dipendente solo dalle condizioni finali, non dal cammino percorso nella deformazione. Questa funzione si chiama *energia elastica* dell'elemento.

Consideriamo un elemento parallelepipedo di materiale elastico, con lati dx, dy, dz paralleli ai tre assi, e determiniamo il lavoro che si deve spendere per portarlo dallo stato naturale alla configurazione corrispondente a certe tensioni $\sigma_x, \dots, \tau_{zx}$. Il lavoro dL speso rappresenterà l'energia $d\phi$ che si immagazzina nell'elemento deformato. Quando si applichino le tensioni $r\sigma_x, \dots, r\tau_{zx}$, essendo r un fattore che facciamo crescere da zero a 1 (*processo proporzionale*), per la

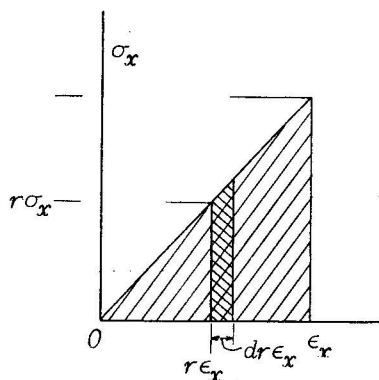


Fig. 15

linearità, le deformazioni corrispondenti saranno date da $r\epsilon_x, \dots, r\gamma_{zx}$ se $\epsilon_x, \dots, \gamma_{zx}$ sono le deformazioni finali. Per calcolare i lavori in questione utilizziamo i risultati trovati nel § III.1: in base a questi, si potrà seguire il processo in sei separati diagrammi (*) come quello della figura 15, ciascuno avente in ascissa una componente di deformazione e in ordinata la corrispondente componente di tensione; il lavoro relativo all'incremento dr è rappresentato dalla striscia a doppio tratteggio in figura e dalle ana-

loghe sugli altri cinque diagrammi. Il lavoro totale sarà dato dalla somma delle aree dei sei triangoli come quello della fig. 15 e si avrà, per l'elemento dV ,

$$dL = d\phi = \frac{1}{2} (\sigma \cdot \epsilon) dV \quad [21]$$

indicandosi con $(\sigma \cdot \epsilon)$ l'espressione che deriva dalla [14] quando i sistemi a e b coincidano nell'attuale deformazione.

Dalla [21], mediante la legge di Hooke, possiamo avere una espressione dell'energia elastica $d\phi$ in funzione delle sole componenti di deformazione o di quelle di tensione. La somma di termini quadratici che così si ottiene è una "forma quadratica" omogenea, necessariamente positiva poiché è fisicamente assurdo che a deformare un corpo si possa ricavare energia: altrimenti lo stato naturale sarebbe instabile.

Perché l'energia elastica sia sempre positiva, i coeffi-

(*) Le pendenze dei sei grafici non dipendono solo dalle caratteristiche del materiale, ma anche dai rapporti fra le componenti della deformazione che si considera.

cienti della forma $(\sigma \cdot \epsilon)$, e quindi quelli della legge di Hooke [19] o [20], debbono soddisfare a certe ineguaglianze. Inoltre, per il fatto stesso che esista un'energia elastica, i coefficienti delle [19], [20] sono soggetti a certe eguaglianze, come risulta dalle considerazioni seguenti:

Si imprima all'elemento dV una deformazione a con processo proporzionale e poi una deformazione b con metodo analogo. Il lavoro speso in questa deformazione, per unita' di volume, e' dato da

$$\frac{1}{2}(\sigma^a \cdot \epsilon^a) + (\sigma^a \cdot \epsilon^b) + \frac{1}{2}(\sigma^b \cdot \epsilon^b)$$

Questo risulta dall'esame della fig. 16: i tre termini sopra indicati rappresentano le aree dei triangoli OPQ , dei rettangoli $PQRS$ e dei triangoli QRT , sommati sui sei grafici che rappresentano il processo.

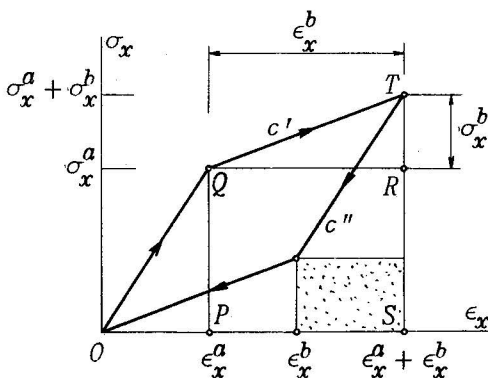


Fig. 16

Si applichino quindi successivamente le deformazioni a e b invertite. Il punto rappresentativo torna in O per il cammino c'' . Il lavoro restituito dal corpo in questa operazione e'

$$\frac{1}{2}(\sigma^b \cdot \epsilon^b) + (\sigma^b \cdot \epsilon^a) + \frac{1}{2}(\sigma^a \cdot \epsilon^a)$$

Per l'eguaglianza dei due lavori deve essere

$$(\sigma^a \cdot \epsilon^b) = (\sigma^b \cdot \epsilon^a) \quad [22]$$

ossia la somma delle aree dei sei rettangoli analoghi a $PQRS$

deve eguagliare quella dei rettangoli analoghi a quello punteggiato in figura.

La [22] implica che, se i coefficienti delle relazioni [19] o [20] sono ordinati in forma di determinante, questo deve essere simmetrico. Infatti, se si scrive la [22] quando siano solo σ_x^a e σ_y^b differenti da zero, e quindi sia $\epsilon_x^b = a_{12}\sigma_y^b$, $\epsilon_y^a = a_{21}\sigma_x^a$, si trova che e' $a_{12} = a_{21}$: e cosi' per ogni coppia di coefficienti che differiscano per una permutazione dei due indici. Queste eguaglianze riducono a 21 i coefficienti che, in base alle [19] o [20], definiscono le proprieta' elastiche nel caso piu' generale di corpo anisotropo.

IV.4 - Il teorema di Betti. La [22] estende a qualsiasi corpo elastico la proprieta' di simmetria rispetto agli indici a, b che era stata constatata per l'espressione di L_i^{ab} relativa alle strutture di travi nella Parte I. Sara' cioe' in ogni caso

$$L_i^{ab} = L_i^{ba} \quad [23]$$

Quindi, con le medesime considerazioni del § VI.2 della Parte I, si puo' affermare che: in un corpo elastico, il lavoro che un sistema di carichi 1 compie per gli spostamenti prodotti da un sistema 2 di carichi e' uguale al lavoro del secondo sistema per gli spostamenti relativi al primo (Teorema di Betti).

IV.5 - Lavoro di deformazione ed energia vincolata. Supponiamo che il corpo (elastico) gia' prima di essere caricato, presenti nel suo interno certe tensioni che indichiamo con σ_0 . Queste soddisferanno dunque alle equazioni di equilibrio senza intervento di carichi esterni. Se frazionassimo il corpo in elementi di volume, constateremmo che questi, quando siano isolati l'uno dall'altro, presenteranno certe deformazioni $-\epsilon_0$, uguali e contrarie a quelle che corrispondono alle σ_0 secondo la legge di Hooke. Diciamo che il corpo in tal caso e' in stato di *coazione*.

Applichiamo alla struttura in esame un sistema di carichi F , i quali vi producano spostamenti η e deformazioni ϵ , a partire dallo stato iniziale di coazione. Indichiamo con $\sigma_t = \sigma_0 + \sigma$ le tensioni che si verificano sotto carico. Ovviamente le tensioni σ sono le stesse che si produrrebbero in assenza di tensioni iniziali; infatti le σ fanno equilibrio alle forze F (poiche' le σ_0 sono per se' equilibrate) e corrispondono alla deformazione congruente ϵ secondo la legge

di Hooke, come se le σ_0 non esistessero (poiche' quella e' lineare). Indichiamo ϕ l'energia potenziale elastica del corpo caricato; sara'

$$\phi = \frac{1}{2} \int (\sigma_t \cdot \epsilon_t) dV \quad [24]$$

essendo $\epsilon_t = \epsilon_0 + \epsilon$. Nello stato iniziale l'energia e'

$$\phi_0 = \frac{1}{2} \int (\sigma_0 \cdot \epsilon_0) dV \quad [25]$$

Osserviamo che e'

$$\int (\sigma_0 \cdot \epsilon) dV = 0 = \int (\sigma \cdot \epsilon_0) dV \quad [26]$$

Infatti, se, per la scrittura della [15], le tensioni σ_0 sono assunte come sistema a e le deformazioni congruenti ϵ come sistema b , si ha $L_e^{ab} = 0$, poiche' le forze F^a sono nulle. Quindi il primo degli integrali nella [26] deve essere nullo, come espressione del corrispondente lavoro L_i ; parimenti deve esserlo il secondo, per la [22]. Percio', se nell'espressione integranda nella [24] si effettuano le sostituzioni $\sigma_t = \sigma_0 + \sigma$, $\epsilon_t = \epsilon_0 + \epsilon$, sviluppando e tenendo conto delle [26] si trova

$$\phi = \phi_0 + L \quad [27]$$

essendo

$$L = \frac{1}{2} \int (\sigma \cdot \epsilon) dV \quad [28]$$

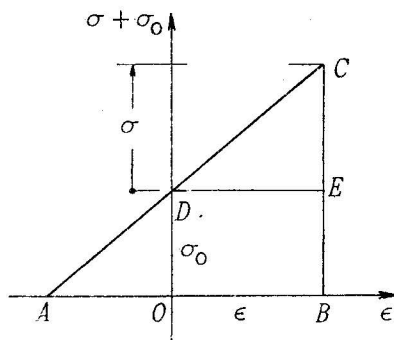


Fig. 17

Questa quantita', detta *lavoro di deformazione*, rappresenta l'energia che si accumulerebbe nel corpo deformato elastico se esso nello stato iniziale fosse esente da tensioni.

La relazione [27] trova corrispondenza nei sei grafici che, come quello della fig.17 rappresentano i lavori in bilancio, riferiti al volume. Il punto D rappresenta lo stato iniziale di coazione, il punto C lo stato finale. Il triangolo ABC , coi cinque analoghi negli altri grafici, da' il valore di $d\phi/dV$. I triangoli AOD e DEC corrispondono a $d\phi_0/dV$ e dL/dV . La somma delle aree dei sei rettangoli $OBED$, integrata all'intero corpo, da' contributo nullo, secondo la [26].

IV.6 - Teoremi sul lavoro di deformazione. Alle tensioni e deformazioni effettive si puo' applicare l'equazione dei lavori, assumendo le prime per il sistema a perche' in equilibrio con le forze applicate e le seconde come sistema b perche' congruenti. Quindi si ha

$$\int (\sigma \cdot \epsilon) dV = \sum \vec{F} \cdot \vec{\eta} \quad [29]$$

e, tenendo presente la [28] si puo' affermare: il lavoro di deformazione e' dato dalla meta' del lavoro che i carichi farebbero per gli spostamenti da essi prodotti se agissero con intensita' costante durante la deformazione (Teorema di Clapeyron).

Poiche' l'energia vincolata e' quantita' sempre positiva, la energia corrispondente alle tensioni $\sigma_0 + \sigma$ e' sempre maggiore di quella relativa alle tensioni σ , comunque si fissi il sistema σ_0 , purché questo sia in equilibrio in assenza di forze esterne (le reazioni vincolari eventuali considerandosi come forze interne). La quantita' ϕ puo' essere interpretata come lavoro di deformazione relativo ad un sistema di tensioni equilibrato, ma che da' deformazioni non congruenti se il corpo parte dallo stato naturale; L e' il lavoro di deformazione per il sistema di tensioni che fa equilibrio ai medesimi carichi ma da' deformazioni congruenti. Dalla [27] si conclude dunque: fra tutti i sistemi di tensioni che rispettano le condizioni di equilibrio con assegnati carichi, quello che da' deformazioni congruenti e' quello che da' il minimo lavoro di deformazione (Teorema di Menabrea). L'eccedenza del lavoro per il sistema non congruente rispetto al valore effettivo rappresenta l'energia elastica relativa alla differenza fra le tensioni effettive e quelle del sistema non congruente.

Le condizioni necessarie per il minimo a cui si riferisce il teorema di Menabrea si possono scrivere nella forma

$$\int (\delta \sigma \cdot \epsilon) dV = 0 \quad [30]$$

dove $\delta \sigma$ rappresenta un sistema di tensioni, come le σ_0 , in equilibrio senza intervento di carichi esterni, mentre le ϵ sono le deformazioni effettive. Variando la scelta delle tensioni $\delta \sigma$ si possono ottenere tante equazioni quante si ritengano necessarie a definire con sufficiente precisione la soluzione: Se si vogliono scrivere n equazioni, si pone per una componente generica di tensione

$$\sigma = \tilde{\sigma} + \sum X_i \sigma_i \quad [31]$$

essendo $\tilde{\sigma}$ un sistema di sforzi che soddisfa alle condizioni di equilibrio coi carichi applicati (*sistema principale*) e σ_i uno fra n sistemi che verificano l'equilibrio con carichi nulli (*sistemi supplementari*). Gli n fattori incogniti X_i vengono calcolati in base alle condizioni di minimo che assumono la forma

$$\partial L / \partial X_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad [32]$$

Dette ϵ_i le deformazioni corrispondenti alle σ_i si ha

$$\epsilon_i = \partial \epsilon / \partial X_i, \quad \sigma_i = \partial \sigma / \partial X_i$$

e quindi, tenendo presente la [22]

$$\frac{\partial}{\partial X_i} (\sigma \cdot \epsilon) = (\sigma_i \cdot \epsilon) + (\sigma \cdot \epsilon_i) = 2(\sigma_i \cdot \epsilon)$$

Le [32] si riducono quindi alla stessa espressione [30], $\delta \sigma$ essendo sostituito da σ_i ; questa è la forma delle condizioni di congruenza che direttamente si deduce dall'equazione dei lavori virtuali, come per le travature si è visto nella Parte I (equazioni di elasticità).

Supponiamo ora che le tensioni σ_i corrispondano in condizioni di equilibrio a certe forze U_i . Per l'equazione dei lavori, assumendo come sistema a le tensioni σ_i associate ai carichi U_i e come sistema b la deformazione effettiva, si trova

$$\frac{\partial L}{\partial X_i} = \int (\sigma_i \cdot \epsilon) dV = \sum U_i \cdot \vec{\eta} \quad [33]$$

In particolare, se i carichi U_i si riducono ad una forza unitaria, si giunge all'enunciazione del teorema di Castigliano: la derivata del lavoro di deformazione rispetto ad una forza misura la componente di spostamento del punto di applicazione della forza nella direzione della forza stessa.

Se riportiamo in funzione di $F = X_i U_i$ i valori del lavoro di deformazione della struttura soggetta a carichi fissi e alla forza F variabile, otteniamo una parabola p (figura 18) la cui concavità deve necessariamente essere volta verso l'alto, dato che L deve essere sempre positivo per qualsiasi valore di X_i . La pendenza del diagramma misura lo spostamento del punto di applicazione della forza F ; il minimo di L si raggiunge per quel valore di X_i per il quale detto spostamento si annulla: ciò corrisponde alla presenza di un vincolo rigido, secondo il teorema di Menabrea.

Secondo l'equazione dei lavori virtuali, le condizioni di

equilibrio del sistema di tensioni σ sotto i carichi $\vec{F}$ si possono scrivere nella forma

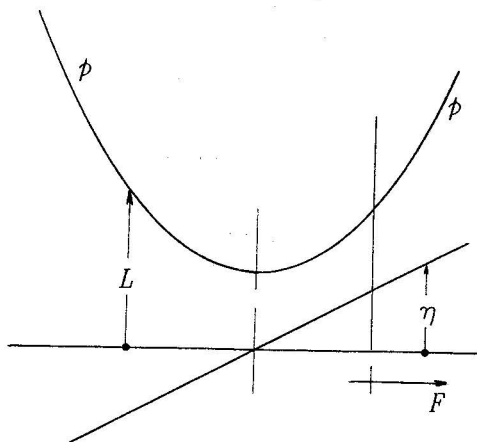


Fig. 18

$$\int (\sigma \cdot \delta \epsilon) dV = \sum \vec{F} \cdot \delta \vec{\eta} \quad [34]$$

essendo $\delta \epsilon$ un sistema di deformazioni congruenti che danno spostamenti $\delta \vec{\eta}$ nei punti di applicazione delle forze $\vec{F}$. Se consideriamo le tensioni σ dipendenti attraverso la legge di Hooke dalle ϵ , e a questa deformazione diamo la variazione congruente $\delta \epsilon$ abbiamo, sempre per la [22]

$$\delta(\sigma \cdot \epsilon) = (\delta \sigma \cdot \epsilon) + (\sigma \cdot \delta \epsilon) = 2(\sigma \cdot \delta \epsilon)$$

Quindi il primo membro della [34] rappresenta la variazione del lavoro di deformazione prodotta dalla variazione di deformazione $\delta \epsilon$; il secondo membro rappresenta la corrispondente variazione della quantità $\sum \vec{F} \cdot \vec{\eta}$, nella quale le forze $\vec{F}$ non vanno variate. Quindi le condizioni di equilibrio [34] corrispondono alle condizioni di minimo della quantità $L - \sum \vec{F} \cdot \vec{\eta}$, detta energia potenziale totale, per variazioni congruenti di deformazione. Per una più completa discussione di questo e degli altri principi variazionali vedasi l'Appendice A10.

IV.7 - Il corpo elastico isotropo. Per il corpo isotropo le [19] si riducono alla forma (*)

$$E \epsilon_x = \sigma_x - \nu \sigma_y - \nu \sigma_z \quad [35']$$

$$E \epsilon_y = \sigma_y - \nu \sigma_z - \nu \sigma_x \quad [35'']$$

$$E \epsilon_z = \sigma_z - \nu \sigma_x - \nu \sigma_y \quad [35''']$$

$$G \gamma_{xy} = \tau_{xy}, \quad G \gamma_{yz} = \tau_{yz}, \quad G \gamma_{zx} = \tau_{zx} \quad [36'] [36''] [36''']$$

(*) Le [35]–[37] si giustificano in base alla condizione di isotropia, per la quale i coefficienti che vi appaiono non debbono cambiare se si modifica la scelta degli assi. Perciò si osserva:

a) Invertendo il verso positivo dell'asse x , si inverte il segno di $\tau_{xy}, \tau_{zx}, \gamma_{xy}, \gamma_{zx}$ mentre le altre componenti di tensione e deformazione

(continua)

essendo

$$G = E/2(1 + \nu) \quad [37]$$

In luogo delle 21 costanti che definiscono le proprietà elastiche nel caso generale di anisotropia, appaiono qui solo due costanti proprie di ciascun materiale: il modulo elastico (o di Young) E e il coefficiente di contrazione trasversale (o di Poisson) ν , la terza costante G , detta modulo d'elasticità tangenziale, essendo legata alle prime due dalla [37].

Dalle [35] si trae, sommando membro a membro, una interessante conclusione

$$E \epsilon_c = (1 - 2\nu)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad [38]$$

Il coefficiente di dilatazione cubica $\epsilon_c = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$ (coefficiente della variazione di volume) è dunque legato alla somma delle tre σ da proporzionalità secondo il fattore $E/(1 - 2\nu)$ che indichiamo con E_c .

Circa i valori delle costanti elastiche, la condizione che

(segue nota da pagina precedente)

restano immutate. Poiché nel nuovo riferimento la legge di Hooke deve restare invariata, devono essere nulli i coefficienti di τ_{xy} e τ_{zx} nelle espressioni di $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{yz}$ e quelli di $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}$ nelle espressioni di γ_{xy} e γ_{zx} . Analoga considerazione per l'asse y porta a cancellare altri 8 coefficienti, oltre i 16 prima menzionati.

b) I coefficienti dei rimanenti 12 termini debbono ripetersi come avviene nelle [35]–[36] perché una permutazione dei tre assi non modifichi le cose.

c) Per provare infine la [37] basta rotare la terna di riferimento intorno a z di 45° . Le componenti del versore $\vec{a}$ del nuovo asse x' saranno

$$a_x = 1/\sqrt{2}, \quad a_y = 1/\sqrt{2}, \quad a_z = 0$$

e quelle del versore $\vec{b}$ del nuovo asse y'

$$\beta_x = -1/\sqrt{2}, \quad \beta_y = 1/\sqrt{2}, \quad \beta_z = 0$$

L'espressione [A15] di γ_{ab} dallo scorrimento dei nuovi assi

$$\gamma_{x'y'} = \epsilon_y - \epsilon_x$$

Dalla [A31] si ha

$$\tau_{x'y'} = \vec{\sigma}_a \cdot \vec{b} = (\sigma_y - \sigma_x)/2$$

Per le [35'], [35''] e'

$$E(\epsilon_x - \epsilon_y) = (1 + \nu)(\sigma_x - \sigma_y)$$

Perché questa relazione concordi con la $G\gamma_{x'y'} = \tau_{x'y'}$ deve sussistere la [37].

l'energia elastica sia quantita' sempre positiva (*) impone le condizioni:

$$E > 0 \quad , \quad -1 < \nu < 0,5$$

Il modulo E puo'essere misurato mediante la prova di trazione, come s'e' visto nella parte I. La stessa prova puo' fornire il coefficiente ν , come rapporto fra le contrazioni trasversali e le dilatazioni longitudinali. Il coefficiente ν ha valore non lontano da 0,3 per i materiali metallici usati nelle costruzioni, ha valore pressoché nullo per i materiali lapidei, mentre si approssima a 0,5 per la gomma e le materie plastiche. Al valore limite 0,5 corrisponderebbe secondo la [38] un materiale incompressibile, ossia deformabile senza variazione di volume.

Se al corpo isotropo viene applicato uno stato di tensione per il quale $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 0$, si produce una deformazione a volume costante, secondo la [38] e inoltre le [35] assumono la forma

$$\sigma_x/\epsilon_x = \sigma_y/\epsilon_y = \sigma_z/\epsilon_z = 2G \quad [39]$$

Dunque nella deformazione a volume costante ciascuna componente di tensione e' proporzionale alla omologa componente di deformazione, i rapporti essendo stabiliti dal modulo tangenziale G . E' naturale pensare di scomporre la deformazione nella parte a volume costante, retta dalle [36] e [39] e nella variazione di volume omotetica, con $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \epsilon$ a cui corrispondono tensioni $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = E_c \epsilon$. Si intende che ciascuna componente di tensione e di deformazione consta dei due addendi. Diversi fatti mostrano che questa decomposizione risponde ad intrinseche caratteristiche del fenomeno fisico:

a) Anche per quanto riguarda l'energia elastica si presenta la scomposizione in una parte relativa alla variazione di forma e una parte, indipendente, relativa alla variazione di volume.

b) Una variazione di temperatura t non da' variazione di forma ma solo di volume, producendo le deformazioni

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \alpha t \quad [40]$$

(*) Se fosse $E < 0$, applicando solo una tensione σ_x si troverebbe una ϵ_x di segno opposto alla tensione che la genera. Se fosse $\nu < -1$ sarebbe $G < 0$ e quindi la γ_{xy} avrebbe segno opposto alla τ_{xy} . Se fosse $\nu > 0,5$ secondo la [38], ad una compressione idrostatica $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$ corrisponderebbe un aumento di volume. Queste tre eventualita' sono fisicamente assurde.

dove α e' il coefficiente di dilatazione termica.

c) I limiti elastici per la [38] sono assai piu' ampi che quelli relativi alle [36].

IV.8 - I limiti di resistenza. In base alla prova di trazione si possono individuare i limiti di proporzionalita', di elasticita' e di snervamento. Il primo e' rappresentato dalla tensione al di sotto della quale, entro una prefissata approssimazione, si puo' ritenere verificata la legge di Hooke; il secondo rappresenta la σ per la quale la deformazione che rimane scaricando la provetta raggiunge un certo fissato valore; analoga definizione viene data per il terzo limite, naturalmente prescrivendo un valore piu' alto per la deformazione residua. Si e' detto che, poiche' si fara' riferimento solo all'*elasticita' lineare*, non occorre far distinzione fra limite di proporzionalita' e limite di elasticita'. Altro elemento fornito dalla prova di trazione e' il valore massimo σ_R di σ , per il quale si ha la rottura della provetta. Analoghi elementi possono essere ottenuti dalla prova di compressione, purché si eliminino con opportuni accorgimenti le interferenze con fenomeni di instabilita' dell'equilibrio elastico.

Ambedue le prove menzionate si riferiscono a stati *uniassici* di tensione, per i quali cioe' una sola delle tensioni principali e' differente da zero. Si presenta quindi il quesito: con quali criteri dai risultati di queste prove si possono desumere i dati necessari per condizioni piu' generali di sollecitazione, nelle quali due delle tensioni principali o tutte e tre siano diverse da zero? Posto che dai valori locali e attuali delle tensioni principali dipenda il comportamento di una particella, quale funzione di $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ e' atta a caratterizzarlo? In termini analitici, si tratta dunque di trovare un'espressione $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ tale che, in base ai valori di $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ si possa calcolare una tensione *ideale o indicativa* $\sigma_{id} = f$ per la quale la provetta in tensione uniassica si trovasse nella medesima situazione dell'elemento in tensione triassiale. In termini geometrici, si tratta di determinare, in uno spazio in cui si assumono come coordinate $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, una superficie tale che quando il punto rappresentativo la raggiunga, il materiale si venga a trovare nella condizione limite a cui quella superficie si riferisce. Se σ_e e' il limite elastico desunto dalla prova di trazione, il materiale si comportera' elasticamente finche' $\sigma_{id} \leq \sigma_e$, ossia finche' il punto rappresentativo cade all'interno della superficie $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_e$. Oltrepassando quella superficie il punto puo' raggiungere

la superficie limite di snervamento e infine quella di rottura.

Ai quesiti sopra formulati sono state date differenti risposte, ma non e' stata sinora trovata una soluzione del tutto soddisfacente in ogni caso; forse e' impossibile trovare una formulazione unica per fenomeni che, a seconda del materiale, presentano aspetto differente. Menzioneremo le teorie piu' diffuse, con particolare riferimento al luogo dei limiti elastici, premettendo alcune considerazioni generali.

In genere, la condizione a cui $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ debbono soddisfare perche' il materiale si comporti elasticamente e' rappresentata da diverse ineguaglianze: ciascuna di queste, nello spazio di rappresentazione, individua una superficie rispetto alla quale il punto rappresentativo deve risultare interno ossia deve stare dal lato dell'origine perche' il materiale resti elastico. Quindi la superficie limite sara' costituita da porzioni delle superfici parziali, di ciascuna prendendosi la parte interna alle altre. Naturalmente di tale superficie limite non si potra' dare un'espressione analitica valevole in tutto il campo: si avranno invece espressioni valide per settori. Si presenta percio' particolarmente utile la rappresentazione grafica. Per la rappresentazione nello spazio di coordinate $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ adotteremo una proiezione assonometrica nella direzione della trisettrice, cioe' della retta che forma tre angoli uguali (di coseno pari a $1/\sqrt{3}$) con le direzioni positive

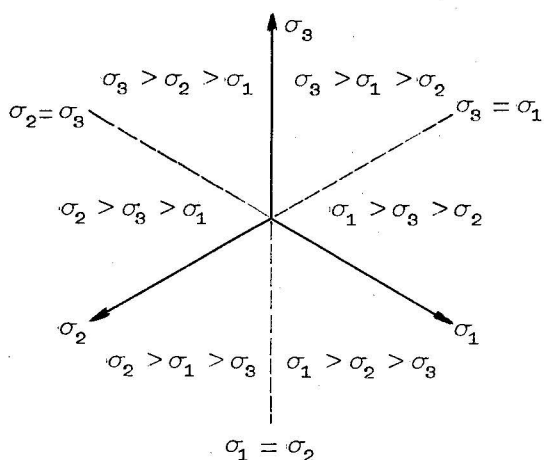


Fig. 19

degli assi. Questi vi appaiono proiettati secondo tre rette a 120° . I tre piani (di equazione $\sigma_1 = \sigma_2$, $\sigma_2 = \sigma_3$, $\sigma_3 = \sigma_1$) bisettrici dei diedri che fanno a due a due i piani coordinati sono normali al piano di proiezione e vi hanno tracce coincidenti con le proiezioni degli assi. Essi dividono il campo in 6 settori caratterizzati dalle ineguaglianze segnate nella fig. 19. Rispetto a questi piani bisettrici la superficie limite deve essere simmetrica, poiche', se il materiale e' isotropo,

nulla deve mutare se si scambiano fra loro due delle direzioni principali. In ogni caso, bastera' dunque che si conosca la

superficie limite nel diedro di 60° delimitato da due piani bisettori perche' l'intera figura possa essere ottenuta per simmetria. Nell'assonometria, le sezioni coi piani coordinati appaiono riferite ad assi obliqui.

La formulazione sintetica (*) delle teorie a cui si fara' cenno e':

I) teoria della massima σ

$$\sigma_{-e} \leq \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \leq \sigma_e \quad [41]$$

II) teoria della massima ϵ

$$\sigma_{-e} \leq \sigma_1 - \nu\sigma_2 - \nu\sigma_3, \sigma_2 - \nu\sigma_3 - \nu\sigma_1, \sigma_3 - \nu\sigma_1 - \nu\sigma_2 \leq \sigma_e \quad [42]$$

III) teoria della massima τ

$$\sigma_1 - \sigma_2, \sigma_2 - \sigma_1, \sigma_2 - \sigma_3, \sigma_3 - \sigma_2, \sigma_3 - \sigma_1, \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_e \quad [43]$$

o anche

$$\sigma_{\max} - \sigma_{\min} \leq \sigma_e \quad [44]$$

IV) teoria dell'attrito interno

$$\sigma_{\max} - c\sigma_{\min} \leq \sigma_e \quad [45]$$

V) teoria della curva inviluppo

$$f(\sigma_{\max}, \sigma_{\min}) \leq \sigma_e \quad [46]$$

VI) teoria della τ ottaedrica

$$\sigma_{1d}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 \leq \sigma_e^2 \quad [47]$$

La teoria I venne piu' o meno esplicitamente formulata dai primi studiosi della resistenza dei materiali (Galileo, Navier, Rankine) i quali avevano in mente il fenomeno della rottura; infatti, da prove piu' recenti, la teoria appare applicabile a materiali fragili, per i quali i limiti di elasticita', snervamento e rottura sono assai prossimi. La teoria considera gli effetti di ciascuna tensione principale come indipendenti dalle altre. Quindi, secondo essa, si arriva al limite elastico quando σ_1 o σ_2 o σ_3 siano tali da produrre deformazioni anelastiche nella provetta in tensione uniassica. La superficie limite e' dunque un parallelepipedo retto; la sezione con

(*) Le ineguaglianze [41]-[47] scritte come eguaglianze rappresentano le equazioni delle superfici limite nello spazio di coordinate $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Si indica con σ_e il limite elastico a compressione.

un piano $\sigma_2 = \text{costante}$ e' un rettangolo i cui lati distano dall'origine di σ_e e σ_{-e} , limiti elastici a trazione e compressione (fig.20). La teoria non ri-

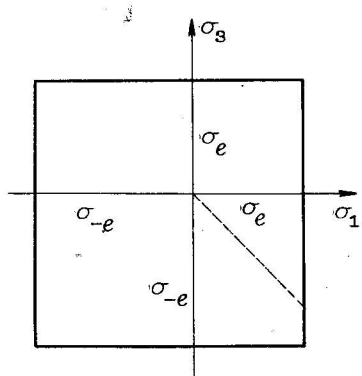


Fig. 20

specchia il comportamento degli ordinari materiali da costruzione. Essa infatti, per uno stato di tensione tangenziale pura ($\sigma_3 = -\sigma_1 = \tau$) darebbe per la τ limite il valore minore fra σ_e e $-\sigma_{-e}$ mentre il valore sperimentale e' notevolmente inferiore. Invece, per $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$ (compressione di tipo idrostatico) darebbe ancora σ_{-e} come limite elastico, mentre in queste condizioni non si verificano deformazioni plastiche anche per tensioni assai piu' alte.

La teoria II (di St.Venant) ammette che al limite elastico si arrivi quando la maggiore delle dilatazioni raggiunga il valore per cui la prova di tensione uniassica indica l'esistenza del limite elastico. La superficie limite e' un parallelepipedo obliquo. Nella figura 21 sono segnate tre sezioni del parallelepipedo con piani $\sigma_2 = \text{costante}$, per $\nu = 0,3$; esse sono formate da parallelogrammi troncati dall'intersezione la faccia $\sigma_2 - \nu\sigma_1 - \nu\sigma_3 = \sigma_e$. Per $\sigma_2 = 0$ i lati tagliano gli assi in corrispondenza dei limiti elastici per trazione o compressione. I difetti della teoria precedente

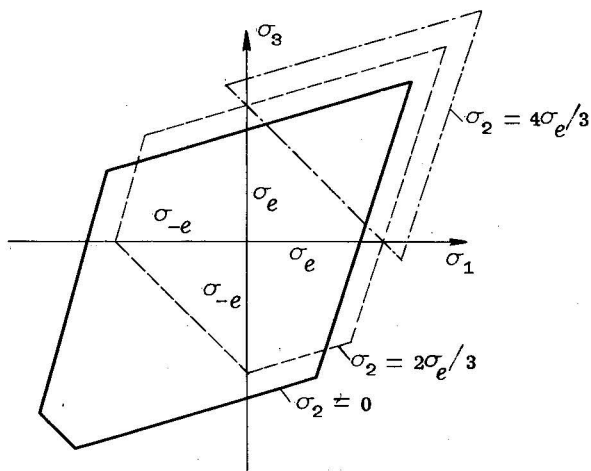


Fig. 21

sono qui mitigati: la τ limite di puro taglio e' ridotta a $\sigma_e/(1 + \nu)$, mentre la resistenza a compressione bi- o triassica e' incrementata. Nella rappresentazione assonometrica la superficie limite per le teorie I e II presenta il medesimo contorno apparente (fig.22) ma si differenzia con sezioni. Nella figura e' indicata la sezione $\sigma_2 = 0$ per la teoria II.

Le teorie III (di Guest), IV (di Coulomb) e V (di Mohr) pongono in relazione le condizioni limite con il maggiore dei cerchi di Mohr, che dipende dalla maggiore e dalla minore delle tensioni principali. Non avrebbe invece influenza la tensione principale intermedia fra le due.

La fig. 23 si riferisce alla teoria IV.

Il punto C della fig. 23a corrisponde alla rottura per trazione triassica ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_c$) per la quale il materiale cede per difetto di coesione. Secondo la teoria IV la situazione limite si raggiunge quando il più grande dei cerchi di Mohr tocca la retta che passa per C ed è inclinata sull'asse delle σ di un angolo φ dipendente dall'attrito interno

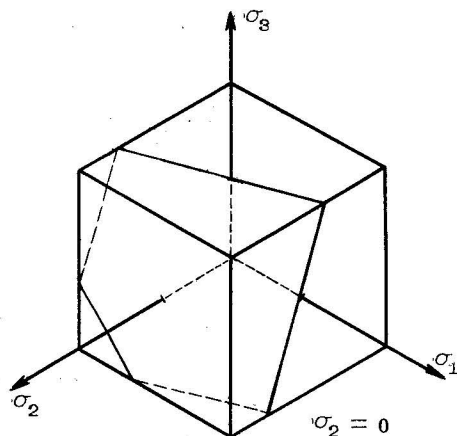


Fig. 22

del materiale; per il punto di contatto infatti il rapporto $\tau/(\sigma_c - \sigma)$ raggiunge il valore limite $\tan \varphi$. Nella figura sono segnati i cerchi di Mohr t, c corrispondenti alle prove di trazione e compressione. È facile vedere che la condizione di tangenza impone una relazione lineare fra le tensioni massima e minima, come indicato dalla [45], la costante c essendo data dal rapporto $-\sigma_e/\sigma_{-e}$. Di conseguenza, sulla sezione $\sigma_2 = 0$, (fig. 23b) i lati relativi ai quadranti dove σ_3 e σ_1 rappresentano le tensioni massime o minime sono costituiti da rette convergenti nel punto di ascissa e ordinata σ_c . La teoria III si può considerare come caso particolare della IV per $c = 1$: nel piano dei cerchi di Mohr la linea limite è costituita da due parallele all'asse delle ascisse, di equazione $\tau = \pm \sigma_e/2$. In questo caso è $\sigma_e = -\sigma_{-e}$. La teoria V costituisce invece una generalizzazione della III e IV; per essa la linea involuppo dei cerchi di Mohr, che sostituisce le rette della fig. 23a, è una curva caratteristica di ciascun materiale. Si viene così a stabilire una relazione fra le tensioni principali massima e minima, come indica la [46]. Perciò la superficie limite è formata da cilindri con generatrici parallele all'asse relativo alla tensione principale intermedia. Poiché, quando si passa dall'uno all'altro dei diedri della fig. 19 cambia il ruolo di tensione intermedia, la superficie limite è formata da sei spicchi cilindrici. Una situazione analoga si presenta per la teoria IV, con la particolarità che qui le facce componenti sono piane.

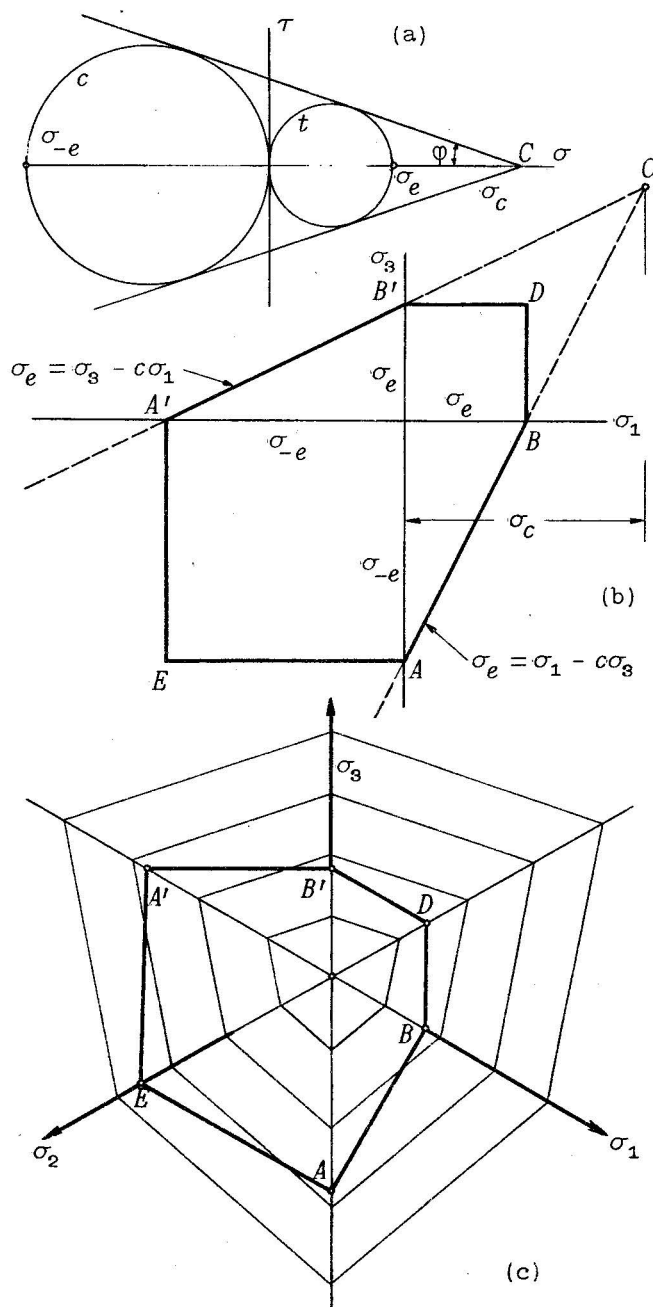


Fig. 23

La superficie limite in questo caso e' una piramide avente il vertice nel punto $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_c$. Nell'assonometria della fig. 23c sono segnate varie sezioni della piramide con piani normali all'asse di simmetria (trisettrice) e la sezione col piano $\sigma_2 = 0$. Per la teoria III, si ha invece della piramide, un prisma esagonale con facce parallele alla trisettrice.

Per gli stessi motivi di indifferenza alla tensione intermedia, nel piano $\sigma_2 = 0$, la linea limite per le teorie III, IV e V presenta due lati paralleli all'asse σ_1 e due all'asse σ_3 . Gli altri due lati sono curvi nel caso della teoria V (fig. 24), dritti per la IV (fig. 23b) e paralleli per la III.

La teoria VI da' come superficie limite un cilindro circolare con asse sulla trisettrice (*). Nell'assonometria (fig. 25) il cilin-

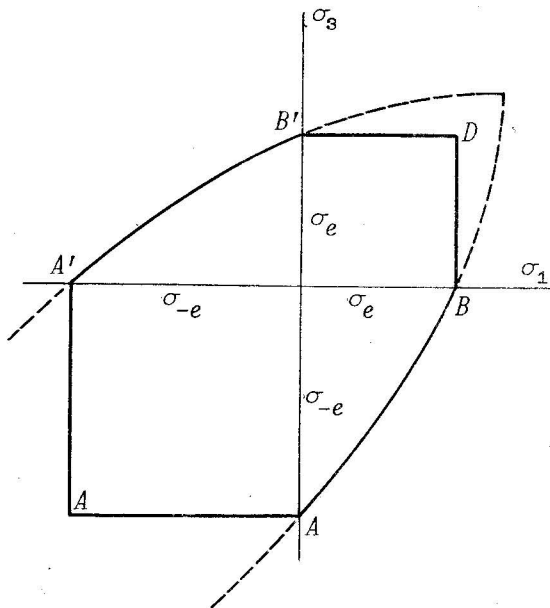


Fig. 24

(*) Si chiama τ ottaedrica la tensione tangenziale esistente su un piano che formi, nel punto del corpo che si considera, angoli uguali colle direzioni delle tensioni principali. I coseni direttori della normale a tale piano nel riferimento principale hanno valore uguale a $1/\sqrt{3}$; quindi secondo la [A31] si trova che la tensione normale σ_{ot} e la tangenziale τ_{ot} relative a questa giacitura sono date da

$$\sigma_{ot} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$$

$$\tau_{ot}^2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)/3 - \sigma_{ot}^2 = 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1)/9$$

Dunque fra τ_{ot} e la σ_{id} data dalla [47] esiste il rapporto $\sqrt{2/3}$.

Il modulo m del vettore rappresentativo dello stato di tensione nello spazio di coordinate $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ e la proiezione m_1 di tale vettore sulla trisettrice sono dati da

$$m^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2, \quad m_1 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/\sqrt{3}$$

(continua)

dro appare rappresentato da un cerchio; esso e' circoscritto all'esagono dato dalla teoria III.

I risultati sperimentali relativi ai materiali metallici comunemente usati nelle costruzioni sono in accordo soddisfa-

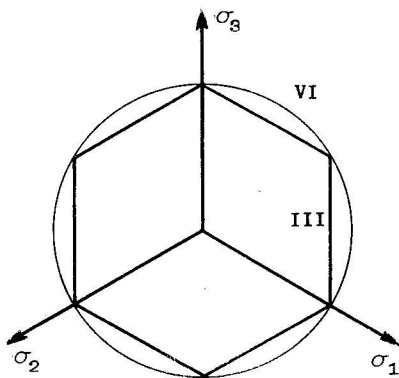


Fig. 25

cente con la teoria VI per quanto riguarda le deformazioni plastiche. Quindi e' giustificato porre i limiti elastici e di snervamento in relazione con la τ ottaedrica. Non molto discoste sono le conclusioni della teoria III. Ad es., per lo stato di tensione tangenziale ($\sigma_3 = -\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = 0$) la teoria III da' $\sigma_{1d} = 2\tau$, mentre la VI da' $\sigma_{1d} = \sqrt{3}\tau$; quindi, al limite elastico, sarebbe $\tau_e = 0,5\sigma_e$ e $\tau_e = 0,578\sigma_e$ nei due casi. Questo secondo valore e' in buon accordo con l'esperienza. Invece la teoria II da', per $\nu = 0,25$, $\tau_e = 0,8\sigma_e$. A par-

te la discordanza nel valore numerico, e' poco attendibile la connessione che questa teoria stabilisce fra il limite elastico ed il coefficiente di Poisson; tanto meno sembra giustificato porre il limite di snervamento o quello di rottura in relazione con ν .

Secondo la teoria III, come secondo la VI, se si incrementano le tre tensioni principali di una stessa quantita' non si modifica la situazione rispetto al limite elastico: cio' appare analiticamente dalle [44] e [47] (*) e, geometricamente, dal fatto che la superficie limite per queste teorie e' rigata nella direzione della trisettrice. La conclusione anzidetta

(segue nota da pagina precedente)

Percio' la distanza d dalla trisettrice dell'estremo del vettore rappresentativo e' data da

$$d^2 = m^2 - m_1^2 = 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1)/3$$

Dunque sulla superficie limite $\sigma_{1d} = \sigma_e$ della teoria VI e' $d = \text{costante}$: ossia quella superficie e' un cilindro circolare con la trisettrice per asse.

(*) La [47] si puo' anche mettere nella forma

$$2\sigma_{1d}^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \leq 2\sigma_e^2$$

trova buona conferma nell'esperimento. Anche il fatto che la superficie limite si estenda indefinitamente dal lato delle tensioni negative e' confermato dall'esperienza. Invece, dalla parte delle tensioni positive, la resistenza non e' illimitata, presentandosi la rottura per decoesione. Il fenomeno qui avviene probabilmente senza scorrimenti plastici. Il cilindro della teoria VI o il prisma della III vanno troncati da una superficie che definisce le condizioni di rottura in situazioni di fragilita'. In questa regione il materiale e' assai sensibile alla fatica.

Deve infine osservarsi che, pur essendo incompletamente nota la forma della superficie limite, le incertezze sono in realta' di scarso peso per le comuni applicazioni. In particolare, per le travi, basta conoscere l'arco di sezione della superficie limite col piano $\sigma_2 = 0$ nel quadrante $\sigma_3 > 0$, $\sigma_1 < 0$: e questo tratto e' abbastanza noto.