

ANALISI DELLO STATO DI TENSIONE

**II.1 - Le componenti di tensione.** Mentre la deformazione è un fenomeno direttamente osservabile mediante rilevamento delle variazioni di distanza di punti del corpo, l'esame dello stato di sollecitazione deve fondarsi su manifestazioni indirette. Perché gli sforzi interni appaiano come entità misurabili, bisogna supporre di praticare idealmente un taglio nel corpo sollecitato e si deve postulare che, mediante forze distribuite sulla superficie del taglio, si riesca a ristabilire in ciascuna delle due parti che il taglio ha staccato, la situazione preesistente. Gli sforzi interni, o tensioni, sono appunto rappresentati dalla distribuzione di forze che, su

qualunque porzione isolata del corpo, crea la medesima situazione come se il corpo fosse integro: in particolare, ne ristabilisce lo stato di equilibrio. Esamineremo in questo capitolo le proprietà di questi sforzi le quali discendono da condizioni di equilibrio; poiché queste valgono indipendentemente dalle proprietà fisiche del corpo e dalle cause a cui lo stato di tensione è dovuto, le relazioni ottenute sono del tutto generali.

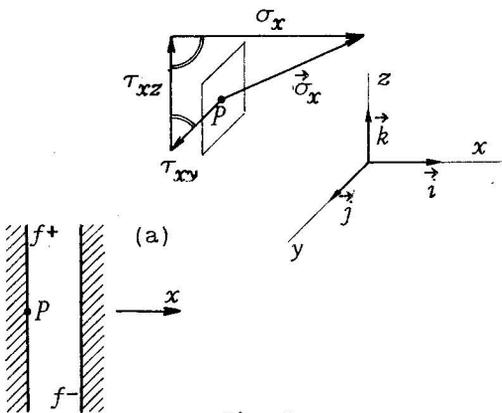


Fig. 6

Qualunque taglio nel corpo viene a staccare due facce: forze uguali e opposte sono distribuite sulle aree corrispondenti. Facendo ancora uso del riferimento cartesiano, supponiamo di sezionare il corpo con un piano normale all'asse  $x$  (fig. 6a); chiamiamo faccia positiva del taglio la  $f^+$ , volta verso le  $x$  positive, per la quale, cioè, la normale uscente ha il verso  $+x$ . La forza che si trova distribuita sull'ele-

mento  $dA$  di area della faccia e' indicata con  $\vec{\sigma}_x dA$ . Tale forza viene scomposta nelle direzioni dei tre assi come indica l'espressione

$$\vec{\sigma}_x = \sigma_x \vec{i} + \tau_{xy} \vec{j} + \tau_{xz} \vec{k} \quad [7]$$

La quantita'  $\sigma_x$  rappresenta dunque la forza nella direzione  $x$ , normale alla faccia, riferita all'area su cui si esercita;  $\tau_{xy}$  e  $\tau_{xz}$  costituiscono le componenti, riferite alla medesima area, dirette rispettivamente secondo  $y$  e  $z$ , tangenti all'area stessa. Nella definizione [7] e' implicita la convenzione sui segni: la *tensione normale*  $\sigma_x$  e' positiva se produce trazione nelle fibre normali alla faccia, le *tensioni tangenziali*  $\tau$  sono positive se, sulla faccia positiva, sono volte nella direzione positiva dell'asse a cui sono parallele.

Analogamente, su una sezione normale a  $y$  si indica con  $\vec{\sigma}_y dA$  la forza agente sull'area  $dA$  e si pone

$$\vec{\sigma}_y = \sigma_y \vec{j} + \tau_{yx} \vec{i} + \tau_{yz} \vec{k} \quad [8]$$

Così per la sezione normale a  $z$  si scrive

$$\vec{\sigma}_z = \sigma_z \vec{k} + \tau_{zx} \vec{i} + \tau_{zy} \vec{j} \quad [9]$$

Le tensioni sulle facce positive di un cubo con spigoli paralleli agli assi  $x, y, z$  sono indicate nella fig. 7.

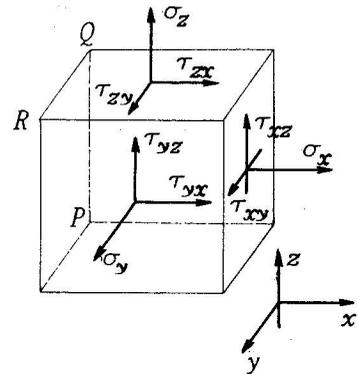


Fig. 7

## II.2 - Proprieta' delle tensioni nell'intorno di un punto.

Per le tensioni tangenziali sussiste un'importante proprieta', detta di reciprocita': se  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  sono due direzioni ortogonali (fig. 8a), in un qualunque punto  $P$  la componente sulla direzione  $\vec{b}$  della tensione sulla sezione normale ad  $\vec{a}$  e' uguale alla componente su  $\vec{a}$  della tensione sulla sezione normale a  $\vec{b}$ : ossia, sono fra loro uguali le due  $\tau$  normali allo spigolo d'intersezione delle due sezioni. Questa proprieta' che discende dalle condizioni di equilibrio dell'elemento di volume alla rotazione intorno ad un asse normale ad  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  (appendice A7a) conduce alle eguaglianze

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad , \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad , \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad [10]$$

Con cio' le componenti di tensione nel riferimento cartesiano si riducono a tre tensioni normali e tre tangenziali.

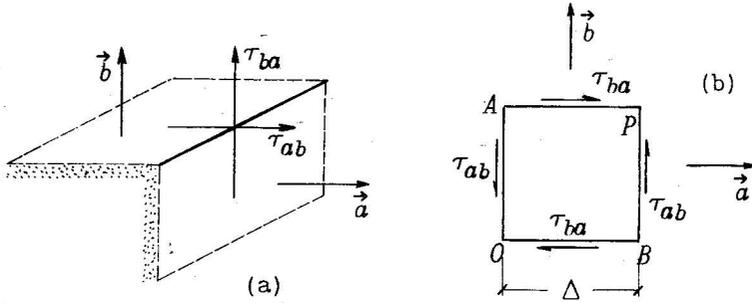


Fig. 8

Queste sei quantita' bastano ad individuare completamente lo stato di tensione nel punto a cui esse si riferiscono: per qualsiasi sezione condotta per il punto si calcola la tensione risultante mediante l'espressione [A31]. Da questa si possono ricavare le componenti scalari per semplice proiezione: ad esempio la componente secondo la normale alla giacitura considerata e' data da  $\vec{\sigma}_a \cdot \vec{a}$ .

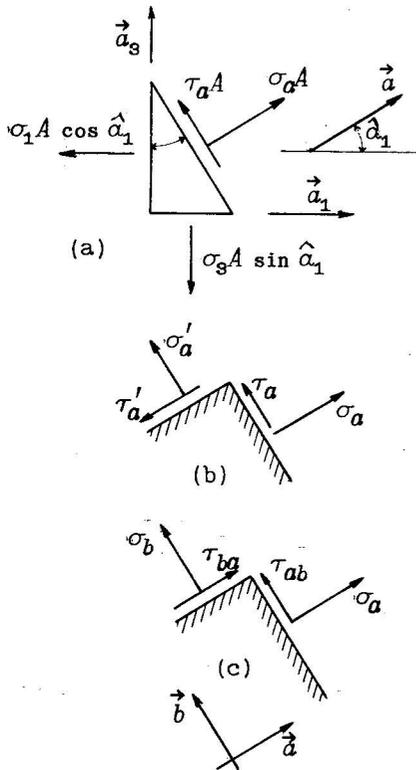


Fig. 9

Dall'esame della tensione  $\vec{\sigma}$  che si trova in un dato punto  $P$  al variare della giacitura della sezione, risulta (appendice A8) che esistono tre piani fra loro ortogonali sui quali mancano le tensioni tangenziali: le tensioni normali  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  su questi piani si dicono *tensioni principali*. Le direzioni  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  di queste tensioni si dicono *direzioni principali* dello stato di tensione nel punto.

Con riferimento alle direzioni principali lo stato di sollecitazione assume una rappresentazione particolarmente semplice ed espressiva. Esamineremo

in particolare le tensioni sui piani del fascio che ha per sostegno la direzione  $\vec{a}_2$  della tensione  $\sigma_2$ . Detto  $\hat{a}_1$  l'angolo che il versore  $\vec{a}$  fa con la direzione  $\vec{a}_1$  di  $\sigma_1$ , consideriamo le condizioni di equilibrio di un prisma elementare (fig.9) con tre facce normali ad  $\vec{a}$ ,  $\vec{a}_1$  e  $\vec{a}_3$ ; le tensioni sulle basi del prisma sono normali alla figura e non intervengono in queste considerazioni. Detta  $A$  l'area della faccia corrispondente all'ipotenusa del triangolo, si hanno per le forze sulle altre due facce le espressioni della figura. Proiettando le forze, divise per  $A$ , nella direzione  $\vec{a}$  e nella direzione normale, si trovano le equazioni

$$\sigma_a = \sigma_1 \cos^2 \hat{a}_1 + \sigma_3 \sin^2 \hat{a}_1 = \sigma_1 + (\sigma_3 - \sigma_1) \sin^2 \hat{a}_1 \quad [11]$$

$$\tau_a = (\sigma_3 - \sigma_1) \sin \hat{a}_1 \cos \hat{a}_1 \quad [12]$$

Le stesse relazioni si possono ottenere facendo uso della [A31].

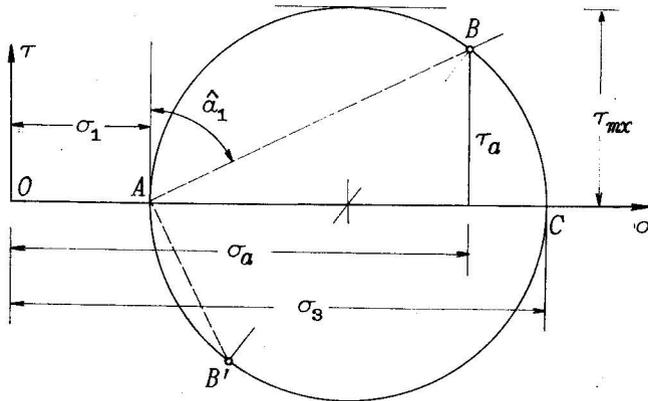


Fig. 10

In un grafico con coordinate  $\sigma_a, \tau_a$  si riporti in  $OA$  (fig.10) il segmento rappresentativo di  $\sigma_1$  e in  $AB$ , sotto un angolo  $\hat{a}_1$  con l'asse delle  $\tau$ , il valore  $(\sigma_3 - \sigma_1) \sin \hat{a}_1$ . E' facile vedere che ascissa e ordinata di  $B$  rappresentano i valori di  $\sigma_a$  e  $\tau_a$  per la direzione considerata. Facendo variare  $\hat{a}_1$ , l'estremo  $B$  si muovera' su un cerchio avente gli estremi di un diametro nei punti di ascissa  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$ . Cio' puo' vedersi considerando che le [11]-[12] danno la rappresentazione parametrica di un tale cerchio oppure, tracciato il cerchio, osservando che il triangolo  $ABC$  e' rettangolo in  $B$ , ha l'angolo in  $C$  dato da  $\hat{a}_1$  e l'ipotenusa misurata da  $\sigma_3 - \sigma_1$ , e quindi il lato  $AB$  uguale a  $(\sigma_3 - \sigma_1) \sin \hat{a}_1$ .

Si e' cosi' ottenuto un *cerchio di Mohr*; ciascuno dei suoi punti rappresenta con la sua ascissa e ordinata le due componenti della tensione sulla sezione che l'angolo  $\hat{a}_1$  distingue fra i piani del fascio che ha per sostegno la direzione  $\vec{a}_2$ : la terza componente di tensione, nella direzione  $\vec{a}_2$  e' nulla per tutte le sezioni del fascio. Crescendo  $\hat{a}_1$  da zero a  $90^\circ$  il punto  $B$  va da  $A$  a  $C$ , la tensione  $\sigma$  va dall'uno all'altro dei suoi valori estremi; la tensione tangenziale raggiunge il valore massimo

$$\tau_{\max} = (\sigma_3 - \sigma_1)/2$$

per  $\hat{a}_1 = 45^\circ$  ossia sul piano bisettore delle direzioni principali. Per  $\hat{a}_1 > 90^\circ$  il punto rappresentativo va nel semicerchio delle  $\tau$  negative. Al riguardo si deve osservare che su una giacitura rotata di  $90^\circ$  si trova dalla fig. 10 una  $\tau$  di segno opposto, in  $B'$ , rispetto a quella del punto  $B$ , in apparente contrasto con la [A28]: cio' perche', scrivendo la [12] si viene ad assumere come verso positivo delle  $\tau$  quello rotato, rispetto alla normale, di  $90^\circ$  nel senso degli  $\hat{a}_1$  crescenti (fig. 9b), mentre la convenzione generale, adottata per ottenere la [A28], e' quella della fig. 9c. Tale discordanza e' solo da tener presente nella costruzione della fig. 10.

Un altro cerchio di Mohr si puo' costruire a rappresentare le tensioni sui piani del fascio che ha la direzione  $\vec{a}_1$  per sostegno: questo taglia l'asse delle  $\sigma$  nei punti di ascissa  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  (fig. 11). Il terzo cerchio, con estremi del diametro nei punti di ascissa  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  da' le tensioni sulle sezioni parallele ad  $\vec{a}_3$ . Si trova (appendice A8) che i punti rappresentativi delle tensioni sulle  $\infty^2$  giaciture tracciabili per lo stesso punto cadono nella regione delimitata dai tre cerchi, interna cioe' al maggiore ed esterna ai due minori.

Puo' accadere che due delle tensioni principali, poniamo  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , abbiano lo stesso valore. In tal caso il cerchio relativo al fascio parallelo ad  $\vec{a}_3$  si riduce ad un punto: ossia, su tutti i piani paralleli ad  $\vec{a}_3$  mancano le tensioni tangenziali e la tensione normale vale  $\sigma_1$ . Le direzioni  $\vec{a}_1$  e  $\vec{a}_2$  sono allora indeterminate: qualunque terna ortogonale

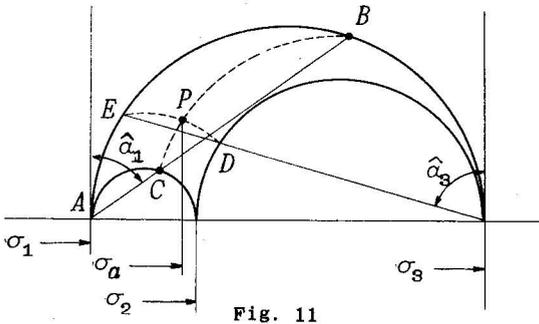


Fig. 11

di cui un asse coincida con  $\vec{a}_3$  puo' essere assunta per le direzioni principali.

Se le tre tensioni principali hanno lo stesso valore, i tre cerchi di Mohr si riducono ad un punto: su ogni sezione si ha la medesima  $\sigma$  e manca la tensione tangenziale, come nell'equilibrio idrostatico. Qualunque terna ortogonale puo' essere assunta come principale.

Le costruzioni procedono come sopra e' indicato quando siano assegnate le tensioni principali e le relative direzioni. Quando lo stato di tensione sia definito dalle componenti del riferimento cartesiano, in generale, la determinazione delle tensioni principali richiede la risoluzione di un'equazione di terzo grado, come e' indicato nell'appendice A8. Se pero' si conosce una delle direzioni principali, e quindi la relativa tensione secondo la [A31] la determinazione delle altre direzioni principali e dei cerchi di Mohr costituisce un problema di secondo grado.

**II.3 - Le equazioni di equilibrio.** Le sei componenti di tensione, ossia nel riferimento cartesiano le normali  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  e le tangenziali  $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ , nella loro distribuzione all'interno del corpo in tensione debbono soddisfare alle condizioni atte ad assicurare l'annullarsi della risultante delle forze su qualunque elemento del corpo, l'annullamento dei momenti risultanti essendo assicurato dalla simmetria [10] delle  $\tau$ . Si hanno percio' tre equazioni differenziali che si ottengono dalla vettoriale [A32] per proiezione sui tre assi coordinati:

$$\begin{aligned} \partial\sigma_x/\partial x + \partial\tau_{xy}/\partial y + \partial\tau_{zx}/\partial z + X &= 0 \\ \partial\sigma_y/\partial y + \partial\tau_{yz}/\partial z + \partial\tau_{xy}/\partial x + Y &= 0 \\ \partial\sigma_z/\partial z + \partial\tau_{zx}/\partial x + \partial\tau_{yz}/\partial y + Z &= 0 \end{aligned} \quad [13]$$

$X, Y, Z$ , componenti del vettore  $\vec{f}$ , rappresentano le proiezioni sui tre assi della forza esterna di massa, riferita al volume: ossia  $X dV$  e' la forza agente nella direzione  $x$  sull'elemento di volume  $dV$ .

Per quanto riguarda le forze distribuite sulla superficie del corpo, bisogna verificare che la tensione  $\vec{\sigma}_a$  che si calcola mediante la [A31] in ciascun punto del contorno assumendo per  $\vec{a}$  la direzione normale al contorno stesso, eguagli l'azione esterna che vi si trova eventualmente distribuita: ove questa manchi deve annullarsi il vettore  $\vec{\sigma}_a$ .