XXII. ELASTICITÀ NEGLI SPAZII CURVI.

1. Prima di penetrare nel campo delle ricerche iniziate dal prof. Beltrami per lo studio della elasticità negli *spazii di curvatura costante* α, giova rammentare che questi sono caratterizzati dalla proprietà che possiede ogni loro figura rigida di restar sempre sovrapponibile a sè stessa dopo un moto qualunque. Questa proprietà è ammessa dogmaticamente nell'ordinaria Geometria, che si fonda inoltre su due noti postulati, caratterizzanti lo *spazio euclideo* ($\alpha = 0$) fra tutti gli spazii di curvatura costante, cioè il *postulato di Euclide* e quello dell'*infinità* dello spazio (*). È intuitivo che negli spazii di curvatura costante il concetto d'isotropia sussiste tal quale, per l'equa costituzione geometrica che tali spazii ammettono, in virtù della proprietà caratteristica precedentemente richiamata, intorno a ciascun punto. Invece, pur immaginando esteso il concetto stesso ad uno spazio qualunque, i coefficienti A e B bisognerà considerarli come variabili da punto a punto insieme alla curvatura (**). Osserviamo finalmente che *la rappresentazione cartesiana* suppone lo spazio infinito ed *include l'ipotesi euclidea*, dimodochè tutti i risultati ottenuti in coordinate cartesiane sono esclusivamente applicabili allo spazio euclideo. Ne segue che, per lo studio della elasticità negli spazii non euclidei, bisogna far uso delle coordinate curvilinee generali, che nulla presuppongono circa la natura dello spazio; ma i risultati che si otterranno potranno allora solamente applicarsi agli spazii di curvatura costante, quando si considereranno inoltre come costanti i coefficienti A e B.

(*) Vedi, p. es., le *note del traduttore* al § 6 dell'interessante opera di CLIFFORD: « *Il senso comune nelle scienze esatte* » (Milano, Dumolard, 1886). A questa fonte dovrebbero i giovani delle nostre scuole medie attingere la cultura matematica generale.

(**) Per acquistare una nozione precisa della curvatura degli spazii si studii la « *Teoria degli spazii di curvatura costante* » del Prof. BELTRAMI (*Annali di Matematica*, t. II della seconda serie, p. 232). Vedi anche CLIFFORD, *loc. cit.*, p. 255.

2. Le considerazioni precedenti riescono forse più precise quando si ricorre al concetto analitico dello spazio, quando cioè si vuol dare il nome di spazio (a *tre* dimensioni) all'insieme delle terne di valori dei parametri q_1, q_2, q_3. Ad ogni terna *arbitraria* di funzioni Q_1, Q_2, Q_3 di q_1, q_2, q_3 corrisponde un particolare spazio, nel quale il quadrato dell'elemento lineare si esprime così:

$$d\sigma^2 = Q_1^2 dq_1^2 + Q_2^2 dq_2^2 + Q_3^2 dq_3^2.$$

Perchè un tale spazio sia lo spazio euclideo (rappresentabile, come si è detto, in coordinate cartesiane) occorre e basta che si possano trovare tre funzioni x_1, x_2, x_3 di q_1, q_2, q_3, tali che sia

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = Q_1^2 dq_1^2 + Q_2^2 dq_2^2 + Q_3^2 dq_3^2.$$

Tentando l'effettiva integrazione si ottengono (*), fra le Q e le loro derivate, sei relazioni, dovute a Lamé, e si dimostra che queste sono condizioni *necessarie* e *sufficienti* per l'integrazione stessa, e conseguentemente per l'*euclideità* dello spazio. Tali condizioni risulteranno spontanee dall'analisi seguente, che ci fornirà più generalmente le condizioni analoghe perchè lo spazio considerato sia a curvatura costante. Qui conviene ricordare che, secondo Riemann (**), al quadrato dell'elemento lineare in uno spazio di curvatura costante si può sempre dare la forma

$$d\sigma^2 = Q^2(dq_1^2 + dq_2^2 + dq_3^2),$$

essendo Q_1, Q_2, Q_3 uguali a

$$Q = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{4}(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)}. \tag{1}$$

Le coordinate q_1, q_2, q_3, che qui compariscono, son quelle che il prof. Beltrami chiama (***) *stereografiche*, e la costante α misura la *curvatura dello spazio*.

(*) Vedi Bianchi, *Geometria differenziale*, § 125.

(**) Leggi la celebre Memoria sulle ipotesi fondamentali della Geometria nelle *B. Riemann's math. Werke*, p. 264.

(***) *Loc. cit.*, p. 242.

3. Per ben rendersi conto dell'ultima forma di $d\sigma$ è forse utile cercare di stabilirla mediante considerazioni elementari, lasciandosi guidare dalle analogie con gli spazii a due dimensioni. È noto che la rappresentazione stereografica d'una superficie sferica si esegue projettando questa da un suo punto P sul piano tangente nel punto diametralmente opposto O. Le coordinate stereografiche d'un punto della superficie sono le coordinate cartesiane dell'immagine stereografica del punto stesso. Se N ed N' sono le immagini dei punti M ed M', si ha

$$OP^2 = PM \, . \, PN = PM' \, . \, PN' .$$

I triangoli PMM' e $PN'N$ sono dunque simili, e però $MM' : NN' = PM : PN'$. Quindi, se M' è infinitamente vicino ad M,

$$\frac{d\sigma}{NN'} = \frac{PM}{PN} = \frac{OP^2}{PN^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{ON}{OP}\right)^2} ,$$

e si ottiene così la formola di Riemann osservando che

$$NN'^2 = dq_1^2 + dq_2^2 \quad , \quad ON^2 = q_1^2 + q_2^2 \quad , \quad OP^2 = \frac{4}{\alpha} .$$

4. Per ciò che si è detto precedentemente le equazioni generali dell'equilibrio (XX, *form.* 4 o 10) sono applicabili a tutti gli spazii, mentre le equazioni (13) del precedente capitolo convengono soltanto allo spazio euclideo, perchè l'artifizio cui si è dovuto ricorrere per abbreviare i calcoli è stato fatto (V, § 3) adoperando coordinate cartesiane. Ne segue che, se si vogliono ottenere le equazioni dell'equilibrio dei corpi isotropi in uno spazio qualunque, bisogna partire dalle equazioni generali (4), ed in esse introdurre direttamente l'ipotesi dell'isotropia, cioè supporre

$$\Theta_i = -(A - 2B)\Theta - 2B\theta_i \quad , \quad \Omega_i = -B\omega_i . \quad (i = 1, 2, 3)$$

con A e B variabili come α. Limitandoci al caso di α costante, consideriamo prima i termini moltiplicati per A. Essi dànno luogo, nella prima equazione (4), all'espressione

$$-A\left(\frac{1}{\nabla}\frac{\partial \nabla \Theta}{\partial q_1} - \frac{\Theta}{\nabla}\frac{\partial \nabla}{\partial q_1}\right) = -A\frac{\partial \Theta}{\partial q_1} .$$

I termini moltiplicati per B si riducono facilmente a

$$-\frac{2B}{\nabla}\left(Q_1\theta_1\frac{\partial Q_2 Q_3}{\partial q_1} - Q_3 Q_1\frac{\partial Q_2 \theta_2}{\partial q_1} - Q_1 Q_2\frac{\partial Q_3 \theta_3}{\partial q_1} + \frac{1}{2}\frac{\partial Q_1^2 Q_3 \omega_3}{\partial q_2} + \frac{1}{2}\frac{\partial Q_1^2 Q_2 \omega_2}{\partial q_3}\right) . \quad (2)$$

Si può prevedere che in questa espressione è inclusa quella che si ottiene nello spazio euclideo, cioè

$$-\frac{BQ_1}{Q_2 Q_3}\left(\frac{\partial Q_2 \mathfrak{T}_2}{\partial q_3}-\frac{\partial Q_3 \mathfrak{T}_3}{\partial q_2}\right), \tag{3}$$

in cui

$$\mathfrak{T}_2=\frac{1}{Q_3 Q_1}\left(\frac{\partial Q_1^2 \kappa_1}{\partial q_3}-\frac{\partial Q_3^2 \kappa_3}{\partial q_1}\right), \quad \mathfrak{T}_3=\frac{1}{Q_1 Q_2}\left(\frac{\partial Q_2^2 \kappa_2}{\partial q_1}-\frac{\partial Q_1^2 \kappa_1}{\partial q_2}\right). \tag{4}$$

Sostituendo (4) in (3), poi sottraendo il risultato da (2), resta (*) una funzione omogenea e lineare delle κ, cui si può dare la forma seguente

$$\frac{2B}{Q_2 Q_3}\left\{(H_{22}+H_{33}) Q_1 \kappa_1 - H_{12} Q_2 \kappa_2 - H_{13} Q_3 \kappa_3\right\},$$

dopo aver posto

$$\left\{\begin{aligned}
H_{11} &= Q_1\left[\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_3}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\right)\right]+\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial Q_3}{\partial q_1}\\
H_{22} &= Q_2\left[\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\right)+\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_3}{\partial q_1}\right)\right]+\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_3}{\partial q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\\
H_{33} &= Q_3\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\right)\right]+\frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\\
H_{23} &= H_{32} = \frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}+\frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_2}-\frac{\partial^2 Q_1}{\partial q_2 \partial q_3}\\
H_{31} &= H_{13} = \frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_1}+\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}-\frac{\partial^2 Q_2}{\partial q_3 \partial q_1}\\
H_{12} &= H_{21} = \frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_3}{\partial q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}+\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_3}{\partial q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}-\frac{\partial^2 Q_3}{\partial q_1 \partial q_2}
\end{aligned}\right. \tag{5}$$

Se inoltre si pone

$$\Phi=\sum_{i,j} H_{ij} Q_i Q_j \kappa_i \kappa_j-(H_{11}+H_{22}+H_{33}) \sum_i Q_i^2 \kappa_i^2, \tag{6}$$

(*) Per i dettagli del calcolo vedi il paragrafo seguente.

si riconosce finalmente che l'espressione (2) equivale a

$$-\frac{BQ_1}{Q_2 Q_3}\left(\frac{\partial Q_2 \mathfrak{T}_2}{\partial q_3}-\frac{\partial Q_3 \mathfrak{T}_3}{\partial q_2}\right)-\frac{B}{Q_2 Q_3}\frac{\partial \Phi}{\partial Q_1 \kappa_1}.$$

Le equazioni indefinite per l'equilibrio si riducono dunque a

$$(7)\left\{\begin{aligned}
&F_1+\frac{A}{Q_1}\frac{\partial \Theta}{\partial q_1}+\frac{B}{Q_2 Q_3}\left(\frac{\partial Q_2 \mathfrak{T}_2}{\partial q_3}-\frac{\partial Q_3 \mathfrak{T}_3}{\partial q_2}\right)+\frac{B}{Q_1 Q_2 Q_3}\frac{\partial \Phi}{\partial Q_1 \kappa_1}=0,\\
&F_2+\frac{A}{Q_2}\frac{\partial \Theta}{\partial q_2}+\frac{B}{Q_3 Q_1}\left(\frac{\partial Q_3 \mathfrak{T}_3}{\partial q_1}-\frac{\partial Q_1 \mathfrak{T}_1}{\partial q_3}\right)+\frac{B}{Q_1 Q_2 Q_3}\frac{\partial \Phi}{\partial Q_2 \kappa_2}=0,\\
&F_3+\frac{A}{Q_3}\frac{\partial \Theta}{\partial q_3}+\frac{B}{Q_1 Q_2}\left(\frac{\partial Q_1 \mathfrak{T}_1}{\partial q_2}-\frac{\partial Q_2 \mathfrak{T}_2}{\partial q_1}\right)+\frac{B}{Q_1 Q_2 Q_3}\frac{\partial \Phi}{\partial Q_3 \kappa_3}=0.
\end{aligned}\right.$$

5. Per eseguire in dettaglio il calcolo accennato nel paragrafo precedente, riprendiamo l'espressione (2), e, dopo averne cambiato il segno, scriviamola così:

$$\frac{2B}{Q_2 Q_3}\left(\theta_1\frac{\partial Q_2 Q_3}{\partial q_1}-Q_3\frac{\partial Q_2 \theta_2}{\partial q_1}-Q_2\frac{\partial Q_3 \theta_3}{\partial q_1}+\frac{1}{2Q_1}\frac{\partial Q_1^2 Q_3 \omega_3}{\partial q_2}+\frac{1}{2Q_1}\frac{\partial Q_1^2 Q_2 \omega_2}{\partial q_3}\right).$$

Sottraendone

$$\frac{BQ_1}{Q_2 Q_2}\left(\frac{\partial Q_2 \mathfrak{T}_2}{\partial q_3}-\frac{\partial Q_3 \mathfrak{T}_3}{\partial q_2}\right)$$

e mettendo da parte il fattore $\frac{2B}{Q_2 Q_3}$, viene

$$\begin{aligned}
&\theta_1\frac{\partial Q_2 Q_3}{\partial q_1}-Q_3\frac{\partial Q_2 \theta_2}{\partial q_1}-Q_2\frac{\partial Q_3 \theta_3}{\partial q_1}\\
&+\frac{1}{2Q_1}\frac{\partial Q_1^2 Q_3 \omega_3}{\partial q_2}+\frac{1}{2Q_1}\frac{\partial Q_1^2 Q_2 \omega_2}{\partial q_3}-\frac{Q_1}{2}\frac{\partial Q_2 \mathfrak{T}_2}{\partial q_3}+\frac{Q_1}{2}\frac{\partial Q_3 \mathfrak{T}_3}{\partial q_2}.
\end{aligned}\tag{8}$$

Ora si noti che

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2Q_1}\frac{\partial Q_1^2 Q_3 \omega_3}{\partial q_2}+\frac{Q_1}{2}\frac{\partial Q_3 \mathfrak{T}_3}{\partial q_2}&=\frac{1}{2}\frac{\partial Q_1 Q_3 \omega_3}{\partial q_2}+\frac{Q_3 \omega_3}{2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}+\frac{1}{2}\frac{\partial Q_1 Q_3 \mathfrak{T}_3}{\partial q_2}-\frac{Q_3 \mathfrak{T}_3}{2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\\
&=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_2}Q_1 Q_3(\omega_3+\mathfrak{T}_3)+\frac{1}{2}Q_3(\omega_3-\mathfrak{T}_3)\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}.
\end{aligned}$$

D'altra parte si ha

$$\omega_3=\frac{Q_1}{Q_2}\frac{\partial \kappa_1}{\partial q_2}+\frac{Q_2}{Q_1}\frac{\partial \kappa_2}{\partial q_1}=\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_2 \kappa_2}{\partial q_1}+\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_1 \kappa_1}{\partial q_2}-\frac{\kappa_1}{Q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}-\frac{\kappa_2}{Q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1},$$

$$\mathfrak{T}_3=\frac{1}{Q_1 Q_2}\left(\frac{\partial Q_2^2 \kappa_2}{\partial q_1}-\frac{\partial Q_1^2 \kappa_1}{\partial q_2}\right)=\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_2 \kappa_2}{\partial q_1}-\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_1 \kappa_1}{\partial q_2}-\frac{\kappa_1}{Q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}+\frac{\kappa_2}{Q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1},$$

dimodochè

$$\frac{1}{2}(\omega_3+\mathcal{T}_3)=\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_2\kappa_2}{\partial q_1}-\frac{\kappa_1}{Q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\,,\quad \frac{1}{2}(\omega_3-\mathcal{T}_3)=\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_1\kappa_1}{\partial q_2}-\frac{\kappa_2}{Q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}.$$

Dunque

$$\frac{1}{2Q_1}\frac{\partial Q_1^2Q_3\omega_3}{\partial q_2}+\frac{Q_1}{2}\frac{\partial Q_3\mathcal{T}_3}{\partial q_2}$$

$$=\frac{\partial}{\partial q_2}\left(Q_3\frac{\partial Q_2\kappa_2}{\partial q_1}-\frac{Q_3}{Q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}Q_1\kappa_1\right)+\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\left(\frac{Q_3}{Q_2}\frac{\partial Q_1\kappa_1}{\partial q_2}-\frac{Q_3}{Q_1}\kappa_2\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\right)$$

$$=Q_3\frac{\partial^2Q_2\kappa_2}{\partial q_1\partial q_2}+\frac{\partial Q_3}{\partial q_2}\frac{\partial Q_2\kappa_2}{\partial q_1}-Q_1\kappa_1\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{Q_3}{Q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\right)-\frac{Q_3}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\kappa_2.$$

Analogamente si ottiene

$$\frac{1}{2Q_1}\frac{\partial Q_1^2Q_2\omega_2}{\partial q_3}-\frac{Q_1}{2}\frac{\partial Q_2\mathcal{T}_2}{\partial q_3}$$

$$=Q_2\frac{\partial^2Q_3\kappa_3}{\partial q_1\partial q_3}+\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\frac{\partial Q_3\kappa_3}{\partial q_1}-Q_1\kappa_1\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{Q_2}{Q_3}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\right)-\frac{Q_2}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_1}\kappa_3.$$

Inoltre si ha

$$Q_1\theta_1=Q_1\frac{\partial\kappa_1}{\partial q_1}+\frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\kappa_1+\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\kappa_2+\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\kappa_3=\frac{\partial Q_1\kappa_1}{\partial q_1}+\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\kappa_2+\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\kappa_3,$$

e però l'espressione (8) diventa

$$\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_2Q_3}{\partial q_1}\left(\frac{\partial Q_1\kappa_1}{\partial q_1}+\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\kappa_2+\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\kappa_3\right)$$

$$-Q_3\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial Q_2\kappa_2}{\partial q_2}+\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\kappa_1+\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\kappa_3\right)-Q_2\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial Q_3\kappa_3}{\partial q_3}+\frac{\partial Q_3}{\partial q_1}\kappa_1+\frac{\partial Q_3}{\partial q_2}\kappa_2\right)$$

$$+Q_3\frac{\partial^2Q_2\kappa_2}{\partial q_1\partial q_2}+\frac{\partial Q_3}{\partial q_2}\frac{\partial Q_2\kappa_2}{\partial q_1}-Q_1\kappa_1\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{Q_3}{Q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\right)-\frac{Q_3}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\kappa_2$$

$$+Q_2\frac{\partial^2Q_3\kappa_3}{\partial q_1\partial q_3}+\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\frac{\partial Q_3\kappa_3}{\partial q_1}-Q_1\kappa_1\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{Q_2}{Q_3}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\right)-\frac{Q_2}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_1}\kappa_3.$$

I termini

$$\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_2Q_3}{\partial q_1}\frac{\partial Q_1\kappa_1}{\partial q_1}\,,\quad \frac{\partial Q_3}{\partial q_2}\frac{\partial Q_2\kappa_2}{\partial q_1}\,,\quad \frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\frac{\partial Q_3\kappa_3}{\partial q_1}$$

si elidono rispettivamente con

$$-\frac{Q_3}{Q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial Q_1\kappa_1}{\partial q_1}-\frac{Q_2}{Q_1}\frac{\partial Q_3}{\partial q_1}\frac{\partial Q_1\kappa_1}{\partial q_1}\,,$$

$$-Q_2\cdot\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_3}{\partial q_2}\frac{\partial Q_2\kappa_2}{\partial q_1}\,,\quad -Q_3\cdot\frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\frac{\partial Q_3\kappa_3}{\partial q_1}\,,$$

e l'espressione considerata diventa

$$\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_2 Q_3}{\partial q_1}\left(\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\kappa_2+\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\kappa_3\right)-Q_3\left[Q_1\kappa_1\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\right)+Q_3\kappa_3\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\right)\right]$$

$$-Q_2\left[Q_1\kappa_1\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_3}{\partial q_1}\right)+Q_2\kappa_2\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_3}{\partial q_2}\right)\right]$$

$$-Q_1\kappa_1\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{Q_3}{Q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\right)-\frac{Q_3}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\kappa_2-Q_1\kappa_1\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{Q_2}{Q_3}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\right)-\frac{Q_2}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_1}\kappa_3 .$$

Questa è lineare nelle κ. Il coefficiente di $Q_2\kappa_2$ è

$$\frac{1}{Q_1 Q_2}\frac{\partial Q_2 Q_3}{\partial q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}-Q_2\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_3}{\partial q_2}\right)-\frac{Q_3}{Q_1 Q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}$$

$$=\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_3}{\partial q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}+\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial Q_3}{\partial q_2}-\frac{\partial^2 Q_3}{\partial q_1 \partial q_2}=H_{12} .$$

Similmente il coefficiente di $Q_3\kappa_3$ è H_{13}, e quello di $Q_1\kappa_1$ è

$$-Q_3\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\right)-Q_2\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_3}{\partial q_1}\right)-\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{Q_3}{Q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\right)-\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{Q_2}{Q_3}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\right)$$

$$=-Q_3\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\right)\right]-\frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}$$

$$-Q_2\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_3}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\right)\right]-\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_3}{\partial q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2} ,$$

cioè $-(H_{22}+H_{33})$. Dunque la prima equazione indefinita dell'equilibrio è

$$Q_1 F_1+A\frac{\partial \Theta}{\partial q_1}+\frac{B Q_1}{Q_2 Q_3}\left(\frac{\partial Q_2 \mathfrak{T}_2}{\partial q_3}-\frac{\partial Q_3 \mathfrak{T}_3}{\partial q_2}\right)$$

$$+\frac{2B}{Q_2 Q_3}\left[-(H_{22}+H_{33})Q_1\kappa_1+H_{12}Q_2\kappa_2+H_{13}Q_3\kappa_3\right]=0 ,$$

vale a dire

$$F_1+\frac{A}{Q_1}\frac{\partial \Theta}{\partial q_1}+\frac{B}{Q_2 Q_3}\left(\frac{\partial Q_2 \mathfrak{T}_2}{\partial q_3}-\frac{\partial Q_3 \mathfrak{T}_3}{\partial q_2}\right)+\frac{B}{Q_1 Q_2 Q_3}\frac{\partial \Phi}{\partial Q_1 \kappa_1}=0 ; \quad \text{ecc.}$$

6. Le equazioni (7) non si trovano ancora sotto la loro forma definitiva, in quanto che l'ipotesi della *curvatura costante*, di cui si è tenuto conto soltanto col supporre costanti A e B, non è stata ancora introdotta nel sistema stesso delle coordinate. Osserviamo anzitutto che alle equazioni (7) saremmo egualmente pervenuti col processo generale, prendendo a considerare, invece del potenziale Π, una sua parte Π_0, espressa come segue:

$$\Pi_0 = -\frac{1}{2}\left[A\Theta^2 + B(\mathcal{T}_1^2 + \mathcal{T}_2^2 + \mathcal{T}_3^2)\right] + \frac{B\Phi}{\nabla}.$$

Ciò mette in evidenza il carattere invariantivo dell'espressione $\frac{\Phi}{\nabla}$, e ci autorizza quindi, per trovarne il significato, a specializzare il sistema di coordinate. Assumiamo dunque coordinate stereografiche, per le quali Q_1, Q_2, Q_3 hanno, come si è detto, l'espressione (1). Le formole (5) e (6) dànno successivamente

$$H_{ij} = \left| \begin{array}{ll} -Q^3\alpha \ , & \text{se } i = j \\ 0 \ , & \text{se } i \neq j \end{array} \right. , \qquad \frac{\Phi}{\nabla} = 2\alpha Q^2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2).$$

Adunque $\frac{\Phi}{\nabla}$ *è il prodotto di* 2α *per il quadrato dello spostamento.* Ne segue che, negli spazii di curvatura costante α, per qualunque sistema di coordinate ortogonali, si ha

$$\frac{\Phi}{\nabla} = 2\alpha(Q_1^2\kappa_1^2 + Q_2^2\kappa_2^2 + Q_3^2\kappa_3^2) , \tag{9}$$

e conseguentemente

$$\frac{1}{\nabla}\frac{\partial\Phi}{\partial Q_i\kappa_i} = 4\alpha Q_i\kappa_i . \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{10}$$

Finalmente le equazioni (7) diventano

$$\left\{ \begin{aligned} F_1 + \frac{A}{Q_1}\frac{\partial\Theta}{\partial q_1} + \frac{B}{Q_2 Q_3}\left(\frac{\partial Q_2\mathcal{T}_2}{\partial q_3} - \frac{\partial Q_3\mathcal{T}_3}{\partial q_2}\right) + 4\alpha B Q_1\kappa_1 = 0 \ , \\ F_2 + \frac{A}{Q_2}\frac{\partial\Theta}{\partial q_2} + \frac{B}{Q_3 Q_1}\left(\frac{\partial Q_3\mathcal{T}_3}{\partial q_1} - \frac{\partial Q_1\mathcal{T}_1}{\partial q_3}\right) + 4\alpha B Q_2\kappa_2 = 0 \ , \\ F_3 + \frac{A}{Q_3}\frac{\partial\Theta}{\partial q_3} + \frac{B}{Q_1 Q_2}\left(\frac{\partial Q_1\mathcal{T}_1}{\partial q_2} - \frac{\partial Q_2\mathcal{T}_2}{\partial q_1}\right) + 4\alpha B Q_3\kappa_3 = 0 \ . \end{aligned} \right. \tag{11}$$

Son queste, in coordinate ortogonali qualunque, le *equazioni del-*

l'equilibrio elastico dei corpi isotropi, negli spazii di curvatura costante α.

7. **Osservazioni:** *a)* Perchè le equazioni (7) coincidano con le (11) occorre e basta che siano verificate le relazioni (10), cioè che Φ abbia la forma (9), e sia quindi

$$H_{11} = H_{22} = H_{33} = -\alpha\nabla \quad , \quad H_{23} = H_{31} = H_{12} = 0 .$$

Queste sono dunque le condizioni necessarie e sufficienti per l'invariabilità della curvatura dello spazio. Per $\alpha = 0$ si ritrovano le condizioni indicate da Lamé come necessarie e sufficienti per l'*euclideità* dello spazio, cioè

$$H_{11} = H_{22} = H_{33} = H_{23} = H_{31} = H_{12} = 0 .$$

In virtù d'una nota (*cap.* XVII, *form.* 7) relazione si può dar loro la forma seguente (*):

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial \frac{1}{r_{23}}}{\partial \sigma_2} + \frac{\partial \frac{1}{r_{32}}}{\partial \sigma_3} + \frac{1}{r_{23}^2} + \frac{1}{r_{32}^2} + \frac{1}{r_{12}r_{13}} = 0 , \\
&\frac{\partial \frac{1}{r_{31}}}{\partial \sigma_3} + \frac{\partial \frac{1}{r_{13}}}{\partial \sigma_1} + \frac{1}{r_{31}^2} + \frac{1}{r_{13}^2} + \frac{1}{r_{23}r_{21}} = 0 , \\
&\frac{\partial \frac{1}{r_{12}}}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial \frac{1}{r_{21}}}{\partial \sigma_2} + \frac{1}{r_{12}^2} + \frac{1}{r_{21}^2} + \frac{1}{r_{31}r_{32}} = 0 ,
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\dfrac{\partial \frac{1}{r_{21}}}{\partial \sigma_3} = \dfrac{1}{r_{31}}\left(\dfrac{1}{r_{23}} - \dfrac{1}{r_{21}}\right) & \text{ovvero} & \dfrac{\partial \frac{1}{r_{31}}}{\partial \sigma_2} = \dfrac{1}{r_{21}}\left(\dfrac{1}{r_{32}} - \dfrac{1}{r_{31}}\right) , \\
\dfrac{\partial \frac{1}{r_{32}}}{\partial \sigma_1} = \dfrac{1}{r_{12}}\left(\dfrac{1}{r_{31}} - \dfrac{1}{r_{32}}\right) & \text{»} & \dfrac{\partial \frac{1}{r_{12}}}{\partial \sigma_3} = \dfrac{1}{r_{32}}\left(\dfrac{1}{r_{13}} - \dfrac{1}{r_{12}}\right) , \\
\dfrac{\partial \frac{1}{r_{13}}}{\partial \sigma_2} = \dfrac{1}{r_{23}}\left(\dfrac{1}{r_{12}} - \dfrac{1}{r_{13}}\right) & \text{»} & \dfrac{\partial \frac{1}{r_{23}}}{\partial \sigma_1} = \dfrac{1}{r_{13}}\left(\dfrac{1}{r_{21}} - \dfrac{1}{r_{23}}\right) .
\end{array}\right.$$

b) Le relazioni di Lamé si ottengono ordinariamente tentando l'integrazione delle equazioni

$$\frac{\partial x_1}{\partial q_i}\frac{\partial x_1}{\partial q_j} + \frac{\partial x_2}{\partial q_i}\frac{\partial x_2}{\partial q_j} + \frac{\partial x_3}{\partial q_i}\frac{\partial x_3}{\partial q_j} = \left|\begin{array}{ll} Q_i^2 , & \text{se } i = j \\ 0 \quad , & \text{se } i \neq j \end{array}\right.$$

che servono a determinare le coordinate cartesiane x_1, x_2, x_3 in funzione di q_1, q_2, q_3. Per uno spazio a due dimensioni le equazioni analoghe si ottengono sup-

(*) Lamé, « *Leçons* ... », § XLVI.

ponendo x_1 ed x_2 funzioni di Q_1 e Q_2, lasciando che x_3 sia una funzione arbitraria della sola q_3, e quindi che Q_3 sia funzione soltanto di q_3, mentre Q_1 e Q_2 sono indipendenti da q_3. Allora cinque relazioni di Lamé sono soddisfatte, e la sola $H_{33} = 0$ si riduce a

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\right) = 0 .$$

Questa è dunque l'unica condizione cui debbano soddisfare le funzioni Q_1 e Q_2 perchè si possa dalla forma $Q_1^2 dq_1^2 + Q_2^2 dq_2^2$ del quadrato dell'elemento lineare, in uno spazio a due dimensioni, passare alla forma cartesiana $dx_1^2 + dx_2^2$. Se r_1 ed r_2 sono i raggi geodetici di curvatura delle linee q_1 e q_2 sulla superficie considerata, si può a quella condizione dar la forma

$$\frac{\partial \frac{1}{r_2}}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial \sigma_2} + \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} = 0 .$$

È facile verificare che questa condizione è soddisfatta dagli ordinarii sistemi di curve ortogonali, che si adoperano nel piano.

c) Se α_1 è la curvatura della superficie q_1, in un dato punto, bisogna alla condizione precedentemente ottenuta sostituire, come si è visto per gli spazii a tre dimensioni,

$$\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_3}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\right) + \alpha_1 Q_2 Q_3 = 0 .$$

Si ha dunque

$$H_{11} = -\alpha_1 Q_1 Q_2 Q_3 + \frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial Q_3}{\partial q_1} = \left(\frac{1}{r_{12} r_{13}} - \alpha_1\right)\nabla ,$$

e le condizioni $H_{ii} + \alpha\nabla = 0$ diventano

$$\alpha_1 = \alpha + \frac{1}{r_{12} r_{13}} \quad , \quad \alpha_2 = \alpha + \frac{1}{r_{23} r_{21}} \quad , \quad \alpha_3 = \alpha + \frac{1}{r_{31} r_{32}} .$$

Queste dànno, per $\alpha = 0$, la misura della curvatura (prodotto delle curvature principali) delle tre superficie coordinate, secondo il teorema di Gauss. Per α diverso da zero, si vede che alla curvatura geodetica di ciascuna superficie, in uno spazio curvo, viene ad aggiungersi la curvatura stessa dello spazio.

8. Ritornando alle (11) osserviamo, col prof. Beltrami, che « si poteva prevedere che la curvatura dello spazio non dovesse essere priva d'influenza sulle equazioni dell'elasticità ; ma è senza dubbio sommamente notevole che tale influenza vi si manifesti sotto un aspetto così semplice ». Purtuttavia possiamo aggiungere che « non-

ostante questa semplicità, la teoria dei mezzi elastici negli spazii di curvatura costante presenta differenze rilevantissime in confronto dell'ordinaria ». Un primo esempio si ha scrivendo le equazioni (11), in assenza di forze di massa, nel seguente modo:

$$A\frac{\nabla}{Q_1^2}\frac{\partial\Theta}{\partial q_1}+B\left(\frac{\partial Q_2\mathfrak{T}_2}{\partial q_3}-\frac{\partial Q_3\mathfrak{T}_3}{\partial q_2}\right)+4\alpha B\nabla\kappa_1=0\,;\quad \text{ecc.}$$

Derivandole ora rispetto a q_1, q_2, q_3, poi sommando, si ottiene

$$A\Delta^2\Theta+4\alpha B\Theta=0\,.$$

Dunque in uno spazio curvo la dilatazione cubica non può, come nello spazio euclideo, soddisfare all'equazione di Laplace. Per esempio, non è possibile che Θ abbia, in tutto il corpo, un valore costante, diverso da zero.

9. Più notevole è il risultato che si ottiene considerando certe deformazioni potenziali. Essendo nulle, per tali deformazioni, le doppie componenti $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \mathfrak{T}_3$ della rotazione, si ricava dalle formole (12) del precedente capitolo che le $Q_i^2\kappa_i$ sono le derivate prime d'una funzione U, e la dilatazione totale è espressa da

$$\Theta=\frac{1}{\nabla}\sum_i\frac{\partial\nabla\kappa_i}{\partial q_i}=\frac{1}{\nabla}\sum\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\nabla}{Q_i^2}\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)=\Delta^2 U\,,$$

dimodochè le equazioni (11) diventano

$$F_i+\frac{\partial}{\partial\sigma_i}(A\Delta^2U+4\alpha BU)=0\,,\qquad (i=1\,,2\,,3)$$

e mostrano che anche le forze F ammettono una funzione potenziale. Se V è questa funzione, le tre equazioni indefinite si riducono all'unica

$$A\Delta^2U+4\alpha BU+V=0\,,$$

intendendo inclusa in U la costante d'integrazione. Se prendiamo $V=-4\alpha BU$, è $\Delta^2U=0$, e vediamo che si ha $F_i=-4\alpha BQ_i\kappa_i$. Otteniamo così una deformazione, priva tanto di dilatazione quanto di rotazione, nella quale la forza e lo spostamento sono, per ogni punto, in un rapporto costante, ed hanno la medesima direzione (se $\alpha < 0$: spazio di Gauss o *pseudosferico*) o direzioni opposte (se $\alpha > 0$: spazio di Riemann o *sferico*). « Tale risultato » — dice il prof. Beltrami — « non ha riscontro nello spazio euclideo, e presenta una singolare analogia con certi concetti moderni sull'azione dei mezzi dielettrici ».

10. L'ultima osservazione richiama alla mente le ingegnose ipotesi che sono state proposte per spiegare luce, calore, magnetismo, ecc., considerandone i fenomeni come prodotti da una reazione che lo spazio opporrebbe alla variabilità della propria curvatura nel tempo. E qui importa osservare che il termine addizionale $\frac{B\Phi}{\nabla}$ nella parte efficace (per la formazione delle equazioni indefinite) del potenziale elastico si può considerare appunto come l'espressione dell'energia delle reazioni che lo spazio, rigido nella propria costituzione geometrica, oppone alla materia elastica che lo riempie, supponendo questa *inerte* nel senso che, obbligata a deformarsi nel detto spazio, essa tende a farlo come se lo spazio stesso fosse euclideo. L'ulteriore svolgimento della teoria dei mezzi elastici negli spazii curvi permetterà forse di rispondere alla domanda di Clifford (*): *se non potrebbe darsi che noi considerassimo come variazioni fisiche certi effetti realmente dovuti a cambiamenti della curvatura del nostro spazio; in altre parole, se alcune delle cause, che noi chiamiamo fisiche, e forse tutte, non fossero per avventura dovute alla costituzione geometrica dello spazio nel quale viviamo.*

(*) *Loc. cit.*, p. 267.

ERRATA

Pag. 24, linea 2, invece di $U_x + U$ leggi $U_x + U_y$.

» 61, linea 5, invece di K_i leggi K_{ij}

» 128 e 137, in fondo, invece di « *Traité* » leggi « *Théorie* »

Bibliografia -

Lamé - Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs applications - Gauthier-Villars. £5.00.

Betti - Teoria della elasticità

Clebsch - Théorie de l'élasticité

P. Duhem - Cours de physique mathématique (Hermann)

Poincaré. Leçons sur la théorie de l'élasticité (G. Carré)

Picard. Traité d'Analyse (Gauthier.

Betti Teorica delle forze Newtoniane

Bianchi - Lezioni di Geometria differenziale (Pisa Nistri)

Boussinesq - Cours d'analyse infinitesimale

Tait - Trattato elementare dei quaternioni -

Maxwell - Trattato di elasticità e magnetismo trad. franç.

Clifford. Il senso comune nelle scienze esatte.
Traduz. italiana - Milano Dumolard.