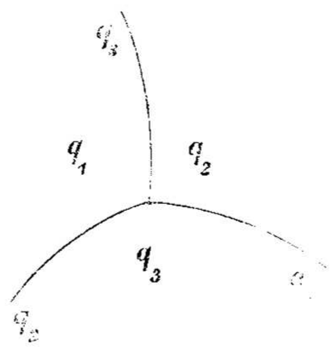
PARTE TERZA

XVIII. ALCUNE NOZIONI SULLE COORDINATE CURVILINEE.

1. Siano x_1, x_2, x_3 le coordinate cartesiane d'un punto. L'equazione $f(x_1, x_2, x_3) = q$ rappresenta, per ciascun valore di q, una superficie. Se si considera q come un *parametro* suscettibile di tutti i valori reali, l'equazione stessa rappresenta una semplice infinità di superficie. Si considerino ora tre famiglie di superficie

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = q_1 \ , \quad f_2(x_1, x_2, x_3) = q_2 \ , \quad f_3(x_1, x_2, x_3) = q_3 \ ,$$

tali che tre superficie, prese comunque nelle tre famiglie, abbiano generalmente un sol punto comune. Questo punto sarà così individuato dai valori speciali che hanno i parametri q_1, q_2, q_3 sulle tre superficie che lo contengono. Perciò q_1, q_2, q_3 si possono assumere come *coordinate* del punto. Le tre superficie e le loro linee d'intersezione si dicono superficie e linee coordinate del punto, e prendono nome dai corrispondenti parametri. Così *la linea* q_i è quella linea coordinata, lungo la quale varia il solo parametro q_i, mentre *la superficie* q_i è quella superficie coordinata su cui resta costante il parametro q_i. Questo sistema di coordinate dicesi *ortogonale* se le superficie coordinate sono, in ogni punto, perpendicolari fra loro. Se ciò ha luogo, è chiaro che anche le linee coordinate riusciranno fra loro perpendicolari.



2. Le derivate di x_1, x_2, x_3 rispetto a q_i sono evidentemente proporzionali ai *coseni direttori della tangente alla linea* q_i, nel punto considerato, poichè muovendosi questo sulla detta linea, q_i varia come una funzione *del solo arco* percorso. I coseni stessi sono dunque

$$\frac{1}{Q_i}\frac{\partial x_1}{\partial q_i}\,, \quad \frac{1}{Q_i}\frac{\partial x_2}{\partial q_i}\,, \quad \frac{1}{Q_i}\frac{\partial x_3}{\partial q_i}\,, \tag{1}$$

se si pone

$$Q_i^2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_i}\right)^2. \tag{2}$$

Se poi con σ_i si rappresenta l'arco contato, sulla linea q_i, a partire da un'origine arbitrariamente fissata, e se si osserva che i coseni (1) sono anche uguali alle derivate di x_1, x_2, x_3 rispetto a σ_i, si vede subito che $d\sigma_i = Q_i dq_i$. In altri termini Q_i è il coefficiente che bisogna dare a dq_i per ottenere l'elemento lineare, lungo la linea q_i. Questa osservazione serve appunto, nei varii casi particolari, a far conoscere speditamente le funzioni Q_1, Q_2, Q_3, che hanno grande importanza in questa teoria. Quanto all'espressione generale dell'elemento lineare, essa è manifestamente data, nei sistemi ortogonali, dalla formola

$$d\sigma^2 = Q_1^2 dq_1^2 + Q_2^2 dq_2^2 + Q_3^2 dq_3^2\,,$$

poichè, a meno di infinitesimi superiori, $d\sigma$ misura la diagonale d'un parallelepipedo rettangolo, i cui lati sono misurati da $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$.

3. Le derivate parziali prime di q_i sono proporzionali ai *coseni direttori della normale alla superficie* q_i. Questi coseni sono dunque uguali alle derivate stesse, divise per $\pm\sqrt{\Delta q_i}$. Siccome poi la normale alla superficie q_i non è che la tangente alla linea q_i, si ha

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta q_i}}\frac{\partial q_i}{\partial x_1} = \frac{1}{Q_i}\frac{\partial x_1}{\partial q_i}\,, \quad \frac{1}{\sqrt{\Delta q_i}}\frac{\partial q_i}{\partial x_2} = \frac{1}{Q_i}\frac{\partial x_2}{\partial q_i}\,, \quad \frac{1}{\sqrt{\Delta q_i}}\frac{\partial q_i}{\partial x_3} = \frac{1}{Q_i}\frac{\partial x_3}{\partial q_i}\,,$$

fissando convenientemente il verso positivo delle varie direzioni.

Queste formole, moltiplicate per $\frac{\partial q_i}{\partial x_1}, \frac{\partial q_i}{\partial x_2}, \frac{\partial q_i}{\partial x_3}$, rispettivamente, e sommate, dànno

$$\sqrt{\Delta q_i} = \frac{1}{Q_i}. \tag{3}$$

Dunque

$$Q_i \frac{\partial q_i}{\partial x_j} = \frac{1}{Q_i} \frac{\partial x_j}{\partial q_i}. \tag{4}$$

4. Ricordiamo che il determinante dei coseni degli angoli che le rette d'una terna ortogonale fanno con quelle di un'altra terna ortogonale, è uguale a ± 1, e si può sempre fare in modo che sia uguale a $+1$, nel qual caso avviene pure che ogni elemento del determinante è uguale al proprio complemento algebrico. Siccome il determinante

$$\nabla = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_1}{\partial q_2} & \frac{\partial x_1}{\partial q_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} & \frac{\partial x_2}{\partial q_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial q_1} & \frac{\partial x_3}{\partial q_2} & \frac{\partial x_3}{\partial q_3} \end{vmatrix}$$

si deduce dal determinante dei coseni dividendo le verticali rispettivamente per Q_1, Q_2, Q_3, si vede immediatamente che $\nabla = Q_1 Q_2 Q_3$. Inoltre gli elementi di ciascuna verticale di ∇ sono proporzionali ai proprii complementi algebrici. D'altra parte si ponga per un istante

$$s_k = \frac{\partial x_1}{\partial q_k}\frac{\partial^2 x_1}{\partial q_i \partial q_j} + \frac{\partial x_2}{\partial q_k}\frac{\partial^2 x_2}{\partial q_i \partial q_j} + \frac{\partial x_3}{\partial q_k}\frac{\partial^2 x_3}{\partial q_i \partial q_j},$$

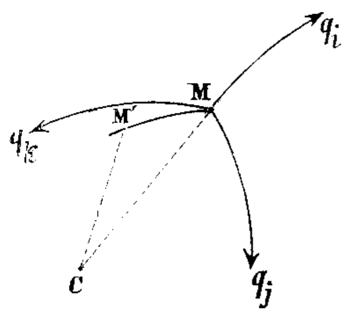
rappresentando con i, j, k una disposizione qualunque degli indici 1, 2, 3. La condizione di ortogonalità fra le linee q_i e q_j, vale a dire

$$\frac{\partial x_1}{\partial q_i}\frac{\partial x_1}{\partial q_j} + \frac{\partial x_2}{\partial q_i}\frac{\partial x_2}{\partial q_j} + \frac{\partial x_3}{\partial q_i}\frac{\partial x_3}{\partial q_j} = 0,$$

derivata rispetto a q_k, dà $s_i + s_j = 0$. Ne segue $s_1 = s_2 = s_3 = 0$, ed all'eguaglianza $s_h = 0$ si può, in virtù delle proprietà precedentemente richiamate, dar la forma

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_i} & \frac{\partial x_1}{\partial q_j} & \frac{\partial^2 x_1}{\partial q_i \partial q_j} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_i} & \frac{\partial x_2}{\partial q_j} & \frac{\partial^2 x_2}{\partial q_i \partial q_j} \\ \frac{\partial x_3}{\partial q_i} & \frac{\partial x_3}{\partial q_j} & \frac{\partial^2 x_3}{\partial q_i \partial q_j} \end{vmatrix} = 0 . \tag{5}$$

5. Ciò premesso, cerchiamo le linee di curvatura della superficie q_i. Spostiamo il punto M su questa superficie, in modo che dalla posizione $M(q_1, q_2, q_3)$ venga nella posizione



$$M'(q + \delta q_1 , \; q_2 + \delta q_2 , \; q_3 + \delta q_3) ,$$

essendo $\delta q_i = 0$. Perchè MM' stia sopra una linea di curvatura è necessario che avvenga l'incontro delle normali, in M ed M', alla superficie q_i. Siano $x_1 - \lambda \frac{\partial x_1}{\partial q_i}$, $x_2 - \lambda \frac{\partial x_2}{\partial q_i}$, $x_3 - \lambda \frac{\partial x_3}{\partial q_i}$ le coordinate cartesiane d'un punto della prima normale. Perchè questo appartenga alla seconda normale bisogna che siano nulle le variazioni delle coordinate nel passaggio da M ad M', bisogna cioè che si abbia

$$\left\{ \begin{aligned} \delta x_1 - \lambda \delta \frac{\partial x_1}{\partial q_i} - \frac{\partial x_1}{\partial q_i} \delta \lambda = 0 \, , \\ \delta x_2 - \lambda \delta \frac{\partial x_2}{\partial q_i} - \frac{\partial x_2}{\partial q_i} \delta \lambda = 0 \, , \\ \delta x_3 - \lambda \delta \frac{\partial x_3}{\partial q_i} - \frac{\partial x_3}{\partial q_i} \delta \lambda = 0 \, . \end{aligned} \right. \tag{6}$$

L'eliminazione di λ e $\delta\lambda$ conduce subito alla condizione

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_i} & \delta x_1 & \delta \frac{\partial x_1}{\partial q_i} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_i} & \delta x_2 & \delta \frac{\partial x_2}{\partial q_i} \\ \frac{\partial x_3}{\partial q_i} & \delta x_3 & \delta \frac{\partial x_3}{\partial q_i} \end{vmatrix} = 0 ,$$

equivalente a

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_i} & \frac{\partial x_1}{\partial q_j}\delta q_j + \frac{\partial x_1}{\partial q_k}\delta q_k & \frac{\partial^2 x_1}{\partial q_i \partial q_j}\delta q_j + \frac{\partial^2 x_1}{\partial q_i \partial q_k}\delta q_k \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_i} & \frac{\partial x_2}{\partial q_j}\delta q_j + \frac{\partial x_2}{\partial q_k}\delta q_k & \frac{\partial^2 x_2}{\partial q_i \partial q_j}\delta q_j + \frac{\partial^2 x_2}{\partial q_i \partial q_k}\delta q_k \\ \frac{\partial x_3}{\partial q_i} & \frac{\partial x_3}{\partial q_j}\delta q_j + \frac{\partial x_3}{\partial q_k}\delta q_k & \frac{\partial^2 x_3}{\partial q_i \partial q_j}\delta q_j + \frac{\partial^2 x_3}{\partial q_i \partial q_k}\delta q_k \end{vmatrix} = 0,$$

Scomponendo le colonne si ottiene, nel primo membro, una forma quadratica di δq_j e δq_k, in cui i coefficienti di δq_j^2 e δq_k^2 sono

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_i} & \frac{\partial x_1}{\partial q_j} & \frac{\partial^2 x_1}{\partial q_i \partial q_j} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_i} & \frac{\partial x_2}{\partial q_j} & \frac{\partial^2 x_2}{\partial q_i \partial q_j} \\ \frac{\partial x_3}{\partial q_i} & \frac{\partial x_3}{\partial q_j} & \frac{\partial^2 x_3}{\partial q_i \partial q_j} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q} & \frac{\partial x_1}{\partial q_k} & \frac{\partial^2 x_1}{\partial q_i \partial q_k} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_i} & \frac{\partial x_2}{\partial q_k} & \frac{\partial^2 x_2}{\partial q_i \partial q_k} \\ \frac{\partial x_3}{\partial q_i} & \frac{\partial x_3}{\partial q_k} & \frac{\partial^2 x_3}{\partial q_i \partial q_k} \end{vmatrix},$$

sono cioè uguali a zero, in virtù di (5). Resta il termine in $\delta q_j \delta q_k$, il cui coefficiente non può essere *identicamente* nullo, altrimenti tutte le linee uscenti da M sarebbero *sempre* linee di curvatura. Dunque $\delta q_j = 0$ o $\delta q_k = 0$. Si ha così il teorema di Dupin: *in ogni sistema triplo ortogonale, le superficie di due famiglie tracciano, sopra una superficie qualunque della terza famiglia, tutte le sue linee di curvatura* (*).

6. Adunque per trovare i raggi principali di curvatura della superficie q_i, nel punto M, bisogna far spostare questo punto sulle linee coordinate q_j e q_k. Se r_{ij} ed r_{ik} sono i raggi che si ottengono in queste due direzioni, i loro valori sono evidentemente dati dall'espressione $Q_i\lambda$, in cui λ si calcola mediante le equazioni (6). Suppongasi, per esempio, che si voglia calcolare r_{ij}. In questo caso,

---

(*) Vedi LAMÉ: *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, §§ XXIII, XXIV; o BIANCHI: *Lezioni di Geometria differenziale* (Pisa, Nistri, 1885-86, § 122). Al prof. Beltrami si deve un'altra interessante dimostrazione, fondata su considerazioni cinematiche (*Rendiconti dell'Istituto lombardo*, 1872, p. 483).

essendo $\delta q_i = 0$, $\delta q_k = 0$, si ha $\delta = \frac{\partial}{\partial q_j} \cdot \delta q_j$, e però le equazioni (6) diventano

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial q_j} - \lambda \frac{\partial^2 x_1}{\partial q_i \partial q_j} - \frac{\partial x_1}{\partial q_i}\frac{\partial \lambda}{\partial q_j} = 0 , \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_j} - \lambda \frac{\partial^2 x_2}{\partial q_i \partial q_j} - \frac{\partial x_2}{\partial q_i}\frac{\partial \lambda}{\partial q_j} = 0 , \\ \frac{\partial x_3}{\partial q_j} - \lambda \frac{\partial^2 x_3}{\partial q_i \partial q_j} - \frac{\partial x_3}{\partial q_i}\frac{\partial \lambda}{\partial q_j} = 0 . \end{aligned}\right.$$

Moltiplicandole per $\frac{\partial x_1}{\partial q_j}$, $\frac{\partial x_2}{\partial q_j}$, $\frac{\partial x_3}{\partial q_j}$, rispettivamente, poi sommando e tenendo conto dell'ortogonalità delle linee q_i e q_j, si ottiene

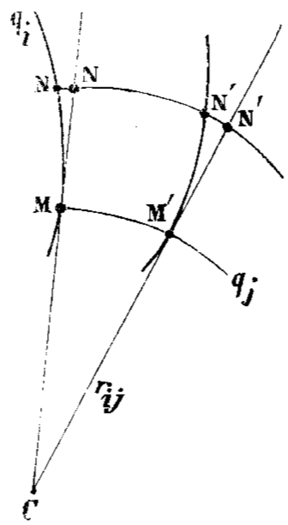
$$Q_j^2 = \frac{\lambda}{2} \frac{\partial}{\partial q_i} Q_j^2 = \lambda Q_j \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} .$$

Dunque

$$\frac{1}{r_{ij}} = \frac{1}{Q_i Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} . \tag{7}$$

7. Geometricamente la formola (7) si dimostra in modo assai semplice prendendo sulla linea q_j un arco infinitesimo MM', e considerando l'arco NN' nel quale si cambia MM' quando q_i diventa $q_i + dq_i$. Allora si ha

$$MN = d\sigma_i \quad , \quad MM' = d\sigma_j \quad , \quad NN' = d\sigma_j + \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} dq_i \, dq_j \ ,$$



e la relazione evidente

$$\frac{NN' - MM'}{MM'} = \frac{MN}{r_{ij}}$$

si trasforma subito nella formola (7). Questa serve principalmente a far conoscere la segnatura adoperata da Lamé nelle sue classiche « *Leçons* ». Costantemente preoccupato di dar forma geometrica ai risultati dei suoi calcoli, l'illustre inventore delle coordinate curvilinee introduce sempre, nelle formole finali, le curvature degli archi coordinati e le derivate rispetto a questi archi. Ciò contribuisce a mettere in evidenza il vero significato delle formole stesse « imperocchè » — dice Laplace — « è interessante figurarsi nello spazio i risultati dell'Analisi, e reciprocamente leggere le modificazioni delle linee e delle superficie, e le variazioni del movimento dei corpi, nelle equazioni che le esprimono. Questo riavvicinamento della Geometria e dell'Analisi sparge una luce nuova sulle due scienze: le operazioni intellettuali della seconda, rese sensibili mercè le immagini della prima, sono più facili a comprendere, più interessanti a seguire; e quando l'osservazione realizza queste immagini, e trasforma i risultati geometrici in leggi naturali, la vista di questo sublime spettacolo ci fa gustare il più nobile fra i piaceri riservati all'umana natura ».

XIX. DIGRESSIONE SUI PARAMETRI DIFFERENZIALI.

1. Data una funzione V delle coordinate cartesiane ortogonali x_1, x_2, x_3, le funzioni

$$\Delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x_3}\right)^2 \quad , \quad \Delta^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2} \, ,$$

che si chiamano i *parametri differenziali* (*) di V, del primo e del secondo ordine, hanno la proprietà di non dipendere dal sistema di assi, rispetto al quale vengono calcolate. Infatti è facile dimostrare che, se si fa ruotare la terna ortogonale di assi arbitrariamente, i valori dei parametri differenziali, in ciascun punto, restano invariati (**). Ciò si deve ai significati geometrici e meccanici dei para-

(*) Considerati la prima volta da LAMÉ. Vedi le « *Leçons sur les coordonnées curvilignes* », § III. Chi voglia conoscere la teorica generale dei parametri differenziali, stabilita sopra basi puramente analitiche, legga una Memoria del Prof. BELTRAMI, pubblicata dall'*Accademia di Bologna* (vol. VIII della 2ª serie, p. 549) ed un'altra del Prof. RICCI negli *Annali di matematica* (vol. XIV della 2ª serie, p. 1).

(**) Per una rotazione infinitesima degli assi (*cfr.* p. 30, § 3) la prima e la seconda derivata di V rispetto ad x_1 variano di

$$\alpha_2 \frac{\partial V}{\partial x_3} - \alpha_3 \frac{\partial V}{\partial x_2} \quad , \quad 2\left(\alpha_2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_3} - \alpha_3 \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2}\right) ,$$

e però le metà delle variazioni di ΔV e $\Delta^2 V$ sono

$$\sum \left(\alpha_2 \frac{\partial V}{\partial x_3} - \alpha_3 \frac{\partial V}{\partial x_2}\right) \frac{\partial V}{\partial x_1} = 0 \quad , \quad \sum \left(\alpha_2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_3} - \alpha_3 \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2}\right) = 0 \, .$$

metri stessi, *significati indipendenti dall'orientazione degli assi.* Per esempio, sia V_1 la media dei valori che la funzione V assume sopra una superficie sferica, di raggio infinitesimo r, e V_0 il valore di V nel centro della sfera. Se si trascurano gli infinitesimi di ordine superiore al secondo, si ha

$$V = V_0 + x_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + \ldots + \frac{1}{2}\left(x_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \ldots + 2x_1 x_2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} + \ldots \right),$$

supponendo che tutte le derivate siano calcolate nel centro della sfera. Si moltiplichi per ds, e si integri a tutta la superficie sferica, osservando che

$$\int x_i\, ds = 0\ ,\quad \int x_2 x_3\, ds = \ldots = 0\ ,\quad \int x_1^2\, ds = \ldots = \frac{1}{3}\int r^2\, ds = \frac{1}{3} s r^2.$$

Si ottiene, dividendo per sr^2,

$$\lim_{r=0} \frac{V_1 - V_0}{r^2} = \frac{1}{6} \Delta^2 V.$$

Una eguaglianza analoga si può stabilire per ΔV, considerando la media dei valori di V^2. Tali eguaglianze rendono evidente la proprietà invariantiva di ΔV e $\Delta^2 V$.

2. Siano $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ i coseni che definiscono una direzione qualunque. L'integrale di $\alpha_i \alpha_j\, ds$, esteso ad una superficie sferica di raggio 1, ha il valore $\frac{4\pi}{3}$ o il valore 0, secondo che $i = j$ o $i \neq j$. Infatti nel primo caso si può scrivere

$$\int \alpha_i^2\, ds = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\psi = 2\pi \int_0^\pi \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta = \frac{4\pi}{3}\ ,$$

e nel secondo

$$\int \alpha_i \alpha_j\, ds = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta \cos\theta \cos\psi\, d\theta\, d\psi = 0\ .$$

Ciò premesso, la derivata di V nella direzione considerata è

$$\frac{dV}{d\sigma} = \alpha_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial V}{\partial x_3}. \tag{1}$$

Ne segue, quadrando, moltiplicando per ds ed integrando a tutta la sfera,

$$\int \left(\frac{dV}{d\sigma}\right)^2 ds = \frac{4\pi}{3} \Delta V.$$

Similmente, se si osserva che

$$\frac{d^2 V}{d\sigma^2} = \alpha_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \alpha_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \ldots + 2\alpha_1 \alpha_2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} + \ldots, \tag{2}$$

si ottiene, moltiplicando per ds ed integrando,

$$\int \frac{d^2 V}{d\sigma^2} ds = \frac{4\pi}{3} \Delta^2 V.$$

Dunque i valori di $\Delta^2 V$ e ΔV sono proporzionali ai valori medii delle derivate seconde e dei quadrati delle derivate prime in tutte le direzioni che si possono considerare intorno a ciascun punto (*).

3. Il significato invariantivo di ΔV si può anche dedurre immediatamente dalla formola (1), considerando la direzione definita da coseni proporzionali alle derivate prime di V. Sia θ l'angolo di questa direzione con l'altra $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Alla (1) si può dar la forma

$$\frac{dV}{d\sigma} = \sqrt{\Delta V} \, . \cos\theta \, .$$

Il *massimo* valore di $\frac{dV}{d\sigma}$ si ha dunque per $\theta = 0$, ed è appunto $\sqrt{\Delta V}$. In altri termini $\sqrt{\Delta V}$ è la derivata di V nella direzione secondo la quale *più rapidamente* varia la funzione. Si noti che questa direzione è precisamente quella della normale alla superficie

---

(*) Boussinesq: « *Cours d'Analyse infinitésimale* » (t. I, 2^{me} fasc., pp. 57, 71).

$V =$ costante. Similmente dalla formola (2) si deduce che le direzioni per le quali è nulla la derivata seconda costituiscono un cono quadrico, ed è ovvio che questo non può dipendere dagli assi. È dunque *invariante* il discriminante della forma quadratica (2), hessiano della funzione V, e godono della proprietà invariantiva anche le somme dei suoi minori principali del primo o del secondo ordine, ed in particolare $\Delta^2 V$. Altre interessanti interpretazioni si possono dare dei parametri differenziali. Tutte concorrono a dimostrare che « il parametro differenzial secondo è, per così dire, *la derivata per eccellenza,* una derivata che esprime ciò che di più generale si ha nel modo di variare della funzione » (*). Perciò il detto parametro ha importanza altissima in tutti i rami della Fisica matematica. « Quando una classe di fenomeni fisici dipende dalle variazioni d'una certa funzione, quasi sempre questa interviene per mezzo del suo parametro differenzial secondo, come se questo fosse *una derivata naturale,* più essenziale, più semplice ed in pari tempo più completa di tutte le derivate parziali, più o meno arbitrariamente scelte, che si ha l'uso di considerare » (**).

4. I parametri differenziali si presentano anche molto naturalmente quando si fa uso dei ***quaternioni*** (***), o numeri complessi risultanti dalla riunione, per via additiva, d'uno *scalare* (numero reale, privo del senso di direzione) e d'un *vettore,* che nello spazio definisce, in grandezza e direzione, un segmento rettilineo, mediante le sue projezioni su tre assi ortogonali qualunque. Così lo spostamento (u, v, w) d'un punto è un vettore $\omega = iu + jv + kw$, e la doppia rotazione del mezzo è un altro vettore $\mathfrak{T} = i\mathfrak{T}_1 + j\mathfrak{T}_2 + k\mathfrak{T}_3$, in cui le *unità* i, j, k, linearmente indipendenti, sono soltanto soggette alle condizioni

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \ , \quad jk = -kj = i \ , \quad ki = -ik = j \ , \quad ij = -ji = k \, .$$

È invece scalare la dilatazione Θ. Quando si applica l'operatore (****) di Hamilton

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$$

(*) Boussinesq, *loc. cit.*, p. 72.

(**) Lamé : « *Leçons sur les coordonnées curvilignes* », § XV.

(***) Consiglio vivamente al lettore lo studio dei capitoli « *Cinematica* » ed « *Applicazioni fisiche* » nel *Trattato elementare dei quaternioni* di Tait.

(****) Tait, *loc. cit.*, seconda parte, p. 35.

allo spostamento, intendendo conservate le proprietà dell'ordinario calcolo algebrico (tranne, per necessità, la proprietà commutativa della moltiplicazione), si ottiene

$$\nabla \omega = - \Theta + \mathfrak{T},$$

vale a dire che la *condensazione* e la doppia *rotazione* del mezzo sono rispettivamente la parte scalare e la parte vettoriale di $\nabla\omega$. Quando invece l'operatore ∇ si applica ad uno scalare, si può soltanto dire che il quadrato del modulo del risultato è precisamente uguale al parametro differenziale del primo ordine dello scalare stesso, cioè $|\nabla|^2 = \Delta$. Ripetendo ancora sul primo risultato l'operazione ∇ si ottiene

$$\nabla^2 = - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = - \Delta^2,$$

e ciò resta vero, manifestamente, quando si opera sopra un vettore, di guisa che il parametro differenziale secondo non è, a prescindere dal segno, che il risultato di due operazioni ∇, applicate successivamente. Qui è utile segnalare la semplicità grandissima che assumono i problemi di elasticità quando si fa uso dei simboli testè definiti. Le tre equazioni indefinite dell'equilibrio elastico nei mezzi isotropi (IV, § 5) si riassumono nell'unica $\mathfrak{F} = \nabla\varphi$, dove $\mathfrak{F}$ è il vettore rappresentativo della forza di massa, cioè $iX + jY + kZ$, e φ rappresenta il quaternione $-A\Theta + B\mathfrak{T}$, leggiera modificazione di $\nabla\omega$. Del resto, l'introduzione del vettore $\Omega = iU + jV + kW$, considerato nel *cap.* XII (§§ 4, 5), permette di scrivere, innanzi tutto, $\nabla\Omega = 4\pi\varphi$, e finalmente $\nabla^2\Omega = 4\pi\mathfrak{F}$. Così è resa manifesta la possibilità di ridurre sempre le quistioni di elasticità al problema di Dirichlet. Queste considerevoli semplificazioni non devono recar meraviglia quando si rifletta che « spesso in Fisica, per ragionare, non per calcolare, è desiderabile evitare l'esplicita introduzione delle coordinate cartesiane, ed è vantaggioso fissare l'attenzione sopra un punto dello spazio, preso in sè, non sulle sue tre coordinate, come sulla grandezza e la direzione d'una forza invece che sulle sue tre componenti. Questo modo di considerare le questioni geometriche e fisiche è più naturale dell'altro, e si presenta primo alla mente; nondimeno le idee che ne derivano non ebbero il loro completo sviluppo fino al giorno in cui Hamilton fece un secondo grande passo nello studio dello spazio mercè l'invenzione del calcolo dei quaternioni » (*).

5. Espressione di ΔV in coordinate curvilinee. Si ha

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{\partial V}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial q_3}\frac{\partial q_3}{\partial x_i}. \qquad (i = 1, 2, 3)$$

(*) Così si esprime MAXWELL nei preliminari (§ 10) del suo immortale « *Trattato di elasticità e magnetismo* ». Qui non so astenermi dal consigliare anche l'intera lettura di questi preziosi *preliminari*.

Quindi, elevando al quadrato e sommando, e tenendo conto dell'ortogonalità delle superficie coordinate e della formola (3) del precedente capitolo,

$$\Delta V = \frac{1}{Q_1^2}\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)^2 + \frac{1}{Q_2^2}\left(\frac{\partial V}{\partial q_2}\right)^2 + \frac{1}{Q_3^2}\left(\frac{\partial V}{\partial q_3}\right)^2. \tag{3}$$

6. Espressione di $\Delta^2 V$ in coordinate curvilinee. Prima trattiamo il caso particolare $V = q_i$. Dalla formola (4) del precedente capitolo si deduce

$$\frac{\partial^2 q_i}{\partial x_j^2} = \frac{\partial x_j}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{Q_i^2} + \frac{1}{Q_i^2}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_i};$$

poi, facendo $j = 1, 2, 3$ e sommando,

$$\Delta^2 q_i = \frac{\partial}{\partial q_i}\frac{1}{Q_i^2} + \frac{1}{Q_i^2}\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_i}.$$

Ora, osservando la predetta formola (4) ed invertendo l'ordine di certe differenziazioni, si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_i} &= \frac{\partial q_1}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial q_1}\frac{\partial x_j}{\partial q_i} + \frac{\partial q_2}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial q_2}\frac{\partial x_j}{\partial q_i} + \frac{\partial q_3}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial q_3}\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\\ &= \frac{1}{Q_1^2}\frac{\partial x_j}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial x_j}{\partial q_1} + \frac{1}{Q_2^2}\frac{\partial x_j}{\partial q_2}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial x_j}{\partial q_2} + \frac{1}{Q_3^2}\frac{\partial x_j}{\partial q_3}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial x_j}{\partial q_3}.\end{aligned}$$

Ne segue, sommando,

$$\begin{aligned}\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_i} = \frac{1}{Q_1^2}&\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial x_1}{\partial q_1} + \frac{\partial x_2}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial x_2}{\partial q_1} + \frac{\partial x_3}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial x_3}{\partial q_1}\right)\\ + \frac{1}{Q_2^2}&\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_2}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial x_1}{\partial q_2} + \frac{\partial x_2}{\partial q_2}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial x_2}{\partial q_2} + \frac{\partial x_3}{\partial q_2}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial x_3}{\partial q_2}\right)\\ + \frac{1}{Q_3^2}&\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_3}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial x_1}{\partial q_3} + \frac{\partial x_2}{\partial q_3}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial x_2}{\partial q_3} + \frac{\partial x_3}{\partial q_3}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial x_3}{\partial q_3}\right).\end{aligned}$$

Intanto, se si tiene presente la definizione di Q_k (*form.* 2 del *cap.* precedente), si ha

$$\frac{\partial x_1}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial x_1}{\partial q_k} + \frac{\partial x_2}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial x_2}{\partial q_k} + \frac{\partial x_3}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial x_3}{\partial q_k} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_i}Q_k^2 = Q_k\frac{\partial Q_k}{\partial q_i}.$$

Dunque

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_i}=\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_i}+\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_i}+\frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_i}=\frac{\partial}{\partial q_i}\log Q_1Q_2Q_3\,,$$

e conseguentemente

$$\Delta^2 q_i=\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{1}{Q_i^2}+\frac{1}{Q_i^2}\frac{\partial \log\nabla}{\partial q_i}=\frac{1}{\nabla}\left(\nabla\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{1}{Q_i^2}+\frac{1}{Q_i^2}\frac{\partial\nabla}{\partial q_i}\right)=\frac{1}{\nabla}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\nabla}{Q_i^2}. \qquad (4)$$

7. Passiamo al caso generale. Si ha

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_j^2}=\sum_i \frac{\partial V}{\partial q_i}\frac{\partial^2 q_i}{\partial x_j^2}+\sum_i \frac{\partial q_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial V}{\partial q_i}.$$

Quindi, facendo $j=1,2,3$ e sommando,

$$\Delta^2 V=\sum_i \frac{\partial V}{\partial q_i}\Delta^2 q_i+\sum_i\left(\frac{\partial q_i}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial V}{\partial q_i}+\frac{\partial q_i}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial V}{\partial q_i}+\frac{\partial q_i}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial V}{\partial q_i}\right).$$

L'espressione sottoposta al secondo segno sommatorio si può anche scrivere così:

$$\frac{1}{Q_i^2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial V}{\partial q_i}+\frac{\partial x_2}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial V}{\partial q_i}+\frac{\partial x_3}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)=\frac{1}{Q_i^2}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial V}{\partial q_i}.$$

Dunque

$$\Delta^2 V=\sum_i\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\Delta^2 q_i+\frac{1}{Q_i^2}\frac{\partial^2 V}{\partial q_i^2}\right)\,; \qquad (5)$$

poi, in virtù di (4),

$$\Delta^2 V=\frac{1}{\nabla}\sum_i\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\nabla}{Q_i^2}+\frac{\nabla}{Q_i^2}\frac{\partial^2 V}{\partial q_i^2}\right)=\frac{1}{\nabla}\sum_i\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\nabla}{Q_i^2}\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)\,,$$

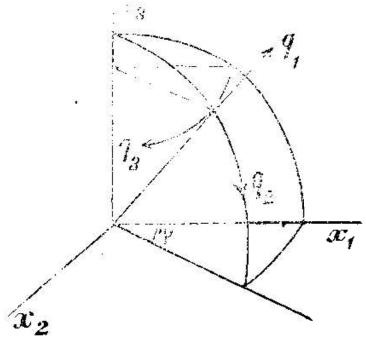
cioè

$$\Delta^2 V=\frac{1}{Q_1Q_2Q_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{Q_2Q_3}{Q_1}\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{Q_3Q_1}{Q_2}\frac{\partial V}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{Q_1Q_2}{Q_3}\frac{\partial V}{\partial q_3}\right)\right].$$

È questa l'importantissima *formola di Lamé* (*).

(*) « *Leçons* ... », § XIV. La dimostrazione qui data non differisce, in sostanza, da quella che LAMÉ stesso ha svolto nei §§ XII, XIII, XIV delle sue « *Leçons* ». Una formola più generale, relativa al caso di n variabili, si trova nella *Teorica dei determinanti* (p. 93) del Prof. BRIOSCHI.

8. Applichiamola al sistema delle *coordinate polari*. In questo sistema si ha una famiglia di sfere concentriche, una famiglia di coni di rotazione, col vertice nel centro delle sfere e l'asse comune, e finalmente un fascio di piani col medesimo asse. I parametri sono il raggio r di ciascheduna sfera, l'angolo θ che le generatrici d'uno stesso cono fanno con l'asse di rotazione, e l'angolo ψ di ciascun piano con un piano fisso. In ogni punto incrociansi ad angoli retti un *raggio*, un *meridiano*, un *parallelo*. Lungo queste linee, che sono le *linee coordinate*, gli elementi lineari sono dr, $rd\theta$, $r \operatorname{sen}\theta d\psi$. D'altra parte si sa che questi elementi sono espressi da $Q_1 dr$, $Q_2 d\theta$, $Q_3 d\psi$. Dunque

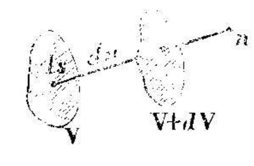


$$Q_1 = 1 \ , \quad Q_2 = r \ , \quad Q_3 = r \operatorname{sen}\theta \ , \quad \nabla = r^2 \operatorname{sen}\theta \ ,$$

e la formola di Lamé diventa

$$\Delta^2 V = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2}\right].$$

9. *Seconda dimostrazione* (*). La formola di Lamé si presenta in modo abbastanza semplice quando si cerca di stabilire l'equazione generale della teoria del calore in coordinate curvilinee. Rappresentiamo con V la temperatura nei diversi punti d'un mezzo omogeneo ed isotropo, e cerchiamo di esprimere la quantità di calore che, durante il tempo dt, attraversa un elemento piano ds. Prendiamo un elemento infinitamente vicino e parallelo al primo, alla temperatura $V + dV$, ed immaginiamo così formato un *muro* di spessore infinitesimo dn. È noto (**) che la differenza $V - (V + dV)$ delle temperature sulle due facce del muro, divisa per lo spessore e moltiplicata per un coefficiente c, detto coefficiente di *conducibilità calorifica*, dà la quantità di calore che passa durante l'unità di tempo per l'unità di superficie. Dunque il flusso di calore che attraversa ds durante il tempo dt è



$$c\, ds\, dt \frac{V - (V + dV)}{dn} = - c \frac{dV}{dn} ds\, dt.$$

(*) Anche dovuta a Lamé: « *Leçons*... », § XVI.
(**) Vedi, per esempio, Jamin, « *Cours de physique* », 2[me] éd., t. II, p. 335.

Ciò premesso, si consideri il parallelepipedo costruito sugli elementi lineari $d\sigma_i = Q_i dq_i$, $(i=1,2,3)$. Esso riceve, attraverso la faccia ds_i, una quantità di calore espressa da $-\frac{c}{Q_i}\frac{\partial V}{\partial q_i} ds_i dt$, e perde, attraverso la faccia opposta, la quantità

$$-\left[\frac{1}{Q_i}\frac{\partial V}{\partial q_i} ds_i + \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{1}{Q_i}\frac{\partial V}{\partial q_i} ds_i\right) dq_i\right] c\,dt\,,$$

dimodochè resta nell'elemento di spazio la quantità di calore

$$c\,\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{1}{Q_i}\frac{\partial V}{\partial q_i} ds_i\right) dq_i dt = c\,\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\nabla}{Q_i^2}\frac{\partial V}{\partial q_i}\right) dq_1 dq_2 dq_3 dt\,.$$

La quantità totale di calore che l'elemento dS acquista nel tempo dt è dunque

$$\frac{c\,dS\,dt}{\nabla}\sum_i \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\nabla}{Q_i^2}\frac{\partial V}{\partial q_i}\right). \tag{6}$$

D'altra parte è noto che questa quantità di calore dev'essere proporzionale all'elevazione di temperatura, $\frac{\partial V}{\partial t} dt$, ed alla massa ρdS, e che il coefficiente di proporzionalità è il calorico specifico C. Dunque l'espressione (6) equivale a

$$C\frac{\partial V}{\partial t}\rho\, dS\, dt\,.$$

Dal paragone risulta, chiamando k la costante $\frac{C\rho}{c}$,

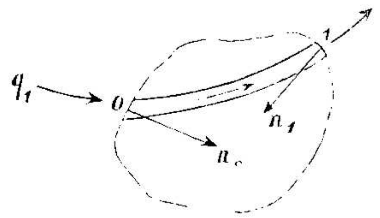
$$\frac{1}{\nabla}\sum_i \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\nabla}{Q_i^2}\frac{\partial V}{\partial q_i}\right) = k\frac{\partial V}{\partial t}\,.$$

Il secondo membro, in forza del suo significato fisico, non può dipendere dal sistema di coordinate prescelto. Dunque il primo membro conserva inalterato il proprio valore quando si specializza il sistema di coordinate. Nel caso delle coordinate cartesiane esso diventa $\Delta^2 V$ perchè si ha $q_i = x_i$, $Q_i = 1$, $\nabla = 1$. Resta così dimostrata la formola di Lamé, e nel tempo stesso si vede che la propagazione del calore nei mezzi omogenei ed isotropi è regolata dall'*equazione di Fourier* $\Delta^2 V = k \frac{\partial V}{\partial t}$. In particolare si osservi che, se un corpo è in equilibrio di temperatura, dev'essere soddisfatta l'equazione $\Delta^2 V = 0$ (*equazione di* (*) *Laplace*), in tutti i suoi punti.

10. Trasformazione di integrali. Sia V una funzione finita, continua ed uniforme, e si consideri l'integrale triplo

$$\int \frac{\partial V}{\partial q_1} \frac{dS}{\nabla}.$$

Per una linea q_1 conduciamo le superficie q_2 e q_3, e consideriamo le due superficie infinitamente vicine, $q_2 + dq_2$ e $q_3 + dq_3$. Queste quattro superficie staccano dallo spazio un *canaletto*. Scomponiamo il corpo in una infinità di simili canaletti, che supporremo percorsi nel senso in cui si computano le q_1, e distinguiamo con indici 0 ed 1 rispettivamente tutto ciò che si riferisce ai punti di *entrata* e di *uscita* dei canaletti sulla superficie del corpo. Ciò premesso, l'integrale considerato si può scrivere così



$$\iiint \frac{\partial V}{\partial q_1} dq_1 dq_2 dq_3 = \iint dq_2 dq_3 \int \frac{\partial V}{\partial q_1} dq_1 = \iint (V_1 - V_0) dq_2 dq_3.$$

Ciascun canaletto stacca dalla superficie un elemento ds_0 o ds_1, la cui projezione sul piano tangente alla superficie q_1, nel punto che si considera, dà la sezione retta del canaletto, cioè un rettangolo che ha per dimensioni $Q_2 dq_2$, $Q_3 dq_3$. Siccome l'angolo della linea q_1 con la normale alla superficie del corpo è acuto all'entrata, ottuso all'uscita, si ha

$Q_2 Q_3 dq_2 dq_3 = ds_0 \cos(n_0, q_1)$ all'entrata, $Q_2 Q_3 dq_2 dq_3 = -ds_1 \cos(n_1, q_1)$ all'uscita,

e però

$$\iint V_1 dq_2 dq_3 - \iint V_0 dq_2 dq_3$$

$$= - \int \frac{V_1 \cos(n_1 q_1)}{Q_2 Q_3} ds_1 - \int \frac{V_0 \cos(n_0 q_1)}{Q_2 Q_3} ds_0 = - \int \frac{V \cos(n q_1)}{Q_2 Q_3} ds.$$

Dunque

$$\int \frac{\partial V}{\partial q_1} \frac{dS}{\nabla} = - \int Q_1 V \cos(n q_1) \frac{ds}{\nabla}. \qquad (7)$$

In questa formola è inclusa la (9) del *cap.* I.

(*) « *Mécanique céleste* » (liv. III, XI).

11. *Terza dimostrazione* (*). La trasformazione (7) ci mette in grado di esporre un'altra bella dimostrazione della formola di Lamé. Si consideri l'integrale

$$J = \int \Delta V . dS ,$$

e vi si faccia variare V. In virtù di (3) si può scrivere

$$J = \int \left[\frac{\nabla}{Q_1^2} \left(\frac{\partial V}{\partial q_1} \right)^2 + \frac{\nabla}{Q_2^2} \left(\frac{\partial V}{\partial q_2} \right)^2 + \frac{\nabla}{Q_3^2} \left(\frac{\partial V}{\partial q_3} \right)^2 \right] \frac{dS}{\nabla} ;$$

poi, prendendo le variazioni ed integrando per parti,

$$\frac{1}{2} \delta J = \int \left(\frac{\nabla}{Q_1^2} \frac{\partial V}{\partial q_1} \frac{\partial \delta V}{\partial q_1} + \frac{\nabla}{Q_2^2} \frac{\partial V}{\partial q_2} \frac{\partial \delta V}{\partial q_2} + \frac{\nabla}{Q_3^2} \frac{\partial V}{\partial q_3} \frac{\partial \delta V}{\partial q_3} \right) \frac{dS}{\nabla}$$

$$= \int \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\nabla}{Q_1^2} \frac{\partial V}{\partial q_1} \delta V \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{\nabla}{Q_2^2} \frac{\partial V}{\partial q_2} \delta V \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{\nabla}{Q_3^2} \frac{\partial V}{\partial q_3} \delta V \right) \right] \frac{dS}{\nabla}$$

$$- \int \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\nabla}{Q_1^2} \frac{\partial V}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{\nabla}{Q_2^2} \frac{\partial V}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{\nabla}{Q_3^2} \frac{\partial V}{\partial q_3} \right) \right] \delta V . \frac{dS}{\nabla} .$$

Adoperando (7) si riconosce che il primo integrale si trasforma in

$$- \int \left(\frac{1}{Q_1} \frac{\partial V}{\partial q_1} \cos(nq_1) + \frac{1}{Q_2} \frac{\partial V}{\partial q_2} \cos(nq_2) + \frac{1}{Q_3} \frac{\partial V}{\partial q_3} \cos(nq_3) \right) \delta V ds$$

cioè in $- \int \delta V . \frac{dV}{dn} ds$. Dunque

$$\frac{1}{2} \delta J = - \int \delta V \frac{dV}{dn} ds - \int \delta V \left\{ \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\nabla}{Q_i^2} \frac{\partial V}{\partial q_i} \right) \right\} \frac{dS}{\nabla} .$$

In particolare, prendendo coordinate cartesiane,

$$\frac{1}{2} \delta J = - \int \delta V \frac{dV}{dn} ds - \int \delta V . \Delta^2 V . dS .$$

(*) Dovuta a Jacobi (2° vol. delle « *Math. Werke* »).

Eguagliando le due espressioni di δJ, ed osservando che le δV relative ai diversi punti del corpo sono completamente indipendenti le une dalle altre, si vede che dev'essere vera in ogni punto dello spazio la formola di Lamè.

XX. SISTEMI ISOTERMI.

1. **Superficie di livello, equipotenziali, isoterme, isostatiche.** Benchè non tutto ciò che siamo per esporre abbia importanza diretta nella teoria della elasticità, crediamo sommamente utile parlarne, sia per dare maggiore evidenza alla teoria delle coordinate curvilinee, sia per mettere in luce i legami esistenti fra i diversi rami della Fisica matematica. In tutte le teorie matematiche dei fenomeni naturali si è condotti alla nozione d'una certa funzione, ed allo studio delle superficie su cui questa funzione resta costante: sono esse le superficie *di livello* nell'idrostatica, le superficie *equipotenziali* nella teoria dell'attrazione universale, le superficie *isoterme* nella teoria del calore. Dal punto di vista geometrico non si hanno differenze essenziali fra tutte queste famiglie di superficie. Ci basterà dunque parlare delle superficie isoterme.

2. Se un corpo è in equilibrio di temperatura, esso si può considerare come il luogo geometrico d'una infinità di superficie, su ciascuna delle quali è costante la temperatura V. Se q è il parametro di questa famiglia di superficie, dette isoterme, V non può variare se non varia q, e però V è funzione soltanto di q. Quindi si ha, successivamente,

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{dV}{dq}\frac{\partial q}{\partial x_i}\ , \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} = \frac{dV}{dq}\frac{\partial^2 q}{\partial x_i^2} + \frac{d^2 V}{dq^2}\left(\frac{\partial q}{\partial x_i}\right)^2; \quad (i=1,2,3)$$

poi, sommando,

$$\Delta^2 V = \frac{dV}{dq}\Delta^2 q + \frac{d^2 V}{dq^2}\Delta q\,.$$

Abbiamo visto che per l'equilibrio di temperatura deve essere $\Delta^2 V = 0$. Ne segue

$$\frac{\Delta^2 q}{\Delta q} = -\frac{\frac{d^2 V}{dq^2}}{\frac{dV}{dq}}. \tag{1}$$

Se si osserva che il secondo membro è funzione della sola q si arriva alla seguente conclusione: *Perchè una famiglia di superficie, di parametro* q, *sia isoterma, è necessario che il rapporto dei parametri differenziali di* q *sia funzione di* q *soltanto* (*). Questa condizione *è anche sufficiente.* Infatti, supponendo che si sia trovato il rapporto dei parametri differenziali di q espresso da $\varphi(q)$, cerchiamo di determinare V. L'equazione (1) diventa

$$\frac{d}{dq} \log \frac{dV}{dq} = -\varphi(q),$$

e se ne deduce, con due integrazioni successive, $V = \lambda\tau + \mu$, con λ e μ costanti arbitrarie, e

$$\tau = \int e^{-\int \varphi(q)\,dq}\, dq.$$

La funzione τ dipende da q soltanto. Si può dunque assumerla come parametro della famiglia di superficie, distinguendola da q col nome di *parametro termometrico,* poichè verifica l'equazione delle temperature stazionarie $\Delta^2\tau = 0$. Si osservi che l'adozione del parametro termometrico introduce semplificazioni notevoli nei calcoli in coordinate curvilinee. In particolare, se q_1, q_2, q_3 sono i parametri termometrici d'una triplice famiglia di superficie coordinate, la formola di Lamé diventa

$$\Delta^2 V = \frac{1}{Q_1^2} \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} + \frac{1}{Q_2^2} \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} + \frac{1}{Q_3^2} \frac{\partial^2 V}{\partial q_3^2}.$$

Basta, per accertarsene, supporre $\Delta^2 q_i = 0$ nella formola (5) del precedente capitolo.

(*) Proposizione importante, dovuta a Lamé: « *Leçons* », §§ XX, XXI.

3. È utile conoscere alcune famiglie di superficie isoterme. In primo luogo facciamo osservare che le famiglie costituenti il sistema delle coordinate polari sono tutte isoterme. Infatti per le sfere concentriche si ha $x_1^2+x_2^2+x_3^2=r^2$; quindi

$$\frac{\partial r}{\partial x_i}=\frac{x_i}{r} \quad , \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2}=\frac{1}{r}-\frac{x_i^2}{r^3} \quad , \quad \Delta r=1 \quad , \quad \Delta^2 r=\frac{2}{r} \quad , \quad \frac{\Delta^2 r}{\Delta r}=\frac{2}{r}.$$

Se poi si vuole il parametro termometrico, si ha

$$\varphi(r)=\frac{2}{r} \quad , \quad \int\varphi(r)\,dr=2\log r \quad , \quad \int e^{-\int\varphi(r)dr}dr=\int\frac{dr}{r^2}=-\frac{1}{r} \quad ,$$

e si può prendere $\tau=\frac{1}{r}$. Con ciò si può conoscere la distribuzione della temperatura in un involucro sferico le cui superficie terminali siano mantenute a temperature costanti V_0 e V_1. Si ha infatti $V=\frac{\lambda}{r}+\mu$, e le costanti λ e μ si determinano mediante le equazioni $\frac{\lambda}{r_0}+\mu=V_0$, $\frac{\lambda}{r_1}+\mu=V_1$. In modo analogo si dimostra l'isotermìa delle famiglie di coni e di piani, i cui parametri termometrici sono rispettivamente $\log\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ e ψ.

4. Tre interessanti famiglie di superficie isoterme sono poi fornite dalle superficie omofocali del secondo ordine. Queste sono rappresentate dall'equazione

$$\frac{x_1^2}{q^2-\alpha_1^2}+\frac{x_2^2}{q^2-\alpha_2^2}+\frac{x_3^2}{q^2-\alpha_3^2}=1\ , \tag{2}$$

in cui si deve supporre $\alpha_1=0$, $\alpha_2=b$, $\alpha_3=c$. Si hanno *ellissoidi* per q superiore a b e c; *iperboloidi ad una falda* per q compreso fra b e c; *iperboloidi a due falde* per q inferiore a b e c. Si hanno dunque *tre* famiglie di superficie, ed è noto dalla Geometria analitica che queste famiglie sono fra loro ortogonali due a due. Ora dimostreremo, mediante la regola di Lamé, che una qualunque di queste famiglie è isoterma. Derivando parzialmente (2) e ponendo

$$M=\frac{x_1^2}{(q^2-\alpha_1^2)^2}+\frac{x_2^2}{(q^2-\alpha_2^2)^2}+\frac{x_3^2}{(q^2-\alpha_3^2)^2}\ ,$$

si ottiene

$$\frac{x_i}{q^2-\alpha_i^2}=Mq\frac{\partial q}{\partial x_i}\ ; \qquad (i=1\,,2\,,3) \tag{3}$$

poi, quadrando e sommando,

$$\Delta q=\frac{1}{Mq^2}.$$

Similmente si ottiene, dopo una nuova derivazione,

$$\frac{1}{q^2-\alpha_1^2}+\frac{1}{q^2-\alpha_2^2}+\frac{1}{q^2-\alpha_3^2}$$
$$=M\Delta q+Mq\Delta^2 q+\sum_i\left(\frac{2x_i}{(q^2-\alpha_i^2)^2}+\frac{\partial M}{\partial x_i}\right)q\frac{\partial q}{\partial x_i}. \qquad (4)$$

Ora, ponendo

$$N=\frac{x_1^2}{(q^2-\alpha_1^2)^3}+\frac{x_2^2}{(q^2-\alpha_2^2)^3}+\frac{x_3^2}{(q^2-\alpha_3^2)^3},$$

si ha

$$\frac{\partial M}{\partial x_i}=\frac{2x_i}{(q^2-\alpha_i^2)^2}-4Nq\frac{\partial q}{\partial x_i},$$

e però

$$\sum_i\left(\frac{2x_i}{(q^2-\alpha_i^2)^2}+\frac{\partial M}{\partial x_i}\right)q\frac{\partial q}{\partial x_i}=4q\sum_i\frac{x_i\frac{\partial q}{\partial x_i}}{(q^2-\alpha_i^2)^3}-4Nq^2\Delta q.$$

Del resto, in virtù di (3),

$$\sum_i\frac{x_i\frac{\partial q}{\partial x_i}}{(q^2-\alpha_i^2)^2}=\frac{1}{Mq}\sum_i\frac{x_i^2}{(q^2-\alpha_i^2)^3}=\frac{N}{Mq}.$$

Per conseguenza

$$\sum_i\left(\frac{2x_i}{(q^2-\alpha_i^2)^2}+\frac{\partial M}{\partial x_i}\right)q\frac{\partial q}{\partial x_i}=\frac{4N}{M}-4Nq^2\Delta q=0,$$

e l'eguaglianza (4) diventa

$$\frac{1}{q^2-\alpha_1^2}+\frac{1}{q^2-\alpha_2^2}+\frac{1}{q^2-\alpha_3^2}=\frac{1}{q^2}+Mq\Delta^2 q.$$

Dunque, finalmente,

$$\frac{\Delta^2 q}{\Delta q}=\frac{q}{q^2-b^2}+\frac{q}{q^2-c^2}=\varphi(q)\ ; \quad \text{ecc.}$$

5. Molto interessanti, anche dal punto di vista della pura Analisi, sono le famiglie di superficie coordinate, costituite come segue: una famiglia di piani paralleli, e due famiglie di cilindri perpendicolari a questi piani ed ortogonali fra loro. Vogliamo dimostrare che, se una famiglia di cilindri è isoterma, anche la famiglia ortogonale alla prima è isoterma. Qui si ha $Q_3=1$, mentre Q_1 e

Q_2 sono funzioni di q_1 e q_2, ma non di $q_3 = z$. È noto (*cap.* XVII, form. 3; *cap.* XVIII, form. 4) che

$$\Delta q_i = \frac{1}{Q_i^2} \quad , \quad \Delta^2 q_i = \frac{1}{\nabla} \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\nabla}{Q_i^2} \, ;$$

poi

$$\frac{\Delta^2 q_i}{\Delta q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \log \frac{\nabla}{Q_i^2} \, ,$$

cioè

$$\frac{\Delta^2 q_1}{\Delta q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1} \log \frac{Q_2}{Q_1} \quad , \quad \frac{\Delta^2 q_2}{\Delta q_2} = \frac{\partial}{\partial q_2} \log \frac{Q_1}{Q_2} \, . \tag{5}$$

Per conseguenza

$$\frac{\partial}{\partial q_2} \frac{\Delta^2 q_1}{\Delta q_1} + \frac{\partial}{\partial q_1} \frac{\Delta^2 q_2}{\Delta q_2} = 0 \, .$$

Se la famiglia q_1 è isoterma, la regola di Lamé (§ 2) ci dice che $\frac{\Delta^2 q_1}{\Delta q_1}$ non dipende da q_2, e l'ultima equazione fa vedere che, in tal caso, $\frac{\Delta^2 q_2}{\Delta q_2}$ non dipende da q_1. Dunque la famiglia q_2 è isoterma. Se per q_1 e q_2 si prendono i parametri termometrici, le formole (5) mostrano che $\frac{Q_1}{Q_2}$ è costante. È chiaro che un parametro termometrico si può sempre moltiplicare per una costante, senza che perda la sua proprietà caratteristica. Allora, in virtù d'una nota formola (*cap.* XVII, form. 3), la corrispondente funzione Q risulta moltiplicata per una costante. Si può dunque fare in modo che il rapporto $\frac{Q_1}{Q_2}$ sia uguale all'unità. In tal caso, ponendo $Q_1 = Q_2 = \frac{1}{h}$, la formola di Lamé assume la forma semplicissima

$$\Delta^2 V = h^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \, .$$

6. Si possono costruire infinite coppie di famiglie di cilindri isotermi ed ortogonali, prendendo i parametri q_1 e q_2 uguali rispettivamente alla parte reale ed al coefficiente di $\sqrt{-1}$ in una funzione della variabile complessa $x_1 + x_2 \sqrt{-1}$. È noto che si ha

$$\frac{\partial q_1}{\partial x_1} = \frac{\partial q_2}{\partial x_2} \quad , \quad \frac{\partial q_1}{\partial x_2} = - \frac{\partial q_2}{\partial x_1} \, ,$$

e si vede subito che $\Delta^2 q_1 = 0$, $\Delta^2 q_2 = 0$. Ciò prova l'isotermìa delle due famiglie di cilindri, e mostra in pari tempo che q_1 e q_2 sono appunto i parametri termometrici delle due famiglie. Inoltre si vede che

$$\frac{\partial q_1}{\partial x_1} \frac{\partial q_2}{\partial x_1} + \frac{\partial q_1}{\partial x_2} \frac{\partial q_2}{\partial x_2} = 0 \, ,$$

e questa è precisamente la condizione di ortogonalità. Inversamente è facile vedere che la costruzione precedente fornisce *tutte* le possibili famiglie di cilindri isotermi ed ortogonali. Si è visto infatti che in tali famiglie si può sempre supporre $Q_1 = Q_2$, cioè

$$\left(\frac{\partial q_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_1}{\partial x_2}\right)^2 = \left(\frac{\partial q_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_2}{\partial x_2}\right)^2,$$

ovvero

$$\left(\frac{\partial q_1}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial q_2}{\partial x_1}\right)^2 = \left(\frac{\partial q_2}{\partial x_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial q_1}{\partial x_2}\right)^2.$$

D'altra parte si ha, per esprimere l'ortogonalità, l'eguaglianza

$$\frac{\partial q_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial x_1} = \frac{\partial q_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial x_2}.$$

Moltiplicando questa per $2\sqrt{-1}$, sommando con l'eguaglianza precedente ed estraendo la radice quadrata, si ottiene

$$\frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_2}{\partial x_1}\sqrt{-1} = \pm\left(\frac{\partial q_2}{\partial x_2} - \frac{\partial q_1}{\partial x_2}\sqrt{-1}\right),$$

cioè, simultaneamente,

$$\frac{\partial q_1}{\partial x_1} = \pm \frac{\partial q_2}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial q_1}{\partial x_2} = \mp \frac{\partial q_2}{\partial x_1}.$$

Dunque $q_1 + q_2\sqrt{-1}$ è funzione di $x_1 + x_2\sqrt{-1}$.

7. « Se l'idrostatica e la teoria del potenziale hanno introdotto le famiglie di superficie di livello o equipotenziali, la teoria del calore quelle di superficie isoterme, è la teoria matematica dell'equilibrio di elasticità nei corpi solidi che ha dato luogo alla considerazione di tre famiglie conjugate ed ortogonali. Risulta infatti da questa teoria che in ogni punto d'un solido in equilibrio di elasticità esistono sempre tre elementi piani ortogonali, sollecitati normalmente dalle forze elastiche. Se dunque si considerano contemporaneamente queste terne di elementi in tutti i punti del corpo, variando in modo continuo le loro posizioni, esse formeranno (*) tre

(*) Disgraziatamente queste superficie non esistono, in generale; poichè se, in un piano, una coppia di direzioni ortogonali, definita per ogni punto, può sempre considerarsi come quella delle tangenti, in questo punto, alle due linee d'un sistema doppio ortogonale, nello spazio invece non ha luogo l'analoga proprietà per una terna ortogonale di elementi piani, pure definita in ogni punto. Weingarten, in una Memoria « *Zur Theorie der isostatischen Flächen* » (*Giornale di Crelle*, 1881, p. 18), ha fatto la ricerca delle condizioni restrittive sotto le quali si verifica l'esistenza d'un sistema isostatico. La questione si può anche trattare mediante le « *Formole per lo studio delle linee e delle superficie ortogonali* » sviluppate dal Prof. Beltrami nei *Rendiconti dell'Istituto lombardo* (1872, p. 474).

famiglie di superficie ortogonali, costituenti ciò che si chiama un *sistema isostatico*, e dotate della proprietà fondamentale di essere le sole superficie sollecitate normalmente dalle forze elastiche... Si capisce che ogni sistema ortogonale può diventare occasionalmente isostatico, quando quelle sue superficie che formano le pareti del solido subiscono pressioni normali: basta che i segni e le intensità di queste pressioni variino convenientemente da un punto all'altro della superficie. La proprietà di essere isostatica è dunque di natura ben diversa da quella di essere isoterma, che appartiene soltanto a certe famiglie di superficie. Ma la vera proprietà fondamentale di ogni sistema isostatico è la riunione obbligata di tre famiglie di superficie e la loro ortogonalità necessaria. È da questa proprietà, così nettamente caratterizzata, che è sorta l'idea delle coordinate curvilinee... L'uso di queste è indispensabile quando si vogliano trattare corpi di determinate forme nei varii rami della Fisica matematica, nei quali, infatti, si tratta sempre d'integrare, vale a dire di determinare una o più funzioni che debbono verificare una o più equazioni alle derivate parziali seconde, esprimenti le leggi fisiche cui obbediscono le funzioni stesse. Ed inoltre queste funzioni o i loro integrali generali debbono verificare altre equazioni alle derivate parziali prime per tutti i punti della superficie del corpo che si considera. Ora questo problema di doppia integrazione sarebbe completamente inaccessibile se non si pervenisse a riferire i punti del corpo ad un sistema di coordinate tali che la superficie sia rappresentata uguagliando ad una costante una delle coordinate..... Se l'idea delle coordinate curvilinee è venuta dalla teoria matematica dell'elasticità, è anche in questa teoria che il nuovo strumento conduce alle leggi più complete ed incontra il maggior numero di applicazioni. Le equazioni dell'elasticità, trasformate mediante i diversi parametri del sistema ortogonale, si presentano sotto la forma che meglio si presta alle integrazioni... I sistemi di coordinate caratterizzano le fasi o le tappe della Scienza. Senza l'invenzione delle coordinate rettilinee l'Algebra sarebbe forse ancora al punto in cui la lasciarono Diofante ed i suoi commentatori, e non avremmo nè il Calcolo infinitesimale nè la Meccanica analitica.

Senza l'introduzione delle coordinate sferiche la Meccanica celeste sarebbe stata assolutamente impossibile. Senza le coordinate ellittiche, illustri Geometri non avrebbero potuto risolvere parecchie questioni importanti di questa teoria, che restavano sospese; ed il regno di questo terzo genere di coordinate speciali comincia appena. Ma quando esso avrà trasformate e completate tutte le soluzioni della Meccanica celeste, bisognerà occuparsi seriamente della Fisica matematica o della Meccanica terrestre. Allora verrà necessariamente il regno delle coordinate curvilinee qualunque, che sole potranno trattare le nuove questioni in tutta la loro generalità » (*).

XXI. EQUAZIONI GENERALI DELL'ELASTICITÀ IN COORDINATE CURVILINEE (**).

1. Abbiamo visto che l'elemento lineare è dato, in coordinate curvilinee ortogonali, dalla formola

$$d\sigma^2 = Q_1^2 dq_1^2 + Q_2^2 dq_2^2 + Q_3^2 dq_3^2.$$

Ne segue, facendo variare la posizione di ciascun punto,

$$\begin{aligned} d\sigma \delta d\sigma = & Q_1^2 dq_1 \delta dq_1 + Q_2^2 dq_2 \delta dq_2 + Q_3^2 dq_3 \delta dq_3 \\ & + Q_1 \delta Q_1 . dq_1^2 + Q_2 \delta Q_2 . dq_2^2 + Q_3 \delta Q_3 . dq_3^2. \end{aligned}$$

Se α_1, α_2, α_3 sono i coseni direttori dell'elemento si ha

$$\alpha_1 = Q_1 \frac{dq_1}{d\sigma} \quad , \quad \alpha_2 = Q_2 \frac{dq_2}{d\sigma} \quad , \quad \alpha_3 = Q_3 \frac{dq_3}{d\sigma} \quad ,$$

(*) LAMÉ: « *Leçons sur les coord. curvilignes* ». Discours préliminaire, e §§ CXLVIII, CC.

(**) Vedi negli *Annali di Matematica* (1881) la Memoria del Prof. BELTRAMI: *Sulle equazioni generali dell'elasticità.*

e l'eguaglianza precedente si può scrivere così:

$$\frac{\delta d\sigma}{d\sigma}=\alpha_1 Q_1\frac{\delta dq_1}{d\sigma}+\alpha_2 Q_2\frac{\delta dq_2}{d\sigma}+\alpha_3 Q_3\frac{\delta dq_3}{d\sigma}+\alpha_1{}^2\frac{\delta Q_1}{Q_1}+\alpha_2{}^2\frac{\delta Q_2}{Q_2}+\alpha_3{}^2\frac{\delta Q_3}{Q_3}.$$

Ora si osservi che

$$\delta dq_i = d\delta q_i = \frac{\partial\delta q_i}{\partial q_1}dq_1+\frac{\partial\delta q_i}{\partial q_2}dq_2+\frac{\partial\delta q_i}{\partial q_3}dq_3.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\frac{\delta d\sigma}{d\sigma}&=\alpha_1 Q_1\left(\frac{\alpha_1}{Q_1}\frac{\partial\delta q_1}{\partial q_1}+\frac{\alpha_2}{Q_2}\frac{\partial\delta q_1}{\partial q_2}+\frac{\alpha_3}{Q_3}\frac{\partial\delta q_1}{\partial q_3}\right)+\alpha_1{}^2\frac{\delta Q_1}{Q_1}\\&+\alpha_2 Q_2\left(\frac{\alpha_1}{Q_1}\frac{\partial\delta q_2}{\partial q_1}+\frac{\alpha_2}{Q_2}\frac{\partial\delta q_2}{\partial q_2}+\frac{\alpha_3}{Q_3}\frac{\partial\delta q_2}{\partial q_3}\right)+\alpha_2{}^2\frac{\delta Q_2}{Q_2}\\&+\alpha_3 Q_3\left(\frac{\alpha_1}{Q_1}\frac{\partial\delta q_3}{\partial q_1}+\frac{\alpha_2}{Q_2}\frac{\partial\delta q_3}{\partial q_2}+\frac{\alpha_3}{Q_3}\frac{\partial\delta q_3}{\partial q_3}\right)+\alpha_3{}^2\frac{\delta Q_3}{Q_3}.\end{aligned}$$

Per conseguenza, se si pone

$$\left\{\begin{aligned}\delta\theta_1&=\frac{\partial\delta q_1}{\partial q_1}+\frac{\delta Q_1}{Q_1}, &\delta\omega_1&=\frac{Q_2}{Q_3}\frac{\partial\delta q_2}{\partial q_3}+\frac{Q_3}{Q_2}\frac{\partial\delta q_3}{\partial q_2}\\\delta\theta_2&=\frac{\partial\delta q_2}{\partial q_2}+\frac{\delta Q_2}{Q_2}, &\delta\omega_2&=\frac{Q_3}{Q_1}\frac{\partial\delta q_3}{\partial q_1}+\frac{Q_1}{Q_3}\frac{\partial\delta q_1}{\partial q_3}\\\delta\theta_3&=\frac{\partial\delta q_3}{\partial q_3}+\frac{\delta Q_3}{Q_3}, &\delta\omega_3&=\frac{Q_1}{Q_2}\frac{\partial\delta q_1}{\partial q_2}+\frac{Q_2}{Q_1}\frac{\partial\delta q_2}{\partial q_1}\end{aligned}\right.\tag{1}$$

si ottiene

$$\frac{\delta d\sigma}{d\sigma}=\alpha_1{}^2\delta\theta_1+\alpha_2{}^2\delta\theta_2+\alpha_3{}^2\delta\theta_3+\alpha_2\alpha_3\delta\omega_1+\alpha_3\alpha_1\delta\omega_2+\alpha_1\alpha_2\delta\omega_3.\tag{2}$$

2. **Equazioni generali.** Prendiamo il corpo *già deformato ed equilibrato* sotto l'azione delle forze di massa ($F_1 dS$, $F_2 dS$, $F_3 dS$), delle pressioni in superficie ($\varphi_1 ds$, $\varphi_2 ds$, $\varphi_3 ds$), e delle forze interne. Immaginiamo, intorno a questa posizione di equilibrio, un moto virtuale, che conduca ciascun punto (q_1, q_2, q_3) nella posizione ($q_1+\delta q_1$, $q_2+\delta q_2$, $q_3+\delta q_3$), essendo arbitrarie per ogni punto le variazioni δq_1, δq_2, δq_3. Il lavoro delle forze esterne è, per ciascun punto del corpo,

$$Q_1 F_1\delta q_1+Q_2 F_2\delta q_2+Q_3 F_3\delta q_3$$

per unità di volume, e per ciascun punto della superficie

$$Q_1\varphi_1\delta q_1 + Q_2\varphi_2\delta q_2 + Q_3\varphi_3\delta q_3$$

per unità di superficie. Quanto al lavoro delle forze interne, esso è unicamente dovuto all'alterazione delle distanze relative dei punti del corpo, e però dipende, in virtù di (2), dalle variazioni $\delta\theta_1, \delta\theta_2, \delta\theta_3, \delta\omega_1, \delta\omega_2, \delta\omega_3$. Poichè queste sono piccolissime per ipotesi, il detto lavoro, computato in ogni punto per unità di volume, sarà rappresentato da un'espressione

$$\Theta_1\delta\theta_1 + \Theta_2\delta\theta_2 + \Theta_3\delta\theta_3 + \Omega_1\delta\omega_1 + \Omega_2\delta\omega_2 + \Omega_3\delta\omega_3,$$

in cui le Θ e le Ω sono certe funzioni di q_1, q_2, q_3. L'applicazione del *principio di Lagrangia* conduce dunque all'eguaglianza

$$\int (Q_1F_1\delta q_1 + Q_2F_2\delta q_2 + Q_3F_3\delta q_3)\,dS + \int (Q_1\varphi_1\delta q_1 + Q_2\varphi_2\delta q_2 + Q_3\varphi_3\delta q_3)\,ds$$
$$+ \int (\Theta_1\delta\theta_1 + \Theta_2\delta\theta_2 + \ldots + \Omega_3\delta\omega_3)\,dS = 0. \qquad (3)$$

Cerchiamo ora di svincolare, col solito processo, le variazioni $\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3$ nel terzo integrale, in modo da farle comparire esplicitamente, come nei primi due integrali. Si ha, ricordando (1),

$$\int \Theta_1\delta\theta_1\,dS = \int \nabla\Theta_1 \frac{\partial\delta q_1}{\partial q_1}\cdot\frac{dS}{\nabla} + \int \frac{\Theta_1}{Q_1}\delta Q_1\,dS.$$

Integrando per parti, ed utilizzando una nota (XIX, § 10) trasformazione, si riconosce che il primo integrale equivale a

$$\int \frac{\partial}{\partial q_1}(\nabla\Theta_1\delta q_1)\frac{dS}{\nabla} - \int \delta q_1 \frac{\partial\nabla\Theta_1}{\partial q_1}\cdot\frac{dS}{\nabla}$$
$$= -\int Q_1\Theta_1\cos(nq_1)\delta q_1\,ds - \int \delta q_1 \frac{\partial\nabla\Theta_1}{\partial q_1}\frac{dS}{\nabla}.$$

Similmente

$$\int \Omega_1\delta\omega_1\,dS = \int \left(\frac{Q_2\Omega_1}{Q_3}\frac{\partial\delta q_2}{\partial q_3} + \frac{Q_3\Omega_1}{Q_2}\frac{\partial\delta q_3}{\partial q_2}\right)dS$$
$$= \int Q_2^2 Q_1\Omega_1 \frac{\partial\delta q_2}{\partial q_3}\frac{dS}{\nabla} + \int Q_3^2 Q_1\Omega_1\frac{\partial\delta q_3}{\partial q_2}\frac{dS}{\nabla}.$$

Ora si ha

$$\int Q_2^2 Q_1 \Omega_1 \frac{\partial \delta q_2}{\partial q_3} \frac{dS}{\nabla} = \int \frac{\partial}{\partial q_3} (Q_2^2 Q_1 \Omega_1 \delta q_2) \frac{dS}{\nabla} - \int \delta q_2 \frac{\partial Q_2^2 Q_1 \Omega_1}{\partial q_3} \frac{dS}{\nabla}$$

$$= - \int Q_2 \Omega_1 \cos(nq_3) \delta q_2 ds - \int \delta q_2 \frac{\partial Q_2^2 Q_1 \Omega_1}{\partial q_3} \frac{dS}{\nabla}.$$

Per conseguenza

$$\int \Omega_1 \delta \omega_1 dS = - \int \left[Q_2 \cos(nq_3) \delta q_2 + Q_3 \cos(nq_2) \delta q_3 \right] \Omega_1 ds$$

$$- \int \left(\frac{\partial Q_2^2 Q_1 \Omega_1}{\partial q_3} \delta q_2 + \frac{\partial Q_3^2 Q_1 \Omega_1}{\partial q_2} \delta q_3 \right) \frac{dS}{\nabla}.$$

Il lavoro delle forze interne si compone dunque di tre parti analoghe alla seguente:

$$- \int \delta q_1 \frac{\partial \nabla \Theta_1}{\partial q_1} \frac{dS}{\nabla} - \int \left(\frac{\partial Q_2^2 Q_1 \Omega_1}{\partial q_3} \delta q_2 + \frac{\partial Q_3^2 Q_1 \Omega_1}{\partial q_2} \delta q_3 \right) \frac{dS}{\nabla}$$

$$+ \int \frac{\Theta_1}{Q_1} \left(\frac{\partial Q_1}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial Q_1}{\partial q_2} \delta q_2 + \frac{\partial Q_1}{\partial q_3} \delta q_3 \right) \frac{dS}{\nabla}$$

$$- \int Q_1 \Theta_1 \cos(nq_1) \delta q_1 ds - \int \left[Q_2 \cos(nq_3) \delta q_2 + Q_3 \cos(nq_2) \delta q_3 \right] \Omega_1 ds.$$

Sostituendo in (3), ed eguagliando a zero separatamente i moltiplicatori di δq_1, δq_2, δq_3, prima negli integrali di spazio, poi in quelli di superficie, si ottengono le *equazioni indefinite*

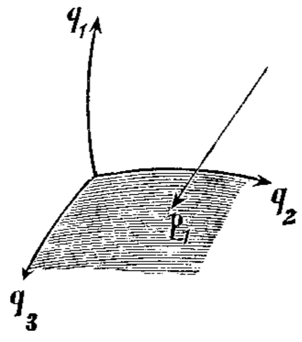
$$(4) \begin{cases} Q_1 F_1 = \dfrac{1}{\nabla} \left(\dfrac{\partial \nabla \Theta_1}{\partial q_1} + \dfrac{\partial Q_1^2 Q_3 \Omega_3}{\partial q_2} + \dfrac{\partial Q_1^2 Q_2 \Omega_2}{\partial q_3} \right) - \left(\dfrac{\Theta_1}{Q_1} \dfrac{\partial Q_1}{\partial q_1} + \dfrac{\Theta_2}{Q_2} \dfrac{\partial Q_2}{\partial q_1} + \dfrac{\Theta_3}{Q_3} \dfrac{\partial Q_3}{\partial q_1} \right) \\ Q_2 F_2 = \dfrac{1}{\nabla} \left(\dfrac{\partial Q_2^2 Q_3 \Omega_3}{\partial q_1} + \dfrac{\partial \nabla \Theta_2}{\partial q_2} + \dfrac{\partial Q_2^2 Q_1 \Omega_1}{\partial q_3} \right) - \left(\dfrac{\Theta_1}{Q_1} \dfrac{\partial Q_1}{\partial q_2} + \dfrac{\Theta_2}{Q_2} \dfrac{\partial Q_2}{\partial q_2} + \dfrac{\Theta_3}{Q_3} \dfrac{\partial Q_3}{\partial q_2} \right) \\ Q_3 F_3 = \dfrac{1}{\nabla} \left(\dfrac{\partial Q_3^2 Q_2 \Omega_2}{\partial q_1} + \dfrac{\partial Q_3^2 Q_1 \Omega_1}{\partial q_2} + \dfrac{\partial \nabla \Theta_3}{\partial q_3} \right) - \left(\dfrac{\Theta_1}{Q_1} \dfrac{\partial Q_1}{\partial q_3} + \dfrac{\Theta_2}{Q_2} \dfrac{\partial Q_2}{\partial q_3} + \dfrac{\Theta_3}{Q_3} \dfrac{\partial Q_3}{\partial q_3} \right) \end{cases}$$

e le *equazioni ai limiti*

$$(5) \begin{cases} \varphi_1 = \Theta_1 \cos(nq_1) + \Omega_3 \cos(nq_2) + \Omega_2 \cos(nq_3) \\ \varphi_2 = \Omega_3 \cos(nq_1) + \Theta_2 \cos(nq_2) + \Omega_1 \cos(nq_3) \\ \varphi_3 = \Omega_2 \cos(nq_1) + \Omega_1 \cos(nq_2) + \Theta_3 \cos(nq_3) \end{cases}$$

Veramente, perchè queste relazioni siano le *equazioni dell'equilibrio*, che debbono servire a determinare la nuova forma del corpo e la nuova distribuzione delle azioni interne, è necessario che q_1, q_2, q_3 rappresentino le coordinate dei punti nelle loro posizioni naturali, e non le coordinate *incognite* che i punti acquistano per effetto della deformazione. Per avere le equazioni dell'equilibrio, se con q_1, q_2, q_3 indichiamo le coordinate *iniziali*, e con $q_1+\kappa_1$, $q_2+\kappa_2$, $q_3+\kappa_3$ le coordinate *dopo la deformazione*, dimodochè gli spostamenti siano $Q_1\kappa_1$, $Q_2\kappa_2$, $Q_3\kappa_3$, bisogna nelle Q, nelle Θ, nelle Ω delle equazioni (4) e (5) sostituire le $q+\kappa$ alle q. Tale sostituzione altro non produce che un'addizione di termini, trascurabili rispetto a quelli già scritti, se, come si suppone, le κ sono trascurabili rispetto alle q. Dunque le equazioni (4) e (5) sono le equazioni dell'equilibrio, purchè si attribuisca alle q il loro nuovo significato, che sarà conservato d'ora innanzi.

3. Osservazioni: Il significato delle Θ e delle Ω risulta subito dalle equazioni (5). Queste sono evidentemente applicabili ad una superficie qualunque, interna al corpo, purchè si sopprima una porzione del corpo, situata da una stessa parte della superficie, e ad essa si sostituisca il sistema delle pressioni che la porzione stessa esercita sull'altra porzione. In particolare, se con p_1 rappresentiamo la pressione unitaria in un punto qualunque d'una superficie



q_1, sopprimendo quella parte del corpo in cui crescono le q_1 (quando ci si allontana dalla superficie), si ha

$$\cos(nq_1)=-1 \quad , \quad \cos(nq_2)=\cos(nq_3)=0 \; ,$$

e le formole (5) dànno $p_{11}=-\Theta_1$, $p_{12}=-\Omega_3$, $p_{13}=-\Omega_2$. Ripetendo tutto ciò per le altre superficie coordinate si vede che

$$-p_{11}=\Theta_1 \quad , \quad -p_{22}=\Theta_2 \quad , \quad -p_{33}=\Theta_3 \; ;$$
$$-p_{23}=-p_{32}=\Omega_1 \quad , \quad -p_{31}=-p_{13}=\Omega_2 \quad , \quad -p_{12}=-p_{21}=\Omega_3 \, .$$

Dunque le Θ rappresentano le *tensioni* unitarie che si sviluppano *normalmente* alle superficie coordinate, e le Ω quelle che si sviluppano *tangenzialmente* alle superficie stesse. Queste Θ e queste Ω sono le incognite del problema; si tratta di integrare le equazioni (4) in modo che siano soddisfatte le (5) alla superficie del corpo. Abbiamo dunque tre equazioni per determinare *sei* funzioni; ma dobbiamo osservare che il concetto di *elasticità* non è stato ancora introdotto.

4. Prima di andare oltre è interessante profittare delle ultime osservazioni per vedere quale eleganza di forma conferisca la relazione (7) del *cap.* XVIII a certi risultati dell'Analisi. Per dimostrare la *legge* detta da Lamé *dei sistemi isostatici* immaginiamo che in un corpo, soggetto alle sole pressioni esterne, esista un sistema isostatico, i cui parametri si prendano per coordinate. In tal caso (*cap.* XX, § 7) sono nulle, per ogni punto del corpo, le pressioni tangenziali Ω_1, Ω_2, Ω_3, e le formole (4) diventano

$$\frac{1}{\nabla}\frac{\partial \nabla \Theta_i}{\partial q_i} = \frac{\Theta_1}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_i} + \frac{\Theta_2}{Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_i} + \frac{\Theta_3}{Q_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_i}, \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Il primo membro equivale a

$$\frac{\partial \Theta_i}{\partial q_i} + \frac{\Theta_i}{\nabla}\frac{\partial \nabla}{\partial q_i} = \frac{\partial \Theta_i}{\partial q_i} + \Theta_i\left(\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_i} + \frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_i} + \frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_i}\right).$$

Per conseguenza, adoperando la citata relazione (7),

$$\frac{\partial \Theta_i}{\partial \sigma_i} = \frac{\Theta_1 - \Theta_i}{r_{i1}} + \frac{\Theta_2 - \Theta_i}{r_{i2}} + \frac{\Theta_3 - \Theta_i}{r_{i3}}.$$

Quindi, facendo $i = 1, 2, 3$, si ottengono, tra le forze elastiche principali, le relazioni seguenti, segnalate da Lamé (*):

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial \Theta_1}{\partial \sigma_1} &= \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{r_{12}} + \frac{\Theta_3 - \Theta_1}{r_{13}},\\
\frac{\partial \Theta_2}{\partial \sigma_2} &= \frac{\Theta_3 - \Theta_2}{r_{23}} + \frac{\Theta_1 - \Theta_2}{r_{21}},\\
\frac{\partial \Theta_3}{\partial \sigma_3} &= \frac{\Theta_1 - \Theta_3}{r_{31}} + \frac{\Theta_2 - \Theta_3}{r_{32}}.
\end{aligned}\right.$$

Queste relazioni costituiscono un complemento necessario della legge rappresen-

(*) « *Leçons* ... », § CXLIX.

tata dall'ellissoide di elasticità, poichè ci dicono come variano gli assi dell'ellissoide quando si passa da un punto qualunque ad un punto infinitamente vicino.

5. Ritornando alle questioni del § 2 ammettiamo una volta per sempre che le q siano le coordinate iniziali, e le $q+\kappa$ siano le coordinate finali. I moti virtuali consisteranno nel passaggio dalle posizioni $q+\kappa$ alle posizioni $q+\kappa+\delta(q+\kappa)=q+\kappa+\delta\kappa$, invece che nel passaggio dalle posizioni q alle posizioni $q+\delta q$. Perciò le δq del principio di questo capitolo sono ora rappresentate dalle $\delta\kappa$. Ne segue che, se si pone

$$\theta_1=\frac{\partial\kappa_1}{\partial q_1}+\frac{1}{Q_1}\left(\frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\kappa_1+\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\kappa_2+\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\kappa_3\right),\quad \omega_1=\frac{Q_2}{Q_3}\frac{\partial\kappa_2}{\partial q_3}+\frac{Q_3}{Q_2}\frac{\partial\kappa_2}{\partial q_2},\ \text{ecc.}\tag{6}$$

queste θ e queste ω sono precisamente le θ e le ω delle formole (1), giacchè facendo variare le κ nelle (6), mentre, naturalmente, restano invariate le q e le funzioni che ne dipendono, si ritrovano le formole (1) cambiando le $\delta\kappa$ in δq. Per avere poi il coefficiente di allungamento nella direzione $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, basterà immaginare ripetuto il calcolo che si è fatto per ottenere la formola (2), salvo che nelle formole (1) bisognerà intendere alle δq sostituite le κ. In virtù di (6) ciò equivale a sostituire le θ e le ω alle $\delta\theta$ ed alle $\delta\omega$. Per conseguenza, il coefficiente richiesto è

$$\epsilon=\theta_1\alpha_1^2+\theta_2\alpha_2^2+\theta_3\alpha_3^2+\omega_1\alpha_2\alpha_3+\omega_2\alpha_3\alpha_1+\omega_3\alpha_1\alpha_2\,.\tag{7}$$

Qual'è il significato delle θ e delle ω? Siano $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$ le projezioni di $d\sigma$ sulle linee coordinate, dimodochè $d\sigma_i=\alpha_i d\sigma$. Se $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ sono i valori di ϵ lungo le tangenti alle linee coordinate, e si suppone che gli angoli del parallelepipedo costruito sugli spigoli $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$ diminuiscano di η_1, η_2, η_3, si ottiene, dopo la deformazione, un parallelepipedo obliquangolo, in cui la diagonale, gli spigoli, gli angoli sono $(1+\epsilon)d\sigma$, $(1+\epsilon_1)d\sigma, \ldots, \frac{\pi}{2}-\eta_1, \ldots$ Dunque si ha

$$(1+\epsilon)^2 d\sigma^2=(1+\epsilon_1)^2 d\sigma_1^{\,2}+(1+\epsilon_2)^2 d\sigma_2^{\,2}+(1+\epsilon_3)^2 d\sigma_3^{\,2}$$
$$+2(1+\epsilon_2)(1+\epsilon_3)d\sigma_2 d\sigma_3\,.\cos\left(\frac{\pi}{2}-\eta_1\right)+\ldots,$$

e se ne deduce, dividendo per $d\sigma^2$ e trascurando infinitesimi di ordine superiore al primo,

$$\epsilon = \epsilon_1 \alpha_1^2 + \epsilon_2 \alpha_2^2 + \epsilon_3 \alpha_3^2 + \eta_1 \alpha_2 \alpha_3 + \eta_2 \alpha_3 \alpha_1 + \eta_3 \alpha_1 \alpha_2 .$$

Così vediamo, paragonando con (7), che $\theta_i = \epsilon_i$, $\omega_i = \eta_i$, cioè le θ e le ω sono gli allungamenti unitarii degli spigoli e i decrescimenti degli angoli d'un elemento parallelepipedo, terminato da sei superficie coordinate.

6. Ed ora introduciamo nelle equazioni dell'equilibrio il concetto di elasticità. Questo, come si sa, si esprime scrivendo che il lavoro unitario elementare delle forze interne, cioè

$$\Theta_1 \delta\theta_1 + \Theta_2 \delta\theta_2 + \ldots + \Omega_3 \delta\omega_3 ,$$

è una variazione esatta rispetto alle quantità che definiscono la deformazione già avvenuta. Se poniamo, per brevità,

$$\kappa_{ij} = \frac{\partial \kappa_i}{\partial q_j} ,$$

le formole (6) si possono scrivere così:

$$(8) \left\{ \begin{aligned} \theta_1 &= \kappa_{11} + \frac{1}{Q_1}\left(\frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\kappa_1 + \frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\kappa_2 + \frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\kappa_3 \right) , \quad & \omega_1 &= \frac{Q_2}{Q_3}\kappa_{23} + \frac{Q_3}{Q_2}\kappa_{32} \\ \theta_2 &= \kappa_{22} + \frac{1}{Q_2}\left(\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\kappa_1 + \frac{\partial Q_2}{\partial q_2}\kappa_2 + \frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\kappa_3 \right) , \quad & \omega_2 &= \frac{Q_3}{Q_1}\kappa_{31} + \frac{Q_1}{Q_3}\kappa_{13} \\ \theta_3 &= \kappa_{33} + \frac{1}{Q_3}\left(\frac{\partial Q_3}{\partial q_1}\kappa_1 + \frac{\partial Q_3}{\partial q_2}\kappa_2 + \frac{\partial Q_3}{\partial q_3}\kappa_3 \right) , \quad & \omega_3 &= \frac{Q_1}{Q_2}\kappa_{12} + \frac{Q_2}{Q_1}\kappa_{21} \end{aligned} \right.$$

Sostituendo nell'espressione del lavoro si ottiene

$$\delta\Pi = \Theta_1 \left[\delta\kappa_{11} + \frac{1}{Q_1}\left(\frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\delta\kappa_1 + \frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\delta\kappa_2 + \frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\delta\kappa_3 \right) \right] + \ldots + \Omega_3 \left(\frac{Q_1}{Q_2}\delta\kappa_{12} + \frac{Q_2}{Q_1}\delta\kappa_{21} \right) ,$$

ovvero

$$\begin{aligned} \delta\Pi = \sum_i \left[\frac{\Theta_1}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_i} + \frac{\Theta_2}{Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_i} + \frac{\Theta_3}{Q_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_i} \right] \delta\kappa_i \\ + \Theta_1 \delta\kappa_{11} + \frac{Q_1 \Omega_3}{Q_2}\delta\kappa_{12} + \frac{Q_1 \Omega_2}{Q_3}\delta\kappa_{13} \\ + \frac{Q_2 \Omega_3}{Q_1}\delta\kappa_{21} + \Theta_2 \delta\kappa_{22} + \frac{Q_2 \Omega_1}{Q_3}\delta\kappa_{23} \\ + \frac{Q_3 \Omega_2}{Q_1}\delta\kappa_{31} + \frac{Q_3 \Omega_1}{Q_2}\delta\kappa_{32} + \Theta_3 \delta\kappa_{33} . \end{aligned}$$

Si vede che Π è necessariamente funzione delle κ_i e delle κ_{ij}, e si deve avere

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_i} = \frac{\Theta_1}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_i} + \frac{\Theta_2}{Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_i} + \frac{\Theta_3}{Q_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_i}\,, \\ &\frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{ii}} = \Theta_i\,, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{23}} = \frac{Q_2 \Omega_1}{Q_3}\,, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{32}} = \frac{Q_3 \Omega_1}{Q_2}\,, \ldots \end{aligned}\right.$$

Paragonando fra loro i valori di Ω_1 si ottiene

$$\Omega_1 = \frac{Q_3}{Q_2}\frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{23}} = \frac{Q_2}{Q_3}\frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{32}} = \frac{\partial \Pi}{\partial\left(\frac{Q_2}{Q_3}\kappa_{23} + \frac{Q_3}{Q_2}\kappa_{32}\right)} = \frac{\partial \Pi}{\partial \omega_1}\,; \quad \text{ecc.}$$

Dunque le κ_{ij} $(i \neq j)$ non entrano in Π altrimenti che nelle combinazioni ω. Inoltre, osservando la prima delle (8), si può scrivere

$$\Theta_1 = \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{i1}} = \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_1}\,, \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial \kappa_i} = \frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_i}\,; \quad \text{ecc.}$$

Per conseguenza possiamo dare alla prima delle (9) la forma seguente:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_i} = \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_1}\frac{\partial \theta_1}{\partial \kappa_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_2}\frac{\partial \theta_2}{\partial \kappa_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_3}\frac{\partial \theta_3}{\partial \kappa_i}\,.$$

Poichè le ω non contengono le κ_i, si vede che queste non possono entrare nell'espressione di Π altrimenti che nelle combinazioni θ_1, θ_2, θ_3. In riassunto, le *dodici* variabili

$$\kappa_1\,, \kappa_2\,, \kappa_3\,, \kappa_{11}\,, \kappa_{22}\,, \kappa_{33}\,, \kappa_{23}\,, \kappa_{32}\,, \kappa_{31}\,, \kappa_{13}\,, \kappa_{12}\,, \kappa_{21}\,,$$

da cui deve dipendere l'espressione di Π, si aggruppano in questa espressione in modo che Π comparisce come funzione soltanto delle *sei* quantità $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3$.

7. Portando gli ultimi risultati nelle equazioni dell'equilibrio, queste non dipendono più che da *tre* funzioni, e si addicono così ai soli corpi *elastici*. Nella prima equazione indefinita l'ultima pa-

rentesi si riduce subito a $\frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_1}$, mentre nella prima parentesi le funzioni $\nabla\Theta_1$, $Q_3 Q_1^2 \Omega_3$, $Q_2 Q_1^2 \Omega_2$ diventano

$$\nabla \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{11}}, \quad Q_3 Q_1^2 \cdot \frac{Q_2}{Q_1} \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{12}} = \nabla \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{12}}, \quad Q_2 Q_1^2 \cdot \frac{Q_3}{Q_1} \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{13}} = \nabla \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{13}}.$$

Riduzioni analoghe si hanno nelle altre due equazioni. Le equazioni ai limiti subiscono lievi cambiamenti di forma, e si ottengono finalmente le equazioni dell'equilibrio elastico:

$$\left\{\begin{aligned} Q_1 F_1 &= \frac{1}{\nabla}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\nabla \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{11}}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\nabla \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{12}}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\nabla \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{13}}\right)\right] - \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_1} \\ Q_2 F_2 &= \frac{1}{\nabla}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\nabla \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{21}}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\nabla \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{22}}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\nabla \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{23}}\right)\right] - \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_2} \\ Q_3 F_3 &= \frac{1}{\nabla}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\nabla \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{31}}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\nabla \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{32}}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\nabla \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{33}}\right)\right] - \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_3} \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} Q_1 \varphi_1 &= Q_1 \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{11}} \cos(nq_1) + Q_2 \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{12}} \cos(nq_2) + Q_3 \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{13}} \cos(nq_3) \\ Q_2 \varphi_2 &= Q_1 \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{21}} \cos(nq_1) + Q_2 \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{22}} \cos(nq_2) + Q_3 \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{23}} \cos(nq_3) \\ Q_3 \varphi_3 &= Q_1 \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{31}} \cos(nq_1) + Q_2 \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{32}} \cos(nq_2) + Q_3 \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{33}} \cos(nq_3) \end{aligned}\right.$$

Queste equazioni si possono scrivere succintamente come segue (*):

$$(10) \cdot Q_i F_i = \frac{1}{\nabla} \sum_j \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\nabla \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{ij}}\right) - \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_i}, \quad Q_i \varphi_i = \sum_j Q_j \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{ij}} \cos(nq_j) : (i=1,2,3)$$

8. Espressione di Θ in coordinate curvilinee. Sappiamo che Θ è la somma dei coefficienti di allungamento secondo tre assi ortogonali qualunque. Ne segue, adoperando le formole (6),

$$\Theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \sum_i \left[\frac{\partial \kappa_i}{\partial q_i} + \left(\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_i} + \frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_i} + \frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_i}\right)\kappa_i\right].$$

(*) Se invece delle κ si mettono in evidenza gli spostamenti $Q\kappa$, si ottengono le equazioni dell'equilibrio sotto la forma data loro da C. Neumann nella Memoria « *Zur Theorie der Elasticität* ». Il primo a tradurre in coordinate curvilinee le equazioni generali dell'elasticità è stato Lamé. Vedi le « *Leçons sur les coord. curvilignes* », § CXLIV a § CXLVII.

L'espressione sottoposta al segno sommatorio equivale a

$$\frac{\partial \kappa_i}{\partial q_i} + \kappa_i \frac{\partial}{\partial q_i} \log Q_1 Q_2 Q_3 = \frac{1}{\nabla} \left(\nabla \frac{\partial \kappa_i}{\partial q_i} + \kappa_i \frac{\partial \nabla}{\partial q_i} \right).$$

Dunque

$$\Theta = \frac{1}{\nabla} \left(\frac{\partial \nabla \kappa_1}{\partial q_1} + \frac{\partial \nabla \kappa_2}{\partial q_2} + \frac{\partial \nabla \kappa_3}{\partial q_3} \right). \qquad (11)$$

9. **Espressioni di $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_3$ in coordinate curvilinee.** Prendiamo per un istante come assi cartesiani le tangenti alle linee coordinate, e tracciamo nel piano delle xy, intorno all'origine, una curva chiusa. È noto che l'integrale $\int_\sigma (udx + vdy)$, esteso a questa curva, si trasforma nell'integrale $\int \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) ds$, esteso all'area racchiusa nella curva stessa, ed è chiaro che, restringendo indefinitamente la curva intorno all'origine, si ha

$$\lim \frac{1}{s} \int_\sigma (udx + vdy) = \lim \frac{\int \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) ds}{\int ds} = \mathcal{T}_3 ,$$

poichè $\mathcal{T}_3$ è il valore di $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ nel punto considerato. Ciò premesso, valutiamo il primo integrale in coordinate curvilinee. Si ha $ds = Q_1 Q_2 dq_1 dq_2$, e gli spostamenti u, v sono espressi da $Q_1 \kappa_1$, $Q_2 \kappa_2$, mentre $dx = Q_1 dq_1$, $dy = Q_2 dq_2$. Per conseguenza

$$\mathcal{T}_3 = \lim \frac{1}{s} \int_\sigma (Q_1^2 \kappa_1 dq_1 + Q_2^2 \kappa_2 dq_2)$$
$$= \lim \frac{1}{s} \iint \left(\frac{\partial Q_2^2 \kappa_2}{\partial q_1} - \frac{\partial Q_1^2 \kappa_1}{\partial q_2} \right) dq_1 dq_2 ,$$

ovvero

$$\mathcal{T}_3 = \lim \frac{\int \left(\frac{\partial Q_2^2 \kappa_2}{\partial q_1} - \frac{\partial Q_1^2 \kappa_1}{\partial q_2} \right) \frac{ds}{Q_1 Q_2}}{\int ds} = \frac{1}{Q_1 Q_2} \left(\frac{\partial Q_2^2 \kappa_2}{\partial q_1} - \frac{\partial Q_1^2 \kappa_1}{\partial q_2} \right).$$

Dunque (*)

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{T}_1 &= \frac{1}{Q_2 Q_3}\left(\frac{\partial Q_3^2 \kappa_3}{\partial q_2} - \frac{\partial Q_2^2 \kappa_2}{\partial q_3}\right), \\ \mathcal{T}_2 &= \frac{1}{Q_3 Q_1}\left(\frac{\partial Q_1^2 \kappa_1}{\partial q_3} - \frac{\partial Q_3^2 \kappa_3}{\partial q_1}\right), \\ \mathcal{T}_3 &= \frac{1}{Q_1 Q_2}\left(\frac{\partial Q_2^2 \kappa_2}{\partial q_1} - \frac{\partial Q_1^2 \kappa_1}{\partial q_2}\right). \end{aligned}\right. \tag{12}$$

10. Ora cerchiamo di vedere quale forma speciale assumono le equazioni dell'equilibrio nel caso dell'isotropia. Se si procedesse alla sostituzione diretta della particolare forma che ha Π nei corpi isotropi, i calcoli si complicherebbero molto, e tale complicazione, come ha osservato il prof. Beltrami, « non è un fatto meramente algoritmico, ma ha la sua radice nella *natura* (**) stessa dello spazio ». Si hanno invece notevoli semplificazioni se si ricorre ad una nota (*cap.* V, § 3) decomposizione del potenziale Π in due parti, una delle quali non influisce sulle equazioni indefinite. Di queste sole equazioni intendiamo qui occuparci, poichè la sostituzione delle Θ e delle Ω nelle equazioni ai limiti non offre difficoltà. Sostituiamo dunque

$$\Pi_0 = -\frac{1}{2}\left[A\Theta^2 + B\left(\mathcal{T}_1^2 + \mathcal{T}_2^2 + \mathcal{T}_3^2\right)\right]$$

a Π, nelle equazioni indefinite, mettendo per Θ e per le $\mathcal{T}$ le espressioni (11) e (12). Invece di eseguire la sostituzione diretta, conviene meglio rifare il calcolo che ci ha condotti alle equazioni generali. A questo scopo si consideri

$$\int \delta\Pi_0 dS = -\int\left[A\Theta\delta\Theta + B\left(\mathcal{T}_1\delta\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2\delta\mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_3\delta\mathcal{T}_3\right)\right] dS.$$

Prima si ha

$$\int \Theta\delta\Theta dS = \sum_i \int\left[\frac{\partial\delta\kappa_i}{\partial q_i} + \left(\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_i} + \frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_i} + \frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_i}\right)\delta\kappa_i\right]\Theta dS.$$

(*) Vedi il primo lavoro sull'*idrodinamica razionale* pubblicato dal Prof. Beltrami nelle *Memorie dell'Accademia di Bologna* (1871, pp. 463, 471).

(**) Vedi il capitolo seguente.

L'integrale sottoposto al segno sommatorio equivale a

$$\int \nabla\Theta \frac{\partial \delta\kappa_i}{\partial q_i} \frac{dS}{\nabla} + \int \Theta\delta\kappa_i \frac{\partial \nabla}{\partial q_i} \frac{dS}{\nabla}$$

$$= \int \frac{\partial}{\partial q_i} (\nabla\Theta\delta\kappa_i) \frac{dS}{\nabla} - \int \delta\kappa_i \frac{\partial \nabla\Theta}{\partial q_i} \frac{dS}{\nabla} + \int \Theta\delta\kappa_i \frac{\partial \nabla}{\partial q_i} \frac{dS}{\nabla}.$$

Il primo integrale si trasforma in integrale di superficie, e negli altri due si trova $-\delta\kappa_i \frac{dS}{\nabla}$ moltiplicato per

$$\frac{\partial \nabla\Theta}{\partial q_i} - \Theta \frac{\partial \nabla}{\partial q_i} = \nabla \frac{\partial \Theta}{\partial q_i}.$$

Per conseguenza

$$\int \Theta\delta\Theta dS = -\int \left(\frac{\partial \Theta}{\partial q_1} \delta\kappa_1 + \frac{\partial \Theta}{\partial q_2} \delta\kappa_2 + \frac{\partial \Theta}{\partial q_3} \delta\kappa_3 \right) dS + \text{integr. di sup.}$$

Similmente

$$\int \mathfrak{T}_1 \delta \mathfrak{T}_1 dS = \int Q_1 \mathfrak{T}_1 \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (Q_3{}^2 \delta\kappa_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (Q_2{}^2 \delta\kappa_2) \right] \frac{dS}{\nabla}$$

$$= \int \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (Q_3{}^2 Q_1 \mathfrak{T}_1 \delta\kappa_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (Q_2{}^2 Q_1 \mathfrak{T}_1 \delta\kappa_2) \right] \frac{dS}{\nabla}$$

$$- \int \left(Q_3{}^2 \delta\kappa_3 \frac{\partial Q_1 \mathfrak{T}_1}{\partial q_2} - Q_2{}^2 \delta\kappa_2 \frac{\partial Q_1 \mathfrak{T}_1}{\partial q_3} \right) \frac{dS}{\nabla};$$

ecc. Dunque le equazioni indefinite per l'equilibrio elastico sono

$$\left\{ \begin{aligned} F_1 + \frac{A}{Q_1} \frac{\partial \Theta}{\partial q_1} + \frac{B}{Q_2 Q_3} \left(\frac{\partial Q_2 \mathfrak{T}_2}{\partial q_3} - \frac{\partial Q_3 \mathfrak{T}_3}{\partial q_2} \right) = 0, \\ F_2 + \frac{A}{Q_2} \frac{\partial \Theta}{\partial q_2} + \frac{B}{Q_3 Q_1} \left(\frac{\partial Q_3 \mathfrak{T}_3}{\partial q_1} - \frac{\partial Q_1 \mathfrak{T}_1}{\partial q_3} \right) = 0, \\ F_3 + \frac{A}{Q_3} \frac{\partial \Theta}{\partial q_3} + \frac{B}{Q_1 Q_2} \left(\frac{\partial Q_1 \mathfrak{T}_1}{\partial q_2} - \frac{\partial Q_2 \mathfrak{T}_2}{\partial q_1} \right) = 0. \end{aligned} \right. \tag{13}$$

Supponiamole integrate. Si conosceranno allora le κ, e quindi si potranno calcolare le θ e le ω mediante le formole di definizione. Poi le Θ e le Ω saranno date dalle formole

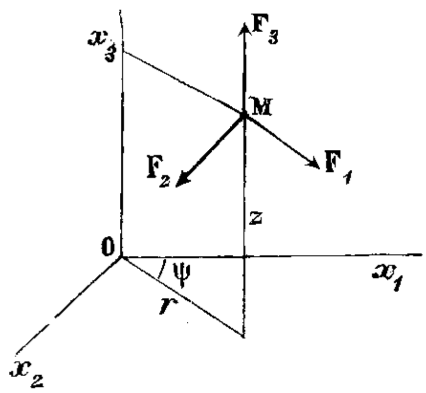
$$\left\{\begin{array}{ll} \Theta_1 = -A\Theta + 2B(\theta_2+\theta_3) \ , & \Omega_1 = -B\omega_1 \ , \\ \Theta_2 = -A\Theta + 2B(\theta_3+\theta_1) \ , & \Omega_2 = -B\omega_2 \ , \\ \Theta_3 = -A\Theta + 2B(\theta_1+\theta_2) \ , & \Omega_3 = -B\omega_3 \ , \end{array}\right. \tag{14}$$

che si ottengono derivando il potenziale unitario

$$\Pi = -\frac{1}{2}\left[A(\theta_1+\theta_2+\theta_3)^2 + B(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2 - 4\theta_2\theta_3 - 4\theta_3\theta_1 - 4\theta_1\theta_2)\right].$$

Finalmente, sostituendo le Θ e le Ω nelle equazioni ai limiti, si determinano le costanti arbitrarie.

11. Esempio. Assumiamo coordinate cilindriche, consideriamo cioè il sistema triplo ortogonale, costituito come segue: cilindri di rotazione con l'asse comune Ox_3; piani che passano per Ox_3; piani perpendicolari ad Ox_3. Parametri: $q_1 = r$, $q_2 = \psi$, $q_3 = z$. Elementi lineari coordinati:



$$Q_1 dq_1 = dr \ , \quad Q_2 dq_2 = r d\psi , \quad Q_3 dq_3 = dz.$$

Dunque $Q_1 = 1$, $Q_2 = r$, $Q_3 = 1$, $\nabla = r$. Finalmente poniamo $\kappa_1 = u$, $\kappa_2 = v$, $\kappa_3 = w$, avvertendo che gli spostamenti sono u, rv, w. Le formole (11) e (12) dànno

$$\Theta = \frac{1}{r}\frac{\partial(ur)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial \psi} + \frac{\partial w}{\partial z} \ , \tag{15}$$

$$\mathfrak{T}_1 = \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \psi} - r\frac{\partial v}{\partial z} \ , \quad \mathfrak{T}_2 = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \ , \quad \mathfrak{T}_3 = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(vr^2)}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial \psi}\right) , \tag{16}$$

e le equazioni (13) diventano

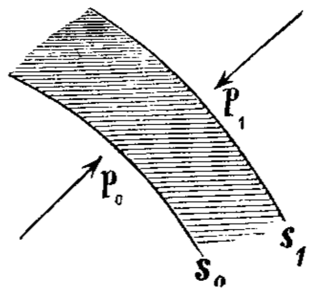
$$\left\{\begin{array}{l} F_1 + A\dfrac{\partial\Theta}{\partial r} + B\left(\dfrac{\partial\mathfrak{T}_2}{\partial z} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\mathfrak{T}_3}{\partial\psi}\right) = 0 \ , \\ F_2 + \dfrac{A}{r}\dfrac{\partial\Theta}{\partial\psi} + B\left(\dfrac{\partial\mathfrak{T}_3}{\partial r} - \dfrac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial z}\right) = 0 \ , \\ F_3 + A\dfrac{\partial\Theta}{\partial z} + B\left(\dfrac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial\psi} - \dfrac{\partial(r\mathfrak{T}_2)}{\partial r}\right) = 0 . \end{array}\right. \tag{17}$$

Le θ e le ω sono date dalle formole

$$\left\{\begin{array}{ll} \theta_1 = \dfrac{\partial u}{\partial r} \quad , & \omega_1 = r\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial \psi} \; , \\ \theta_2 = \dfrac{\partial v}{\partial \psi} + \dfrac{u}{r} \; , & \omega_2 = \dfrac{\partial w}{\partial r} + \dfrac{\partial u}{\partial z} \quad , \\ \theta_3 = \dfrac{\partial w}{\partial z} \quad , & \omega_3 = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \psi} + r\dfrac{\partial v}{\partial z} \, . \end{array}\right. \tag{18}$$

Finalmente le Θ e le Ω si hanno dalle formole (14).

12. Applicazione all'involucro cilindrico. Siano: r_0, p_0, raggio e pressione unitaria sulla superficie interna; r_1, p_1, raggio e pressione sulla superficie esterna. Si suppongono nulle le forze di massa. Se le pressioni sono uniformemente distribuite in superficie si capisce che, per ragioni di simmetria, la deformazione sarà indipendente da ψ e da z, cioè si avranno u, Θ, $\mathfrak{T}_1$, ecc., funzioni di r soltanto, mentre v e w saranno uguali a zero. Con ciò le equazioni (17) diventano



$$\frac{d\Theta}{dr} = 0 \quad , \quad \frac{d\mathfrak{T}_3}{dr} = 0 \quad , \quad \frac{d(\mathfrak{T}_2 r)}{dr} = 0 \, .$$

D'altra parte dalle (16) si ha $\mathfrak{T}_3 = 0$, $\mathfrak{T}_2 = 0$. Perciò le ultime due equazioni sono soddisfatte, e la prima diventa, in virtù di (15),

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dur}{dr}\right) = 0 \, .$$

Se ne deduce, integrando,

$$u = \lambda r + \frac{\mu}{r} \, .$$

Per la determinazione di λ e μ bisogna servirsi delle equazioni ai limiti; ma prima occorre calcolare le Θ e le Ω, che sono date dalle formole (14). Nel caso attuale le formole (18) dànno

$$\theta_1 = \frac{du}{dr} \quad , \quad \theta_2 = \frac{u}{r} \quad , \quad \theta_3 = \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0 \; ,$$

e quindi si ha dalle (14)

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = 0 \; ,$$

$$\left\{\begin{array}{l} \Theta_1 = -A\Theta + 2B\dfrac{u}{r} = -2\lambda A + 2B\left(\lambda + \dfrac{\mu}{r^2}\right) = -2\lambda(A-B) + \dfrac{2\mu B}{r^2} \\ \Theta_2 = -A\Theta + 2B\dfrac{du}{dr} = -2\lambda A + 2B\left(\lambda - \dfrac{\mu}{r^2}\right) = -2\lambda(A-B) - \dfrac{2\mu B}{r^2} \\ \Theta_3 = -A\Theta + 2B\left(\dfrac{u}{r} + \dfrac{du}{dr}\right) = -2\lambda A + 4\lambda B = -2\lambda(A-2B) \, . \end{array}\right. \tag{19}$$

Ciò premesso, le equazioni ai limiti diventano $\varphi_1 = \Theta_1 \cos(nr)$, $\varphi_2 = \varphi_3 = 0$. Sulla superficie interna $\varphi_1 = p_0$, $\cos(nr) = 1$. Sulla superficie esterna $\varphi_1 = -p_1$, $\cos(nr) = -1$. Dunque

$$p_0 = -2\lambda(A-B) + \frac{2\mu B}{r_0^2} \quad , \quad p_1 = -2\lambda(A-B) + \frac{2\mu B}{r_1^2}.$$

Se ne deduce

$$\lambda = -\frac{1}{2(A-B)} \cdot \frac{p_1 r_1^2 - p_0 r_0^2}{r_1^2 - r_0^2} \quad , \quad \mu = -\frac{1}{2B} \frac{(p_1 - p_0) r_1^2 r_0^2}{r_1^2 - r_0^2}.$$

Restano così completamente determinati gli spostamenti, la dilatazione unitaria, ecc. Finalmente le formole (19) faranno conoscere la distribuzione delle azioni interne in ciascun punto del corpo. Per esempio, nel caso d'una cavità cilindrica indefinita, si ha $\lambda = 0$, $2\mu B = p_0 r_0^2$, e le formole (19) dànno

$$\Theta_1 = -\Theta_2 = p_0 \frac{r_0^2}{r^2} \quad , \quad \Theta_3 = 0.$$

Ne segue che, considerando l'infinità delle sezioni piane fatte nel corpo perpendicolarmente all'asse, queste si comportano come se fossero indipendenti le une dalle altre; ed in ogni sezione si sviluppano radialmente pressioni, e lateralmente tensioni, uguali per ogni punto in valore assoluto, e variabili da un punto all'altro in ragione inversa del quadrato del raggio.

13. Teorema di Betti. Il teorema di Betti sussiste in coordinate curvilinee ortogonali. Ciò non è evidente *a priori*, perchè nel caso delle coordinate curvilinee generali l'orientazione delle terne di assi, rispetto a cui si computano gli spostamenti $Q\kappa$, varia da punto a punto. Rappresentiamo con $Q\kappa'$ altri spostamenti, dovuti alle forze (F_1', F_2', F_3'), $(\varphi'_1, \varphi'_2, \varphi'_3)$. Moltiplicando le equazioni (10) per $\kappa'_i dS$ ed integrando si ottiene

$$\int Q_i F_i \kappa'_i dS$$

$$= \int \kappa'_i \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\nabla \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{i1}} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\nabla \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{i2}} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\nabla \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{i3}} \right) \right] \frac{dS}{\nabla} - \int \kappa'_i \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_i} dS.$$

Il primo integrale equivale a

$$\int \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\kappa'_i \nabla \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{i1}} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\kappa'_i \nabla \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{i2}} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\kappa'_i \nabla \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{i3}} \right) \right] \frac{dS}{\nabla}$$
$$- \int \left(\kappa'_{i1} \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{i1}} + \kappa'_{i2} \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{i2}} + \kappa'_{i3} \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_{i3}} \right) dS.$$

A sua volta il primo di questi integrali si trasforma in

$$-\int\left[Q_1\frac{\partial\Pi}{\partial\kappa_{i1}}\cos(nq_1)+Q_2\frac{\partial\Pi}{\partial\kappa_{i2}}\cos(nq_2)+Q_3\frac{\partial\Pi}{\partial\kappa_{i3}}\cos(nq_3)\right]\kappa'_i\,ds=-\int Q_i\varphi_i\kappa'_i\,ds\,.$$

Dunque, facendo $i=1,2,3$ e sommando,

$$\sum_i\left\{\int Q_iF_i\kappa'_i\,dS+\int Q_i\varphi_i\kappa'_i\,ds\right\}$$

$$=-\int\left(\kappa'_1\frac{\partial\Pi}{\partial\kappa_1}+\kappa'_2\frac{\partial\Pi}{\partial\kappa_2}+\ldots+\kappa'_{11}\frac{\partial\Pi}{\partial\kappa_{11}}+\kappa'_{12}\frac{\partial\Pi}{\partial\kappa_{12}}+\ldots+\kappa'_{33}\frac{\partial\Pi}{\partial\kappa_{33}}\right)dS\,.$$

Poichè Π è forma quadratica di $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_{11}, \kappa_{12}, \kappa_{13}, \ldots, \kappa_{23}, \kappa_{33}$, il secondo membro non varia quando si scambiano le κ con le κ'. Dunque

$$\begin{aligned}&\int(Q_1F_1\kappa'_1+Q_2F_2\kappa'_2+Q_3F_3\kappa'_3)dS+\int(Q_1\varphi_1\kappa'_1+Q_2\varphi_2\kappa'_2+Q_3\varphi_3\kappa'_3)ds\\&=\int(Q_1F'_1\kappa_1+Q_2F'_2\kappa_2+Q_3F'_3\kappa_3)dS+\int(Q_1\varphi'_1\kappa_1+Q_2\varphi'_2\kappa_2+Q_3\varphi'_3\kappa_3)ds\,.\end{aligned}\tag{20}$$

14. Del precedente teorema si possono fare quelle stesse applicazioni che sono state date nel *cap.* VI; ma tutto dipende dalla effettiva integrazione delle equazioni (8), in cui si possono supporre *costanti* le θ e le ω. Si ottengono così per le κ' espressioni che, oltre le θ e le ω, contengono linearmente sei costanti arbitrarie, $a_1, a_2, \ldots, a_6$. Quando le θ e le ω si pongono uguali a zero, le relative κ' corrispondono all'ipotesi della rigidità, e però sono nulle le F' e le φ'. Quindi la formola (20) si riduce al primo membro uguale a zero. L'equazione così ottenuta si scinde poi, per l'arbitrio che regna sulle a, in *sei* equazioni distinte, che sono le equazioni dell'equilibrio rigido. Se invece si pongono uguali a zero le a, e si determinano le θ e le ω mediante le sei equazioni di primo grado

$$\Theta_1=\Theta_2=\Theta_3=1\quad,\quad\Omega_1=\Omega_2=\Omega_3=0\;,$$

le equazioni (4) e (5) dànno

$$F_i' = 0 \quad , \quad \varphi'_i = \cos(nq_i) \quad ; \qquad (i = 1 \, , 2 \, , 3) \, .$$

Quindi il secondo membro di (20) diventa

$$\int \left[Q_1 \kappa_1 \cos(nq_1) + Q_2 \kappa_2 \cos(nq_2) + Q_3 \kappa_3 \cos(nq_3) \right] ds$$

$$= - \int \left(\frac{\partial \nabla \kappa_1}{\partial q_1} + \frac{\partial \nabla \kappa_2}{\partial q_2} + \frac{\partial \nabla \kappa_3}{\partial q_3} \right) \frac{dS}{\nabla} \, .$$

Ne segue, sostituendo in (20) ed osservando (11),

$$- \int \Theta dS = \int (Q_1 F_1 \kappa'_1 + Q_2 F_2 \kappa'_2 + Q_3 F_3 \kappa'_3) dS + \int (Q_1 \varphi_1 \kappa'_1 + Q_2 \varphi_2 \kappa'_2 + Q_3 \varphi_3 \kappa'_3) ds \, .$$

Così resta determinata la dilatazione totale in qualunque deformazione.

15. Esempio. Nel caso delle coordinate cilindriche si debbono integrare le equazioni (18) supponendo costanti le θ e le ω. Distinguiamo le equazioni stesse mediante i loro primi membri. Derivando la (ω_2) rispetto a z ed r, successivamente, si ottiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = 0 \, .$$

Quindi si vede che $\frac{\partial u}{\partial z}$ è indipendente da z, mentre $\frac{\partial u}{\partial r} = \theta_1$. Similmente $\frac{\partial w}{\partial r}$ è indipendente da r, mentre $\frac{\partial w}{\partial z} = \theta_3$. Dunque

$$u = \theta_1 r + z F(\psi) + G(\psi) \quad , \quad w = \theta_3 z + r U(\psi) + V(\psi) \, . \tag{21}$$

Sostituendo in (ω_2) si vede che

$$F(\psi) + U(\psi) = \omega_2 \, . \tag{22}$$

Derivando (ω_3) ed (ω_1) rispetto a ψ, e tenendo conto di (θ_2), si ottiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} = r^2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{u}{r} \quad , \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} = r \frac{\partial u}{\partial z} \, .$$

Se ne deduce, in virtù delle (21),

$$F + F'' = 0 \quad , \quad G + G'' = 0 \quad , \quad V'' = 0 ;$$

poi

$$F(\psi) = a_1 \operatorname{sen}\psi + a_2 \cos\psi \quad , \quad G(\psi) = a_3 \operatorname{sen}\psi + a_4 \cos\psi \quad , \quad V = m\psi + a_5 .$$

Le (21) diventano, tenendo conto di (22),

$$\begin{cases} u = \theta_1 r + (a_1 \operatorname{sen}\psi + a_2 \cos\psi) z + a_3 \operatorname{sen}\psi + a_4 \cos\psi \\ w = \theta_3 z + (\omega_2 - a_1 \operatorname{sen}\psi - a_2 \cos\psi) r + m\psi + a_5 . \end{cases}$$

Ora integrando (θ_2) si ottiene

$$v = (\theta_2 - \theta_1)\psi + \frac{z}{r}(a_1 \cos\psi - a_2 \operatorname{sen}\psi) + \frac{1}{r}(a_3 \cos\psi - a_4 \operatorname{sen}\psi) + H(r, z) .$$

La sostituzione di questo risultato in (ω_3) ed (ω_1) mostra che la funzione H deve soddisfare alle equazioni

$$\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{\omega_3}{r} \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\omega_1}{r} - \frac{m}{r^2} .$$

Dunque $\omega_1 = 0$ (*), $m = 0$, $H = \omega_3 \log r + a_6$. Finalmente

$$\begin{cases} u = \theta_1 r + (a_1 \operatorname{sen}\psi + a_2 \cos\psi) z + a_3 \operatorname{sen}\psi + a_4 \cos\psi \\ w = \theta_3 z + (\omega_2 - a_1 \operatorname{sen}\psi - a_2 \cos\psi) r + a_5 \\ v = (\theta_2 - \theta_1)\psi + \frac{z}{r}(a_1 \cos\psi - a_2 \operatorname{sen}\psi) + \frac{1}{r}(a_3 \cos\psi - a_4 \operatorname{sen}\psi) + \omega_3 \log r + a_6 . \end{cases}$$

Ed ora è facile trovare, col processo indicato, le sei condizioni dell'equilibrio rigido, la dilatazione totale, ecc. Ai risultati che si ottengono in questo caso particolare si perviene più rapidamente mercè la trasformazione diretta dei risultati analoghi, ottenuti in coordinate cartesiane; ma per questa trasformazione è necessario conoscere le relazioni esistenti fra le q e le x, e del resto il processo generale qui esposto ha il vantaggio di restare applicabile quando si esclude la verità del postulato di Euclide nello spazio considerato.

(*) Quella che si potrebbe chiamare una deformazione *omogenea*, in riguardo alla particolare rappresentazione cilindrica che qui si considera, non è dunque possibile se non supponendo che due elementi superficiali qualunque, situati rispettivamente in un piano perpendicolare all'asse ed in un piano che contiene l'asse, restino ortogonali nella deformazione. Con ciò si vede che non si possono attribuire arbitrariamente, come nella rappresentazione cartesiana, valori costanti alle θ ed alle ω. Le condizioni alle quali debbono soddisfare queste quantità, costanti o variabili, sono state segnalate dal Prof. E. PADOVA nel *vol.* III degli « *Studii offerti dall'Università Padovana alla Bolognese nell'VIII centenario*, ecc. ».