XIII. INTEGRAZIONE DELLE EQUAZIONI PER L'EQUILIBRIO ELASTICO DEI CORPI ISOTROPI.

1. Quando in superficie son *dati gli spostamenti,* il problema dell'equilibrio elastico consiste nella ricerca di tre funzioni u, v, w, finite, continue ed uniformi, soddisfacenti alle equazioni

$$\left\{\begin{aligned} &X + (A - B)\frac{\partial \Theta}{\partial x} + B\Delta^2 u = 0 \ , \\ &Y + (A - B)\frac{\partial \Theta}{\partial y} + B\Delta^2 v = 0 \ , \\ &Z + (A - B)\frac{\partial \Theta}{\partial z} + B\Delta^2 w = 0 \ , \end{aligned}\right. \tag{1}$$

in tutto uno spazio dato, alla superficie del quale assumano valori prescritti. Per una formola di Betti, dimostrata precedentemente, si ha

$$\begin{aligned} -4\pi A\Theta = &\int\left(X\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi} + Y\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta} + Z\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\right)dS \\ &+\int\left(L\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi} + M\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta} + N\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\right)ds \\ &+2B\int\left(u\frac{d}{dn}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi} + v\frac{d}{dn}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta} + w\frac{d}{dn}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\right)ds \, . \end{aligned} \tag{2}$$

Il secondo integrale è il solo che, nell'attuale problema, non sia conosciuto. Per calcolarlo supponiamo che, per un espediente qualsiasi, si sia pervenuti alla conoscenza di tre funzioni u', v', w', finite, continue ed uniformi, soddisfacenti alle (1) quando si pongono uguali a zero le forze di massa, e tali che in superficie si abbia

$$u' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \; , \quad v' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} \; , \quad w' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \, .$$

Il teorema di Betti, applicato a questi ed agli spostamenti incogniti, dà

$$\int (Xu' + Yv' + Zw')\, dS + \int \left(L \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + M \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + N \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) ds$$
$$= \int (L'u + M'v + N'w)\, ds \, , \qquad (3)$$

dove L', M', N' si calcolano mediante le note equazioni ai limiti

$$\left\{ \begin{aligned} L' &= -(A - 2B)\, \Theta' \frac{d\xi}{dn} - 2B \frac{du'}{dn} - B \left(\mathfrak{T}'_3 \frac{d\eta}{dn} - \mathfrak{T}'_2 \frac{d\zeta}{dn} \right) , \\ M' &= -(A - 2B)\, \Theta' \frac{d\eta}{dn} - 2B \frac{dv'}{dn} - B \left(\mathfrak{T}'_1 \frac{d\zeta}{dn} - \mathfrak{T}'_3 \frac{d\xi}{dn} \right) , \\ N' &= -(A - 2B)\, \Theta' \frac{d\zeta}{dn} - 2B \frac{dw'}{dn} - B \left(\mathfrak{T}'_2 \frac{d\xi}{dn} - \mathfrak{T}'_1 \frac{d\eta}{dn} \right) . \end{aligned} \right. \qquad (4)$$

Ora Θ si può ritenere come conosciuta mediante la formola (2), nella quale si sostituisce al secondo integrale il valore fornito dalla (3). Portando poi il valore di Θ nelle (1), queste forniscono $\Delta^2 u$, $\Delta^2 v$, $\Delta^2 w$, e però le funzioni u, v, w, delle quali son noti i valori in superficie, si possono determinare ricorrendo alle considerazioni del *cap.* IX.

2. Quando in superficie son *date le forze esterne,* bisogna previamente conoscere, non uno, ma quattro sistemi di spostamenti ausiliarii, provocati da sole forze superficiali, che abbiano rispettivamente le seguenti espressioni:

$$L' = -2B \frac{\partial \varphi}{\partial x} \; , \qquad M' = -2B \frac{\partial \varphi}{\partial y} \; , \qquad N' = -2B \frac{\partial \varphi}{\partial z} \; ,$$

$$L_1 = B \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \; , \qquad M_1 = B \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) , \quad N_1 = B \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) ,$$

$$L_2 = B\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right), \quad M_2 = B\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}, \qquad N_2 = B\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right),$$

$$L_3 = B\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right), \quad M_3 = B\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right), \quad N_3 = B\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}.$$

Si è posto, per brevità, $\varphi = \dfrac{d\frac{1}{r}}{dn}$ e

$$\varphi_1 = \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\frac{dz}{dn} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\frac{dy}{dn}, \quad \varphi_2 = \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\frac{dx}{dn} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\frac{dz}{dn}, \quad \varphi_3 = \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\frac{dy}{dn} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\frac{dx}{dn}.$$

Applicando il teorema di Betti agli spostamenti u', v', w', ed agli spostamenti incogniti, si ottiene

$$\int(Xu' + Yv' + Zw')dS + \int(Lu' + Mv' + Nw')ds$$
$$= -2B\int\left(u\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + v\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} + w\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)ds.$$

Quindi la (2) diventa

$$4\pi A\Theta = \int\left[X\left(u' - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\right) + Y\left(v' - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}\right) + Z\left(w' - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\right)\right]dS$$
$$+ \int\left[L\left(u' - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\right) + M\left(v' - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}\right) + N\left(w' - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\right)\right]ds.$$

Ora Θ si può riguardare come conosciuta. Analogamente si ha

$$\int(Xu_1 + Yv_1 + Zw_1)dS + \int(Lu_1 + Mv_1 + Nw_1)ds$$
$$= B\int\left(u\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi} + v\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta} + w\frac{\partial\varphi_1}{\partial\zeta}\right)ds + B\int\left(w\frac{\partial\varphi}{\partial y} - v\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)ds;$$

e siccome, per altre note formole, è

$$-4\pi B\mathcal{T}_1 = \int\left(Z\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta} - Y\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\right)dS + \int\left(N\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta} - M\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\right)ds$$
$$+ B\int\left(w\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} - v\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)ds + B\int\left(u\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi} + v\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta} + w\frac{\partial\varphi_1}{\partial\zeta}\right)ds,$$

è pure

$$4\pi B\mathfrak{T}_1 = -\int\left[Xu_1 + Y\left(v_1 - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\right) + Z\left(w_1 + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}\right)\right]dS$$
$$-\int\left[Lu_1 + M\left(v_1 - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\right) + N\left(w_1 + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}\right)\right]ds\,.$$

Così anche $\mathfrak{T}_1$, ed analogamente $\mathfrak{T}_2$ e $\mathfrak{T}_3$, vengono ad essere conosciuti.

3. Ciò premesso, per determinare u si hanno le condizioni

$$X + (A - B)\frac{\partial\Theta}{\partial x} + B\Delta^2 u = 0$$

in tutto S, ed in superficie

$$L + (A - 2B)\Theta\frac{dx}{dn} + 2B\frac{du}{dn} + B\left(\mathfrak{T}_3\frac{dy}{dn} - \mathfrak{T}_2\frac{dz}{dn}\right) = 0\,,$$

le quali fanno conoscere il valore di $\Delta^2 u$ in ogni punto dello spazio, e quello di $\frac{du}{dn}$ in superficie, dimodochè la funzione u viene ad essere determinata, purchè sia soddisfatta la condizione

$$\int\frac{du}{dn}ds = -\int\Delta^2 u\,dS\,.$$

Per verificare questa eguaglianza si osservi che le equazioni ai limiti dànno

$$\int Lds + 2B\int\frac{du}{dn}ds = \int\left[(A-2B)\frac{\partial\Theta}{\partial\xi} + B\left(\frac{\partial\mathfrak{T}_3}{\partial\eta} - \frac{\partial\mathfrak{T}_2}{\partial\zeta}\right)\right]dS\,.$$

In virtù della nota identità

$$\Delta^2 u = \frac{\partial\Theta}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{T}_3}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{T}_2}{\partial z}$$

si può anche scrivere

$$\int Lds + 2B\int\frac{du}{dn}ds = \int\left[(A-B)\frac{\partial\Theta}{\partial\xi} - B\Delta^2 u\right]dS$$
$$= -\int XdS - 2B\int\Delta^2 u\,dS\,.$$

Dunque

$$\int \frac{du}{dn} ds = -\int \Delta^2 u dS - \frac{1}{2B}\left(\int X dS + \int L ds\right) = -\int \Delta^2 u dS .$$

Questo metodo d'integrazione è dovuto a Betti (*): i dettagli che si richiedono per la sua applicazione sono stati largamente esposti dal prof. Cerruti nelle sue « ricerche intorno all'equilibrio dei corpi elastici isotropi » (**).

4. È facile immaginare altri procedimenti per l'integrazione, fondati sempre sulla preliminare conoscenza di sistemi di spostamenti, soddisfacenti tutti alle (1), in assenza di forze di massa, e caratterizzati dai valori che assumono in superficie. Così, per esempio, partendo dalle formole

$$4\pi B u = U + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\ , \quad 4\pi B v = V + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\ , \quad 4\pi B w = W + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\ ,$$

nelle quali è

$$U = \int \frac{X dS}{r} + \int \frac{L ds}{r} + B \int u \frac{d\frac{1}{r}}{dn} ds + B \int \left(u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + w \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) \frac{d\xi}{dn} ds,$$

$$V = \int \frac{Y dS}{r} + \int \frac{M ds}{r} + B \int v \frac{d\frac{1}{r}}{dn} ds + B \int \left(u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + w \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) \frac{d\eta}{dn} ds,$$

$$W = \int \frac{Z dS}{r} + \int \frac{N ds}{r} + B \int w \frac{d\frac{1}{r}}{dn} ds + B \int \left(u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + w \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) \frac{d\zeta}{dn} ds,$$

$$\Phi = (A - B) \int \frac{\Theta dS}{r} + B \int \left(u \frac{d\xi}{dn} + v \frac{d\eta}{dn} + w \frac{d\zeta}{dn} \right) \frac{ds}{r},$$

si presentano subito due metodi per l'integrazione. Se si riesce ad ottenere un sistema di spostamenti, i quali assumano in superficie

(*) *Teoria della elasticità*, p. 81.

(**) *Accademia dei Lincei*, 1882, pp. 83, 87, 105. Vedi anche due comunicazioni di Boussinesq all'Accademia di Parigi (*Comptes-rendus*, 9 et 16 Avril, 1888).

i valori $\frac{\partial r}{\partial \xi}, \frac{\partial r}{\partial \eta}, \frac{\partial r}{\partial \zeta}$, si può ritenere, mercè il teorema di Betti, che la funzione Φ è conosciuta, perchè si è visto altrove che ad essa si può anche dar la forma

$$\begin{aligned}\Phi = & \frac{A-B}{2A}\int\left(X\frac{\partial r}{\partial \xi} + Y\frac{\partial r}{\partial \eta} + Z\frac{\partial r}{\partial \zeta}\right)dS \\ & + \frac{A-B}{2A}\int\left(L\frac{\partial r}{\partial \xi} + M\frac{\partial r}{\partial \eta} + N\frac{\partial r}{\partial \zeta}\right)ds \\ & - \frac{B}{A}(A-2B)\int\left(u\frac{d\xi}{dn} + v\frac{d\eta}{dn} + w\frac{d\zeta}{dn}\right)\frac{ds}{r} \\ & + \frac{B}{A}(A-B)\int\left(u\frac{d}{dn}\frac{\partial r}{\partial \xi} + v\frac{d}{dn}\frac{\partial r}{\partial \eta} + w\frac{d}{dn}\frac{\partial r}{\partial \zeta}\right)ds\,.\end{aligned}$$

Ora U, V, W debbono in tutto S soddisfare alle equazioni

$$\Delta^2 U = -4\pi X\ ,\quad \Delta^2 V = -4\pi Y\ ,\quad \Delta^2 W = -4\pi Z\ ,$$

ed assumere in superficie gli stessi valori di

$$4\pi B u - \frac{\partial \Phi}{\partial x}\ ,\quad 4\pi B v - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\ ,\quad 4\pi B w - \frac{\partial \Phi}{\partial z}\,.$$

5. Si può invece cominciare dalla determinazione di U, V, W, quando si riesca a determinare tre sistemi di spostamenti, che in superficie prendano rispettivamente i valori

$$\begin{aligned} u' &= \frac{1}{r}\ , & v' &= 0\ , & w' &= 0\ , \\ u'' &= 0\ , & v'' &= \frac{1}{r}\ , & w'' &= 0\ , \\ u''' &= 0\ , & v''' &= 0\ , & w''' &= \frac{1}{r}\ , \end{aligned}$$

ed in tutto lo spazio considerato verifichino le (1) per $X=Y=Z=0$. Il teorema di Betti dà subito

$$\int\frac{Lds}{r} = \int(L'u + M'v + N'w)ds - \int(Xu' + Yv' + Zw')dS\,,$$

$$\int\frac{Mds}{r} = \int(L''u + M''v + N''w)ds - \int(Xu'' + Yv'' + Zw'')dS\,,$$

$$\int\frac{Nds}{r} = \int(L'''u + M'''v + N'''w)ds - \int(Xu''' + Yv''' + Zw''')dS\,.$$

Così possiamo ritenere conosciute le funzioni U, V, W, ed anche Θ, giacchè si ha

$$4\pi A\Theta = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}.$$

Dunque è nota la funzione Φ. Questa si potrebbe anche determinare osservando che soddisfa all'equazione

$$\Delta^2\Phi = -4\pi(A-B)\Theta\,,$$

mentre in superficie la sua derivata prima rispetto alla normale assume i valori

$$(4\pi Bu - U)\frac{dx}{dn} + (4\pi Bv - V)\frac{dy}{dn} + (4\pi Bw - W)\frac{dz}{dn}\,;$$

ma il metodo esposto nel § 1 è incontestabilmente il più semplice di tutti.

XIV. APPLICAZIONE AI SUOLI ELASTICI ISOTROPI.

1. Per ben mettere in chiaro il precedente processo d'integrazione, nel caso che in superficie sian dati gli spostamenti, applichiamolo ad un *suolo* elastico, omogeneo ed isotropo, cioè ad un solido indefinito, limitato da un piano. La prima questione che si presenta è la *determinazione degli spostamenti ausiliarii* u′, v′, w′. Questi debbono soddisfare, in tutto lo spazio considerato, alle equazioni

$$\left\{\begin{aligned} &(A-B)\frac{\partial\Theta'}{\partial x} + B\Delta^2 u' = 0\,,\\ &(A-B)\frac{\partial\Theta'}{\partial y} + B\Delta^2 v' = 0\,,\\ &(A-B)\frac{\partial\Theta'}{\partial z} + B\Delta^2 w' = 0\,.\end{aligned}\right. \tag{1}$$

Se si rappresentano con r_1 le distanze al punto simmetrico (rispetto al piano limite) di quello a partire dal quale si contano le distanze r, si ha

$$r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2,\quad r_1^{\,2}=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2,$$

e però in superficie, cioè per $\zeta=0$,

$$\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial\xi}=\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi},\quad \frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial\eta}=\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta},\quad \frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial\zeta}=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}.$$

Ne segue che le funzioni u', v', w', se, invece di soddisfare alle (1), dovessero essere armoniche, sarebbero uguali a

$$\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial\xi},\quad \frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial\eta},\quad \frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial\zeta},$$

perchè queste sono armoniche, finite, continue ed uniformi in tutto lo spazio che si considera. Ciò premesso, prendiamo a considerare una delle equazioni (1), per esempio la prima. Siccome la dilatazione cubica, in assenza di forze di massa, è una funzione armonica, possiamo, per osservazioni fatte nel *cap.* IX, porre

$$\Theta'=\frac{\partial\vartheta}{\partial\zeta},$$

dove ϑ è anch'essa armonica. L'equazione considerata diventa, nel punto (ξ, η, ζ),

$$\Delta^2 u'=-\frac{A-B}{B}\,\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\xi\partial\zeta}=\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(-\frac{A-B}{B}\,\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}\right),$$

e però si ha, per le medesime osservazioni,

$$u'=\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial\xi}-\frac{A-B}{2B}\,\zeta\,\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}.$$

Analogamente

$$v'=\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial\eta}-\frac{A-B}{2B}\,\zeta\,\frac{\partial\vartheta}{\partial\eta},\quad w'=-\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial\zeta}-\frac{A-B}{2B}\,\zeta\,\frac{\partial\vartheta}{\partial\zeta}.$$

Per determinare ϑ si osservi che dalle ultime tre relazioni, derivate rispetto a ξ, η, ζ, si deduce

$$\Theta' = -2\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial \zeta^2} - \frac{A-B}{2B}\frac{\partial \vartheta}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(-2\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial \zeta} - \frac{A-B}{2B}\vartheta\right).$$

Si può dunque porre

$$\vartheta = -2\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial \zeta} - \frac{A-B}{2B}\vartheta,$$

e ricavarne

$$\vartheta = -\frac{4B}{A+B}\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial \zeta},$$

giacchè questa funzione è armonica. Dunque

$$\left\{\begin{aligned} u' &= \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial \xi} + 2\frac{A-B}{A+B}\zeta\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial \xi \partial \zeta}, \\ v' &= \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial \eta} + 2\frac{A-B}{A+B}\zeta\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial \eta \partial \zeta}, \\ w' &= \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial \zeta} + 2\frac{A-B}{A+B}\zeta\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial \zeta^2}. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

2. La seconda questione da risolvere è la *determinazione della dilatazione cubica*. Prima calcoliamo L', M', N' mediante le formole (4) del precedente capitolo. Queste, osservando che $\frac{d\xi}{dn} = \frac{d\eta}{dn} = 0$ e $\frac{d\zeta}{dn} = 1$, assumono la forma semplicissima

$$L' = -B\left(\frac{\partial u'}{\partial \zeta} + \frac{\partial w'}{\partial \xi}\right), \quad M' = -B\left(\frac{\partial v'}{\partial \zeta} + \frac{\partial w'}{\partial \eta}\right),$$

$$N' = -2B\frac{\partial w'}{\partial \zeta} - (A-2B)\Theta';$$

quindi dànno, per sostituzione delle (2), e prendendo i valori in superficie ($\zeta = 0$),

$$\left\{\begin{aligned} L' &= -2B\frac{A-B}{A+B}\frac{\partial^2\frac{1}{r_1}}{\partial\xi\partial\zeta} = 2B\frac{A-B}{A+B}\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\xi\partial\zeta}\,, \\ M' &= -2B\frac{A-B}{A+B}\frac{\partial^2\frac{1}{r_1}}{\partial\eta\partial\zeta} = 2B\frac{A-B}{A+B}\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\eta\partial\zeta}\,, \\ N' &= 2B\frac{A-B}{A+B}\frac{\partial^2\frac{1}{r_1}}{\partial\zeta^2} = 2B\frac{A-B}{A+B}\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\zeta^2}\,. \end{aligned}\right.$$

Adunque si ha

$$\int(L'u + M'v + N'w)ds$$

$$= 2B\frac{A-B}{A+B}\int\left(u\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\xi\partial\zeta} + v\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\eta\partial\zeta} + w\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\zeta^2}\right)ds\,.$$

Analogamente l'ultimo integrale della formola (2) del precedente capitolo si riduce a

$$2B\int\left(u\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\xi\partial\zeta} + v\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\eta\partial\zeta} + w\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\zeta^2}\right)ds\,,$$

e però la formola stessa, quando vi si porta il risultato (3) del medesimo capitolo, diventa

$$4\pi A\Theta = \int\left[X\left(u' - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\right) + Y\left(v' - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}\right) + Z\left(w' - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\right)\right]dS$$

$$-\frac{4AB}{A+B}\int\left(u\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\xi\partial\zeta} + v\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\eta\partial\zeta} + w\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\zeta^2}\right)ds\,.$$

Così è nota la dilatazione cubica.

3. Per proseguire con formole semplici trascuriamo le forze di massa. L'ultima formola diventa

$$\pi\Theta = -\frac{B}{A+B}\int\left(u\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\xi\partial\zeta} + v\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\eta\partial\zeta} + w\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\zeta^2}\right)ds\,.$$

Poniamo

$$P = \int \frac{uds}{r} \;,\quad Q = \int \frac{vds}{r} \;,\quad R = \int \frac{wds}{r} \;,$$

e

$$\varphi = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Questi integrali, tutti noti, soddisfano tutti, come funzioni potenziali di superficie, all'equazione di Laplace. Intanto si ha

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} = \int u \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} ds = \int u \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \xi \partial \zeta} ds \;, \quad \text{ecc.}$$

e però

$$\pi\Theta = -\frac{B}{A+B}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right),$$

cioè

$$\pi\Theta = -\frac{B}{A+B}\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

4. Passiamo alla terza ed ultima parte della questione: *determinazione degli spostamenti.* Questi debbono soddisfare alle equazioni

$$\left\{\begin{aligned} \Delta^2 u &= \frac{1}{\pi}\frac{A-B}{A+B}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}\,, \\ \Delta^2 v &= \frac{1}{\pi}\frac{A-B}{A+B}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z}\,, \\ \Delta^2 w &= \frac{1}{\pi}\frac{A-B}{A+B}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \end{aligned}\right.$$

Se in superficie si dovesse avere $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, i valori di queste funzioni in tutto lo spazio considerato sarebbero

$$\frac{1}{2\pi}\frac{A-B}{A+B} z \frac{\partial \varphi}{\partial x} \;,\quad \frac{1}{2\pi}\frac{A-B}{A+B} z \frac{\partial \varphi}{\partial y} \;,\quad \frac{1}{2\pi}\frac{A-B}{A+B} z \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Se, invece, u, v, w dovessero soddisfare all'equazione di Laplace, assumendo in superficie i valori assegnati, i loro valori in tutto lo spazio sarebbero

$$-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial P}{\partial z}\,, \quad -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial Q}{\partial z}\,, \quad -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial R}{\partial z}\,.$$

Dunque finalmente

$$\left\{\begin{aligned} u &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{2\pi}\frac{A-B}{A+B}z\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,, \\ v &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{1}{2\pi}\frac{A-B}{A+B}z\frac{\partial \varphi}{\partial y}\,, \\ w &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial R}{\partial z} + \frac{1}{2\pi}\frac{A-B}{A+B}z\frac{\partial \varphi}{\partial z}\,. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

5. Il prof. Cerruti ha trattato il problema precedente « per dare un'illustrazione abbastanza facile del metodo generale » proposto da Betti. Quando non si ha in vista questo scopo, ma si vuole soltanto raggiungere la soluzione del problema dei suoli elastici, è ben facile pervenire con procedimento più rapido e diretto alle formole generali ottenute dal prof. Cerruti, e ciò senza rinunciare a « condurre la soluzione in modo che possa somministrare qualche lume per la trattazione di problemi analoghi, per corpi di forma più complicata » (*). Basta infatti riguardare provvisoriamente come nota la dilatazione cubica Θ, calcolar poi gli spostamenti (u, v, w), e dedurne l'espressione di Θ: questa funzione si trova così isolata in una relazione che serve a determinarla. Tutte le difficoltà del problema risiedono pertanto nella determinazione di Θ, ma non sono più gravi di quelle che occorre superare per la determinazione degli spostamenti ausiliarii nel metodo di Betti. E nel particolare problema trattato dal prof. Cerruti spariscono le difficoltà appunto perchè la funzione Θ viene a figurare linearmente nelle relazioni che valgono a determinarla.

(*) Cerruti, *loc. cit.*, p. 81. Il problema dei suoli elastici è stato trattato, fin dal 1878, dal Boussinesq. Vedi la « *Théorie* » di Clebsch, p. 375.

6. Le difficoltà dell'integrazione spariscono anche per una molto favorevole circostanza, che si presenta continuamente nel problema considerato, cioè che ogni funzione armonica si può far derivare, con qualunque numero di successive derivazioni parziali rispetto alla z, da un'altra funzione armonica, supponendo che l'asse delle z sia stato preso perpendicolare al piano limite. Infatti si è visto nel *cap.* IX che, se $\Delta^2 \varphi = 0$, si ha

$$\varphi = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \quad \text{con} \quad \varphi_1 = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\varphi ds}{r}.$$

Intanto si osservi che

$$\text{per} \quad z = 0 \quad \text{è} \quad \frac{\partial}{\partial z}\log(z+r) = \frac{1}{r},$$

e, per conseguenza,

$$\varphi_1 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \quad \text{con} \quad \varphi_2 = -\frac{1}{2\pi}\int \varphi \log(z+r)\, ds.$$

Analogamente si ottiene

$$\varphi_2 = \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \quad \text{con} \quad \varphi_3 = -\frac{1}{2\pi}\int \varphi\,[z\log(z+r) - r]\, ds;$$

ecc. Rammentiamo ancora che, per soddisfare all'equazione $\Delta^2 U = \varphi$, quando φ è armonica, bisogna prendere

$$U = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int \frac{U ds}{r} + \frac{1}{2} z\varphi_1, \tag{4}$$

se in superficie, cioè per $z = 0$, si prescrivono i valori di U. Supponiamo invece che si assegnino i valori di $\frac{\partial U}{\partial z}$. Se U fosse armonica, siccome l'integrale $-\frac{1}{2\pi}\int \frac{V ds}{r}$ è tale che la sua derivata rispetto a z è uguale a V, basterebbe sostituirvi a V i valori prescritti per $\frac{\partial U}{\partial z}$, per ottenere U. In ogni caso si può porre

$$U = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial U}{\partial z}\frac{ds}{r} + U',$$

e la funzione U' soddisfa a $\Delta^2 U' = \varphi$, mentre i valori di $\frac{\partial U'}{\partial z}$ si annullano in superficie. Ne segue che, se si pone $U' = \frac{1}{2}(z\varphi_1 - \psi)$, ψ è armonica, e si deve avere

$$\frac{\partial}{\partial z}(z\varphi_1 - \psi) = 0 \; , \quad \text{cioè} \quad \varphi_1 = \frac{\partial \psi}{\partial z} .$$

Dunque $\psi = \varphi_2$, e conseguentemente

$$U = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial U}{\partial \zeta}\frac{ds}{r} + \frac{1}{2}(z\varphi_1 - \varphi_2) . \qquad (5)$$

7. Ciò premesso, supponiamo che la questione sia stata già ridotta, come sempre si può, al caso in cui le forze esterne agiscono soltanto in superficie, dimodochè debbasi avere, per $z \gtreqq 0$,

$$\left\{ \begin{aligned} (A - B)\frac{\partial \Theta}{\partial x} + B\Delta^2 u &= 0 \; , \\ (A - B)\frac{\partial \Theta}{\partial y} + B\Delta^2 v &= 0 \; , \\ (A - B)\frac{\partial \Theta}{\partial z} + B\Delta^2 w &= 0 , \end{aligned} \right.$$

e, per conseguenza,

$$\Delta^2 \Theta = 0 \quad , \quad \Theta = \frac{\partial \Theta_1}{\partial z} = \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial z^2} = \ldots$$

Se alle equazioni precedenti si dà la forma

$$\Delta^2 u = -\frac{A - B}{B}\frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial x \partial z} \; , \quad \Delta^2 v = -\frac{A - B}{B}\frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial y \partial z} \; ,$$
$$\Delta^2 w = -\frac{A - B}{B}\frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial z^2} \; ,$$

si vede subito, in virtù delle (4), che si ha

$$\left\{ \begin{aligned} u &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{A - B}{2B} z \frac{\partial \Theta_1}{\partial x} \; , \\ v &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{A - B}{2B} z \frac{\partial \Theta_1}{\partial y} \; , \\ w &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial R}{\partial z} - \frac{A - B}{2B} z \frac{\partial \Theta_1}{\partial z} \; . \end{aligned} \right.$$

Da queste formole si deduce, derivandole rispetto ad x, y, z, poi sommando,

$$\Theta = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{A-B}{2B}\frac{\partial\Theta_1}{\partial z};$$

quindi

$$\Theta = -\frac{B}{\pi(A+B)}\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad \Theta_1 = -\frac{B\varphi}{\pi(A+B)}.$$

Sostituendo questi risultati nelle formole precedenti si ricade sulle formole (3), ottenute dal prof. Cerruti pel caso che in superficie si diano gli spostamenti (*).

8. Sono invece date le forze superficiali (L, M, N)? Bisogna allora ricorrere alla formola (5). La componente w dello spostamento deve soddisfare, per $z \geqq 0$ e per $z=0$ rispettivamente, alle equazioni

$$\Delta^2 w = -\frac{A-B}{B}\frac{\partial\Theta}{\partial z}, \quad N + (A-2B)\Theta + 2B\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Dalla (5) si deduce

$$w = \frac{1}{4\pi B}\int\frac{N ds}{r} + \frac{A-2B}{4\pi B}\int\frac{\Theta ds}{r} + \frac{A-B}{2B}(\Theta_1 - z\Theta),$$

cioè

$$w = \frac{1}{4\pi B}\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial z} + \frac{1}{2}\Theta_1 - \frac{A-B}{2B}z\Theta, \tag{6}$$

dopo aver posto

$$\mathfrak{L} = \int L\log(z+r)\,ds, \quad \mathfrak{M} = \int M\log(z+r)\,ds,$$
$$\mathfrak{N} = \int N\log(z+r)\,ds,$$

ed osservato che

$$\int\frac{N ds}{r} = \frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial z}, \quad \int\frac{\Theta ds}{r} = -2\pi\Theta_1.$$

(*) Cerruti, *loc. cit.*, form. (41).

Ora la funzione u deve soddisfare all'equazione

$$\Delta^2 u = -\frac{A-B}{B}\frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial x \partial z}$$

in tutto lo spazio considerato, mentre in superficie si deve avere

$$L + B\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0 .$$

Dunque, adoperando la formola (5),

$$u = \frac{1}{2\pi B}\int \frac{L ds}{r} + \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial w}{\partial \xi}\frac{ds}{r} + \frac{A-B}{2B}\frac{\partial}{\partial x}(\Theta_2 - z\Theta_1) . \qquad (7)$$

D'altronde, se per dare alla (6) la forma

$$w = \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{A-B}{2B} z\Theta$$

si pone

$$f = \frac{\mathfrak{N}}{4\pi B} + \frac{1}{2}\Theta_2 ,$$

si ha pure

$$\int \frac{\partial w}{\partial \xi}\frac{ds}{r} = \int \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \zeta}\frac{ds}{r} = -2\pi \frac{\partial f}{\partial x} ,$$

e la (7) diventa

$$u = \frac{1}{2\pi B}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z} - \frac{1}{4\pi B}\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial \Theta_2}{\partial x} + \frac{A-B}{2B}\frac{\partial}{\partial x}(\Theta_2 - z\Theta_1) . \qquad (8)$$

Analogamente si ha

$$v = \frac{1}{2\pi B}\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z} - \frac{1}{4\pi B}\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial \Theta_2}{\partial y} + \frac{A-B}{2B}\frac{\partial}{\partial y}(\Theta_2 - z\Theta_1) ,$$

e si può finalmente scrivere la (6) così:

$$w = \frac{1}{2\pi B}\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z} - \frac{1}{4\pi B}\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial \Theta_2}{\partial z} + \frac{A-B}{2B}\frac{\partial}{\partial z}(\Theta_2 - z\Theta_1) + \Theta_1 .$$

Dalle ultime tre formole, ponendo

$$\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial z},$$

si deduce, mediante derivazione,

$$\Theta = \frac{1}{2\pi B}\frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{A-B}{2B}\Delta^2(z\Theta_1) + \frac{\partial \Theta_1}{\partial z} = \frac{1}{2\pi B}\frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{A-2B}{B}\Theta,$$

cioè

$$\Theta = \frac{1}{2\pi(A-B)}\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \Theta_1 = \frac{\psi}{2\pi(A-B)}, \quad \Theta_2 = \frac{\chi}{2\pi(A-B)},$$

purchè, dopo aver posto

$$\mathfrak{L} = \int L\,[z\log(z+r) - r]\,ds,$$

$$\mathfrak{M} = \int M\,[z\log(z+r) - r]\,ds,$$

$$\mathfrak{N} = \int N\,[z\log(z+r) - r]\,ds,$$

si prenda

$$\chi = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z}.$$

Ora l'eguaglianza (6) si cambia nella formola nota (*)

$$w = \frac{1}{4\pi B}\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial z} + \frac{\psi}{4\pi(A-B)} - \frac{z}{4\pi B}\frac{\partial \psi}{\partial z}. \tag{9}$$

Invece la (8) diventa

$$u = \frac{1}{2\pi B}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} - \frac{1}{4\pi B}\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x} - \frac{1}{4\pi(A-B)}\frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{1}{4\pi B}\frac{\partial}{\partial x}(\chi - z\psi),$$

ovvero

$$u = \frac{1}{4\pi B}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} - \frac{1}{4\pi(A-B)}\frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{z}{4\pi B}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{4\pi B}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial x}\right).$$

(*) CERRUTI, *loc. cit.*, form. (58).

Se poi si osserva che

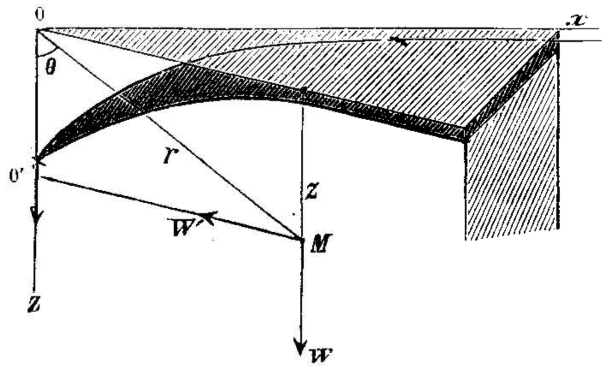
$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial z} - \frac{\partial \mathscr{N}}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y}\right) = - \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{M}}{\partial x \partial y} ,$$

si ottengono finalmente le formole (*)

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{4\pi B}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial z} - \frac{1}{4\pi(A-B)}\frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{z}{4\pi B}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{4\pi B}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y}\right) , \\ v &= \frac{1}{4\pi B}\frac{\partial \mathscr{M}}{\partial z} - \frac{1}{4\pi(A-B)}\frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{z}{4\pi B}\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{1}{4\pi B}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y}\right) , \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

che insieme alla (9) risolvono completamente il problema dei suoli elastici, sottoposti a qualunque sistema noto di pressioni superficiali.

9. Supponiamo, per esempio, che un suolo orizzontale sopporti, in un punto O, una pressione verticale, che assumeremo ad unità.



Ciò si deve intendere nel senso che, presa alla superficie del suolo, intorno ad O, una particella piccolissima, su di essa venga distribuita la pressione in guisa che, calcolato per unità di superficie, il suo valore, grandissimo nei punti centrali della particella, diventi invece piccolissimo, pur variando in modo continuo, nelle vicinanze del contorno, e sul contorno stesso si annulli. Così è rispettata la continuità delle pressioni superficiali, richiesta per l'applicazione delle precedenti teorie; ma, siccome noi non supporremo piccolissima la particella, sì bene infinitesima, i nostri risultati non saranno validi nel punto O; ed anche in punti vicinissimi ad O si dovranno considerare come approssimativi. Ciò premesso, si ha

$$L = \mathscr{L} = \mathfrak{L} = 0 \quad , \quad M = \mathscr{M} = \mathfrak{M} = 0 \quad ,$$

(*) Cerruti, *loc. cit.*, form. (63).

$$\int N ds = 1 \ , \quad \mathfrak{N} = \log(z+r) \ , \quad \mathfrak{N} = z\log(z+r) - r \ ,$$

$$\psi = \frac{1}{r} \ , \quad \chi = \log(z+r) \ , \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Quindi le formole (9) e (10), nelle quali si pone

$$w' = -\frac{ux + vy}{\sqrt{x^2+y^2}} \ , \quad \sqrt{x^2+y^2} = r\,\text{sen}\,\theta \ , \quad z = r\cos\theta \ , \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

diventano

$$w = \frac{1}{4\pi B r}\left(\frac{A}{A-B} + \cos^2\theta\right) \ ,$$

$$w' = \frac{\text{sen}\,\theta}{4\pi B r}\left(\frac{B}{A-B}\,\frac{1}{1+\cos\theta} - \cos\theta\right).$$

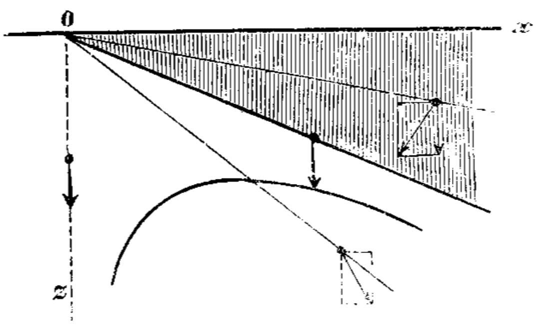
In ogni punto M il suolo subisce dunque un *abbassamento* w ed una contrazione w', inversamente proporzionali alla distanza di M al punto di applicazione della pressione. Veramente si ha una *contrazione* verso la direzione della forza solo nei punti esterni al cono definito da quel valore di θ, per cui si ha

$$\frac{B}{A-B} \cdot \frac{1}{1+\cos\theta} = \cos\theta \ ,$$

vale a dire

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{A+3B}{A-B}} - 1\right).$$

In particolare, per quei corpi che più si accostano alla legge di Navier e Poisson, $\cos\theta$ è presso a poco uguale ad $\frac{1}{3}$. Il cono corrispondente al trovato valore di θ non fa che abbassarsi deformandosi, e tende ad espellere, per così dire, le particelle interne, mentre in pari tempo le particelle esterne tendono a col-



mare il vuoto lasciato dalle prime. Finalmente alla superficie del suolo, escluso il punto O, si ha

$$\frac{w}{A} = \frac{w'}{B} = \frac{1}{4\pi(A-B)Br} \, ,$$

e però la superficie stessa prende la forma iperbolica indicata dalla prima figura (*).

XV. DEFORMAZIONI TERMICHE.

1. Ad un corpo elastico, omogeneo ed isotropo, si comunichi una piccolissima quantità di calore, dimodochè la temperatura di ogni sua particella dS si elevi di τdS, essendo τ una funzione finita, continua ed uniforme delle coordinate del centro della particella. È noto che, se k è il coefficiente di dilatazione lineare, ogni elemento lineare subisce, per unità di lunghezza, un allungamento $k\tau$, dimodochè si ha, per tutte le direzioni (α, β, γ),

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + 2f\beta\gamma + 2g\gamma\alpha + 2h\alpha\beta = k\tau \, ,$$

cioè

$$a = b = c = k\tau \quad , \quad f = g = h = 0 \, .$$

Adunque la deformazione prodotta dall'elevazione di temperatura, quando la si consideri in sè, cioè indipendentemente dalle azioni elastiche che può provocare, non produce scorrimenti, ma solo dilatazioni $k\tau$ in tutte le direzioni.

2. Ma è ben chiaro che, in generale, il calore così comunicato, facendo variare le posizioni relative delle particelle, desta dappertutto tensioni elastiche, e però la deformazione prodotta, caratte-

(*) Altri interessanti casi particolari sono stati discussi dal Boussinesq nel « *Traité* » di Clebsch, p. 390.

rizzata dalle solite funzioni a, b, c, f, g, h, si può ritenere come risultante dalla deformazione

$$k\tau\,,\ k\tau\,,\ k\tau\,,\ 0\,,\ 0\,,\ 0\,,$$

puramente *termica*, e dall'altra

$$a - k\tau\,,\quad b - k\tau\,,\quad c - k\tau\,,\quad f\,,\ g\,,\ h\,,$$

puramente *elastica*. Cercando per quest'ultima deformazione le condizioni di equilibrio riusciremo a determinare i valori degli spostamenti, e conseguentemente pressioni, dilatazione, ecc., per tutto lo spazio considerato.

3. Supponendo il corpo sottratto a tutte le forze esterne, che non siano quelle del calore, le condizioni di equilibrio sono, nello spazio,

$$X = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Pi}{\partial a} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Pi}{\partial h} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Pi}{\partial g}\,, \quad \text{ecc.,} \tag{1}$$

ed in superficie

$$L = \frac{\partial \Pi}{\partial a}\frac{dx}{dn} + \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi}{\partial h}\frac{dy}{dn} + \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi}{\partial g}\frac{dz}{dn}\,, \quad \text{ecc.,} \tag{2}$$

dove

$$X = Y = Z = L = M = N = 0\,, \tag{3}$$

purchè si abbia cura di diminuire a, b, c di $k\tau$. Considerando solo le prime equazioni di ciascuna terna, è noto che, nel caso dell'isotropia, soltanto $\frac{\partial \Pi}{\partial a}$ contiene a, b, c, e precisamente si ha

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} = -A\Theta + 2B(b + c)\,.$$

Dunque $\frac{\partial \Pi}{\partial a}$ si cambia in

$$-A(\Theta - 3k\tau) + 2B(b + c - 2k\tau) = \frac{\partial \Pi}{\partial a} + k(3A - 4B)\tau\,.$$

Sostituendo nelle (1) e nelle (2) si giunge agli stessi risultati che si otterrebbero lasciando intatti i secondi membri di queste equazioni e prendendo, invece di (3),

$$\left\{\begin{array}{ll} X=-k(3A-4B)\dfrac{\partial\tau}{\partial x}\ , & L=-k(3A-4B)\tau\dfrac{dx}{dn}\,, \\ Y=-k(3A-4B)\dfrac{\partial\tau}{\partial y}\ , & M=-k(3A-4B)\tau\dfrac{dy}{dn}\,, \\ Z=-k(3A-4B)\dfrac{\partial\tau}{\partial z}\ , & N=-k(3A-4B)\tau\dfrac{dz}{dn}\,. \end{array}\right. \tag{4}$$

Adunque l'elevazione di temperatura, definita dalla funzione τ, produce in un corpo elastico, omogeneo ed isotropo, sottratto all'azione di qualunque altra forza esterna, effetti identici a quelli che si avrebbero applicando al corpo, supposto in equilibrio di temperatura, le forze (4). Si noti che la temperatura si comporta, nel corpo, come funzione potenziale delle forze di massa, ed in superficie come una pressione normale.

4. Ora possiamo subito scrivere le condizioni dell'equilibrio. Esse sono, per tutto lo spazio considerato,

$$\left\{\begin{array}{l} k(3A-4B)\dfrac{\partial\tau}{\partial x}=(A-B)\dfrac{\partial\Theta}{\partial x}+B\Delta^2 u\,, \\ k(3A-4B)\dfrac{\partial\tau}{\partial y}=(A-B)\dfrac{\partial\Theta}{\partial y}+B\Delta^2 v\,, \\ k(3A-4B)\dfrac{\partial\tau}{\partial z}=(A-B)\dfrac{\partial\Theta}{\partial z}+B\Delta^2 w\,, \end{array}\right. \tag{5}$$

ed in superficie

$$\left\{\begin{array}{l} k(3A-4B)\tau\dfrac{dx}{dn}=(A-2B)\Theta\dfrac{dx}{dn}+2B\dfrac{du}{dn}+B\left(\mathfrak{T}_3\dfrac{dy}{dn}-\mathfrak{T}_2\dfrac{dz}{dn}\right), \\ k(3A-4B)\tau\dfrac{dy}{dn}=(A-2B)\Theta\dfrac{dy}{dn}+2B\dfrac{dv}{dn}+B\left(\mathfrak{T}_1\dfrac{dz}{dn}-\mathfrak{T}_3\dfrac{dx}{dn}\right), \\ k(3A-4B)\tau\dfrac{dz}{dn}=(A-2B)\Theta\dfrac{dz}{dn}+2B\dfrac{dw}{dn}+B\left(\mathfrak{T}_2\dfrac{dx}{dn}-\mathfrak{T}_1\dfrac{dy}{dn}\right). \end{array}\right. \tag{6}$$

Son queste le equazioni trovate da Duhamel, poi da F. Neumann (*).

(*) Betti, *loc. cit.*, p. 102.

5. Per quanto si è detto nel § 3, ogni questione concernente deformazioni dovute al calore equivale ad un problema di equilibrio elastico, nel quale le forze esterne hanno le espressioni (4). Possiamo dunque utilizzare tutti i risultati ottenuti precedentemente per dedurne altrettante conseguenze, relative a deformazioni termiche equivalenti. Prendiamo, per esempio, la formola

$$\int \Theta dS = \frac{1}{3A-4B} \sum \left(\int XxdS + \int Lxds \right),$$

precedentemente dimostrata fra i più semplici corollarii del teorema di Betti. Qui si ha, adoperando le (4),

$$\int \Theta dS = -k \sum \left(\int x \frac{\partial \tau}{\partial x} dS + \int \tau x \frac{dx}{dn} ds \right).$$

Del resto

$$\int x \frac{\partial \tau}{\partial x} dS = \int \frac{\partial \tau x}{\partial x} dS - \int \tau dS = -\int \tau x \frac{dx}{dn} ds - \int \tau dS ,$$

cioè

$$\int x \frac{\partial \tau}{\partial x} dS + \int \tau x \frac{dx}{dn} ds = -\int \tau dS.$$

Dunque

$$\int \Theta dS = 3k \int \tau dS .$$

In altri termini: *la variazione del volume non dipende nè dalla forma del corpo, nè dai coefficienti di elasticità. Essa è uguale al totale aumento di temperatura, moltiplicato per tre volte il coefficiente di dilatazione lineare.*

6. Ora domandiamoci se è possibile che l'elevazione τ di temperatura non desti forze elastiche. Per questo è necessario e sufficiente che il potenziale Π delle dette forze sia nullo, cioè che si abbia

$$a = b = c = k\tau \quad , \quad f = g = h = 0 . \tag{7}$$

Le note condizioni, necessarie e sufficienti perchè a, b, c, f, g, h

rappresentino le componenti di una deformazione possibile, si riducono, nel caso attuale, al simultaneo annullamento delle sei derivate seconde di τ. Dunque τ dev'essere funzione lineare delle coordinate: sia $\tau = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta$. Allora, integrando la prima delle (7), si ottiene

$$u = k \frac{\alpha}{2} x^2 + kx(\tau - \alpha x) + \varphi(y, z)$$

ovvero

$$u = k\tau x - \frac{k}{2} \alpha(x^2 + y^2 + z^2) + u_0 ,$$

con u_0 indipendente da x. Forme analoghe assumono v e w. Evidentemente

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{\partial v_0}{\partial y} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 ,$$

ed inoltre la sostituzione delle precedenti espressioni di u, v, w nelle rimanenti uguaglianze (7) dà

$$\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial z} = \frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial x} = \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} = 0 .$$

Dunque u_0, v_0, w_0 rappresentano (II, 1) spostamenti rigidi, dai quali si prescinde. Ne segue che, quando gli spostamenti non hanno la forma

$$\left\{ \begin{aligned} u &= k\tau x - \frac{k\alpha}{2}(x^2 + y^2 + z^2) , \\ v &= k\tau y - \frac{k\beta}{2}(x^2 + y^2 + z^2) , \\ w &= k\tau z - \frac{k\gamma}{2}(x^2 + y^2 + z^2) , \end{aligned} \right.$$

cioè quando τ non dipende linearmente dalle coordinate, si può essere sicuri che una deformazione elastica reagisce contro la deformazione puramente termica, e l'equilibrio elastico si stabilisce in condizioni diverse da quelle che si avevano prima della comunicazione di calore.

7. Trattiamo il problema nel caso d'una *sfera piena*, supponendo che l'elevazione di temperatura in ciascun punto dipenda solo dalla distanza r del punto stesso al centro della sfera. Chiamato ϵ l'allungamento unitario secondo il raggio, si ha $u = \epsilon x$, $v = \epsilon y$, $w = \epsilon z$, e conseguentemente

$$\Delta^2 u = x \Delta^2 \epsilon + 2 \frac{\partial \epsilon}{\partial x} = x \left(\frac{2}{r} \frac{d\epsilon}{dr} + \frac{d^2 \epsilon}{dr^2} \right) + 2 \frac{x}{r} \frac{d\epsilon}{dr} = \frac{x}{r} \left(4 \frac{d\epsilon}{dr} + r \frac{d^2 \epsilon}{dr^2} \right).$$

D'altra parte si ha

$$\Theta = 3\epsilon + r \frac{d\epsilon}{dr} \quad , \quad \frac{d\Theta}{dr} = 4 \frac{d\epsilon}{dr} + r \frac{d^2 \epsilon}{dr^2} .$$

Dunque

$$\Delta^2 u = \frac{x}{r} \frac{d\Theta}{dr} \quad , \quad \Delta^2 v = \frac{y}{r} \frac{d\Theta}{dr} \quad , \quad \Delta^2 w = \frac{z}{r} \frac{d\Theta}{dr} .$$

Quindi le equazioni (5) si riducono tutte all'unica

$$k(3A - 4B) \frac{d\tau}{dr} = A \frac{d\Theta}{dr} ,$$

che si può subito integrare scrivendo

$$\Theta = 3\lambda + \frac{k(3A - 4B)}{A} \tau .$$

E poichè Θr^2 è manifestamente la derivata di ϵr^3, si ottiene, con una nuova integrazione,

$$\epsilon = \lambda + \frac{\mu}{r^3} + \frac{k(3A - 4B)}{A r^3} \int_0^r \tau r^2 dr . \qquad (8)$$

Per determinare μ basta osservare che, fintantochè μ differisce da zero, lo spostamento ϵr diventa infinito nel centro della sfera, e ciò non deve accadere. Pertanto è necessario che sia $\mu = 0$. Per determinare λ si ricorre alle (6), le quali si riducono all'equazione unica

$$\begin{aligned} k(3A - 4B)\tau &= (A - 2B)\Theta + 2B \left(\epsilon + r \frac{d\epsilon}{dr} \right) \\ &= (3A - 4B)\epsilon + A r \frac{d\epsilon}{dr} , \end{aligned}$$

che dev'essere soddisfatta quando r diventa uguale al raggio a della sfera. Intanto dalla (8) si deduce

$$\frac{d\epsilon}{dr} = \frac{k(3A - 4B)}{Ar}\left(\tau - \frac{3}{r^3}\int_0^r \tau r^2 dr\right).$$

Dunque per $r = a$ si deve avere

$$\epsilon = \frac{3k}{r^3}\int_0^r \tau r^2 dr\,,$$

cioè

$$\lambda = \frac{3k}{a^3}\int_0^a \tau r^2 dr - \frac{k(3A - 4B)}{Aa^3}\int_0^a \tau r^2 dr = \frac{4kB}{Aa^3}\int_0^a \tau r^2 dr\,,$$

e finalmente, per sostituzione in (8), si giunge alla formola di F. Neumann e Borchardt (*):

$$\epsilon = \frac{3k}{r^3}\int_0^r \tau r^2 dr + \frac{4kB}{A}\left(\frac{1}{a^3}\int_0^a \tau r^2 dr - \frac{1}{r^3}\int_0^r \tau r^2 dr\right).$$

8. Supponiamo, per finire, che in un *suolo elastico*, omogeneo ed isotropo, si faccia variare pochissimo la temperatura, mettendone la superficie in contatto con una sorgente costante di calore, dimodochè sia $\Delta^2\tau = 0$ in tutto il corpo. Per cercare uno degli infiniti sistemi possibili di spostamenti poniamo

$$u' = -k(3A - 4B)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,, \quad v' = -k(3A - 4B)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,,$$
$$w' = -k(3A - 4B)\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Le equazioni indefinite per l'equilibrio sono soddisfatte se

$$\tau + A\Delta^2\varphi = 0.$$

(*) Betti, *loc. cit.*, p. 108.

Possiamo dunque prendere

$$\varphi = -\frac{z\tau_1}{2A},$$

dopo aver posto

$$\tau = \frac{\partial \tau_1}{\partial z} = \frac{\partial^2 \tau_2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \tau_3}{\partial z^3} = \dots .$$

Ne segue

$$u' = \frac{k(3A-4B)}{2A} z \frac{\partial \tau_1}{\partial x}, \quad v' = \frac{k(3A-4B)}{2A} z \frac{\partial \tau_1}{\partial y},$$
$$w' = \frac{k(3A-4B)}{2A}(z\tau + \tau_1). \tag{9}$$

Questi spostamenti provocano in superficie le pressioni

$$L' = -\frac{kB}{A}(3A-4B)\frac{\partial \tau_1}{\partial x}, \quad M' = -\frac{kB}{A}(3A-4B)\frac{\partial \tau_1}{\partial y},$$
$$N' = -k(3A-4B)\tau .$$

Dunque gli spostamenti

$$u'' = u - u', \quad v'' = v - v', \quad w'' = w - w'$$

son dovuti all'azione delle seguenti forze, applicate alla sola superficie:

$$L'' = \frac{kB}{A}(3A-4B)\frac{\partial \tau_1}{\partial x}, \quad M'' = \frac{kB}{A}(3A-4B)\frac{\partial \tau_1}{\partial y}, \quad N'' = 0.$$

Evidentemente si ha

$$\int \frac{L''\,ds}{r} = \frac{kB}{A}(3A-4B)\int \frac{\partial^2 \tau_2}{\partial \xi \partial \zeta}\frac{ds}{r} = -2\pi \frac{kB}{A}(3A-4B)\frac{\partial \tau_2}{\partial x},$$

e però

$$\mathfrak{L}'' = -2\pi \frac{kB}{A}(3A-4B)\frac{\partial \tau_3}{\partial x}, \quad \mathfrak{M}'' = -2\pi \frac{kB}{A}(3A-4B)\frac{\partial \tau_3}{\partial y},$$

ed $\mathfrak{N}'' = 0$. Analogamente

$$\mathbf{\mathfrak{L}}'' = -2\pi \frac{kB}{A}(3A-4B)\frac{\partial \tau_4}{\partial x}, \quad \mathbf{\mathfrak{M}}'' = -2\pi \frac{kB}{A}\frac{\partial \tau_4}{\partial y}, \quad \mathbf{\mathfrak{N}}'' = 0 ;$$

quindi, adoperando sempre la segnatura del precedente capitolo,

$$\psi'' = 2\pi \frac{kB}{A}(3A - 4B)\tau_1 \;, \quad \chi'' = 2\pi \frac{kB}{A}(3A - 4B)\tau_2 \,.$$

Ora le formole (9) e (10) dello stesso capitolo dànno

$$u'' = -\frac{k}{2A}(3A - 4B)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{A\tau_2}{A-B} + z\tau_1\right) ,$$
$$v'' = -\frac{k}{2A}(3A - 4B)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{A\tau_2}{A-B} + z\tau_1\right) ,$$
$$w'' = \frac{k}{2A}(3A - 4B)\left(\frac{B\tau_1}{A-B} - z\tau\right) .$$

Dunque, tenendo conto delle (9), e ponendo, per brevità,

$$K = \frac{k(3A - 4B)}{4\pi(A - B)}$$

si perviene finalmente alle formole

$$u = K\frac{\partial}{\partial x}\int \tau \log(z + r)\,ds \;, \quad v = K\frac{\partial}{\partial y}\int \tau \log(z + r)\,ds \;,$$
$$w = -K\int \frac{\tau ds}{r} \,.$$

Per i corpi che più si avvicinano alla legge di Navier e Poisson, la costante K è presso a poco la quinta parte di k.

XVI. IL PROBLEMA DI SAINT-VENANT.

1. Lo studio delle deformazioni d'un corpo cilindrico, sotto l'azione di forze applicate soltanto alle basi, è particolarmente importante per la pratica. Siccome la teoria generale si urta in difficoltà di calcolo, attualmente insuperabili, si è pensato di semplificare la quistione, trattandola prima in un caso particolare. Il passaggio

al caso generale si giustifica (*) poi largamente mediante considerazioni teoriche e sperimentali. Ciascun elemento della base è base d'un cilindro infinitamente sottile, che fa parte del corpo dato e si chiama *fibra*. Il corpo cilindrico è dunque costituito da infinite fibre longitudinali, e noi vogliamo limitarci a studiare quelle deformazioni che non suscitano tensioni laterali tra le fibre contigue, dimodochè queste si deformano come se fossero indipendenti le une dalle altre. Supporremo inoltre che il corpo sia dotato d'isotropia incompleta, e l'asse d'isotropia sia parallelo (come effettivamente avviene nei corpi che si hanno a sperimentare nella pratica) alle generatrici del cilindro.

2. Assumiamo come piano delle xy una delle basi, e supponiamo che queste sieno sezioni rette del cilindro. Così l'asse delle z riesce parallelo alle generatrici. Per esprimere il potenziale elastico si ha la formula

$$-\Pi = \frac{1}{2}(A-2B)\Theta^2 + B(a^2+b^2+c^2+2f^2+2g^2+2h^2)$$
$$+ Cc^2 + 2A'(f^2+g^2) + 2B'(h^2-ab)\,,$$

nella quale A, B, C, A', B' sono quantità costanti. Per la nullità delle tensioni laterali occorre e basta che si abbia

$$p_{xx}=0\,,\quad p_{yy}=0\,,\quad p_{xy}=0 \tag{1}$$

in tutto il corpo, cioè

$$\frac{\partial\Pi}{\partial a}=0\,,\quad \frac{\partial\Pi}{\partial b}=0\,,\quad \frac{\partial\Pi}{\partial h}=0\,.$$

Adunque debbono aver luogo le relazioni

$$(A-2B)\Theta+2Ba=2B'b\,,\quad (A-2B)\Theta+2Bb=2B'a\,,\quad h=0.$$

Dalle prime due si ricava

$$a=b=-\eta c \tag{2}$$

(*) Vedi il « *Traité* » di Clebsch, p. 175.

ponendo

$$\eta = \frac{A - 2B}{2(A - B - B')} .$$

Le condizioni $h = 0$ ed $a = b$ ci dicono che due elementi superficiali, paralleli alle generatrici e perpendicolari fra loro, sono ancora perpendicolari dopo la deformazione, e che ogni elemento perpendicolare alle generatrici subisce, intorno a ciascun punto, una dilatazione o una contrazione, la stessa in tutte le direzioni. La costante η, che misura il rapporto della contrazione trasversale all'allungamento longitudinale unitario, si chiama *coefficiente di contrazione trasversale*. Il suo valore è $\frac{1}{4}$ in quei corpi completamente isotropi per i quali si ha $A = 3B$.

3. In seguito ci occorrerà determinare le pressioni che si sviluppano sugli elementi delle sezioni trasversali del cilindro. È questa una ricerca importante, perchè le componenti p_{xz}, p_{yz}, p_{zz} di tali pressioni, cambiate di segno, servono evidentemente a far conoscere, ponendovi $z = 0$ e z uguale (*) alla lunghezza l del cilindro, le forze che bisogna applicare alle basi per produrre una data deformazione. Si ha subito

$$-p_{zz} = -\frac{\partial \Pi}{\partial c} = (A - 2B)\Theta + 2(B + C)c = Ec ,$$

ponendo

$$E = (A - 2B)(1 - 2\eta) + 2(B + C) .$$

Dunque, per un dato allungamento unitario nella direzione delle generatrici del cilindro, si sviluppa nella direzione stessa una tensione proporzionale alla costante E, che per questa ragione si chiama *coefficiente di elasticità longitudinale*. Si chiama invece

---

(*) Ciò si può anche vedere scrivendo le equazioni ai limiti, relative alle basi, ed osservando che, sulla base libera $z = l$, si ha $\frac{dx}{dn} = 0$, $\frac{dy}{dn} = 0$, $\frac{dz}{dn} = 1$.

coefficiente di elasticità trasversale la costante $G = B + A'$, perchè si ha

$$-p_{xz} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \Pi}{\partial g} = 2Gg \ , \quad -p_{yz} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \Pi}{\partial f} = 2Gf \, ,$$

vale a dire che per dati scorrimenti (verso l'asse d'isotropia) degli elementi lineari perpendicolari all'asse, le componenti tangenziali della tensione sono proporzionali a G. Si noti che nei soliti cristalli isotropi ($A = 3B$) si ha $G = \frac{2}{5}E$.

$h = 0$ e $a = b$

4. Si è visto che u e v soddisfano necessariamente alle condizioni

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \ , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \, .$$

Ne segue che $u + iv$ è funzione della variabile complessa $\zeta = x + iy$, vale a dire che nella funzione $u + iv$ delle variabili indipendenti x, y, z, le prime due variabili possono entrare soltanto nella combinazione ζ, dimodochè si ha

$$u + iv = \varphi(\zeta \, , z)$$

e la determinazione di u e v si potrà fare in una volta sola determinando la funzione φ. Intanto le equazioni indefinite dell'equilibrio diventano

$$\frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial g} = 0 \, , \quad \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial f} = 0 \, , \quad \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial g} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial f} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial c} = 0 \, . \quad (3)$$

La prima si può scrivere successivamente così:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = 0 \ , \quad \eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\eta \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \, .$$

Dunque alle prime due equazioni (3) si può dar la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \ , \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \, .$$

Moltiplicando la seconda per i ed aggiungendola alla prima si ottiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \eta \frac{\partial^2}{\partial z^2}(u + iv) = \eta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Il primo membro è coniugato di

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - i \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u + iv) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2}.$$

Dunque, rappresentando in generale con $\overline{\zeta}$ il numero conjugato di ζ, si vede che φ deve soddisfare all'equazione

$$\overline{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2}} = \eta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \tag{4}$$

Ora si noti che il primo membro non dipende da ζ ma da $\overline{\zeta}$, mentre il secondo non può dipendere da $\overline{\zeta}$. Dunque l'uno e l'altro debbono ridursi ad una funzione della sola z. Ne segue che $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2}$ non contiene ζ, e per questo occorre che φ abbia la forma

$$\varphi = P\zeta^2 + 2Q\zeta + R,$$

essendo P, Q, R funzioni soltanto di z. Sostituendo in (4) si ottiene

$$2\overline{P} = \eta \left(\frac{d^2 P}{dz^2} \zeta^2 + 2 \frac{d^2 Q}{dz^2} \zeta + \frac{d^2 R}{dz^2} \right);$$

quindi

$$\frac{d^2 P}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^2 Q}{dz^2} = 0, \quad \eta \frac{d^2 R}{dz^2} = 2\overline{P}.$$

Possiamo dunque porre, rappresentando convenientemente le costanti,

$$P = -\frac{\eta}{2}\left[(\alpha_1 + \beta_1 z) - i(\alpha_2 + \beta_2 z)\right],$$

$$Q = -\frac{\eta}{2}(\alpha + \beta z) - \frac{i}{2}(\alpha_0 + \beta_0 z).$$

Quanto alla funzione R, essa deve soddisfare all'equazione

$$\frac{d^2 R}{dz^2} = -(\alpha_1 + \beta_1 z) - i(\alpha_2 + \beta_2 z),$$

e però si ha, integrando,

$$R = (\alpha' + i\alpha'') + (\beta' + i\beta'')z - (\alpha_1 + i\alpha_2)\frac{z^2}{2} - (\beta_1 + i\beta_2)\frac{z^3}{6}.$$

Dunque, finalmente, si ottengono le espressioni di u e v prendendo rispettivamente la parte reale ed il coefficiente di i nell'espressione

$$-\eta\left[(\alpha_1 + \beta_1 z) - i(\alpha_2 + \beta_2 z)\right]\left(\frac{x^2 - y^2}{2} + ixy\right)$$
$$-\left[\eta(\alpha + \beta z) + i(\alpha_0 + \beta_0 z)\right](x + iy) + R.$$

Si perviene in tal modo alle seguenti formole

$$u = -\eta\left(\alpha x + \alpha_1\frac{x^2 - y^2}{2} + \alpha_2 xy\right) - \eta z\left(\beta x + \beta_1\frac{x^2 - y^2}{2} + \beta_2 xy\right)$$
$$+ (\alpha' + \alpha_0 y) + (\beta' + \beta_0 y)z - \alpha_1\frac{z^2}{2} - \beta_1\frac{z^3}{6},$$

$$v = -\eta\left(\alpha y + \alpha_1 xy + \alpha_2\frac{y^2 - x^2}{2}\right) - \eta z\left(\beta y + \beta_1 xy + \beta_2\frac{y^2 - x^2}{2}\right)$$
$$+ (\alpha'' - \alpha_0 x) + (\beta'' - \beta_0 x)z - \alpha_2\frac{z^2}{2} - \beta_2\frac{z^3}{6}.$$

5. Ora bisogna determinare w. Integrando (2) si ottiene

$$w = F(x, y) + (\alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 y)z + (\beta + \beta_1 x + \beta_2 y)\frac{z^2}{2}. \qquad (5)$$

Inoltre si deve ancora soddisfare alla terza equazione indefinita, cioè all'ultima delle (3), che prende la forma

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial c}{\partial z} = 0,$$

rappresentando con k la costante $\frac{E}{2G}$, che nei corpi pienamente isotropi si riduce ad $1 + \eta$. Se si osserva che

$$2\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$
$$= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\eta\frac{\partial^2 w}{\partial z^2},$$

l'ultima equazione diventa

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2(k-\eta)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0\,;$$

poi, ponendo per w l'espressione (5),

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+2(k-\eta)(\beta+\beta_1 x+\beta_2 y)=0\,. \tag{6}$$

A questa equazione si soddisfa, in particolare, prendendo F uguale a

$$\Phi=-(k-\eta)\left(\beta\frac{x^2+y^2}{2}+\beta_1 xy^2+\beta_2 x^2 y\right),$$

ed è chiaro che a Φ si può aggiungere qualunque funzione lineare di x, y. Dunque, se si pone

$$F=\Omega+\Phi+\gamma-\beta' x-\beta'' y\,,$$

si vede che Ω è una *funzione armonica delle variabili* x, y, alla quale possiamo anche, per la presenza della costante arbitraria γ nell'espressione di F, arbitrariamente assegnare il valore in un dato punto. Conosciuta Ω, si avrà $w=\Omega+\Phi+\Psi$, ponendo

$$\Psi=\gamma-\beta' x-\beta'' y+(\alpha+\alpha_1 x+\alpha_2 y)z+(\beta+\beta_1 x+\beta_2 y)\frac{z^2}{2}\,.$$

Finalmente si conosceranno le pressioni sugli elementi delle sezioni trasversali, giacchè si è trovato, nel § 3, che

$$-p_{xz}=G\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right),\quad -p_{yz}=G\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right),\quad -p_{zz}=E\frac{\partial w}{\partial z}\,,$$

e per conseguenza, ponendo per u, v, w le precedenti espressioni,

$$-p_{xz}=G\left[-k\beta x+\beta_0 y-\eta\beta_1\frac{x^2}{2}-(2k-3\eta)\beta_1\frac{y^2}{2}-(2k-\eta)\beta_2 xy+\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right]$$

$$-p_{yz}=G\left[-k\beta y-\beta_0 x-\eta\beta_2\frac{y^2}{2}-(2k-3\eta)\beta_2\frac{x^2}{2}-(2k-\eta)\beta_1 xy+\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right]$$

$$-p_{zz}=E\left[(\alpha+\alpha_1 x+\alpha_2 y)+(\beta+\beta_1 x+\beta_2 y)z\right].$$

6. La quistione è dunque ridotta alla determinazione di Ω. Per ora sappiamo soltanto che questa funzione deve soddisfare all'equazione di Laplace in tutti i punti della sezione retta del cilindro; ma per poterla determinare bisogna ancora vedere a quali condizioni essa soddisfa sul contorno della sezione stessa. Per questo si considerino le equazioni ai limiti, relative alla superficie laterale del cilindro, e prima di tutto si osservi che, in virtù delle (1) e del fatto che $\frac{dz}{dn}$ ha il valore zero sulla detta superficie, le prime due equazioni sono soddisfatte identicamente, mentre la terza si riduce a

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{dx}{dn}+\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\frac{dy}{dn}=0\,,$$

e se ne ricava

$$\frac{dw}{dn}=-\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dx}{dn}+\frac{\partial v}{\partial z}\cdot\frac{dy}{dn}\right).$$

Dunque $\frac{dw}{dn}$ si può ritenere come conosciuta, e però è conosciuto in ogni punto del contorno il valore di

$$\frac{d\Omega}{dn}=\frac{dw}{dn}-\frac{d\Phi}{dn}-\frac{d\Psi}{dn}.$$

Ne segue che, a meno d'una costante additiva, arbitraria, la funzione Ω si può, per una data sezione retta, considerare come pienamente determinata, purchè non vi sia incompatibilità fra l'equazione indefinita $\Delta^2\Omega=0$ e l'insieme dei valori assegnati a $\frac{d\Omega}{dn}$ sul contorno. È noto che per questo occorre che sia

$$\int\frac{d\Omega}{dn}d\sigma=-\int\Delta^2\Omega ds=0\,,$$

estendendo la prima integrazione a tutto il contorno, e la seconda all'area in esso racchiusa. Ciò premesso, si osservi che

$$\int\frac{dw}{dn}d\sigma=-\int\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dx}{dn}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{dy}{dn}\right)d\sigma=\int\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial z}\right)ds$$

$$=-2\eta\int\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}ds=-2\eta\int(\beta+\beta_1 x+\beta_2 y)\,ds\,.$$

Similmente, se si rammenta che Φ soddisfa alla (6),

$$\int \frac{d\Phi}{dn} d\sigma = -\int \Delta^2 \Phi ds = 2(k-\eta) \int (\beta + \beta_1 x + \beta_2 y) ds .$$

Finalmente, osservando che Ψ è lineare in x e y,

$$\int \frac{d\Psi}{dn} d\sigma = -\int \Delta^2 \Psi ds = 0 .$$

Dunque

$$\int \frac{d\Omega}{dn} d\sigma = -2k \int (\beta + \beta_1 x + \beta_2 y) ds = -2ks(\beta + \beta_1 x_0 + \beta_2 y_0) ,$$

rappresentando con x_0 ed y_0 le coordinate del centro di gravità della sezione. Ne segue che fra le costanti β, β_1, β_2 si deve avere la relazione

$$\beta + \beta_1 x_0 + \beta_2 y_0 = 0 \tag{7}$$

affinchè la funzione Ω possa esistere.

7. La soluzione precedentemente ottenuta racchiude le costanti

$$\alpha , \alpha', \alpha'', \alpha_0 , \alpha_1 , \alpha_2 , \beta , \beta', \beta'', \beta_0 , \beta_1 , \beta_2 , \gamma$$

che si riducono, in virtù di (7), a *dodici* veramente arbitrarie. Sei di esse restano determinate se si impediscono i moti rigidi d'una particella. Se si suppone, per esempio, che il centro di gravità d'una base si mantenga fisso, e che, preso intorno ad esso un elemento superficiale, questo si deformi restando nel piano della base, in modo che un suo elemento lineare non varii in direzione, si vengono a porre tali condizioni, che non consentirebbero alcun movimento al corpo, se questo fosse rigido. Perchè siano soddisfatte, bisogna, prima di tutto, che per $x=0$, $y=0$, $z=0$ si abbia $u=0$, $v=0$, $w=0$, se l'origine si colloca nel punto fisso. Intanto si noti che questa scelta dell'origine riduce a $\beta=0$ la condizione (7). Se poi si dirige l'asse delle x secondo quell'elemento lineare, che abbiamo obbligato a non spostarsi lateralmente, lo spostamento v del punto $(dx, 0, 0)$, cioè $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 dx$, come gli spostamenti w di tutti i punti $(dx, dy, 0)$, cioè $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 dx + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 dy$, debbono essere nulli, e però si deve avere

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 = 0\,, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 = 0\,, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 = 0\,.$$

Finalmente, perchè la funzione Ω sia pienamente determinata, imponiamole il valore 0 nell'origine. Con ciò le nostre formule non subiscono alcuna particolarizzazione, come si è osservato nel § 5. Tutte queste condizioni esigono che si abbia

$$\alpha' = 0\,, \quad \alpha'' = 0\,, \quad \alpha_0 = 0\,, \quad \beta = 0\,, \gamma = 0\,, \quad \beta' = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)_0, \quad \beta'' = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)_0,$$

e così non restano più che le *sei* costanti arbitrarie $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2$ nelle espressioni degli spostamenti, delle tensioni, ecc. Gli spostamenti sono

$$u = -\eta\left(\alpha x + \alpha_1 \frac{x^2 - y^2}{2} + \alpha_2 xy\right) - \eta z\left(\beta_1 \frac{x^2 - y^2}{2} + \beta_2 xy\right)$$
$$+ \beta_0 yz - \alpha_1 \frac{z^2}{2} - \beta_1 \frac{z^3}{6} + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)_0 z\,,$$

$$v = -\eta\left(\alpha y + \alpha_1 xy + \alpha_2 \frac{y^2 - x^2}{2}\right) - \eta z\left(\beta_1 xy + \beta_2 \frac{y^2 - x^2}{2}\right)$$
$$- \beta_0 xz - \alpha_2 \frac{z^2}{2} - \beta_2 \frac{z^3}{6} + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)_0 z\,,$$

$$w = -(k - \eta)(\beta_1 xy^2 + \beta_2 x^2 y) + (\alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 y) z$$
$$+ (\beta_1 x + \beta_2 y)\frac{z^2}{2} + \Omega - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)_0 x - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)_0 y\,.$$

8. La funzione Ω, che dipende dalla forma della sezione, si determina per ogni forma particolare mediante l'equazione indefinita $\Delta^2 \Omega = 0$ e le condizioni ai limiti, cioè $\Omega = 0$ per $x = 0$, $y = 0$, e

$$\frac{d\Omega}{dn} = U \frac{dx}{dn} + V \frac{dy}{dn}$$

sul contorno, essendo U e V due funzioni note di x ed y, delle quali è utile tenere presenti le espressioni, che per quanto si è visto nel § 6 sono

$$U = -\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) \quad , \quad V = -\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\right).$$

Quindi, sostituendo ad u, v le precedenti espressioni, ed a Φ, Ψ quelle che si trovano segnate nel § 5, si ottiene

$$U = -\beta_0 y + \frac{\beta_1}{2}\left[\eta x^2 + (2k - 3\eta) y^2\right] + (2k - \eta)\beta_2 xy ,$$

$$V = \beta_0 x + \frac{\beta_2}{2}\left[\eta y^2 + (2k - 3\eta) x^2\right] + (2k - \eta)\beta_1 xy .$$

9. Per avere a determinare funzioni che dipendano soltanto dalla forma della sezione, e non dai coefficienti β, si ponga

$$\Omega = \beta_0 \Omega_0 + \beta_1 \Omega_1 + \beta_2 \Omega_2 .$$

Le funzioni $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$ debbono essere armoniche, annullarsi nell'origine, e soddisfare sul contorno alle condizioni

$$\frac{d\Omega_0}{dn} = -y\frac{dx}{dn} + x\frac{dy}{dn} ,$$

$$\frac{d\Omega_1}{dn} = \frac{1}{2}\left[\eta x^2 + (2k - 3\eta) y^2\right]\frac{dx}{dn} + (2k - \eta) xy \frac{dy}{dn} ,$$

$$\frac{d\Omega_2}{dn} = (2k - \eta) xy \frac{dx}{dn} + \frac{1}{2}\left[\eta y^2 + (2k - 3\eta) xy\right]\frac{dy}{dn} .$$

Qui importa osservare che, se la sezione è simmetrica rispetto all'asse delle x, Ω_1 è una funzione *pari* di y. Infatti la relativa equazione ai limiti e l'equazione indefinita non si alterano quando si cambia y in $-y$, giacchè in due punti del contorno, simmetrici rispetto all'asse delle x, i valori di $\frac{dy}{dn}$ differiscono evidentemente solo nel segno. Siccome la funzione che soddisfa alle dette condizioni è unica, essa è la stessa Ω_1. Questa funzione è invece *dispari* nella x, se la sezione è simmetrica rispetto all'asse delle y, perchè il cambiamento di x in $-x$ fa soltanto cambiare il segno di $\frac{d\Omega_1}{dn}$, ed alle nuove condizioni soddisfa certamente la funzione $-\Omega_1$. Adunque si ha

$$\Omega_1(x, -y) = \Omega_1(x, y) \quad , \quad \Omega_1(-x, y) = -\,\Omega_1(x, y) \, .$$

Analogamente si dimostra che, nelle ipotesi accennate, Ω_2 è dispari nella y, pari nella x:

$$\Omega_2(x, -y) = -\,\Omega_2(x, y) \quad , \quad \Omega_2(-x, y) = \Omega_2(x, y) \, .$$

Ne segue che $\frac{\partial \Omega_1}{\partial y}$ e $\frac{\partial \Omega_2}{\partial x}$ sono funzioni dispari di y e di x rispettivamente; quindi

$$\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial y}\right)_0 = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x}\right)_0 = 0 \, .$$

Finalmente, se la sezione è simmetrica rispetto ai due assi, Ω_0 è dispari tanto in x quanto in y, e si ha, per conseguenza,

$$\left(\frac{\partial \Omega_0}{\partial x}\right)_0 = 0 \; , \; \left(\frac{\partial \Omega_0}{\partial y}\right)_0 = 0 \; , \; \left(\frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial x^2}\right)_0 = 0 \; , \; \left(\frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial y^2}\right)_0 = 0 \; ,$$

mentre la derivata seconda mista è pari tanto in y quanto in x, e perciò non si annulla necessariamente nel centro della sezione, come non è necessario che si annullino $\frac{\partial \Omega_1}{\partial x}$ e $\frac{\partial \Omega_2}{\partial y}$.

XVII. APPLICAZIONE AI PROBLEMI DELLA PRATICA.

1. Dal problema particolare fin qui trattato si passa ai problemi della pratica appoggiandosi all'ipotesi che due sistemi di forze, staticamente equivalenti, non producono deformazioni diverse. In realtà ciò non è vero, perchè il modo con cui le forze deformatrici

vengono distribuite alla superficie del corpo influisce pure sulla deformazione; ma l'osservazione ha dimostrato che le differenze dovute a tale causa non si rendono sensibili che nelle vicinanze dei punti di applicazione, quando questi occupano una piccola parte della superficie. Pertanto si può ritenere che, fatta eccezione di due regioni vicinissime alle basi, un corpo cilindrico, la cui lunghezza predomini rispetto alle dimensioni delle sezioni trasversali, si comporti effettivamente come un insieme di fibre indipendenti le une dalle altre. Ciò premesso, supponiamo che le forze applicate alla base libera si compongano nella forza (X, Y, Z) e nella coppia $(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, e cerchiamo di vedere se tra le forze atte a produrre le deformazioni fin qui studiate se ne trovino che si compongono nella medesima forza e nella medesima coppia. Per questo noi cercheremo di esprimere $X, Y, Z, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ mediante le costanti α, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2$; poi, supponendo date le prime sei quantità, le formule che otterremo serviranno inversamente a determinare le suddette costanti, e conseguentemente a caratterizzare una deformazione, che in quasi tutto il cilindro presenta differenze trascurabili con quella che si produce effettivamente.

2. Calcoliamo dunque gli integrali

$$X=\int Lds \;,\quad \mathfrak{L}=\int\left[Ny-M(z-l)\right]ds=\int Nyds\;,$$

$$Y=\int Mds \;,\quad \mathfrak{M}=\int\left[L(z-l)-Nx\right]ds=-\int Nxds\;,$$

$$Z=\int Nds \;,\quad \mathfrak{N}=\int(Mx-Ly)\,ds\;,$$

estesi a tutta la base libera. Su questa si ha

$$L=-p_{xz}\;,\quad M=-p_{yz}\;,\quad N=-p_{zz}\;,$$

e conseguentemente

$$X=G\left[-\frac{\beta_1\eta}{2}\int x^2ds-\frac{\beta_1}{2}(2k-3\eta)\int y^2ds-(2k-\eta)\beta_2\int xyds+\int\frac{\partial\Omega}{\partial x}ds\right]$$

$$Y=G\left[-\frac{\beta_2\eta}{2}\int y^2ds-\frac{\beta_2}{2}(2k-3\eta)\int x^2ds-(2k-\eta)\beta_1\int xyds+\int\frac{\partial\Omega}{\partial y}ds\right].$$

Per semplificare i calcoli riferiamo la figura ai suoi assi principali d'inerzia, e rappresentiamo con λ e μ i raggi d'inerzia, dimodochè

$$\int x^2 ds = \lambda^2 s \quad , \quad \int y^2 ds = \mu^2 s \quad , \quad \int xy ds = 0 .$$

Le espressioni precedenti diventano

$$X = -\frac{Gs}{2}\beta_1[\eta\lambda^2 + (2k - 3\eta)\mu^2] + G\int \frac{\partial\Omega}{\partial x} ds ,$$

$$Y = -\frac{Gs}{2}\beta_2[\eta\mu^2 + (2k - 3\eta)\lambda^2] + G\int \frac{\partial\Omega}{\partial y} ds .$$

Per la componente longitudinale della risultante si trova subito $Z = Es\alpha$. Bisogna ancora calcolare i due integrali che compariscono in X ed Y, ed è notevole che i loro valori si possono ottenere senza conoscere Ω. Prima si ha, pel teorema di Green,

$$\int \left(x\frac{d\Omega}{dn} - \Omega\frac{dx}{dn} \right) d\sigma = 0 ;$$

quindi

$$\int \frac{\partial\Omega}{\partial x} ds = -\int \Omega\frac{dx}{dn} d\sigma = -\int x\frac{d\Omega}{dn} d\sigma ,$$

ovvero

$$\int \frac{\partial\Omega}{\partial x} ds = -\int \left(U\frac{dx}{dn} + V\frac{dy}{dn} \right) x d\sigma = \int \left(\frac{\partial Ux}{\partial x} + \frac{\partial Vx}{\partial y} \right) ds ,$$

e finalmente

$$\int \frac{\partial\Omega}{\partial x} ds = \int U ds + \int \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) x ds ,$$

$$\int \frac{\partial\Omega}{\partial y} ds = \int V ds + \int \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) y ds .$$

D'altra parte, adoperando le espressioni trovate nel precedente § 8, si ha subito

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 2k(\beta_1 x + \beta_2 y) ,$$

e conseguentemente

$$\int \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) x ds = 2k\beta_1\lambda^2 s \quad , \quad \int \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) y ds = 2k\beta_2\mu^2 s .$$

Inoltre

$$\int Uds = \frac{\beta_1 s}{2}\left[\eta\lambda^2 + (2k - 3\eta)\mu^2\right] ,$$

$$\int Vds = \frac{\beta_2 s}{2}\left[\eta\mu^2 + (2k - 3\eta)\lambda^2\right] .$$

Dunque

$$\int \frac{\partial\Omega}{\partial x} ds = \frac{\beta_1 s}{2}\left[(4k + \eta)\lambda^2 + (2k - 3\eta)\mu^2\right] ,$$

$$\int \frac{\partial\Omega}{\partial y} ds = \frac{\beta_2 s}{2}\left[(4k + \eta)\mu^2 + (2k - 3\eta)\lambda^2\right] ,$$

e finalmente

$$X = E\lambda^2 s\beta_1 \quad , \quad Y = E\mu^2 s\beta_2 .$$

Così già sappiamo che, data la risultante, sono determinate le costanti

$$\beta_1 = \frac{X}{E\lambda^2 s} \quad , \quad \beta_2 = \frac{Y}{E\mu^2 s} \quad , \quad \alpha = \frac{Z}{Es} .$$

Per determinare le altre osserviamo che

$$\int Nxds = E\lambda^2 s(\alpha_1 + \beta_1 z) \quad , \quad \int Nyds = E\mu^2 s(\alpha_2 + \beta_2 z) .$$

Invece, posto $\lambda^2 + \mu^2 = \rho^2$, si ottiene

$$\begin{aligned}\int (Mx - Ly)ds = &- G\rho^2 s\beta_0 + G\int\left(x\frac{\partial\Omega}{\partial y} - y\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)ds \\ &+ \frac{G\beta_1}{2}\int\left[(2k - 3\eta)y^2 - (4k - 3\eta)x^2\right]yds \\ &- \frac{G\beta_2}{2}\int\left[(2k - 3\eta)x^2 - (4k - 3\eta)y^2\right]xds .\end{aligned}$$

Se la figura è simmetrica rispetto agli assi, come ordinariamente avviene, sono evidentemente nulli gli integrali che moltiplicano β_1 e β_2, e l'ultima formula si semplifica. Le osservazioni fatte alla fine del capitolo precedente sulla parità o disparità delle funzioni Ω ci permettono inoltre di asserire che gli integrali

$$\int\left(x\frac{\partial\Omega_1}{\partial y} - y\frac{\partial\Omega_1}{\partial x}\right)ds \quad , \quad \int\left(x\frac{\partial\Omega_2}{\partial y} - y\frac{\partial\Omega_2}{\partial x}\right)ds$$

sono nulli, perchè i loro elementi si possono aggruppare per coppie di valori uguali e con segni opposti. Ne segue

$$\int \left(x \frac{\partial \Omega}{\partial y} - y \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right) ds = \beta_0 \int \left(x \frac{\partial \Omega_0}{\partial y} - y \frac{\partial \Omega_0}{\partial x} \right) ds .$$

Adunque le formule che servono a determinare α_1, α_2, β_0 sono:

$$\alpha_1 + \beta_1 l = - \frac{\mathfrak{M}}{E\lambda^2 s} \quad , \quad \alpha_2 + \beta_2 l = \frac{\mathfrak{L}}{E\mu^2 s} \quad ,$$

$$\beta_0 = \frac{-\mathfrak{N}}{G\left[\rho^2 s - \int \left(x \frac{\partial \Omega_0}{\partial y} - y \frac{\partial \Omega_0}{\partial x} \right) ds \right]} .$$

3. Le formole stabilite nel precedente paragrafo ci mettono in grado di analizzare una deformazione qualunque, mostrando come questa si possa sempre far risultare da quattro deformazioni speciali:

a) **Trazione.** Delle sei costanti arbitrarie si supponga la sola α diversa da zero. Sempre che le β sono nulle si ha $\Omega = 0$. Quindi le formole finali del § 7 (*cap.* XVI) diventano

$$u = -\eta \alpha x \quad , \quad v = -\eta \alpha y \quad , \quad w = \alpha z \; ,$$

e caratterizzano una *trazione,* per la quale il cilindro si contrae trasversalmente e si allunga di

$$w = \alpha l = \frac{Zl}{Es} .$$

Si avrebbe invece una compressione nel caso che α fosse negativo. In queste deformazioni le sezioni trasversali si mantengono piane e le fibre restano rettilinee. Esse sono prodotte dalla sola forza Z, giacchè le formole del precedente paragrafo mostrano che X, Y, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ sono nulle.

b) **Torsione.** Se annulliamo tutte le costanti, tranne β_0, la funzione Ω si riduce a $\beta_0 \Omega_0$, e le solite formole dànno

$$u = \beta_0 z \left[y + \left(\frac{\partial \Omega_0}{\partial x} \right)_0 \right] \quad , \quad v = -\beta_0 z \left[x - \left(\frac{\partial \Omega_0}{\partial y} \right)_0 \right] ,$$

$$w = \beta_0 \left[\Omega_0 - \left(\frac{\partial \Omega_0}{\partial x} \right)_0 x - \left(\frac{\partial \Omega_0}{\partial y} \right)_0 y \right] .$$

Prescindendo da w si studii il movimento in projezione sopra una sezione trasversale, e si trasporti l'origine in quel punto O' della sezione stessa, che ha le coordinate $\left(\frac{\partial \Omega_0}{\partial y}\right)_0$, $-\left(\frac{\partial \Omega_0}{\partial x}\right)_0$, e che coincide col centro quando la sezione è simmetrica rispetto ad entrambi gli assi, nel qual caso si ha pure $w = \beta_0 \Omega_0$. Allora si vede subito che lo spostamento (u, v) consiste in una piccolissima rotazione $-\beta_0 z$ intorno ad O', nel senso opposto a quello in cui si muove l'indice d'un orologio. Siccome i punti O' stanno sopra una fibra, si può dire che intorno a questa ruotano tutte le sezioni, e ruotano di angoli che da un estremo all'altro del cilindro variano da 0 fino a $-\beta_0 l$. Si ha dunque una *torsione*, prodotta unicamente dalla coppia $\mathfrak{N}$, che agisce nel piano della sezione estrema, e fa ruotar questa d'un angolo

$$\omega = -\beta_0 l = \frac{\mathfrak{N} l}{G\left[\rho^2 s - \int\left(x \frac{\partial \Omega_0}{\partial y} - y \frac{\partial \Omega_0}{\partial x}\right) ds\right]}.$$

Le sezioni trasversali non restano piane. Infatti nelle vicinanze della fibra centrale si ha

$$w = \frac{\beta_0}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial x^2}\right)_0 x^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial x \partial y}\right)_0 xy + \left(\frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial y^2}\right)_0 y^2\right],$$

e siccome i coefficienti dei termini estremi differiscono solo nel segno, si vede che la sezione si curva in forma di paraboloide iperbolico. Anzi, per quello che si è detto alla fine del precedente capitolo, se la sezione è simmetrica rispetto agli assi, si ha

$$w = \beta_0 \left(\frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial x \partial y}\right)_0 xy,$$

e però gli assi stessi dividono la sezione in quattro regioni tali, che due regioni opposte si abbassano mentre le altre due si sollevano sul piano primitivo. Tuttavia, se Ω_0 fosse nulla, la sezione si deformerebbe restando nel proprio piano. In questo caso il precedente valore dell'angolo di torsione si riduce a

$$\omega = \frac{\mathfrak{N} l}{G \rho^2 s},$$

e si ottiene così la formola che adoperano i « pratici », e che essi stabiliscono appunto facendo gratuitamente l'ipotesi che le sezioni restano piane.

c) **Flessione semplice**. Se conserviamo la sola costante α_1, è ancora $\Omega = 0$, e si ha

$$u = -\frac{\alpha_1}{2}[\eta(x^2 - y^2) + z^2] \quad , \quad v = -\eta\alpha_1 xy \quad , \quad w = \alpha_1 xz \, .$$

Per vedere come si deforma una fibra si mantengano costanti x ed y. Allora v è costante, e l'eliminazione di z fra u e w mostra che tutte le fibre si curvano parabolicamente in piani paralleli ad Oxz *(piano di flessione)*. In particolare, per la fibra centrale si ha $u = -\frac{\alpha_1}{2}z^2$, $v = 0$, $w = 0$. Questa fibra si piega dunque a parabola nel piano stesso di flessione, ed il massimo allontanamento *(saetta)* dall'antica posizione è

$$u = -\frac{\alpha_1}{2}l^2 = \frac{\mathcal{M}l^2}{2E\lambda^2 s} \, .$$

Questa deformazione è prodotta, come si vede, da una sola coppia che agisce nel piano di flessione. Si noti che le sezioni trasversali restano piane. Conservando α_2 invece di α_1 avremmo sempre una flessione, ma paralella al piano $\dot{O}yz$.

d) **Flessione complessa**. Più complicate sono le deformazioni caratterizzate dalle costanti β_1 e β_2 e provocate, per conseguenza, da una forza tangenziale X o Y. Consideriamo quella che corrisponde a β_1, ed affinchè alla forza X non si accompagni la coppia $\mathfrak{M}$ poniamo $\alpha_1 + \beta_1 l = 0$ invece di $\alpha_1 = 0$. Riprendiamo dunque le formole del § 7 del precedente capitolo, supponendovi diverse da zero le sole costanti β_1 e $\alpha_1 = -\beta_1 l$. Esse diventano, nel caso d'una sezione simmetrica,

$$u = \beta_1\left[\eta\frac{x^2 - y^2}{2}(l - z) + \frac{lz^2}{2} - \frac{z^3}{6} + \left(\frac{\partial\Omega_1}{\partial x}\right)_0 z\right] ,$$

$$v = \beta_1\eta xy(l - z) \; ,$$

$$w = \beta_1\left[-lxz + \frac{xz^2}{2} - (k - \eta)xy^2 + \Omega_1 - \left(\frac{\partial\Omega_1}{\partial x}\right)_0 x\right] .$$

È notevole che l'ipotesi $z = l$ renda u e v indipendenti da x e da y. Dunque, se si prescinde dagli spostamenti longitudinali, si può dire che la base libera si sposta lateralmente come se fosse rigida. Qui le sezioni trasversali, non solo non si conservano piane, ma assumono forme diverse (superficie del 3° ordine) secondo la loro posizione nel cilindro. Infatti w non è più, come nel caso della torsione, funzione delle sole variabili x ed y. Inoltre le fibre diventano lievemente gobbe, tranne quelle che sono situate nel piano Oxz (piano di flessione). In particolare, per $x = 0$, $y = 0$, si ha $v = 0$, $w = 0$. Dunque la fibra centrale si flette, nel detto piano, in forma di parabola cubica, giacchè si ha pure

$$u = \beta_1 \left[\frac{lz^2}{2} - \frac{z^3}{6} + \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x} \right)_0 z \right].$$

Per $z = l$ si ottiene il valore della saetta di flessione, e si ritrova la formola dei pratici trascurando l'ultimo termine, il solo che dipenda dalla forma della sezione, e che assume valori il cui rapporto ad l^3 è trascurabile come l'area della sezione stessa rispetto ad l^2. Il valore approssimato della saetta è dunque

$$u = \frac{\beta_1}{3} l^3 = \frac{Xl^3}{3E\lambda^2 s}.$$

4. Applichiamo i risultati precedenti al cilindro circolare. Prima di tutto dobbiamo determinare la funzione Ω. La prima delle condizioni ai limiti, scritte nel § 9 (*cap.* XVI), diventa

$$x \frac{\partial \Omega_0}{\partial x} + y \frac{\partial \Omega_0}{\partial y} = 0.$$

Questa deve aver luogo per $x^2 + y^2 = R^2$; ma ad essa ed all'equazione di Laplace si può soddisfare per ogni coppia di valori di x ed y prendendo Ω_0 costante, e siccome si deve avere $\Omega_0 = 0$ in un punto, dovrà essere $\Omega_0 = 0$ in tutta la sezione. Dunque, riferendoci a quanto abbiamo detto nel paragrafo precedente, possiamo affermare che, nella torsione dei cilindri a sezioni trasversali circolari, queste sezioni restano piane. È stato appunto questo caso particolare che ha indotto gli sperimentatori ad assumere ipoteticamente come vero l'ultimo fatto per tutte le forme, mentre già per la forma ellittica esso cessa di aver luogo. Infatti per un'ellisse dai semi-assi a e b si ottiene

$$\Omega_0 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} xy ;$$

poi $w = \beta_0 \Omega_0$: tutte le sezioni si cambiano in pezzi uguali d'un paraboloide iperbolico. Torniamo alle sezioni circolari, e determiniamo Ω_1. Questa funzione deve, per $x^2 + y^2 = R^2$, soddisfare alla condizione

$$x \frac{\partial \Omega_1}{\partial x} + y \frac{\partial \Omega_1}{\partial y} = \frac{1}{2} \eta x^3 + \left(3k - \frac{5}{2}\eta\right) xy^2 .$$

È naturale che si tenti di verificarla ponendo per Ω_1 una funzione del terzo grado in x ed y. Intanto si è visto (XVI, 9) che Ω_1 è *pari* nella y e *dispari* nella x, e però bisogna porre

$$\Omega_1 = \alpha x + \beta x^3 + \gamma y^2 + \delta x y^2 .$$

Perchè sia soddisfatta l'equazione di Laplace è necessario che si abbia identicamente $6\beta x + 2(\gamma + \delta x) = 0$, cioè $\gamma = 0$, $\delta = -3\beta$. Per conseguenza

$$\Omega_1 = \alpha x + \beta (x^3 - 3xy^2) .$$

Ora la condizione ai limiti diventa

$$\alpha x + 3\beta (x^3 - 3xy^2) = \frac{1}{2} \eta x^3 + \left(3k - \frac{5}{2}\eta\right) xy^2 ,$$

e ad essa si può, sul contorno, soddisfare identicamente se, dopo avere moltiplicato per $x^2 + y^2$ il termine αx, e gli altri termini per R^2, si prende

$$\alpha + 3\beta R^2 = \frac{\eta}{2} R^2 , \quad \alpha - 9\beta R^2 = \left(3k - \frac{5}{2}\eta\right) R^2 ,$$

vale a dire

$$\alpha = \frac{1}{4}(3k - \eta) R^2 , \quad \beta = -\frac{1}{4}(k - \eta) ,$$

e finalmente

$$\Omega_1 = \frac{1}{4}\left[(3k - \eta) R^2 x - (k - \eta)(x^3 - 3xy^2)\right].$$

Di qui deduciamo

$$\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x}\right)_0 = (3k - \eta)\frac{R^2}{4} \quad , \quad \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial y}\right)_0 = 0 .$$

D'altra parte

$$\int x^2 ds = \int y^2 ds = \frac{1}{2}\int r^2 ds = \pi \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi}{4} R^4 = \frac{1}{4} R^2 s ,$$

e, per conseguenza, $\lambda = \mu = \frac{1}{2} R$, $\rho = \frac{R}{\sqrt{2}}$. Segue da tutto ciò che l'angolo di torsione, la saetta della flessione semplice, quella della flessione complessa, ecc., hanno i valori

$$\frac{2\mathfrak{N}l}{\pi G R^4} \; , \quad \frac{2\mathfrak{M}l^2}{\pi E R^4} \; , \quad \frac{4Xl^3}{3\pi E R^4} \; , \quad \text{ecc.}$$

L'ultima saetta è, più esattamente,

$$\frac{4Xl^3}{3\pi E R^4}\left[1 + \frac{3}{4}(3k - \eta)\left(\frac{R}{l}\right)^2\right].$$

Nel caso della sezione ellittica i raggi λ e μ hanno i valori $\frac{a}{2}$ e $\frac{b}{2}$. La formola adoperata in pratica per esprimere l'angolo di torsione è

$$\omega = \frac{4\mathfrak{N}l}{\pi G a b (a^2 + b^2)} .$$

Essa induce in gravi errori quando la sezione è fortemente eccentrica. Per correggerla bisogna prima di tutto calcolare l'integrale

$$\int \left(x \frac{\partial \Omega_0}{\partial y} - y \frac{\partial \Omega_0}{\partial x}\right) ds = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \int (x^2 - y^2)\, ds = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}(\lambda^2 - \mu^2) s .$$

Il denominatore della formola esatta si cambia allora nel prodotto di Gs per

$$\lambda^2 + \mu^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b}(\lambda^2 - \mu^2) = \frac{2}{a^2 + b^2}(b^2 \lambda^2 + a^2 \mu^2) = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} .$$

Dunque il vero angolo di torsione è

$$\omega = \frac{(a^2 + b^2)\mathfrak{M}_t l}{\pi G a^3 b^3}.$$

Sempre superiore a quello degli empirici, questo valore è sufficientemente confermato da tutte le esperienze (*). L'accusa fatta alla teoria matematica della elasticità di non trovarsi in accordo coll'esperienza va dunque rivolta alle varie pretese teorie escogitate per giustificare *a posteriori* e generalizzare oltre misura alcune formolette empiriche, mettendo insieme ipotesi contraddittorie, ingiustificate ed ingiustificabili. Le differenze che si trovano « *si prende l'abitudine di attribuirle* » dice Clebsch (**) « *ad imperfezioni della teoria piuttosto che ad irregolarità commesse nell'applicarla. Sarebbe forse perchè questa confusione si produce troppo spesso che* ***la teoria*** *è tanto discreditata in certi ambienti?* »

(*) Vedi una nota al « *Traité* » di CLEBSCH, pag. 209, ed altre note di SAINT-VENANT a pag. 210 e seguenti.

(**) Leggi l'interessante § 38 del « *Traité* ».