

PARTE SECONDA

IX. Il problema di Dirichlet	Pag. 77
X. Alcune proprietà delle deformazioni elastiche	» 88
XI. L'equazione canonica dei piccoli moti	» 93
XII. Calcolo della dilatazione e della rotazione	» 100
XIII. Integrazione delle equazioni per l'equilibrio dei corpi elastici isotropi	» 109
XIV. Applicazione ai suoli elastici isotropi	» 115
XV. Deformazioni termiche	» 128
XVI. Il problema di Saint-Venant	» 136
XVII. Applicazione ai problemi della pratica	» 147

IX. IL PROBLEMA DI DIRICHLET.

1. Teorema: *Se una funzione U , finita, continua ed uniforme in tutto lo spazio S , nel quale soddisfa all'equazione $\Delta^2 U = \varphi$, prende in superficie valori prescritti, essa è pienamente determinata.*

In altri termini, ogni soluzione U' dell'equazione differenziale considerata non può avere tutte le proprietà accennate, senza coincidere con U . Si consideri infatti la funzione $V = U - U'$, che in superficie prende valori nulli, e che in tutto S ha il parametro differenzial secondo uguale a zero. Si ha

$$\int \Delta V dS = \sum \int \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 dS = \sum \int \frac{\partial}{\partial x} \left(V \frac{\partial V}{\partial x} \right) dS - \sum \int V \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dS,$$

cioè

$$\begin{aligned} \int \Delta V dS &= - \sum \int V \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dn} ds - \sum \int V \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dS \\ &= - \int V \frac{dV}{dn} ds - \int V \Delta^2 V dS. \end{aligned}$$

L'ultimo integrale è nullo perchè $\Delta^2 V = 0$ in ogni punto di S ; il penultimo è nullo perchè $V = 0$ in ogni punto di s . Dunque

$$\int \Delta V dS = 0,$$

e siccome ΔV , somma di quadrati, non ha valori negativi, è necessariamente $\Delta V = 0$ in ogni punto di S , e però

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Dunque V è costante, e siccome in superficie ha il valore zero, bisogna che conservi questo valore in tutto S , cioè $U = U'$.

2. Osservazioni: *a)* Si dà il nome di *problema di Dirichlet* (*) alla determinazione della funzione U , soddisfacente a tutte le condizioni imposte dall'enunciato del precedente teorema. Non si è finora potuto dimostrare con rigore che una tal funzione esista sempre, e si può soltanto asserire che, se ne esiste una, non può esserne un'altra, diversa dalla prima. Bisogna tuttavia osservare che ciò non sarebbe più vero quando si venisse a togliere una di quelle condizioni. Presto vedremo, per esempio, che la funzione, se non è obbligata ad essere *finita*, cessa di essere unica;

b) La funzione U , soddisfacente alle suddette condizioni, è, fra tutte le funzioni che assumono in superficie gli stessi valori, quella che rende minimo l'integrale $\int \Delta U dS$. Infatti, quando ad U si attribuiscono variazioni arbitrarie, si ha

$$\frac{1}{2} \delta \int \Delta U dS = \sum \int \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \delta U}{\partial x} dS = - \int \frac{dU}{dn} \delta U ds - \int \Delta^2 U \delta U dS,$$

e poichè in superficie è $\delta U = 0$, si deve avere, perchè $\int \Delta U dS$ sia un minimo,

$$\int \Delta^2 U \delta U dS = 0,$$

per qualunque sistema di variazioni, e conseguentemente $\Delta^2 U = 0$ in ogni punto di S . Questa osservazione basterebbe per dimostrare l'esistenza della funzione U in qualsiasi spazio, se si potesse (cfr. VII, 9) ammettere l'esistenza del *minimo* considerato. Disgraziatamente si sa dimostrare soltanto che l'integrale $\int \Delta U dS$, essenzialmente po-

(*) Su questo problema celebre le opere più recenti da consultare sono: PICARD, « *Traité d'Analyse* » (Paris, Gauthier-Villars, 1891, t. I, p. 141); DUHEM, « *Leçons sur l'électricité et le magnétisme* » (Paris, Gauthier-Villars, 1891, t. I, p. 159). A quest'ultima fonte sono attingere indicazioni preziose sulla storia del problema e delle interessanti ed acute ricerche, non ancora chiuse, alle quali esso ha dato luogo.

Appunti Poincaré sul 20

sitivo, ha un *limite inferiore*, ma non che questo limite debba essere raggiunto necessariamente.

c) Se, in superficie, invece dei valori della funzione, si danno quelli della sua prima derivata rispetto alla normale, il teorema precedente sussiste, perchè $\frac{dV}{dn}$ sarà uguale a zero su tutta la superficie;

d) Il medesimo teorema si applica più generalmente all'equazione differenziale

$$\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} = \varphi,$$

purchè la forma quadratica

$$\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j}$$

sia essenzialmente positiva.

3. Teorema di Green. Date due funzioni U e V , finite, continue ed uniformi in tutto S , si consideri l'integrale.

$$\begin{aligned} \int (U \Delta^2 V - V \Delta^2 U) dS &= \sum \int \left(U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - V \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) dS \\ &= \sum \int \frac{\partial}{\partial x} \left(U \frac{\partial V}{\partial x} - V \frac{\partial U}{\partial x} \right) dS. \end{aligned}$$

Esso si trasforma nell'integrale di superficie

$$\sum \int \left(V \frac{\partial U}{\partial x} - U \frac{\partial V}{\partial x} \right) \frac{dx}{dn} dS = \int \left(V \frac{dU}{dn} - U \frac{dV}{dn} \right) ds.$$

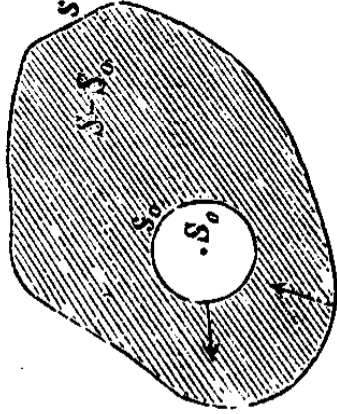
È proprio nell'eguaglianza

$$\int (U \Delta^2 V - V \Delta^2 U) dS = \int \left(V \frac{dU}{dn} - U \frac{dV}{dn} \right) ds$$

che consiste il *teorema di Green*.

4. Ora, per ottenere quella soluzione di $\Delta^2 U = \varphi$, che assume in superficie un dato sistema di valori, si applichi il teorema di Green alla funzione U ed a $V = \frac{1}{r}$. Con r rappresentiamo la di-

stanza del punto variabile, in cui si calcola V , al punto fisso, ma del resto arbitrario, nel quale si vuole calcolare U . Affinchè il teorema di Green sia applicabile è necessario escludere quest'ultimo punto, perchè in esso la funzione V diventa infinita. Ciò faremo tracciando una sfera di raggio infinitesimo R , col centro nel punto considerato. Nel rimanente spazio $S - S_0$ si può scrivere



$$\int_{S-S_0} \frac{\varphi dS}{r} = \int_{s+s_0} \left(U \frac{d}{dn} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{dU}{dn} \right) ds,$$

cioè

$$\int_s \left(U \frac{d}{dn} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{dU}{dn} \right) ds = \int_s \frac{\varphi dS}{r} = \int_{s_0} \frac{1}{r} \frac{dU}{dn} ds - \int_{s_0} U \frac{d}{dn} \frac{1}{r} ds - \int_{S_0} \frac{\varphi dS}{r}. \quad (1)$$

Vediamo a quali limiti tendono gli integrali del secondo membro quando la sfera tende a svanire. Chiamando μ un conveniente valor medio della funzione φ , in tutto S_0 , e μ' un valor medio di $\frac{dU}{dn}$ su tutta S_0 , si ha

$$\int_S \frac{\varphi dS}{r} = \mu \int_s \frac{dS}{r} = 2\pi\mu R^2, \quad \int_{s_0} \frac{1}{r} \frac{dU}{dn} ds = \mu' \int_s \frac{ds}{r} = 4\pi\mu' R.$$

Questi due integrali hanno dunque per limite zero. Invece si ha, chiamando μ un valor medio fra quelli che U assume sulla superficie S_0 ,

$$- \int_{s_0} U \frac{d}{dn} \frac{1}{r} ds = -\mu \int_{s_0} \frac{d}{dr} \frac{1}{r} ds = \mu \int_{s_0} \frac{ds}{r^2} = 4\pi\mu.$$

In forza delle proprietà che si suppongono nella funzione U , u esiste e tende al valore particolare U che la funzione stessa ha nel punto considerato. Dunque, al limite, la (1) dà

$$U = \frac{1}{4\pi} \int \left(U \frac{d^1}{dn} - \frac{1}{r} \frac{dU}{dn} \right) ds - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\phi ds}{r}. \quad (2)$$

Questa formola contiene qualche cosa di troppo, perchè fa conoscere U quando sian dati in superficie i suoi valori e quelli della sua prima derivata rispetto alla normale, mentre si è visto che si può prescrivere gli uni o gli altri valori affinchè U sia pienamente determinata. Bisogna dunque cercare di eliminare l'uno o l'altro sistema di valori.

5. Ad un risultato analogo saremmo pervenuti partendo dall'equazione più generale contemplata nel § 2, e sostituendo alla funzione r^2 la forma

$$\sum_{i,j} \alpha_{ij} (x_i - \xi_i) (x_j - \xi_j),$$

cioè una forma quadratica delle differenze delle coordinate, reciproca della forma considerata.

6. Dicesi *funzione di Green* e si rappresenta con G una funzione finita, continua ed uniforme, caratterizzata, fra le infinite *funzioni armoniche* (cioè soddisfacenti all'equazione $\Delta^2 = 0$, o *equazione di Laplace*), dalla condizione di prendere in superficie i valori $\frac{1}{r}$.

Qui si noti che, se alla funzione non fosse imposto di essere *finita*, si potrebbe prendere la stessa $\frac{1}{r}$, che soddisfa a tutte le altre condizioni. Quando è nota la funzione di Green per un dato spazio S , la risoluzione del problema di Dirichlet è sempre possibile in questo spazio. Infatti si ha, applicando il teorema di Green alle funzioni U e G ,

$$\int G \Delta^2 U ds = \int \left(U \frac{dG}{dn} - \frac{1}{r} \frac{dU}{dn} \right) ds,$$

ovvero

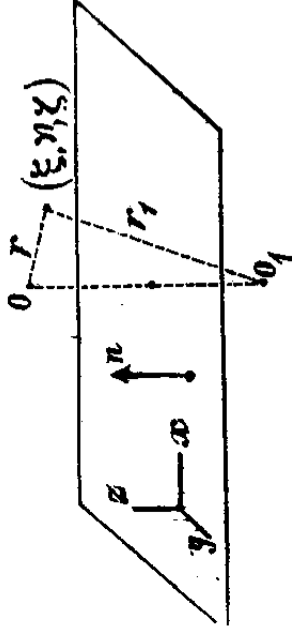
$$0 = \frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{1}{r} \frac{dU}{dn} - U \frac{dG}{dn} \right) ds + \frac{1}{4\pi} \int G \varphi ds.$$

Sommando con (2) si ottiene

$$U = \frac{1}{4\pi} \int U \left(\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{dG}{dn} \right) ds + \frac{1}{4\pi} \int \left(G - \frac{1}{r} \right) \varphi ds.$$

È questa la formula che risolve la questione proposta.

7. Esempi: a) Nel caso d'uno spazio infinito, limitato da un piano, la funzione di Green si ottiene evidentemente prendendo la distanza r_1 dal punto O_1 , simmetrico del punto dato O rispetto al piano. Si ha $G = \frac{1}{r_1}$, ed



$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2, \quad r_1^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$$

Intanto è

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dn} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} = \frac{z - \zeta}{r^3}, \quad \frac{d\frac{1}{r_1}}{dn} = \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial z} = -\frac{z + \zeta}{r_1^3}$$

e però si ha in superficie, cioè per $\zeta = 0$,

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{dG}{dn} = \frac{2z}{r^3}.$$

Dunque, se si domanda una funzione che nello spazio considerato sia finita, continua ed uniforme, abbia il parametro differenziale secondo espresso dalla funzione φ , e prenda valori prescritti nei punti del piano limite, si ha, per ogni punto (x, y, z) ,

$$U = \frac{z}{2\pi} \int \frac{U ds}{r^3} + \frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) \varphi ds.$$

b) In particolare una funzione armonica, che nel detto spazio sia finita, continua ed uniforme, è nota mediante la formola

$$U = \frac{z}{2\pi} \int \frac{U ds}{r^3},$$

quando ne sian dati i valori in tutto il piano. Se si osserva che

$$\frac{\partial}{\partial z} \int \frac{U ds}{r} = - \int U \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} ds = - \int U \frac{z - z}{r^3} ds = - z \int \frac{U ds}{r^3},$$

si può anche scrivere

$$U = - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int \frac{U ds}{r}. \quad (3)$$

Questo risultato ci sarà molto utile in seguito.

c) Suppongasi, più generalmente, che sia data l'equazione $\Delta^2 U = \varphi$, con φ armonica. Quale sarà il valore di U in un punto qualunque (x, y, z) ? Se la stessa U fosse armonica, il suo valore sarebbe dato dalla (3). È per questo che,

$$\text{posto } \psi = - \frac{1}{2\pi} \int \frac{\varphi ds}{r}, \quad \text{si ha } \varphi = \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

dove ψ , funzione potenziale (*) di superficie, è anch'essa armonica. Ma si può sempre porre

$$U = - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int \frac{U ds}{r} + U',$$

e la funzione U' deve soddisfare alle condizioni

$$\Delta^2 U' = \varphi, \quad U' = 0 \text{ (in superficie),}$$

le quali sono verificate se si prende per U' il valore $\frac{1}{2} z \psi$, perchè ψ è sempre finita, ed inoltre, per una nota formola,

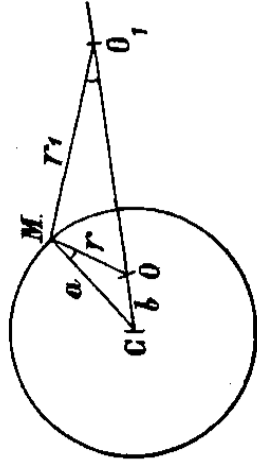
$$\Delta^2(z\psi) = z\Delta^2\psi + \psi\Delta^2 z + 2 \frac{\partial \psi}{\partial z} = 2\varphi.$$

(*) Di queste funzioni si parlerà alla fine del capitolo.

Dunque, in virtù del teorema dimostrato nel § 1, è necessariamente $U' = \frac{1}{2} z\psi$, cioè

$$U = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int \frac{U ds}{r} - \frac{z}{4\pi} \int \frac{\varphi ds}{r}.$$

d) Anche per lo spazio chiuso in una sfera la funzione di Green ha una forma semplicissima. Il punto O , dal quale si con-



tano le distanze che servono a fissare in superficie i valori della funzione, sia alla distanza b dal centro. Se ne prenda il reciproco O_1 rispetto alla sfera data, e si consideri in superficie un punto qua-

lunque M . Chiamando a il raggio della sfera, è, per costruzione, $CO \cdot CO_1 = a^2$. Ne segue che i triangoli CMO , CMO_1 sono simili; quindi $r_1 : r = a : b$. Per conseguenza

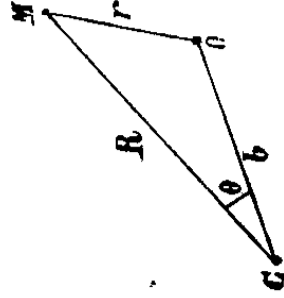
$$G = \frac{a}{br_1},$$

perchè questa funzione, evidentemente finita nell'interno della sfera, è inoltre armonica, continua ed uniforme, ed in superficie assume i valori $\frac{a}{br_1} = \frac{1}{r}$. Ciò premesso, la formola che serve a determi-

nare i valori di ogni altra funzione, che soddisfa alle medesime condizioni, ma che in superficie prende altri valori, arbitrariamente prescritti, diventa nel caso attuale

$$U = \frac{1}{4\pi} \int U \left(-\frac{d\frac{1}{r}}{dR} + \frac{a}{b} \frac{d\frac{1}{r_1}}{dR} \right) ds,$$

dove R rappresenta la distanza al centro della sfera, dimodochè



$$r^2 = R^2 + b^2 - 2bR \cos \theta,$$

$$r_1^2 = R^2 + \frac{a^2}{b^2} - 2\frac{a^2}{b} R \cos \theta.$$

Ora si ha

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dR} = -\frac{R - b \cos \theta}{r^3}, \quad \frac{d\frac{1}{r_1}}{dR} = -\frac{R - \frac{a^2}{b} \cos \theta}{r_1^3},$$

ed in superficie, cioè per $R=a$,

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dR} = -\frac{a-b\cos\theta}{r^3}, \quad \frac{a}{b} \frac{d\frac{1}{r_1}}{dR} = -\frac{a-\frac{a^2}{b}\cos\theta}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 r^3} = -\frac{\frac{b^2}{a}-b\cos\theta}{r^3};$$

poi

$$-\frac{d\frac{1}{r}}{dR} + \frac{a}{b} \frac{d\frac{1}{r_1}}{dR} = \frac{b^2}{r^3}.$$

Dunque

$$U = \frac{a^2 - b^2}{4\pi a} \int \frac{U ds}{r^3}.$$

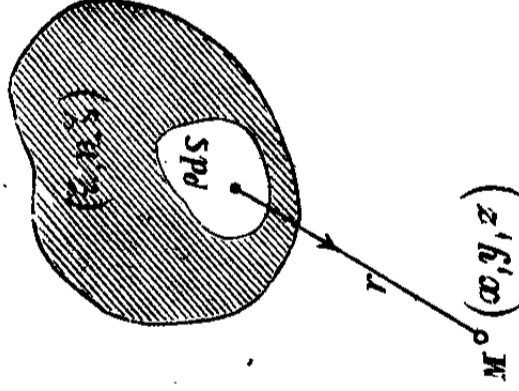
Questa è la formola cercata. Essa tende a coincidere con quella ottenuta nel caso del piano, quando a e b crescono all'infinito mentre la differenza $a-b$ si mantiene costantemente uguale a z . Dalla formola trovata si possono poi dedurre varie interessanti conseguenze. Per esempio, se $b=0$, r è sempre uguale ad a , e si ottiene per U il valore

$$\frac{1}{4\pi a^2} \int U ds.$$

Dunque il valore che U assume nel centro della sfera è la *media aritmetica* degli infiniti valori arbitrariamente prescritti in superficie.

8. Qui è indispensabile un rapido cenno intorno alle *funzioni potenziali*. In

ogni particella ds d'un determinato spazio, o sopra ciascun elemento ds d'una superficie data, si immagina accumulata una massa ρds o ρds , la quale eserciti sull'unità di massa, concentrata in un punto M , azioni newtoniane, cioè proporzionali alle masse ed inversamente proporzionali ai quadrati delle distanze. Presa come unità la repulsione esercitata dall'unità di massa, all'unità di distanza, l'attrazione della particella ds sul punto M è $-\frac{\rho ds}{r^2}$, e dall'intero corpo emana quindi verso M un'attrazione, la cui componente secondo l'asse delle x è



$$-\int \frac{x-z}{r} \cdot \frac{\rho ds}{r^2} = \int \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \rho ds = \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\rho ds}{r}.$$

se con x, y, z si rappresentano le coordinate del punto M , e con ξ, η, ζ le variabili d'integrazione. Adunque le derivate parziali prime delle funzioni

$$V = \int \frac{\rho dS}{r}, \quad V = \int \frac{\rho ds}{r}$$

rappresentano le componenti dell'attrazione subita dal punto M , e proveniente dalla massa accumulata in S o distribuita su s . Alle funzioni stesse si dà il nome di *funzioni potenziali di spazio o di superficie* (*). Queste funzioni sono armoniche, tranne la prima nello spazio occupato dalle masse attive. Infatti, fintantochè M è fuori del detto spazio, si ha

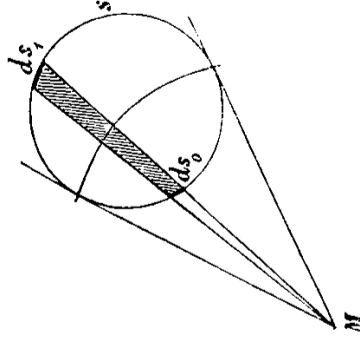
$$\Delta^2 V = \int \Delta^2 \frac{1}{r} \cdot \rho dS = 0,$$

perchè $\Delta^2 \frac{1}{r} = 0$ in ogni punto di S ; ma, se M è dentro S , non è lecito asserire ciò, perchè $\frac{1}{r}$ diventa infinita sotto il segno d'integrazione. Per questo caso occorre, innanzi tutto, dimostrare una importante formola, che include come caso limite la formola (9) del cap. I.

9. Sia U una funzione finita, continua ed uniforme in un determinato spazio S .

Assunto, fuori di S , un polo M , sia r il raggio vettore, e si consideri l'integrale

$$\int \frac{dU}{dr} \frac{dS}{r^2}.$$



Alla superficie s , che limita S , si circoscrive dal vertice M un cono, che determina sulla s due regioni, s_0 ed s_1 . Distinguiamo con indici 0 ed 1 tutto ciò che riguarda l'una o l'altra regione. Poi conduciamo dal vertice M un cono di apertura infinitesima $d\sigma$, il quale stacca sulle due regioni gli elementi ds_0 e ds_1 . L'integrale considerato si può scrivere così:

$$\iint \frac{dU}{dr} dr d\sigma = \int d\sigma \int \frac{dU}{dr} dr = \int (U_1 - U_0) d\sigma = \int_{s_1}^{s_0} U d\sigma.$$

E siccome si ha, evidentemente,

$$r_0^2 d\sigma = ds_0 \cos(n_0, r_0), \quad r_1^2 d\sigma = -ds_1 \cos(n_1, r_1),$$

(*) Per lo studio di queste e di altre funzioni potenziali vedi la « Teorica delle forze newtoniane » di Betti ed il « Traité d'Analyse » di PICARD.

si può anche dare all'integrale la forma seguente :

$$-\int_{s_1}^{s_0} U \cos(n, r) \frac{ds}{r^2} - \int_{s_0} U \cos(n, r) \frac{ds}{r^2} = - \int_s U \cos(n, r) \frac{ds}{r^2} = \int U \frac{1}{r} \frac{dn}{dn} ds.$$

Dunque

$$\int \frac{dU}{dr} \frac{dS}{r^2} = \int U \frac{1}{r} \frac{dn}{dn} ds.$$

Se poi M è interno ad S (ed è questo il caso che ci interessa) si ha subito, rappresentando con U_0 il valore di U nel punto M ,

$$\iiint \frac{dU}{dr} dr d\sigma = \int d\sigma \int \frac{dU}{dr} dr = \int (U - U_0) d\sigma = \int_s U d\sigma - 4\pi U_0,$$

cioè

$$\int \frac{dU}{dr} \frac{dS}{r^2} = \int U \frac{1}{r} \frac{dn}{dn} ds - 4\pi U_0. \quad (4)$$

Qui si osservi che da questa formula si potrebbe anche dedurre la (2), adoperando la formula (9) del primo capitolo, la quale è applicabile anche quando la funzione sottoposta al segno di integrazione diventa infinita come $\frac{1}{r}$. Pertanto è lecito scrivere

$$\begin{aligned} \int \frac{dU}{dr} \frac{dS}{r^2} &= - \sum \int \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{r} \right) dS = - \sum \int \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) dS + \sum \int \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} dS \\ &= \sum \int \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dn} ds + \sum \int \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} dS = \int \frac{1}{r} \frac{dU}{dn} ds + \int \frac{\Delta^2 U}{r} dS. \end{aligned}$$

Sostituendo in (4) si ottiene la (2).

10. Ora prendiamo la funzione potenziale

$$V = \int \frac{\rho dS}{r},$$

calcolata in un punto (x, y, z) interno ad S , ed osserviamo che si ha, successivamente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) \rho dS = - \int \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{r} \right) \rho dS = - \int \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\rho}{r} \right) dS + \int \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} dS \\ &= - \int \frac{\rho}{r} \frac{d\xi}{dn} ds + \int \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} dS; \end{aligned}$$

poi

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \int \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \frac{d\xi}{dn} \rho ds + \int \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} dS = - \int \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{r} \frac{d\xi}{dn} \rho ds + \int \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dr} \frac{dS}{r^2},$$

e finalmente, applicando (4), si ottiene la *formola di Poisson*:

$$\Delta^3 V = - \int \frac{d}{dn} \frac{1}{r} \rho ds + \int \frac{d\rho}{dr} \frac{dS}{r^2} = - 4\pi\rho.$$

Segue da ciò che, data l'equazione differenziale $\Delta^2 U = \varphi$, se ne ha subito una soluzione prendendo per U una funzione potenziale di spazio, e supponendo la densità uguale a $-\frac{\varphi}{4\pi}$. In altri termini, una soluzione dell'equazione precedente è

$$V(x, y, z) = - \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}.$$

Ne segue che l'integrazione della predetta equazione si può sempre ridurre alla determinazione d'una funzione *armonica*, che prenda in superficie valori prescritti, perchè, posto $U = V + U'$, è chiaro che U' è una funzione armonica, i cui valori in superficie sono gli eccessi dei valori *dati* di U sui valori *noti* di V .

X. ALCUNE PROPRIETÀ DELLE DEFORMAZIONI ELASTICHE.

1. *La deformazione generale d'un corpo elastico si può sempre scomporre in due deformazioni più semplici, cioè una deformazione caratterizzata dall'assenza di rotazione, ed una deformazione caratterizzata dall'assenza di dilatazione in ciascun punto del corpo, e tale che questo resta sempre limitato dalla stessa superficie.*

Siano u, v, w gli spostamenti che definiscono la deformazione *data*, e si consideri una funzione φ , soddisfacente, con le solite proprietà, all'equazione

$$\Delta^2 \varphi = \Theta,$$

in tutto S , mentre in superficie la sua derivata rispetto alla normale prende i valori

$$\frac{d\varphi}{dn} = u \frac{dx}{dn} + v \frac{dy}{dn} + w \frac{dz}{dn}.$$

Queste condizioni non sono incompatibili, perchè la relazione

$$\int \frac{d\varphi}{dn} ds = \sum \int u \frac{dx}{dn} ds = - \sum \int \frac{\partial u}{\partial x} dS = - \int \Theta dS = - \int \Delta^2 \varphi dS$$

è soddisfatta. Ciò premesso, si può sempre porre

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + u', \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + v', \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + w', \quad (1)$$

e si vede subito che si ha

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

in tutto S , mentre

$$u' \frac{dx}{dn} + v' \frac{dy}{dn} + w' \frac{dz}{dn} = 0 \quad (3)$$

in ogni punto della superficie. Le relazioni (2) e (3) dicono precisamente che la deformazione definita dagli spostamenti u', v', w' non produce dilatazione in alcun punto del corpo, e che lo spostamento di qualunque punto della superficie si effettua tangenzialmente alla superficie stessa. È poi evidente che l'altra deformazione componente, definita da spostamenti che ammettono la funzione potenziale φ , non produce rotazione.

2. La decomposizione indicata dalle (1) è indipendente dal significato meccanico di u, v, w : queste possono essere tre funzioni qualunque, finite, continue ed uniformi. Ora si ponga

$$U = - \frac{1}{4\pi} \int \frac{u' dS}{r}, \quad V = - \frac{1}{4\pi} \int \frac{v' dS}{r}, \quad W = - \frac{1}{4\pi} \int \frac{w' dS}{r},$$

dimodochè, per la formola di Poisson,

$$\Delta^2 U = u', \quad \Delta^2 V = v', \quad \Delta^2 W = w'.$$

Intanto si ha, ripetendo una trasformazione eseguita nel § 10 del capitolo precedente,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{4\pi} \int u' \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{r} dS = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{u'}{r} dS - \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} \frac{\partial u'}{\partial \xi} dS,$$

cioè

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{u'}{r} \frac{d\xi}{dn} ds - \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} \frac{\partial u'}{\partial \xi} dS.$$

Dunque, tenendo presenti (2) e (3),

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0.$$

Ne segue

$$\Delta^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right).$$

E però, se poniamo

$$P = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \quad R = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (4)$$

possiamo scrivere

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial z}, \\ v = \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z}, \\ w = -\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{cases} \quad (5)$$

3. In altri termini, date tre funzioni u, v, w , dotate delle solite proprietà, se ne possono trovare altre quattro φ, P, Q, R , tali da poter mettere sotto la forma (5) le tre funzioni date. Inoltre si noti che dalle stesse (5), dopo aver osservato che, in virtù delle (4), è

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0,$$

si deduce agevolmente

$$\Delta^2 \varphi = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\Delta^2 P = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \Delta^2 Q = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \Delta^2 R = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

In particolare, se u, v, w sono le componenti d'uno spostamento in una deformazione qualunque, le funzioni φ, P, Q, R son quelle che forniscono, mediante il loro parametro differenzial secondo, i valori della dilatazione cubica e delle doppie componenti della rotazione della particella.

4. Ora la decomposizione (5) si applichi invece alle forze di massa. Vuol dire che esistono quattro funzioni Φ, F, G, H , tali che si può scrivere

$$\left\{ \begin{aligned} X &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z}, \\ Y &= \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial z}, \\ Z &= -\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \end{aligned} \right. \quad (6)$$

Così ogni sistema di forze (X, Y, Z) si può decomporre in altri due. Le forze del primo sistema componente ammettono la funzione potenziale Φ : esse sono dette da Betti *forze di dilatazione senza rotazione*. Sono invece *forze di rotazione senza dilatazione* (*) le forze del secondo sistema, che hanno le componenti

$$-\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial z}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x}.$$

5. Il problema dell'equilibrio elastico d'un corpo isotropo è sempre riducibile al caso in cui le forze agiscono soltanto in superficie.

(*) Queste denominazioni sono giustificate da BERTI nella sua « Teoria », p. 29.

Le equazioni indefinite

$$X + A \frac{\partial \Theta}{\partial x} + B \left(\frac{\partial \mathcal{C}_2}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{C}_3}{\partial y} \right) = 0, \text{ ecc.}$$

diventano, in virtù delle (6),

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} (\Phi + A\Theta) - \frac{\partial}{\partial y} (H + B\mathcal{C}_3) + \frac{\partial}{\partial z} (G + B\mathcal{C}_2) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} (H + B\mathcal{C}_3) + \frac{\partial}{\partial y} (\Phi + A\Theta) - \frac{\partial}{\partial z} (F + B\mathcal{C}_1) = 0, \\ -\frac{\partial}{\partial x} (G + B\mathcal{C}_2) + \frac{\partial}{\partial y} (F + B\mathcal{C}_1) + \frac{\partial}{\partial z} (\Phi + A\Theta) = 0. \end{array} \right.$$

Queste sono soddisfatte quando si prendono uguali a zero le funzioni $\Phi + A\Theta$, $F + B\mathcal{C}_1$, ecc., cioè quando si pone

$$\Phi + A\Delta^2\varphi = 0, \quad F + B\Delta^2P = 0, \quad G + B\Delta^2Q = 0, \quad H + B\Delta^2R = 0.$$

La teoria delle funzioni potenziali fornisce le seguenti soluzioni particolari:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi A} \int \frac{\Phi dS}{r},$$

$$P = \frac{1}{4\pi B} \int \frac{F dS}{r}, \quad Q = \frac{1}{4\pi B} \int \frac{G dS}{r}, \quad R = \frac{1}{4\pi B} \int \frac{H dS}{r}.$$

Si ottengono così gli spostamenti

$$u' = \frac{1}{4\pi A} \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\Phi dS}{r} + \frac{1}{4\pi B} \left(\frac{\partial}{\partial z} \int \frac{G dS}{r} - \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{H dS}{r} \right), \text{ ecc.}$$

i quali soddisfano alle stesse equazioni indefinite, cui debbono soddisfare gli spostamenti incogniti u , v , w . Posto

$$u = u' + u'', \quad v = v' + v'', \quad w = w' + w'',$$

la questione è ora ridotta alla determinazione degli spostamenti residui u'' , v'' , w'' , i quali soddisfano alle equazioni

$$(A - B) \frac{\partial \Theta''}{\partial x} + B\Delta^2 u'' = 0, \text{ ecc.}$$

come si voleva dimostrare, ed inoltre assumono in superficie i valori di $u - u'$, $v - v'$, $w - w'$, quando sian conosciuti i valori di u , v , w in ogni punto della superficie. Se invece sono date le forze L , M , N , gli spostamenti u'' , v'' , w'' debbono soddisfare in superficie alle solite equazioni ai limiti, supponendo che le forze esterne sian $L - L'$, $M - M'$, $N - N'$.

XI. L'EQUAZIONE CANONICA DEI PICCOLI MOTI.

1. Riprendiamo (VII, 1; IV, 5) le equazioni del moto, in assenza di forze di massa, sotto la forma

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A \frac{\partial \Theta}{\partial x} + B \left(\frac{\partial \mathcal{C}_2}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{C}_3}{\partial y} \right), \text{ ecc.}$$

D'ora innanzi poniamo, per brevità, $A = \rho a^2$, $B = \rho b^2$, ed impieghiamo i seguenti simboli operatorii :

$$\mathcal{D}_a = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta^2, \quad \mathcal{D}_b = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - b^2 \Delta^2.$$

Le equazioni del moto diventano

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial \Theta}{\partial x} + b^2 \left(\frac{\partial \mathcal{C}_2}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{C}_3}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial \Theta}{\partial y} + b^2 \left(\frac{\partial \mathcal{C}_3}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{C}_1}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial \Theta}{\partial z} + b^2 \left(\frac{\partial \mathcal{C}_1}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{C}_2}{\partial x} \right). \end{aligned} \right.$$

Derivandole rispetto ad x, y, z , poi sommando i risultati, si ottiene $\mathcal{D}_a \Theta = 0$. Derivando invece la seconda equazione rispetto a z , la

terza rispetto ad y , e sottraendo, si trova $\mathcal{D}_b \mathcal{C}_1 = 0$, ed analogamente $\mathcal{D}_b \mathcal{C}_2 = 0$, $\mathcal{D}_b \mathcal{C}_3 = 0$. Dunque *la dilatazione e le componenti della rotazione soddisfano ad un'equazione differenziale* $\mathcal{D} = 0$.

2. Rappresentato con f_0 il valore di qualunque funzione $f(x, y, z, t)$, per $t = t_0$, conveniamo di rappresentare con $\frac{\partial f_0}{\partial t}$ il valore di $\frac{\partial f}{\partial t}$ per $t = t_0$. Successivamente si ha

$$\int_{t_0}^t \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} dt = \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial f_0}{\partial t}, \quad \int_{t_0}^t dt \int_{t_0}^t \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} dt = f - f_0 - (t - t_0) \frac{\partial f_0}{\partial t} = f - f^*,$$

ponendo

$$f^* = f_0 + (t - t_0) \frac{\partial f_0}{\partial t}.$$

Ora, se integriamo (*) due volte rispetto al tempo, fra i limiti t_0 e t , le equazioni del moto, e se poniamo

$$\varphi' = a^2 \int_{t_0}^t dt \int_{t_0}^t \Theta dt, \quad P' = b^2 \int_{t_0}^t dt \int_{t_0}^t \mathcal{C}_1 dt, \quad Q' = b^2 \int_{t_0}^t dt \int_{t_0}^t \mathcal{C}_2 dt, \text{ ecc.,}$$

otteniamo

$$\left\{ \begin{aligned} u - u^* &= \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + \frac{\partial Q'}{\partial z} - \frac{\partial R'}{\partial y}, \\ v - v^* &= \frac{\partial \varphi'}{\partial y} + \frac{\partial R'}{\partial x} - \frac{\partial P'}{\partial z}, \\ w - w^* &= \frac{\partial \varphi'}{\partial z} + \frac{\partial P'}{\partial y} - \frac{\partial Q'}{\partial x}. \end{aligned} \right. \quad (1)$$

Ciò premesso, immaginiamo che si applichi alle due terne di funzioni u_0, v_0, w_0 e $\frac{\partial u_0}{\partial t}, \frac{\partial v_0}{\partial t}, \frac{\partial w_0}{\partial t}$ il teorema dimostrato nel cap. X

(*) Procedimento indicato da SOMIGLIANA (*Rendic. dell'Acc. dei Lincei*, passim).

(§ 2, 3). È chiaro che si otterranno quattro funzioni φ'', P'', Q'', R'' , *lineari rispetto al tempo*, e tali che si potrà scrivere

$$\left\{ \begin{array}{l} u^* = \frac{\partial \varphi''}{\partial x} + \frac{\partial Q''}{\partial z} - \frac{\partial R''}{\partial y}, \\ v^* = \frac{\partial \varphi''}{\partial y} + \frac{\partial R''}{\partial x} - \frac{\partial P''}{\partial z}, \\ w^* = \frac{\partial \varphi''}{\partial z} + \frac{\partial P''}{\partial y} - \frac{\partial Q''}{\partial x}, \end{array} \right.$$

essendo

$$\Delta^2 \varphi'' = \Theta, \quad \Delta^2 P'' = \mathfrak{C}_1^*, \quad \Delta^2 Q'' = \mathfrak{C}_2^*, \quad \Delta^2 R'' = \mathfrak{C}_3^*.$$

Ora, se si pone

$$\varphi = \varphi' + \varphi'', \quad P = P' + P'', \quad Q = Q' + Q'', \quad R = R' + R'',$$

le (1) diventano

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}, \\ v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}, \\ w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}, \end{array} \right. \quad (2)$$

ed è facile dimostrare che le funzioni φ, P, Q, R soddisfano tutte ad equazioni differenziali della forma $\mathfrak{D} = 0$. Infatti si ha, tenendo presenti le osservazioni del precedente paragrafo,

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_a \varphi' &= \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} - a^2 \Delta^2 \varphi' = a^2 \Theta - a^4 \int_{t_0}^t dt \int_{t_1}^t \Delta^2 \Theta dt \\ &= a^2 \Theta^* + a^2 \int_{t_0}^t dt \int_{t_0}^t \mathfrak{D}_a \Theta dt = a^2 \Theta^*, \end{aligned}$$

ed analogamente

$$\mathfrak{D}_b P' = b^2 \mathfrak{C}_1^*, \quad \mathfrak{D}_b Q' = b^2 \mathfrak{C}_2^*, \quad \mathfrak{D}_b R' = b^2 \mathfrak{C}_3^*.$$

Poi

$$\mathcal{D}_a \varphi'' = \frac{\partial^2 \varphi''}{\partial t^2} - a^2 \Delta^2 \varphi'' = -a^2 \Delta^2 \varphi'' = -a^2 \Theta^*,$$

e

$$\mathcal{D}_b P'' = -b^2 \mathcal{C}_4^*, \quad \mathcal{D}_b Q'' = -b^2 \mathcal{C}_2^* \quad \mathcal{D}_b R'' = -b^2 \mathcal{C}_3^*.$$

Finalmente

$$\mathcal{D}_a \varphi = 0, \quad \mathcal{D}_b P = 0, \quad \mathcal{D}_b Q = 0, \quad \mathcal{D}_b R = 0. \quad (3)$$

Dunque alle vibrazioni d'un corpo elastico isotropo si può sempre dare la forma (2), supponendo le funzioni φ, P, Q, R soggette alle condizioni (3). È questo un importante *teorema di Clebsch* (*).

3. Questo teorema mostra che, se si prescinde dalle forze di massa, qualunque moto vibratorio, in un corpo isotropo, è *decomponibile in due moti particolari*, uno caratterizzato dalla variazione di volume delle particelle, e dipendente dalla sola costante A , e l'altro (moto *vorticoso*) caratterizzato invece dalla rotazione delle particelle, e dipendente dalla sola costante B . Nel primo non si ha rotazione, e le vibrazioni ammettono una funzione potenziale φ , il cui parametro differenzial secondo fornisce ad ogni istante ed in ogni punto il valore della dilatazione cubica unitaria. Nel secondo moto, privo di dilatazione, le vibrazioni hanno la forma

$$\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x},$$

e $\Delta^2 P, \Delta^2 Q, \Delta^2 R$ sono appunto le doppie componenti della rotazione. Le vibrazioni nel primo moto soddisfano all'equazione differenziale $\mathcal{D}_a = 0$, nel secondo a $\mathcal{D}_b = 0$. Dunque *l'integrazione delle equazioni del moto elastico*, nei corpi isotropi, è *sempre riducibile a quella dell'unica equazione* $\mathcal{D} = 0$, che si chiama *l'equazione canonica dei piccoli moti*.

(*) Vedi il « *Cours de physique mathématique* » di P. DUHÉM (t. II, p. 267).

4. Sia dunque da integrare (*)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - a^2 \Delta^2 V = 0. \quad (4)$$

Dal punto (x, y, z) come centro descriviamo la sfera di raggio $r = at$, e consideriamo l'integrale

$$V = \frac{1}{r} \int F(\xi, \eta, \zeta) ds, \quad (5)$$

esteso alla superficie di tale sfera. Vogliamo dimostrare che questo è un integrale dell'equazione (4). Prima calcoliamo $\Delta^2 V$. Far variare la sola x significa spostare rigidamente la sfera di dx secondo l'asse delle x . Allora F varia di $\frac{\partial F}{\partial x} dx$, e conseguentemente V varia di $\frac{1}{r} \int \frac{\partial F}{\partial \xi} dx ds$. Dunque

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{r} \int \frac{\partial F}{\partial \xi} ds.$$

Analogamente

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{1}{r} \int \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} ds.$$

Quindi

$$\Delta^2 V = \frac{1}{r} \int \Delta^2 F \cdot ds.$$

Ora calcoliamo $\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$, cioè $a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}$ (poichè $r = at$). Chiamando $d\sigma$ l'apertura del cono infinitesimo, che dal centro della sfera proietta l'elemento ds , si ha $V = r \int F d\sigma$; poi

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = 2 \frac{\partial}{\partial r} \int F d\sigma + r \frac{\partial^2}{\partial r^2} \int F d\sigma = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \int \frac{\partial F}{\partial r} d\sigma \right).$$

Intanto è noto, pel teorema di Green, che

$$\int \Delta^2 F dS = - \int \frac{\partial F}{\partial n} ds = r^2 \int \frac{\partial F}{\partial r} d\sigma,$$

(*) Vedi la « *Théorie mathématique de la lumière* » di H. POINCARÉ (p. 88).

estendendo la prima integrazione a tutto lo spazio racchiuso nella sfera s . Dunque

$$\frac{\partial^3 V}{\partial r^3} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int \Delta^2 F \cdot dS.$$

Ora è chiaro che, quando varia la sola r , non si sposta il centro della sfera, ma solo avviene che questa si dilata intorno al centro, ed il suo raggio diventa $r + dr$. La variazione che subisce $\int \Delta^2 F dS$ è rappresentata da questo stesso integrale, esteso allo spazio compreso fra le superficie sferiche dai raggi r ed $r + dr$. Essa è dunque

$$\int \int \Delta^2 F ds dr = dr \int \Delta^2 F ds.$$

Ne segue

$$\frac{\partial^3 V}{\partial r^3} = \frac{1}{r} \int \Delta^2 F \cdot ds.$$

È dunque soddisfatta l'equazione (4).

5. Che la formola (5) non fornisca l'integrale generale della (4) risulta subito dal fatto che essa racchiude *una sola* funzione arbitraria, invece di due; ma si trova immediatamente un altro integrale particolare, osservando che, se V soddisfa alla (4), altrettanto si può dire di $\frac{\partial V}{\partial r}$. L'integrale generale è dunque

$$V = \frac{1}{r} \int F ds + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \int G ds \right).$$

Le funzioni arbitrarie F e G si determinano mediante le condizioni iniziali, cioè prescrivendo i valori V_0 e $\frac{\partial V_0}{\partial t}$ che V e $\frac{\partial V}{\partial t}$ assumono per $t=0$: siano

$$V_0 = \Phi(x, y, z), \quad \frac{\partial V_0}{\partial t} = \Psi(x, y, z).$$

Per vedere a quali condizioni iniziali corrisponde il primo integrale particolare trovato, osserviamo che, per questo integrale, si ha

$$V = r \int F d\sigma, \quad \frac{\partial V}{\partial r} = \int F d\sigma + \frac{1}{r} \int \Delta^2 F \cdot dS, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = r \int \Delta^2 F \cdot d\sigma.$$

Dunque, per $t=0$ (e conseguentemente $r=0$), osservando che l'integrale

$$\frac{1}{r} \int \Delta^2 F \cdot dS = \mu \int \frac{dS}{r} = 2\pi\mu r^2$$

ha per limite zero, mentre $\int F d\sigma$ tende a $F(x, y, z) \int d\sigma$, si ha

$$V=0, \quad \frac{\partial V}{\partial r} = 4\pi F, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = 0.$$

Ne segue subito che per l'altro integrale particolare (cioè $\frac{\partial V}{\partial r}$) si ha invece $V=4\pi G$, $\frac{\partial V}{\partial r}=0$. Dunque, per l'integrale generale,

$$V_0 = 4\pi G(x, y, z), \quad \frac{\partial V_0}{\partial t} = 4\pi a F(x, y, z),$$

e però bisogna prendere $F = \frac{\psi}{4\pi a}$, $G = \frac{\Phi}{4\pi}$. L'integrale generale, al quale si può dare la forma

$$V = \frac{1}{r} \int F ds + \frac{1}{r^2} \int G ds + \frac{1}{r} \int \frac{\partial G}{\partial r} ds,$$

diventa finalmente

$$V = \frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{\psi}{a} + \frac{\Phi}{r} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \frac{ds}{r}. \quad (6)$$

Questo risultato si deve a Poisson (*)

6. Supponiamo che V rappresenti una *vibrazione*, e conseguentemente $\frac{\partial V}{\partial t}$ una *velocità*. Se all'origine del tempo vibrano soltanto i punti contenuti in una particella infinitesima, presa intorno al punto (x_0, y_0, z_0) , ciò vuol dire che le funzioni Φ e Ψ hanno il

(*) DUHEM, *loc. cit.*, t. I, p. 167. Sull'equazione differenziale (4) si hanno importanti ricerche di KIRCHHOFF nei « *Sitzungsberichte* » di Berlino (1882). Vedi anche una Memoria « sulla propagazione delle onde in un mezzo isotropo » di G. A. MAGGI (*Annali di Matematica*, t. XVI, p. 21) ed una del prof. BELTRAMI « sul principio di Huygens » (*Rendiconti dell'Istituto lombardo*, 1889).

valore 0 in ogni punto dello spazio, tranne che in punti le cui coordinate differiscono infinitamente poco da x_0, y_0, z_0 . In tale ipotesi la formula (6) fornisce, in generale, un valore nullo di V , tranne che nei punti (x, y, z) per i quali le differenze $\xi - x_0, \eta - y_0, \zeta - z_0$ sono simultaneamente infinitesime. E siccome

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$$

è il quadrato di $r = at$, i detti punti appartengono alla sfera

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2 t^2,$$

o le sono infinitamente vicini. In altri termini, se una perturbazione soddisfacente all'equazione canonica dei piccoli moti emana da un punto, essa si trova, alla fine del tempo t , comunicata ai soli punti che distano di at dal punto di partenza, e però si può dire che *a* è la *velocità di propagazione* della perturbazione considerata. Ora, riferendoci a quanto si è detto nel § 3, vediamo che *ogni perturbazione elastica, provocata in un punto d'un mezzo isotropo, si scinde in due particolari perturbazioni, una priva di rotazione, che si propaga con la velocità $a = \sqrt{\frac{A}{\rho}}$, mentre l'altra, puramente vorticoso, si propaga con la velocità $b = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$.*

XII. CALCOLO DELLA DILATAZIONE E DELLA ROTAZIONE.

1. La più notevole applicazione del teorema (cap. V) di Betti consiste nella *determinazione del coefficiente di dilatazione cubica e delle doppie componenti della rotazione della particella* in ogni punto d'un mezzo elastico, omogeneo ed isotropo. Si prenda

$$u' = \frac{1}{r}, \quad v' = 0, \quad w' = 0, \quad (1)$$

rappresentando con r la distanza del punto (ξ, η, Z) che subisce gli spostamenti u', v', w' , ad un punto fisso O , di coordinate x, y, z , preso ad arbitrio nell'interno del corpo. Siccome in questo punto la funzione u' diventa infinita, il teorema di Betti non è applicabile nello spazio S ; ma se dal centro O si descrive una sfera arbitrariamente piccola, escludendo così da S lo spazio S_0 racchiuso nella sfera, il teorema di Betti è applicabile nel rimanente spazio $S - S_0$, perchè in questo u' si serba finita, continua ed uniforme. E siccome lo spazio $S - S_0$ è limitato dalle superficie s ed s_0 , si ha

$$\begin{aligned} & \int_{S-S_0} (Xu' + Yv' + Zw') dS + \int_{s+s_0} (Lu' + Mv' + Nw') ds \\ &= \int_{S-S_0} (X'u + Y'v + Z'w) dS + \int_{s+s_0} (L'u + M'v + N'w) ds \quad (2) \end{aligned}$$

X', Y', Z', L', M', N' si calcolano mediante le equazioni dell'equilibrio. A questo scopo si noti anzitutto che, nell'ipotesi (1), si ha

$$\Theta' = \frac{1}{\partial \xi} \frac{1}{r}, \quad \mathfrak{C}'_1 = 0, \quad \mathfrak{C}'_2 = \frac{1}{\partial \xi} \frac{1}{r}, \quad \mathfrak{C}'_3 = -\frac{1}{\partial \eta} \frac{1}{r},$$

e però dalle equazioni indefinite risulta, osservando che in ogni punto, tranne che in O , è $\Delta^2 \frac{1}{r} = 0$,

$$X' = -(A - B) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \xi^2}, \quad Y' = -(A - B) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \xi \partial \eta}, \quad Z' = -(A - B) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \xi \partial Z},$$

mentre le equazioni ai limiti danno

$$\left\{ \begin{aligned} L' &= -(A - 2B) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dn} - B \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dn} - B \frac{d \frac{1}{r}}{dn}, \\ M' &= -(A - 2B) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \frac{d\eta}{dn} - B \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} \frac{d\xi}{dn}, \\ N' &= -(A - 2B) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \frac{dZ}{dn} - B \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial Z} \frac{d\xi}{dn}. \end{aligned} \right.$$

2. Ciò premesso si ha, *nello spazio* $S - S_0$, integrando per parti,

$$\begin{aligned} \int (X'u + Y'v + Z'w) dS = & -(A - B) \int \left(u \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \xi^2} + v \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \xi \partial \eta} + w \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \xi \partial z} \right) dS \\ = & -(A - B) \int \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(w \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \right) \right] dS \\ & + (A - B) \int \Theta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} dS; \end{aligned}$$

poi, trasformando il primo integrale in integrale di superficie,

$$\begin{aligned} & \int (X'u + Y'v + Z'w) dS \\ = & (A - B) \int \left(u \frac{d\xi}{dn} + v \frac{d\eta}{dn} + w \frac{dz}{dn} \right) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} ds + (A - B) \int \Theta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} dS. \quad (3) \end{aligned}$$

Similmente, sulla superficie s ,

$$\begin{aligned} \int (L'u + M'v + N'w) ds = & -(A - 2B) \int \left(u \frac{d\xi}{dn} + v \frac{d\eta}{dn} + w \frac{dz}{dn} \right) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} ds \\ & - B \int u \frac{d \frac{1}{r}}{dn} ds - B \int \left(u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + w \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) \frac{d\xi}{dn} ds. \quad (4) \end{aligned}$$

Sulla superficie s_0 questa formola, osservando che

$$\frac{d \frac{1}{r}}{dr} = -\frac{1}{r^2}, \quad \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} \frac{d\xi}{dr} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \eta} \frac{d\xi}{dr} = -\frac{1}{r^2} \frac{d\eta}{dr} \frac{\partial r}{\partial \xi} = \frac{dy}{dr} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}, \quad \text{ecc.}$$

si riduce a

$$\begin{aligned} & \int (L'u + M'v + N'w) ds_0 \\ = & -(A - B) \int \left(u \frac{d\xi}{dr} + v \frac{d\eta}{dr} + w \frac{dz}{dr} \right) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} ds_0 + B \int \frac{uds_0}{r^2}. \quad (5) \end{aligned}$$

Ora sommando (3) con (4) e (5) si ottiene

$$\begin{aligned}
 & \int_{S-S_0}^{s+s_0} (X'u + Y'v + Z'w) dS + \int_{s+s_0} (L'u + M'v + N'w) ds \\
 &= (A-B) \int \left(u \frac{d\xi}{dn} + v \frac{d\eta}{dn} + w \frac{dz}{dn} \right) \frac{1}{d\xi} ds \\
 &+ (A-B) \int \left(u \frac{d\xi}{dr} + v \frac{d\eta}{dr} + w \frac{dz}{dr} \right) \frac{1}{d\xi} ds_0 - (A-2B) \int \left(u \frac{d\xi}{dn} + v \frac{d\eta}{dn} + w \frac{dz}{dn} \right) \frac{1}{d\xi} ds \\
 &- (A-B) \int \left(u \frac{d\xi}{dr} + v \frac{d\eta}{dr} + w \frac{dz}{dr} \right) \frac{1}{d\xi} ds_0 - B \int \left(u \frac{1}{d\xi} + v \frac{1}{d\eta} + w \frac{1}{dz} \right) \frac{d\xi}{dn} ds \\
 &+ (A-B) \int_{S-S_0} \Theta \frac{1}{d\xi} dS - B \int u \frac{1}{dn} ds + B \int \frac{uds_0}{r^2}.
 \end{aligned}$$

Fatta ogni riduzione, si vede che la relazione (2) diventa

$$\begin{aligned}
 & \int_{S-S_0} \frac{XdS}{r} + \int_{s+s_0} \frac{Lds}{r} \\
 &= B \int \left(u \frac{d\xi}{dn} + v \frac{d\eta}{dn} + w \frac{dz}{dn} \right) \frac{1}{d\xi} ds + (A-B) \int_{S-S_0} \Theta \frac{1}{d\xi} dS \\
 &- B \int \left(u \frac{1}{d\xi} + v \frac{1}{d\eta} + w \frac{1}{dz} \right) \frac{d\xi}{dn} ds - B \int u \frac{1}{dn} ds + B \int \frac{uds_0}{r^2}. \quad (6)
 \end{aligned}$$

3. Ora si faccia tendere a zero lo spazio S_0 . Sia $d\sigma$ l'apertura del cono infinitesimo che da O proietta il contorno d'una particella superficiale ds_0 . Evidentemente $ds_0 = r^2 d\sigma$, e però, chiamando μ un conveniente valore, medio fra quelli che u , funzione finita, assume sulla superficie s_0 , si ha

$$\int \frac{uds_0}{r^2} = \int u d\sigma = \mu \int d\sigma = 4\pi\mu.$$

Quando la sfera tende ad annullarsi, μ tende al valore che u prende

nel centro O , perchè si suppone ancora che u sia funzione continua ed uniforme. Dunque, per s_0 evanescente,

$$\lim \int \frac{u ds_0}{r^2} = 4\pi u,$$

rappresentando semplicemente con u il valore di u nel punto (x, y, z) . Ancora si osservi che, essendo $dS_0 = r^2 dr d\sigma$, se R è il raggio di S_0 , si ha

$$\int \frac{dS_0}{r} = \iint r dr d\sigma = 2\pi R^2, \quad \int \frac{dS_0}{r^2} = \iint dr d\sigma = 4\pi R,$$

$$\int \frac{ds_0}{r} = \int r d\sigma = 4\pi R,$$

e però questi integrali tendono a zero insieme ad R , e con essi tende a zero ogni altro integrale ottenuto moltiplicando le quantità sottoposte all'integrazione per funzioni che restino *finite* in tutto il campo d'integrazione, quali sono per ipotesi X, L, Θ , ecc. Per conseguenza

$$\lim \int \frac{X dS_0}{r} = 0, \quad \lim \int \frac{L ds_0}{r} = 0,$$

$$\lim \int \Theta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} dS_0 = - \lim \int \Theta \frac{d\xi}{dr} \frac{dS_0}{r^2} = 0.$$

Dunque, finalmente, la formola (6) diventa

$$4\pi B u = \int \frac{X dS}{r} + \int \frac{L ds}{r}$$

$$+ B \int \left(u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + w \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) \frac{d\xi}{dn} ds + B \int u \frac{d \frac{1}{r}}{dn} ds$$

$$- B \int \left(u \frac{d\xi}{dn} + v \frac{d\eta}{dn} + w \frac{d\zeta}{dn} \right) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} ds - (A - B) \int \Theta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} dS, \quad (7)$$

e se ne deducono, mediante permutazione circolare, altre due formole analoghe.

4. È utile dare a queste relazioni una forma più concisa. Si ponga

$$\Phi = (A - B) \int \frac{\Theta dS}{r} + B \int \left(u \frac{d\xi}{dn} + v \frac{d\eta}{dn} + w \frac{d\zeta}{dn} \right) \frac{ds}{r}. \quad (8)$$

Siccome la funzione r è la sola che, sotto i segni integrali, contenga x, y, z , si può scrivere

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= (A - B) \int \Theta \frac{\partial r}{\partial x} dS + B \int \left(u \frac{d\xi}{dn} + v \frac{d\eta}{dn} + w \frac{d\zeta}{dn} \right) \frac{\partial r}{\partial x} ds \\ &= - (A - B) \int \Theta \frac{\partial r}{\partial \xi} dS - B \int \left(u \frac{d\xi}{dn} + v \frac{d\eta}{dn} + w \frac{d\zeta}{dn} \right) \frac{\partial r}{\partial \xi} ds. \end{aligned}$$

Portando in (7) questo risultato, e ponendo per brevità

$$(9) \left\{ \begin{aligned} U &= \int \frac{XdS}{r} + \int \frac{Lds}{r} + B \int \left(u \frac{\partial r}{\partial \xi} + v \frac{\partial r}{\partial \eta} + w \frac{\partial r}{\partial \zeta} \right) \frac{d\xi}{dn} ds + B \int u \frac{\partial r}{dn} ds, \\ V &= \int \frac{YdS}{r} + \int \frac{Mds}{r} + B \int \left(u \frac{\partial r}{\partial \xi} + v \frac{\partial r}{\partial \eta} + w \frac{\partial r}{\partial \zeta} \right) \frac{d\eta}{dn} ds + B \int v \frac{\partial r}{dn} ds, \\ W &= \int \frac{ZdS}{r} + \int \frac{Nds}{r} + B \int \left(u \frac{\partial r}{\partial \xi} + v \frac{\partial r}{\partial \eta} + w \frac{\partial r}{\partial \zeta} \right) \frac{d\zeta}{dn} ds + B \int w \frac{\partial r}{dn} ds, \end{aligned} \right.$$

si perviene finalmente alle formole

$$4\pi Bu = U + \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad 4\pi Bv = V + \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad 4\pi Bw = W + \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (10)$$

che volevamo dimostrare.

5. Calcolo di Θ , $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$. Dalle (10) si deduce subito, mediante opportune derivazioni,

$$4\pi B\mathfrak{C}_1 = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \quad 4\pi B\mathfrak{C}_2 = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \quad 4\pi B\mathfrak{C}_3 = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (11)$$

Invece, derivando le (10) rispetto ad x, y, z , rispettivamente, poi sommando, si ottiene

$$4\pi B\Theta = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} + \Delta^2\Phi;$$

ma la (8) mostra che Φ è la somma di due funzioni potenziali, una di spazio e l'altra di superficie, e per le proprietà di queste funzioni (*) si può asserire che

$$\Delta^2\Phi = -4\pi(A - B)\Theta.$$

Portando questo risultato nell'ultima formola si trova

$$4\pi A\Theta = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}. \quad (12)$$

Le formole (11) e (12), dovute a Betti (**), fanno conoscere i valori di Θ , $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$ in ogni punto dello spazio, quando si conoscono le forze esterne e gli spostamenti in superficie. Esse contengono dunque troppi elementi, giacchè dev'essere possibile determinare Θ e le $\mathfrak{C}$ quando in superficie si danno le sole pressioni o gli spostamenti soli, oltre le forze di massa; ma in seguito si vedrà come si proceda per eliminare, sia gli spostamenti in superficie, sia le pressioni.

6. Calcolo di u, v, w . Le formole (10) non possono servire, come sono, al calcolo di u, v, w , perchè i secondi membri contengono, in Φ , la funzione Θ , il cui calcolo richiede la conoscenza di u, v, w in tutto S , e le sole funzioni U, V, W dipendono, secondo le (9), esclusivamente dalle forze esterne e dagli spostamenti superficiali. Tuttavia si potrebbe provvedere portando in (8) l'espressione di Θ , fornita dalla (12); ma si otterrebbero in tal modo integrali quintupli e sestupli, che conviene evitare. Cerchiamo piuttosto

(*) Vedi BETTI, « *Teorica delle forze newtoniane* », p. 32.

(**) *Teoria della elasticità*, §§ 8, 9. Vedi anche CERRUTI, *Memorie dell'Accademia dei Lincei*, vol. XIII, p. 83.

losto di esprimere in altro modo quella parte di Φ , che contiene Θ .
Con questo scopo si faccia

$$u' = \frac{\partial r}{\partial \xi}, \quad v' = \frac{\partial r}{\partial \eta}, \quad w' = \frac{\partial r}{\partial z}$$

nel teorema di Betti. Osservando che

$$\Theta' = \Delta^2 r = \frac{2}{r}, \quad \mathcal{C}'_1 = \mathcal{C}'_2 = \mathcal{C}'_3 = 0,$$

le equazioni indefinite danno

$$X' = -2B \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}, \quad Y' = -2B \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta}, \quad Z' = -2B \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z},$$

e quelle ai limiti

$$\left\{ \begin{array}{l} L' = -2(A-2B) \frac{1}{r} \frac{d\xi}{dn} - 2B \frac{d}{dn} \frac{\partial r}{\partial \xi}, \\ M' = -2(A-2B) \frac{1}{r} \frac{d\eta}{dn} - 2B \frac{d}{dn} \frac{\partial r}{\partial \eta}, \\ N' = -2(A-2B) \frac{1}{r} \frac{dz}{dn} - 2B \frac{d}{dn} \frac{\partial r}{\partial z}. \end{array} \right.$$

Dunque si ha, adoperando le solite trasformazioni, e rammentandosi che la formola (9) del *cap.* I è valida anche quando la funzione sottoposta all'integrazione diventa, in qualche punto, infinita come $\frac{1}{r^n}$, purchè $n < 2$,

$$\begin{aligned} \int (X'u + Y'v + Z'w) dS &= -2B \int \left(u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + w \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dS \\ &= -2B \int \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{u}{r} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{v}{r} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{w}{r} \right) dS + 2B \int \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \frac{dS}{r} \\ &= 2B \int \left(u \frac{d\xi}{dn} + v \frac{d\eta}{dn} + w \frac{dz}{dn} \right) \frac{ds}{r} + 2B \int \frac{\Theta dS}{r}. \end{aligned}$$

Similmente

$$\begin{aligned} \int (L'u + M'v + N'w) ds &= -2(A-2B) \int \left(u \frac{d\xi}{dn} + v \frac{d\eta}{dn} + w \frac{dz}{dn} \right) \frac{ds}{r} \\ &\quad - 2B \int \left(u \frac{d}{dn} \frac{\partial r}{\partial \xi} + v \frac{d}{dn} \frac{\partial r}{\partial \eta} + w \frac{d}{dn} \frac{\partial r}{\partial z} \right) ds. \end{aligned}$$

Dunque il secondo membro della formola (4) del precedente capitolo diventa

$$2A \int \frac{\Theta dS}{r} + 4B \int \left(u \frac{d\xi}{dn} + v \frac{d\eta}{dn} + w \frac{dz}{dn} \right) \frac{ds}{r} - 2B \int \left(u \frac{d}{dn} \frac{\partial r}{\partial \xi} + v \frac{d}{dn} \frac{\partial r}{\partial \eta} + w \frac{d}{dn} \frac{\partial r}{\partial z} \right) ds.$$

Per conseguenza

$$\begin{aligned} \int \frac{\Theta dS}{r} &= \frac{1}{2A} \int \left(X \frac{\partial r}{\partial \xi} + Y \frac{\partial r}{\partial \eta} + Z \frac{\partial r}{\partial z} \right) dS \\ &+ \frac{1}{2A} \int \left(L \frac{\partial r}{\partial \xi} + M \frac{\partial r}{\partial \eta} + N \frac{\partial r}{\partial z} \right) ds \\ &- 2 \frac{B}{A} \int \left(u \frac{d\xi}{dn} + v \frac{d\eta}{dn} + w \frac{dz}{dn} \right) \frac{ds}{r} \\ &+ \frac{B}{A} \int \left(u \frac{d}{dn} \frac{\partial r}{\partial \xi} + v \frac{d}{dn} \frac{\partial r}{\partial \eta} + w \frac{d}{dn} \frac{\partial r}{\partial z} \right) ds. \end{aligned}$$

Portando finalmente questo risultato nella (8) si ottiene

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{A-B}{2A} \int \left(X \frac{\partial r}{\partial \xi} + Y \frac{\partial r}{\partial \eta} + Z \frac{\partial r}{\partial z} \right) dS \\ &+ \frac{A-B}{2A} \int \left(L \frac{\partial r}{\partial \xi} + M \frac{\partial r}{\partial \eta} + N \frac{\partial r}{\partial z} \right) ds \\ &- \frac{B}{A} (A-2B) \int \left(u \frac{d\xi}{dn} + v \frac{d\eta}{dn} + w \frac{dz}{dn} \right) \frac{ds}{r} \\ &+ \frac{B}{A} (A-B) \int \left(u \frac{d}{dn} \frac{\partial r}{\partial \xi} + v \frac{d}{dn} \frac{\partial r}{\partial \eta} + w \frac{d}{dn} \frac{\partial r}{\partial z} \right) ds. \quad (13) \end{aligned}$$

Ora si vede che le formole (10), quando vi si esprimono U, V, W e Φ mediante le (9) e la (13), rappresentano gli spostamenti in ogni punto del corpo mediante le forze esterne ed i valori che gli spostamenti stessi prendono in superficie. L'effettiva sostituzione conduce alle *formole di Somigliana* (*), che risolvono per u, v, w , mediante integrazioni doppie e triple, lo stesso problema che le *formole di Betti* risolvono per $\Theta, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$.

(*) *Annali di Matematica*, 1889, p. 41.