IV. EQUILIBRIO ELASTICO.

1. Quando ad un corpo elastico si applica un sistema di forze, i punti del corpo si spostano, ed in conseguenza variano le azioni interne, che cessano così di farsi equilibrio e tendono invece ad equilibrarsi con le forze esterne. Nel raggiungere il nuovo equilibrio il corpo acquista una forma definitiva, che non abbandona se non quando, soppresse le forze esterne, tendono nuovamente le forze interne ad equilibrarsi fra loro. Ciò premesso, conoscendo le azioni deformatrici cui è sottoposto un corpo dato, ci proponiamo di determinare la nuova distribuzione delle azioni interne e la configurazione finale del corpo.

2. **Equazioni dell'equilibrio elastico.** Siano X, Y, Z le componenti, *per unità di volume*, secondo tre assi ortogonali, della forza applicata alla particella dS. In altri termini siano XdS, YdS, ZdS le componenti della forza applicata alla massa contenuta in dS. Oltre a queste forze, che diconsi *forze di massa*, si possono avere *pressioni* alla superficie del corpo. Siano Lds, Mds, Nds le componenti della pressione applicata all'elemento superficiale ds. Quando il corpo, deformandosi, ha raggiunto una configurazione definitiva, i suoi punti trovansi in equilibrio sotto l'azione di tre gruppi di forze: 1° forze di massa; 2° pressioni alla superficie; 3° forze elastiche. In virtù del *principio di Lagrangia* dev'essere nullo il lavoro fatto da tutte queste forze nei moti virtuali che il sistema può eseguire intorno alla configurazione di equilibrio. Così per ogni punto, già venuto dalla posizione (x, y, z) alla posizione $(x+u, y+v, z+w)$, si ha, nel passaggio virtuale alla posizione $(x+u+\delta u, y+v+\delta v, z+w+\delta w)$, un lavoro elementare, espresso da $\xi\delta u+\eta\delta v+\zeta\delta w$ se ξ, η, ζ sono le componenti della forza applicata al punto considerato. Quanto alle forze ela-

stiche, il lavoro da esse eseguito non è che la variazione subita dal loro potenziale durante il moto virtuale. Il principio dei momenti virtuali conduce dunque all'equazione

$$\int (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w)dS + \int (L\delta u + M\delta v + N\delta w)ds + \delta \int \Pi dS = 0. \quad (1)$$

Ora svincoleremo nel terzo integrale le arbitrarie δu, δv, δw, in modo da farle comparire linearmente, come nei primi due integrali; poi, osservando che queste quantità sono fra loro indipendenti, e variabili arbitrariamente da punto a punto, eguaglieremo a zero i loro coefficienti negli integrali di spazio ed in quelli di superficie, separatamente. Perverremo così alle equazioni domandate. Anzitutto si ha, ricordando che Π è funzione di a, b, c, f, g, h,

$$\delta \int \Pi dS = \int \delta \Pi dS = \int \left(\frac{\partial \Pi}{\partial a} \delta a + \frac{\partial \Pi}{\partial b} \delta b + \ldots + \frac{\partial \Pi}{\partial h} \delta h \right) dS.$$

Intanto

$$\int \frac{\partial \Pi}{\partial a} \delta a dS = \int \frac{\partial \Pi}{\partial a} \frac{\partial \delta u}{\partial x} dS = \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial a} \delta u \right) dS - \int \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Pi}{\partial a} \delta u dS$$
$$= - \int \frac{\partial \Pi}{\partial a} \frac{dx}{dn} \delta u ds - \int \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Pi}{\partial a} \delta u dS.$$

Similmente

$$\int \frac{\partial \Pi}{\partial f} \delta f dS = \int \frac{1}{2} \frac{\partial \Pi}{\partial f} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial z} \right) dS$$
$$= \int \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial f} \delta w \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial f} \delta v \right) \right] dS - \int \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Pi}{\partial f} \delta w + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \Pi}{\partial f} \delta v \right) dS$$
$$= - \int \frac{1}{2} \frac{\partial \Pi}{\partial f} \left(\frac{dy}{dn} \delta w + \frac{dz}{dn} \delta v \right) ds - \int \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Pi}{\partial f} \delta w + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \Pi}{\partial f} \delta v \right) dS.$$

Dunque, raccogliendo in tre gruppi analoghi i termini che moltiplicano δu, δv, δw,

$$\delta \int \Pi dS = - \int \left(\frac{\partial \Pi}{\partial a} \frac{dx}{dn} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Pi}{\partial h} \frac{dy}{dn} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Pi}{\partial g} \frac{dz}{dn} \right) \delta u ds$$
$$- \int \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Pi}{\partial a} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Pi}{\partial h} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \Pi}{\partial g} \right) \delta u dS$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Sostituendo finalmente nella relazione (1), questa si scinde, per l'arbitrarietà di $\delta u, \delta v, \delta w$, nelle sei equazioni seguenti:

$$(1')\left\{\begin{aligned} X &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Pi}{\partial a} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Pi}{\partial h} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Pi}{\partial g} \\ Y &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Pi}{\partial h} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Pi}{\partial b} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Pi}{\partial f} \\ Z &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Pi}{\partial g} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Pi}{\partial f} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Pi}{\partial c} \end{aligned}\right. \qquad \left.\begin{aligned} L &= \frac{\partial \Pi}{\partial a}\frac{dx}{dn} + \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi}{\partial h}\frac{dy}{dn} + \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi}{\partial g}\frac{dz}{dn} \\ M &= \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi}{\partial h}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial \Pi}{\partial b}\frac{dy}{dn} + \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi}{\partial f}\frac{dz}{dn} \\ N &= \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi}{\partial g}\frac{dx}{dn} + \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi}{\partial f}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial \Pi}{\partial c}\frac{dz}{dn} \end{aligned}\right\}(1'')$$

3. Osservazioni. Le relazioni (1') diconsi *equazioni indefinite*, perchè valgono in ciascun punto del corpo. Le relazioni (1''), che son valide soltanto in superficie, diconsi *equazioni ai limiti*. Veramente le condizioni ai limiti si possono imporre in infiniti modi. Esse sono espresse dalle relazioni (1'') quando in superficie si dànno le *pressioni*. Se invece si assegnano i valori che gli *spostamenti* debbono assumere in superficie, le equazioni ai limiti sono appunto le uguaglianze mediante le quali si fissano i detti valori. Quale uso faremo delle equazioni indefinite e delle equazioni ai limiti? Si osservi che $\frac{\partial \Pi}{\partial a}, \frac{\partial \Pi}{\partial b}, \ldots$ sono funzioni lineari di $a, b, c, \ldots$, e che però contengono linearmente le derivate prime degli spostamenti. Le derivazioni ulteriori di $\frac{\partial \Pi}{\partial a}, \frac{\partial \Pi}{\partial b}, \ldots$, accennate nelle equazioni (1'), faranno poi comparire le derivate seconde di u, v, w. Adunque le equazioni indefinite sono equazioni alle derivate parziali del secondo ordine. Integrandole si otterranno le espressioni di u, v, w, contenenti quantità arbitrarie, le quali verranno determinate mediante sostituzione nelle equazioni ai limiti. Ma qui sorge un dubbio. Basteranno sempre le equazioni indefinite per individuare un sistema di spostamenti, e le equazioni ai limiti per completarne la determinazione?

4. Rispondiamo subito, dimostrando che, *a prescindere da moti rigidi, le equazioni indefinite e le equazioni ai limiti sono sufficienti per la determinazione degli spostamenti.* Supposto che esistano due sistemi di spostamenti, (u', v', w') ed (u'', v'', w''), soddisfacenti alle equazioni (1'), si considerino gli spostamenti

$$u' - u'' = u\ ,\quad v' - v'' = v\ ,\quad w' - w'' = w.$$

È chiaro che $a' - a'' = a$, $b' - b'' = b$, ecc.... Inoltre, osservando che $\frac{\partial \Pi}{\partial a}$, $\frac{\partial \Pi}{\partial b}$, ... contengono linearmente $a, b, c, \ldots$ si ha $\frac{\partial \Pi'}{\partial a'} - \frac{\partial \Pi''}{\partial a''} = \frac{\partial \Pi}{\partial a}$, ecc. Scritte le equazioni (1') per ciascun sistema di spostamenti, si ottiene, sottraendo,

$$\left\{\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Pi}{\partial a} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Pi}{\partial h} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Pi}{\partial g} \\
0 &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Pi}{\partial h} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Pi}{\partial b} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Pi}{\partial f} \\
0 &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Pi}{\partial g} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Pi}{\partial f} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Pi}{\partial c}
\end{aligned}\right.$$

Queste sono appunto le equazioni indefinite dell'equilibrio, nell'ipotesi che le forze di massa siano nulle. Operando analogamente sulle equazioni ai limiti, si trovano le equazioni (1''), in cui $L = L' - L''$, ecc. Dunque u, v, w si possono considerare come spostamenti dovuti alle forze

$$X = Y = Z = 0\ ,\ L = L' - L''\ ,\ M = M' - M''\ ,\ N = N' - N''.$$

Ora, se prendiamo $\delta u = u$, $\delta v = v$, $\delta w = w$ nell'uguaglianza (1), questa diventa

$$\int (Lu + Mv + Nw)\,ds + 2\int \Pi dS = 0\ , \tag{2}$$

perchè, in virtù del teorema di Eulero sulle funzioni omogenee,

$$\delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial a}\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \ldots = \frac{\partial \Pi}{\partial a} a + \ldots = 2\Pi\ .$$

Se per condizioni ai limiti si assegnano le *pressioni*, vuol dire che $L' = L''$, ecc., cioè $L = M = N = 0$. Se invece si dànno gli *spo-*

stamenti in superficie, vuol dire che sopra s dev'essere $u'=u''$, ecc., cioè $u=v=w=0$. Dunque in ogni caso è nullo il primo integrale dell'eguaglianza (2), e questa si riduce a

$$\int \Pi dS = 0 .$$

Il primo membro è una somma di quantità essenzialmente negative o nulle. È dunque necessario che sia nulla ciascuna di queste quantità, cioè che si abbia $\Pi=0$ in tutto il corpo. Ma si è già osservato che Π non può annullarsi se non per $a=b=c=f=g=h=0$, ed è noto che in tal caso i relativi spostamenti prendono la forma

$$u=l+qz-ry \;,\quad v=m+rx-pz \;,\quad w=n+py-qx \;,$$

essendo l, m, n, p, q, r costanti in tutto il corpo. Se in superficie si dànno gli *spostamenti*, si deve avere $l+qz-ry=0$, ecc., per infiniti valori di x, y, z. Ciò non può accadere se non si ha $l=m=n=p=q=r=0$, e conseguentemente $u=v=w=0$, cioè $u'=u''$, $v'=v''$, $w'=w''$ in tutto il corpo. Se invece si dànno le *pressioni*, esistono bensì infiniti sistemi di spostamenti, soddisfacenti ad (1′) e (1″); ma la configurazione finale del corpo è sempre la stessa. Del resto basta prescrivere i moti rigidi d'una particella qualsiasi perchè le equazioni (1′) e (1″) determinino completamente gli spostamenti. Infatti, presa l'origine nella particella considerata, si deve avere, per $x=y=z=0$,

$$u'=u'' \;,\quad \text{ecc.} \;;\quad \frac{\partial w'}{\partial y}-\frac{\partial v'}{\partial z}=\frac{\partial w''}{\partial y}-\frac{\partial v''}{\partial z} \;,\quad \text{ecc.} \;,$$

cioè $u=0,\ldots,\ \frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=0,\ldots$ Ne segue $l=m=n=p=q=r=0$; poi $u'=u''$, $v'=v''$, $w'=w''$ in tutto il corpo.

5. Caso dei mezzi isotropi. Si sa (III, 3) che, nel caso dell'isotropia, il potenziale unitario ha la forma

$$\Pi=-\frac{1}{2}(A-2B)(a+b+c)^2-B(a^2+b^2+c^2+2f^2+2g^2+2h^2).$$

Ne segue

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} = -(A-2B)\Theta - 2Ba \quad , \quad \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi}{\partial f} = -2Bf\,,$$

. . . .

e però la prima delle equazioni (1') diventa

$$X + (A-2B)\frac{\partial \Theta}{\partial x} + 2B\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z}\right) = 0\,. \tag{3}$$

Ora si ha

$$2\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z}\right) = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \Delta^2 u + \frac{\partial \Theta}{\partial x}\,.$$

Sostituendo in (3) e supponendo ripetuto il precedente calcolo per le altre due equazioni, si vede che le *equazioni indefinite* per l'equilibrio d'un corpo isotropo sono

$$\left\{\begin{aligned} X + (A-B)\frac{\partial \Theta}{\partial x} + B\Delta^2 u &= 0\,,\\ Y + (A-B)\frac{\partial \Theta}{\partial y} + B\Delta^2 v &= 0\,,\\ Z + (A-B)\frac{\partial \Theta}{\partial z} + B\Delta^2 w &= 0\,.\end{aligned}\right.$$

A queste equazioni si può dare un'altra forma, utile per l'integrazione, facendo comparire quattro funzioni di capitale importanza in questa teoria, cioè la *dilatazione cubica* Θ, e le *doppie componenti della rotazione della particella*, che indicheremo d'ora innanzi nel seguente modo:

$$\mathcal{T}_1 = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \;,\quad \mathcal{T}_2 = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \;,\quad \mathcal{T}_3 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\,.$$

Si ha

$$\Delta^2 u - \frac{\partial \Theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{\partial \mathcal{T}_2}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{T}_3}{\partial y}\;,$$

e le equazioni ottenute precedentemente diventano

$$\left\{\begin{aligned} & X + A\frac{\partial \Theta}{\partial x} + B\left(\frac{\partial \mathfrak{T}_2}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{T}_3}{\partial y}\right) = 0\,, \\ & Y + A\frac{\partial \Theta}{\partial y} + B\left(\frac{\partial \mathfrak{T}_3}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial z}\right) = 0\,, \\ & Z + A\frac{\partial \Theta}{\partial z} + B\left(\frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{T}_2}{\partial x}\right) = 0\,. \end{aligned}\right.$$

Quanto alle *equazioni ai limiti*, la prima delle (1″) diventa

$$L + (A - 2B)\,\Theta\frac{dx}{dn} + 2B\left(a\frac{dx}{dn} + h\frac{dy}{dn} + g\frac{dz}{dn}\right) = 0\,. \tag{4}$$

Ora si ha

$$\begin{aligned} 2\left(a\frac{dx}{dn} + h\frac{dy}{dn} + g\frac{dz}{dn}\right) &= 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{dy}{dn} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{dz}{dn} \\ &= 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dn}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{dy}{dn} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{dz}{dn} \end{aligned}$$

cioè

$$2\left(a\frac{dx}{dn} + h\frac{dy}{dn} + g\frac{dz}{dn}\right) = 2\frac{du}{dn} + \mathfrak{T}_3\frac{dy}{dn} - \mathfrak{T}_2\frac{dz}{dn}\,.$$

Sostituendo in (4) si ottiene la prima equazione della terna

$$\left\{\begin{aligned} & L + (A - 2B)\,\Theta\frac{dx}{dn} + 2B\frac{du}{dn} + B\left(\mathfrak{T}_3\frac{dy}{dn} - \mathfrak{T}_2\frac{dz}{dn}\right) = 0\,, \\ & M + (A - 2B)\,\Theta\frac{dy}{dn} + 2B\frac{dv}{dn} + B\left(\mathfrak{T}_1\frac{dz}{dn} - \mathfrak{T}_3\frac{dx}{dn}\right) = 0\,, \\ & N + (A - 2B)\,\Theta\frac{dz}{dn} + 2B\frac{dw}{dn} + B\left(\mathfrak{T}_2\frac{dx}{dn} - \mathfrak{T}_1\frac{dy}{dn}\right) = 0\,. \end{aligned}\right.$$

6. Si deve a Borchardt (*) una ingegnosa *decomposizione dell'espressione di* Π *in due parti, una delle quali non reca contributo alcuno alle equazioni indefinite.* Ricordando il processo che ci ha condotti alle equazioni dell'equilibrio, riesce chiaro che, quando si ha in vista la sola formazione delle equazioni indefinite,

(*) *Ueber die Transformation der Elasticitätsgleichungen* (Giornale di Crelle, 1873, p. 45).

è lecito trascurare tutti quei termini di Π che in $\int \delta\Pi dS$ dànno luogo ad integrali di spazio, identicamente nulli, o ad integrali di superficie. Ora, se si osserva che

$$f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{1}{2}\mathfrak{T}_1 + \frac{\partial v}{\partial z}$$

e conseguentemente

$$f^2 = \frac{1}{4}\mathfrak{T}_1^{\,2} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\frac{\partial v}{\partial z} + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{4}\mathfrak{T}_1^{\,2} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z},$$

al potenziale

$$\Pi = -\frac{A}{2}(a+b+c)^2 - 2B(f^2+g^2+h^2-bc-ca-ab)$$

si può dar la forma $\Pi_0 + \Pi_1$, ponendo

$$\Pi_0 = -\frac{1}{2}\left[A\Theta^2 + B\left(\mathfrak{T}_1^{\,2} + \mathfrak{T}_2^{\,2} + \mathfrak{T}_3^{\,2}\right)\right], \quad \Pi_1 = -2B\sum\left(\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

Per assicurarci che Π_1 non influisce sulle equazioni indefinite osserviamo che $\int \delta\Pi_1 dS$ si scinde in tre parti analoghe alla seguente:

$$\int\left(\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial \delta v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial \delta w}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial \delta v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial \delta w}{\partial z}\right)dS$$

$$= \int\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\delta v - \frac{\partial v}{\partial y}\delta w\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\delta v - \frac{\partial v}{\partial z}\delta w\right)\right)dS$$

$$- \int\left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y}\right)\delta v - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y}\right)\delta w\right)dS.$$

Il primo integrale si trasforma in integrale di superficie ed il secondo è identicamente nullo. Dunque il potenziale elastico, in quanto ha influenza sulle equazioni indefinite dell'equilibrio, si può riguardare come una combinazione lineare del *quadrato della dilatazione* cubica col *quadrato della rotazione* del mezzo, ed i coefficienti della combinazione sono proporzionali alle costanti d'isotropia.

V. IL TEOREMA DI BETTI.

1. Questo importante teorema (*) stabilisce una relazione fra due sistemi di forze ed i relativi sistemi di spostamenti in uno stesso corpo elastico. Siano (u, v, w) ed (u', v', w') gli spostamenti che definiscono le configurazioni prese dal corpo sotto l'azione dei sistemi (X, Y, Z, L, M, N) ed (X', Y', Z', L', M', N') rispettivamente. Per la prima configurazione le condizioni di equilibrio si riassumono (IV, 1) nella relazione

$$\int \delta\Pi \, dS + \int (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w)\, dS + \int (L\delta u + M\delta v + N\delta w)\, ds = 0\,,$$

che deve aver luogo qualunque siano le variazioni δu, δv, δw, ed in particolare per $\delta u = u'$, $\delta v = v'$, $\delta w = w'$, nel qual caso la relazione precedente diventa

$$\int \left(\frac{\partial \Pi}{\partial a} a' + .. + \frac{\partial \Pi}{\partial h} h' \right) dS + \int (Xu' + Yv' + Zw')\, dS + \int (Lu' + Mv' + Nw')\, ds = 0\,.$$

Similmente si ha

$$\int \left(\frac{\partial \Pi'}{\partial a'} a + .. + \frac{\partial \Pi'}{\partial h'} h \right) dS + \int (X'u + Y'v + Z'w)\, dS + \int (L'u + M'v + N'w)\, ds = 0.$$

E poichè, per una nota proprietà delle forme quadratiche,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} a' + \frac{\partial \Pi}{\partial b} b' + \ldots + \frac{\partial \Pi}{\partial h} h' = \frac{\partial \Pi'}{\partial a'} a + \frac{\partial \Pi'}{\partial b'} b + \ldots + \frac{\partial \Pi'}{\partial h'} h\,,$$

(*) Betti, *Teoria della elasticità*, cap. VI. Vedi anche una comunicazione di M. Lévy all'Accademia di Parigi (*Comptes-rendus*, 13 Août, 1888).

si ha pure

$$\int (Xu' + Yv' + Zw')\,dS + \int (Lu' + Mv' + Nw')\,ds$$
$$= \int (X'u + Y'v + Z'w)\,dS + \int (L'u + M'v + N'w)\,ds. \qquad (1)$$

Questo è il *teorema di Betti.*

2. Facciamone una prima applicazione prendendo

$$u' = l + qz - ry\ , \quad v' = m + rx - pz\ , \quad w' = n + py - qx\,,$$

con l, m, n, p, q, r costanti in tutto il corpo. Si ha

$$a' = b' = c' = f' = g' = h' = 0\,;$$

poi $\Pi' = 0$. Sostituendo nelle equazioni dell'equilibrio si ottiene

$$X' = Y' = Z' = L' = M' = N' = 0\,,$$

e la relazione (1) diventa

$$\int [X(l + qz - ry) + \ldots]\,dS + \int [L\,(l + qz - ry) + \ldots]\,ds = 0\,.$$

Per l'arbitrarietà di l, m, n, p, q, r, l'ultima equazione si scinde nelle sei seguenti

$$\left\{\begin{array}{ll} \int X dS + \int L ds = 0\ , & \int (Yz - Zy)\,dS + \int (Mz - Ny)\,ds = 0\ , \\ \int Y dS + \int M ds = 0\ , & \int (Zx - Xz)\,dS + \int (Nx - Lz)\,ds = 0\ , \\ \int Z dS + \int N ds = 0\ ., & \int (Xy - Yx)\,dS + \int (Ly - Mx)\,ds = 0\ , \end{array}\right.$$

le quali esprimono che le forze esterne si fanno equilibrio. Dunque *per l'equilibrio dei corpi elastici sono necessarie le condizioni che assicurano l'equilibrio dei corpi rigidi* (*).

(*) Betti, *loc. cit.* Vedi anche Clebsch, *Théorie de l'élasticité*, p. 2.

3. Ora prendiamo

$$u'=a'x+h'y+g'z\ ,\quad v'=h'x+b'y+f'z\ ,\quad w'=g'x+f'y+c'z\ ,$$

con a', b', c', f', g', h' costanti in tutto il corpo. Anche $\frac{\partial\Pi'}{\partial a'}, \frac{\partial\Pi'}{\partial b'}, \ldots$ sono costanti, e però le equazioni indefinite dànno $X'=Y'=Z'=0$. Se determiniamo $a', b', \ldots$, mediante le sei equazioni di primo grado

$$\frac{\partial\Pi'}{\partial a'}=\frac{\partial\Pi'}{\partial b'}=\frac{\partial\Pi'}{\partial c'}=1\ ,\quad \frac{\partial\Pi'}{\partial f'}=\frac{\partial\Pi'}{\partial g'}=\frac{\partial\Pi'}{\partial h'}=0\ , \tag{2}$$

le equazioni ai limiti ci dànno

$$L'=\frac{dx}{dn}\ ,\quad M'=\frac{dy}{dn}\ ,\quad N'=\frac{dz}{dn}\ ,$$

ed il secondo membro di (1) diventa

$$\int\left(u\frac{dx}{dn}+v\frac{dy}{dn}+w\frac{dz}{dn}\right)ds=-\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dS=-\int\Theta dS\ .$$

Dunque

$$\int\Theta dS=-\int(Xu'+Yv'+Zw')dS-\int(Lu'+Mv'+Nw')ds\ . \tag{3}$$

Questa notevole formola fa conoscere la dilatazione totale d'un corpo elastico, quando sono date le forze esterne.

4. Applichiamo la formola (3) al caso d'un corpo isotropo. Siccome si ha

$$\Pi=-\frac{1}{2}(A-2B)(a+b+c)^2-B(a^2+b^2+c^2+2f^2+2g^2+2h^2),$$

le equazioni (2) diventano

$$\left\{\begin{aligned}&-(A-2B)(a'+b'+c')-2Ba'=1\ ,\quad f'=0\ ,\\&-(A-2B)(a'+b'+c')-2Bb'=1\ ,\quad g'=0\ ,\\&-(A-2B)(a'+b'+c')-2Bc'=1\ ,\quad h'=0\ .\end{aligned}\right.$$

Dalle equazioni di sinistra si deduce, sommando,

$$-(3A-4B)(a'+b'+c')=3\,;$$

poi, sostituendo nelle medesime equazioni,

$$a'=b'=c'=-\frac{1}{3A-4B}.$$

Finalmente

$$\frac{u'}{x}=\frac{v'}{y}=\frac{w'}{z}=-\frac{1}{3A-4B}.$$

Sostituendo in (3) si ottiene

$$\int\Theta dS=\frac{1}{3A-4B}\left(\int(Xx+Yy+Zz)\,dS+\int(Lx+My+Nz)\,ds\right). \quad (4)$$

5. Supponiamo, per esempio, che si eserciti una pressione uniforme sulla superficie d'un corpo isotropo, essendo nulle o trascurabili le forze di massa, e si domandi quale sarà la variazione di volume del corpo. Nel caso attuale

$$X=Y=Z=0\ ;\quad L=p\frac{dx}{dn}\ ,\quad M=p\frac{dy}{dn}\ ,\quad N=p\frac{dz}{dn}.$$

La formola (4) ci dà

$$\int\Theta dS=\frac{p}{3A-4B}\int\left(x\frac{dx}{dn}+y\frac{dy}{dn}+z\frac{dz}{dn}\right)ds=-\frac{p}{3A-4B}\int 3dS\,,$$

cioè

$$\frac{\int\Theta dS}{S}=-\frac{3p}{3A-4B}.$$

Il primo membro rappresenta la dilatazione per unità di volume. Essa è dunque, per un dato corpo, proporzionale alla pressione. In pratica si dà il nome di *coefficiente di compressibilità cubica* e si rappresenta con q la diminuzione subìta dall'unità di volume sotto l'unità di pressione. Dalla formola precedente si deduce

$$q=\frac{3}{3A-4B}.$$

Si considera in pratica anche un altro coefficiente E, che si chiama il *modulo di Young* o *coefficiente di elasticità di trazione*. In seguito si vedrà che

$$Eq = \frac{3B}{A - B},$$

e si conosceranno i mezzi che permettono di determinare sperimentalmente E e q, e conseguentemente di calcolare le costanti d'isotropia A e B per ciascun corpo. Secondo l'antica teoria di Navier e Poisson si dovrebbe avere sempre $A = 3B$, e quindi $Eq = \frac{3}{2}$; ma le più recenti esperienze hanno dimostrato che, se Eq ha questo valore per talune specie di cristalli, negli altri corpi, e specialmente nei metalli, il suo valore è molto lontano da $\frac{3}{2}$.

6. Proponiamoci ancora di determinare l'alterazione di volume che subisce un corpo elastico omogeneo *sotto l'azione del proprio peso*. Il corpo si supponga sostenuto mediante forze applicate verticalmente a punti d'un piano orizzontale. Posta l'origine nel baricentro, e diretto l'asse delle z in senso opposto a quello della gravità, sia $z = h$ l'equazione del piano di sostegno. Per ipotesi è $X = Y = L = M = 0$, mentre il rapporto di Z a ρ è una costante, uguale e di segno contrario all'accelerazione della gravità. La formola (3) diventa

$$\int \Theta dS = -Z \int (g'x + f'y + c'z) dS - \int N(g'x + f'y + c'z) ds.$$

Ma per l'equilibrio esterno è necessario che sia

$$\int N ds = P \quad , \quad \int N x ds = \int N y ds = 0,$$

dove P rappresenta il peso del corpo. Inoltre, per la scelta dell'origine, si ha

$$\int x dS = \int y dS = \int z dS = 0.$$

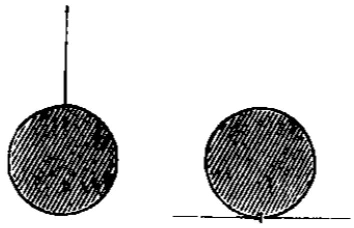
Dunque

$$\int \Theta dS = - c' \int Nzds = - c'h \int Nds = - c'hP .$$

Se il corpo è isotropo

$$\int \Theta dS = \frac{hP}{3A - 4B} = \frac{1}{3} qhP .$$

In generale si può dire che, per una determinata orientazione, la totale variazione di volume è proporzionale al peso del corpo ed alla distanza del suo centro di gravità dal piano di sostegno. Per esempio, le variazioni di volume d'una sfera omogenea ed isotropa, sospesa ad un filo rigido o sostenuta da un piano rigido, sono eguali e di senso contrario, e proporzionali alla quarta potenza del raggio (*). Si osservi che, per un corpo qualunque, se il piano di sostegno contiene il centro di gravità, la parte superiore diminuisce o aumenta di quanto aumenta o diminuisce la parte inferiore, dimodochè resta invariato il volume totale.

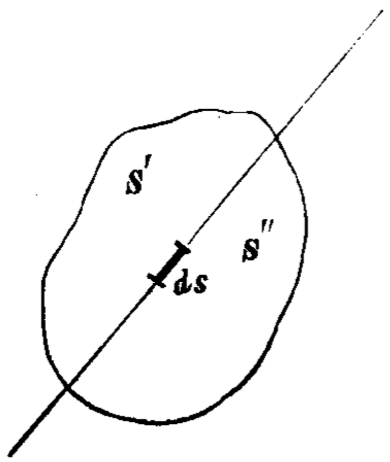


VI. DISTRIBUZIONE DELLE AZIONI INTERNE.

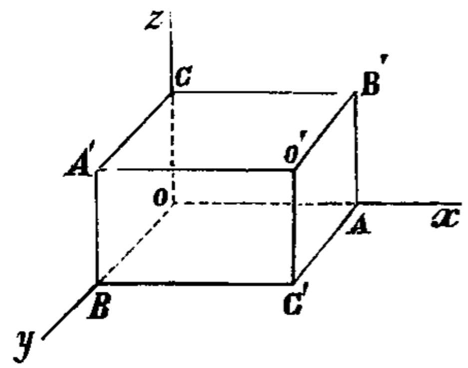
1. Finora si sono studiate le deformazioni elastiche senza preoccupazione alcuna delle forze che si sviluppano, per effetto delle deformazioni stesse, nell'interno dei corpi. Ora, ponendoci da un altro punto di vista, vogliamo trarre dalla considerazione diretta di queste forze interne le formole fondamentali per lo studio dell'equilibrio elastico. Il paragone fra le formole ottenute precedentemente e quelle che siamo per ottenere ci fornirà i mezzi di studiare la distribuzione delle azioni interne nei corpi elastici de-

(*) Betti, *Teoria della elasticità*, cap. VII.

formati. Prima facciamo un'osservazione. Nell'interno d'un corpo elastico S, già deformato ed equilibrato, si consideri un elemento superficiale ds, e si immagini prolungato il piano che lo contiene, in modo da tagliare S in due parti, S' ed S''. Fra tutte le forze dirette dai punti di S' verso quelli di S'' consideriamo soltanto quelle, le cui linee di azione attraversano ds. Esse hanno una certa risultante, che indicheremo con pds. Similmente le azioni che i punti di S'' esercitano sui punti di S', attraverso ds, hanno una risultante, eguale e di segno contrario alla prima, se, come si suppone, il corpo è in equilibrio. La funzione p rappresenta (*) la *pressione* su ds, per unità di superficie.



2. Equazioni indefinite. Ciò premesso, scomponiamo il corpo in elementi parallelepipedi mediante tre sistemi di piani, paralleli ai piani coordinati. Consideriamo uno di questi parallelepipedi, e scriviamo che trovasi in equilibrio sotto l'azione delle forze interne e delle forze di massa. Il piano Oyz divide il corpo in due parti. Chiamiamo p_x la pressione unitaria esercitata, attraverso $OBCA'$, dalla parte che non contiene il parallelepipedo su quella che lo contiene, dimodochè $p_x dydz$ sia la pressione su $OBCA'$, considerata come positiva quando è diretta verso l'interno del parallelepipedo. Similmente siano $p_y dzdx$, $p_z dxdy$ le pressioni subite dalle facce $OCAB'$, $OABC'$. Indicheremo con p_{xx}, p_{xy}, p_{xz} le componenti di p_x secondo Ox, Oy, Oz; ecc. Quando dalla faccia $OBCA'$ si passa alla faccia opposta $O'B'C'A$, le funzioni p_{xx}, p_{xy}, p_{xz} diventano



$$p_{xx} + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} dx \ , \ p_{xy} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} dx \ , \ p_{xz} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} dx \ .$$

(*) Sui varii modi di definire la *pressione* vedi l'eccellente *Cours de physique mathématique* di P. Duhem (Paris, A. Hermann, 1891, t. II, p. 257).

Dunque la pressione su $O'B'C'A$, considerata come *rivolta sul parallelepipedo*, ha per componenti $-\left(p_{xx}+\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}dx\right)dydz\,, \ldots$, e però le pressioni interne, computate secondo l'asse delle x, dànno luogo alla somma

$$p_{xx}dydz+p_{yx}dzdx+\ldots-\left(p_{xx}+\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}dx\right)dydz-\ldots=-\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zx}}{\partial z}\right)dS.$$

Scrivendo che la somma delle forze che agiscono sul parallelepipedo secondo ciascun asse è uguale a zero, si ottengono le equazioni indefinite per l'equilibrio:

$$\left\{\begin{aligned} X&=\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zx}}{\partial z}\,,\\ Y&=\frac{\partial p_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zy}}{\partial z}\,,\\ Z&=\frac{\partial p_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zz}}{\partial z}\,. \end{aligned}\right. \tag{1}$$

3. Bisogna ancora scrivere le equazioni dei momenti. Si premetta che, essendo le forze esterne infinitesime del terzo ordine, esse dànno luogo a momenti trascurabili rispetto a quelli delle pressioni interne. Per semplicità componiamo intorno al centro del parallelepipedo, ed osserviamo che, per la continuità di cui si suppongono dotate, in direzione ed intensità, le pressioni p, è lecito ammettere che le loro risultanti sono applicate ai centri delle rispettive facce. Ricordiamoci che i momenti dovuti ad una forza (X, Y, Z) applicata nel punto (x, y, z) sono $Zy-Yz$, $Xz-Zx$, $Yx-Xy$. Ciò premesso, trascurando nelle forze gli infinitesimi di ordine superiore al secondo, abbiamo

nel punto $\left(-\frac{1}{2}dx\,,0\,,0\right)$ una forza le cui componenti sono $p_{xx}dydz\,,\quad p_{xy}dydz\,,\quad p_{xz}dydz\,;$

» $\left(0\,,-\frac{1}{2}dy\,,0\right)$ » » » $p_{yx}dzdx\,,\quad p_{yy}dzdx\,,\quad p_{yz}dzdx\,;$

» $\left(0\,,0\,,-\frac{1}{2}dz\right)$ » » » $p_{zx}dxdy\,,\quad p_{zy}dxdy\,,\quad p_{zz}dxdy\,;$

» $\left(\frac{1}{2}dx\,,\,0\,,\,0\right)$ » » » $-p_{xx}dydz\,,\ -p_{xy}dydz\,,\ -p_{xz}dydz\,;$

. . . .

Il momento della coppia risultante, che agisce parallelamente al piano delle yz, è dunque

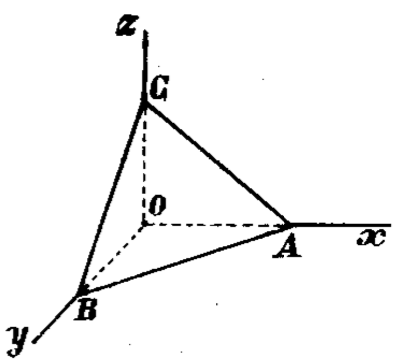
$$-dy\,.\,p_{yz}\,dz\,dx + dz\,.\,p_{zy}\,dx\,dy = (p_{zy} - p_{yz})\,dS\,,$$

e però le equazioni dei momenti sono

$$p_{yz} = p_{zy} \quad , \quad p_{zx} = p_{xz} \quad , \quad p_{xy} = p_{yx}\,.$$

Per conseguenza le *nove* funzioni p si riducono sempre a *sei* distinte. Vedremo che, una volta introdotto il concetto di elasticità, esse si ridurranno a *tre*.

4. **Equazioni ai limiti.** In superficie la triplice famiglia di piani determina elementi tetraedrici, quali $OABC$. Rappresentando con ds, ds_1, ds_2, ds_3 le aree di ABC, OBC, OCA, OAB, si deve avere, per l'equilibrio,



$$L ds + p_{xx} ds_1 + p_{yx} ds_2 + p_{zx} ds_3 = 0\ ;\ \text{ecc.}$$

Ora si osservi che

$$ds_1 = -\frac{dx}{dn} ds \quad , \quad ds_2 = -\frac{dy}{dn} ds \quad , \quad ds_3 = -\frac{dz}{dn} ds\,.$$

Ne segue che le equazioni ai limiti sono

$$\left\{\begin{aligned} L &= p_{xx}\frac{dx}{dn} + p_{yx}\frac{dy}{dn} + p_{zx}\frac{dz}{dn}\,, \\ M &= p_{xy}\frac{dx}{dn} + p_{yy}\frac{dy}{dn} + p_{zy}\frac{dz}{dn}\,, \\ N &= p_{xz}\frac{dx}{dn} + p_{yz}\frac{dy}{dn} + p_{zz}\frac{dz}{dn}\,. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

5. Passiamo a studiare la *variazione delle pressioni* intorno a ciascun punto. Preso un elemento tetraedrico come $OABC$ nell'*interno* del corpo, sia $p_n ds$ l'azione esercitata, attraverso ds, da quella parte del corpo, che contiene il tetraedro, su quella che non lo

contiene. La pressione computata come *rivolta sul tetraedro* è $-p_n ds$, e per l'equilibrio si deve avere

$$-p_{nx}ds + p_{xx}ds_1 + p_{yx}ds_2 + p_{zx}ds_3 = 0\,; \quad \text{ecc.}$$

Se α, β, γ sono i coseni direttori della perpendicolare ad ABC, abbassata da O, si ha $ds_1 = \alpha ds$, $ds_2 = \beta ds$, $ds_3 = \gamma ds$; poi

$\alpha_x + X_y \alpha_y + X_z \alpha_z$

$$\begin{cases} p_{nx} = \alpha p_{xx} + \beta p_{yx} + \gamma p_{zx}\,, \\ p_{ny} = \alpha p_{xy} + \beta p_{yy} + \gamma p_{zy}\,, \\ p_{nz} = \alpha p_{xz} + \beta p_{yz} + \gamma p_{zz}\,. \end{cases} \tag{3}$$

Queste relazioni, indipendenti dalle dimensioni del tetraedro, sussistono evidentemente quando l'elemento ABC, spostandosi parallelamente a sè stesso, finisce per contenere il punto O. Si hanno allora quattro elementi incrociantisi in O, e le relazioni (3) mostrano che, conoscendo le pressioni su tre elementi, la pressione sopra un quarto elemento è determinata per intensità e direzione. *Come variano la direzione e l'intensità della pressione quando l'elemento superficiale che la sopporta ruota intorno ad O?*

6. Prima domandiamoci se esistono elementi che subiscono soltanto pressioni tangenziali. Per brevità porremo

$$P(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha^2 p_{xx} + \beta^2 p_{yy} + \gamma^2 p_{zz} + 2\beta\gamma p_{yz} + 2\gamma\alpha p_{zx} + 2\alpha\beta p_{xy}\,,$$

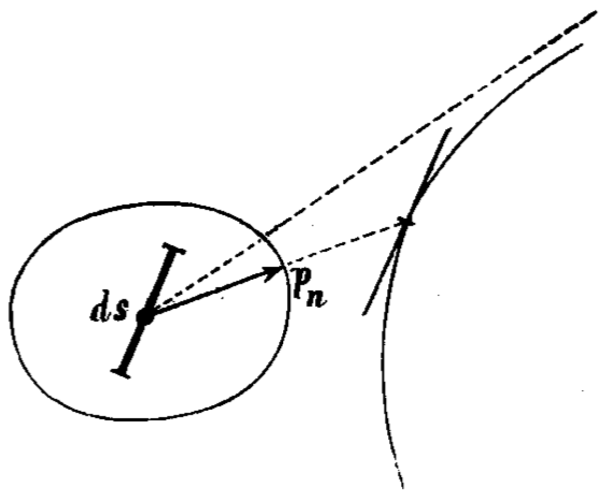
e, chiamato Δ il discriminante di questa forma, rappresenteremo con

$$\begin{vmatrix} q_{xx} & q_{yx} & q_{zx} \\ q_{xy} & q_{yy} & q_{zy} \\ q_{xz} & q_{yz} & q_{zz} \end{vmatrix}$$

il reciproco di Δ, e con $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ la forma reciproca di P. Ora, per le (3), la condizione di ortogonalità

$$\alpha p_{nx} + \beta p_{ny} + \gamma p_{nz} = 0$$

diventa $P = 0$, e questa equazione rappresenta un cono quadrico, luogo delle perpendicolari agli elementi superficiali, sollecitati solo tangenzialmente. È noto che l'equazione dell'inviluppo dei piani condotti, pel vertice di P, perpendicolarmente alle generatrici, è appunto $Q = 0$. Questo secondo cono, quando è reale, divide lo spazio angolare, intorno al punto considerato, in due regioni, e mentre gli elementi superficiali immersi in una regione subiscono soltanto *pressioni* propriamente dette, gli altri sopportano invece delle *tensioni*. Se il cono Q è immaginario, ciò vuol dire che gli elementi superficiali incrociantisi nel punto considerato sono tutti soggetti a pressioni, o tutti a tensioni. In questo caso si consideri la superficie $Q = \pm \Delta$, scegliendo il segno del secondo membro in modo che si abbia una superficie reale (necessariamente un ellissoide). Nel primo caso, invece, si prenda il segno $+$ in una regione ed il segno $-$ nell'altra, in modo che l'equazione $Q = \pm \Delta$ rappresenti una coppia di superficie reali, cioè due iperboloidi ad una ed a due falde, aventi in comune il cono assintotico $Q = 0$. In ogni caso la superficie $Q = \pm \Delta$ si chiama (*) *superficie direttrice* perchè basta la sua conoscenza per determinare la direzione della pressione su ciascun elemento. Infatti, se si osserva che si ha, in virtù delle (3),



$$\begin{cases} p_{nx} q_{xx} + p_{ny} q_{xy} + p_{nz} q_{xz} = \alpha \Delta \,, \\ p_{nx} q_{yx} + p_{ny} q_{yy} + p_{nz} q_{yz} = \beta \Delta \,, \\ p_{nx} q_{zx} + p_{ny} q_{zy} + p_{nz} q_{zz} = \gamma \Delta \,, \end{cases} \tag{4}$$

si vede subito che *il piano conjugato alla direzione di* p_n *è* $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, *cioè il piano stesso dell'elemento*. Quanto al-

(*) Lamé, *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, § CXLI.

l'intensità, se x, y, z sono le coordinate dell'estremità del segmento rappresentativo di p_n, le (4), quadrate e sommate, dànno

$$(xq_{xx}+yq_{xy}+zq_{xz})^2+(xq_{yx}+yq_{yy}+zq_{yz})^2+(xq_{zx}+yq_{zy}+zq_{zz})^2=\Delta^2.$$

Dunque *i valori assoluti delle pressioni o tensioni intorno ad un punto variano come i diametri di un ellissoide.* Questo si chiama *ellissoide di elasticità*. Se disponiamo gli assi coordinati parallelamente agli assi di P, dimodochè si abbia $p_{yz}=p_{zx}=p_{xy}=0$, le equazioni della superficie direttrice e dell'ellissoide di elasticità diventano

$$\frac{x^2}{\varpi_1}+\frac{y^2}{\varpi_2}+\frac{z^2}{\varpi_3}=\pm 1 \ ,$$

$$\frac{x^2}{\varpi_1^2}+\frac{y^2}{\varpi_2^2}+\frac{z^2}{\varpi_3^2}=1 \ ,$$

e si vede così più facilmente che le dette superficie hanno gli stessi assi. Inoltre certi due elementi superficiali, perpendicolari fra loro, sopportano la minima e la massima tensione, ed appartengono alla terna, generalmente unica, degli elementi non soggetti a pressioni oblique. È poi chiaro che, qualunque sia l'orientazione degli assi, i valori $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3$ delle *pressioni principali* sono le radici dell'equazione

$$\begin{vmatrix} p_{xx}-\varpi & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy}-\varpi & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz}-\varpi \end{vmatrix}=0.$$

7. Il paragone fra le equazioni dell'equilibrio, indefinite ed ai limiti, ottenute nel quarto capitolo, e le equazioni (1) e (2), mostra che *nei corpi elastici* le funzioni p dipendono da *tre* sole funzioni u, v, w mediante le relazioni

$$p_{xx}=\frac{\partial\Pi}{\partial a} \ , \quad p_{yy}=\frac{\partial\Pi}{\partial b}, \ldots, \ p_{yz}=p_{zy}=\frac{1}{2}\frac{\partial\Pi}{\partial f}, \ldots,$$

cioè, adoperando la segnatura del terzo capitolo,

$$\left\{\begin{array}{l} -p_{xx} = Aa + C'b + B'c + 2(F_1 f + G_1 g + H_1 h) \\ -p_{yy} = C'a + Bb + A'c + 2(F_2 f + G_2 g + H_2 h) \\ -p_{zz} = B'a + A'b + Cc + 2(F_3 f + G_3 g + H_3 h) \\ -p_{yz} = F_1 a + F_2 b + F_3 c + 2(Ff + H'g + G'h) \\ -p_{zx} = G_1 a + G_2 b + G_3 c + 2(H'f + Gg + F'h) \\ -p_{xy} = H_1 a + H_2 b + H_3 c + 2(G'f + F'g + Hh) \end{array}\right.$$

Son queste le formole che fanno conoscere la distribuzione delle forze interne in ogni punto d'un mezzo elastico deformato. Se, nel punto che si considera, il mezzo è dotato di piani di simmetria, spariscono (III, 2) le elasticità asimmetriche, e si ha semplicemente

$$\left\{\begin{array}{ll} -p_{xx} = Aa + C'b + B'c\ , & -p_{yz} = 2Ff\ , \\ -p_{yy} = C'a + Bb + A'c\ , & -p_{zx} = 2Gg\ , \\ -p_{zz} = B'a + A'b + Cc\ , & -p_{xy} = 2Hh\ . \end{array}\right.$$

Con queste formole è facile (*) spiegarsi le denominazioni proposte da Rankine per distinguere fra loro i diversi coefficienti di elasticità.

VII. MOTO ELASTICO.

1. **Equazioni del moto elastico.** Supponiamo che i punti del corpo, invece di trovarsi in equilibrio, vibrino intorno a certe posizioni fisse (x, y, z), e si trovino, alla fine del tempo t, nelle posizioni $(x+u, y+v, z+w)$. In tal caso gli spostamenti u, v, w sono certe funzioni di x, y, z, t, determinate le quali riesce nota la serie delle configurazioni che il sistema va assumendo col va-

(*) CLEBSCH, *Théorie de l'élasticité*, p. 38.

riare del tempo. Alla determinazione di u, v, w provvedono le equazioni del moto, che si deducono dalle equazioni indefinite (IV, 2) dell'equilibrio facendo uso del solito *principio di d'Alembert*, esprimendo cioè che tutto succede come se il corpo fosse ad ogni istante in equilibrio sotto l'azione delle forze propriamente dette e di forze fittizie, uguali e di segno contrario a quelle che produrrebbero il moto effettivo di ciascun punto. Queste ultime vengono misurate dal prodotto della massa ρdS per l'accelerazione, le cui componenti sono, com'è noto,

$$\frac{\partial^2(x+u)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,,\qquad \frac{\partial^2(y+v)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\,,\qquad \frac{\partial^2(z+w)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\,.$$

Così vediamo che le equazioni indefinite del moto si deducono dalle equazioni indefinite dell'equilibrio sostituendo $XdS-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\rho dS$ a XdS, ecc. È poi evidente che le condizioni ai limiti restano sempre le stesse. Il problema del moto elastico si risolve dunque con le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} X-\rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial\Pi}{\partial a}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial\Pi}{\partial h}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial\Pi}{\partial g}\,, \\ Y-\rho\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial\Pi}{\partial h}+\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial\Pi}{\partial b}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial\Pi}{\partial f}\,, \\ Z-\rho\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial\Pi}{\partial g}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial\Pi}{\partial f}+\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial\Pi}{\partial c}\,, \end{cases} \tag{1}$$

completate dalle equazioni ai limiti (IV, 2).

2. Teorema: *Se le forze esterne non variano col tempo, il problema generale del moto elastico è sempre scomponibile in due problemi speciali:* 1° *un problema di semplice equilibrio;* 2° *un problema di moto sotto l'azione delle sole forze elastiche.*

Siano infatti u', v', w' gli spostamenti che bisogna dare ai punti del corpo perchè rimangano in equilibrio sotto l'azione delle forze esterne e delle forze elastiche. Le funzioni u', v', w', indipendenti da t, debbono soddisfare alle equazioni (1') ed (1'') del quarto capitolo. Sottraendo queste dalle equazioni (1') ed (1''), relative al sistema (u, v, w) di spostamenti, si ottengono le relazioni

$$-\rho \frac{\partial^2 u''}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Pi''}{\partial a''} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Pi''}{\partial h''} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Pi''}{\partial g''},$$

$$0 = \frac{\partial \Pi''}{\partial a''}\frac{dx}{dn} + \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi''}{\partial h''}\frac{dy}{dn} + \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi''}{\partial g''}\frac{dz}{dn}, \qquad (2)$$

. . . .

alle quali debbono soddisfare gli spostamenti residui $u - u' = u''$, $v - v' = v''$, $w - w' = w''$. Le relazioni (2) sono precisamente le equazioni del moto elastico, nel caso che manchino le forze esterne. È necessario supporre le forze esterne indipendenti dal tempo, perchè se X, per esempio, fosse funzione di t, siccome la X che comparisce nelle equazioni (1') non è che un valore particolare di questa funzione, la differenza fra le due X non sarebbe sempre nulla, ma varierebbe col tempo. Si osservi che il teorema dimostrato può ricevere la seguente notevole interpretazione: « *I punti d'un corpo elastico, soggetto a forze indipendenti dal tempo, vibrano intorno alle corrispondenti posizioni di equilibrio come vibrerebbero, liberi da forze esterne, intorno alle loro posizioni naturali* » (*).

3. Di quale natura è il moto dei punti d'un corpo elastico vibrante? In virtù dell'ultimo teorema, se si vuol riconoscere l'*indole* delle vibrazioni elastiche, è lecito supporre il corpo completamente libero. In questa ipotesi le equazioni del moto sono

$$(1')\left\{\begin{aligned}
-\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Pi}{\partial a} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Pi}{\partial h} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Pi}{\partial g}, \\
-\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Pi}{\partial h} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Pi}{\partial b} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Pi}{\partial f}, \\
-\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Pi}{\partial g} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Pi}{\partial f} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Pi}{\partial c},
\end{aligned}\right.
\quad
\left.\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial \Pi}{\partial a}\frac{dx}{dn} + \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi}{\partial h}\frac{dy}{dn} + \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi}{\partial g}\frac{dz}{dn} \\
0 &= \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi}{\partial h}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial \Pi}{\partial b}\frac{dy}{dn} + \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi}{\partial f}\frac{dz}{dn} \\
0 &= \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi}{\partial g}\frac{dx}{dn} + \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi}{\partial f}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial \Pi}{\partial c}\frac{dz}{dn}
\end{aligned}\right\}(1'')$$

(*) Vedi Clebsch, *Théorie de l'Élasticité*, p. 53.

Tentiamo di soddisfarle prendendo

$$u = u'\varphi(t)\ ,\quad v = v'\varphi(t)\ ,\quad w = w'\varphi(t)\ ,$$

con u', v', w' indipendenti dal tempo. Distinguendo con un apice tutto ciò che si riferisce ad u', v', w' si ha, per derivazione, $a = a'\varphi(t)$, $b = b'\varphi(t)$, ..., $h = h'\varphi(t)$, e conseguentemente

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} = \frac{\partial \Pi'}{\partial a'}\varphi(t)\ ,\quad \frac{\partial \Pi}{\partial b} = \frac{\partial \Pi'}{\partial b'}\varphi(t)\ ,\ \ldots\ ,\quad \frac{\partial \Pi}{\partial h} = \frac{\partial \Pi'}{\partial h'}\varphi(t)\ ,$$

poichè $\frac{\partial \Pi}{\partial a}$, $\frac{\partial \Pi}{\partial b}$, ..., $\frac{\partial \Pi}{\partial h}$ si esprimono linearmente in $a, b, \ldots, h$. Ciò premesso, la prima delle (1′) diventa

$$-\frac{\rho u'}{\varphi}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Pi'}{\partial a'} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Pi'}{\partial h'} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Pi'}{\partial g'}\ ,$$

e siccome il secondo membro è indipendente dal tempo, è necessario che altrettanto avvenga del primo, e sia, per conseguenza,

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -k^2\varphi\ ,$$

dove con $-k^2$ si è voluto rappresentare una costante qualunque. Dunque la più generale forma possibile della funzione φ è

$$\varphi(t) = \lambda\cos(kt) + \mu\,\mathrm{sen}(kt)\ ,$$

e le equazioni (1′) ed (1″) diventano

$$(2')\left\{\begin{aligned}
\rho k^2 u' &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Pi'}{\partial a'} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Pi'}{\partial h'} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Pi'}{\partial g'}\\
\rho k^2 v' &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Pi'}{\partial h'} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Pi'}{\partial b'} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Pi'}{\partial f'}\\
\rho k^2 w' &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Pi'}{\partial g'} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Pi'}{\partial f'} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Pi'}{\partial c'}
\end{aligned}\right.\ ,\quad
\left.\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial \Pi'}{\partial a'}\frac{dx}{dn} + \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi'}{\partial h'}\frac{dy}{dn} + \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi'}{\partial g'}\frac{dz}{dn}\\
0 &= \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi'}{\partial h'}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial \Pi'}{\partial b'}\frac{dy}{dn} + \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi'}{\partial f'}\frac{dz}{dn}\\
0 &= \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi'}{\partial g'}\frac{dx}{dn} + \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi'}{\partial f'}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial \Pi'}{\partial c'}\frac{dz}{dn}
\end{aligned}\right\}(2'')$$

Supponiamo che, con un mezzo qualsiasi, si pervenga ad integrare le equazioni (2′). Allora u', v', w' sono certe funzioni di x, y, z, ed anche di k^2, la cui sostituzione nelle (2″) ci fornisce, per eliminazione di x, y, z fra le medesime (2″) e l'equazione della superficie, un'equazione in k^2, che ammette come radici tutti i valori possibili $k_1^2, k_2^2, k_3^2, \ldots$ di k^2. Ad ogni k_i^2 corrisponde una speciale soluzione $u' = u_i$, $v' = v_i$, $w' = w_i$ delle equazioni (2′) e (2″), e conseguentemente una soluzione particolare delle equazioni (1′) ed (1″), delle quali si ottiene (*) la soluzione generale combinando linearmente tutte le possibili soluzioni, cioè scrivendo

$$u = \sum_{i=1}^{i=\infty} u_i \varphi_i(t) \quad , \quad v = \sum_{i=1}^{i=\infty} v_i \varphi_i(t) \quad , \quad w = \sum_{i=1}^{i=\infty} w_i \varphi_i(t) \quad , \tag{2}$$

dove

$$\varphi_i(t) = \lambda_i \cos(k_i t) + \mu_i \operatorname{sen}(k_i t) .$$

Più oltre si vedrà come si determinino le costanti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \mu_1, \mu_2, \ldots$ mediante le *circostanze iniziali* del moto.

4. Distinguiamo con indici i e j due soluzioni delle equazioni (2′), corrispondenti ai valori k_i e k_j di k. Per renderci conto della natura delle vibrazioni (2) è d'uopo dimostrare una importante proprietà dell'integrale

$$K_{ij} = \int (u_i u_j + v_i v_j + w_i w_j) \rho dS .$$

Le (2′) e le (2″), relative agli spostamenti u_i, v_i, w_i, si possono considerare come le equazioni dell'equilibrio, in cui si ponga

$$X = \rho k^2 u_i \quad , \quad Y = \rho k^2 v_i \quad , \quad Z = \rho k^2 w_i \quad , \quad L = M = N = 0 .$$

Quindi per $\delta u = u_j$, $\delta v = v_j$, $\delta w = w_j$, l'eguaglianza (1) del quarto capitolo diventa

$$k_i^2 K_{ij} = -\int \left(a_j \frac{\partial \Pi_i}{\partial a_i} + b_j \frac{\partial \Pi_i}{\partial b_i} + \ldots + h_j \frac{\partial \Pi_i}{\partial h_i} \right) dS . \tag{3}$$

Siccome il secondo membro e K_{ij} non variano per lo scambio di i

(*) Vedi Poincaré, *Leçons sur la théorie de l'élasticité* (Paris, G. Carré, 1892, p. 112).

con j, è necessario che si abbia $k_i^2 K_{ij} = k_j^2 K_{ij}$, e poichè, per ipotesi, $k_i^2 \neq k_j^2$ se $i \neq j$, si ha pure $K_{ij} = 0$. Invece, se $i = j$, il secondo membro di (3) si riduce a $-2\int \Pi_i dS$. Riassumendo vediamo che

$$K_i = \left| \begin{array}{ll} -\dfrac{2}{k_i^2}\displaystyle\int \Pi_i dS \quad , & \text{se } i = j\,; \\ 0 \quad , & \text{se } i \neq j\,. \end{array} \right. \tag{4}$$

5. Utilizziamo l'ultimo risultato per dimostrare che *le costanti* $k_1, k_2, k_3, \ldots$ *sono tutte reali.* Dal processo seguito per ottenere l'equazione che ammette le radici $k_1^2, k_2^2, k_3^2, \ldots$ appare evidente che questa equazione *ha i coefficienti reali.* Ad ogni radice immaginaria corrisponde dunque la radice conjugata. Sia k_i^2, k_j^2, una coppia di tali radici. È chiaro che le equazioni (2′), scritte una volta con k_i^2 ed un'altra con k_j^2, forniscono per u_i ed u_j, v_i e v_j, w_i e w_j, espressioni conjugate, e però $u_i u_j$, $v_i v_j$, $w_i w_j$ sono somme di quadrati. Dunque K_{ij} si compone di elementi essenzialmente non negativi. Ma già sappiamo che dev'essere $K_{ij} = 0$. Ciò non può aver luogo se non è $u_i = 0$, $u_j = 0, \ldots, w_j = 0$. Dunque non è possibile che $k_1^2, k_2^2, k_3^2, \ldots$ non siano reali. Che questi numeri siano anche positivi risulta poi subito dall'eguaglianza $k_i^2 K_{ii} = -2\int \Pi_i\, dS$, giacchè Π_i è quantità essenzialmente negativa, e K_{ii} è una somma di quadrati. Dunque $k_1, k_2, k_3, \ldots$ sono numeri reali.

6. Ritorniamo alle formole (2). Queste ci dicono che le vibrazioni dei punti d'un corpo elastico si possono considerare come risultanti dalla sovrapposizione di vibrazioni più semplici, quali sono le vibrazioni $u = u'\varphi(t)$, $v = v'\varphi(t)$, $w = w'\varphi(t)$ per ciascun valore di k. Se k fosse immaginario, u, v, w si esprimerebbero esponenzialmente in t, e però potrebbero decrescere o crescere indefinitamente col tempo. Invece, per la realtà di k, ciò non può aver luogo, poichè u, per esempio, non supera mai, in valore assoluto, la quantità $u'\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$, indipendente dal tempo. Inoltre, se si aumenta t

di $\frac{2\pi}{k}$ nelle precedenti espressioni di u, v, w, queste tornano ai primitivi valori. Esse rappresentano dunque un moto pendolare, la cui durata periodica $\frac{2\pi}{k}$ è la stessa per tutti i punti del corpo, variando solo l'ampiezza dell'oscillazione da punto a punto. Si arriva così alla seguente notevole conclusione (*): *I moti interni d'un corpo elastico non possono nè aumentare nè diminuire col tempo. Al contrario tutti i moti* parziali *si eseguono in egual tempo fra limiti invariabili, raggiunti periodicamente.* Le formole (2) mostrano che *le vibrazioni di ciascun punto risultano dalla sovrapposizione di infiniti moti pendolari, aventi periodi diversi.*

7. Teorema di Saint-Venant: *La forza viva d'un corpo* elastico *vibrante è uguale alla somma delle forze vive dovute ai singoli moti pendolari* (**).

La forza viva totale del corpo vibrante è

$$\Phi = \frac{1}{2}\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right]\rho dS.$$

Ora, per le (2), si ha

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 = \sum_{i,j}(u_i u_j + v_i v_j + w_i w_j)\frac{d\varphi_i}{dt}\frac{d\varphi_j}{dt};$$

poi, moltiplicando per ρdS ed integrando a tutto S, si ottiene

$$\Phi = \frac{1}{2}\sum_{i,j} K_{ij}\frac{d\varphi_i}{dt}\frac{d\varphi_j}{dt}.$$

Il secondo membro si riduce, in virtù di (4), ai soli termini per i quali è $i = j$. Dunque

$$\Phi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=\infty} K_{ii}\left(\frac{d\varphi_i}{dt}\right)^2.$$

(*) Clebsch, *Théorie de l'élasticité*, p. 130.

(**) Vedi i *Comptes-rendus*, 1872, 2me sem., pp. 1176, 1425, 1567.

D'altra parte la forza viva dovuta ai soli moti pendolari, corrispondenti all'indice i, è appunto

$$\Phi_i = \frac{1}{2}\int (u_i^2 + v_i^2 + w_i^2)\left(\frac{d\varphi_i}{dt}\right)^2 \rho dS = \frac{1}{2} K_{ii}\left(\frac{d\varphi_i}{dt}\right)^2 .$$

È dunque vero che si ha $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \ldots$. In altri termini tutto accade come se il corpo fosse animato da infiniti moti pendolari, coesistenti con perfetta indipendenza fra loro.

8. Ora, tornando all'integrazione delle (1'), ci resta soltanto da far vedere come riescano pienamente determinate le costanti

$$\lambda_1 , \lambda_2 , \lambda_3 \ldots , \mu_1 , \mu_2 , \mu_3 \ldots$$

quando si fissano le circostànze iniziali del moto, quando cioè in un dato istante, che si può sempre assumere come origine del tempo, si suppongono conosciuti lo *spostamento* (u_0 , v_0 , w_0) e la *velocità* (u_0', v_0', w_0') di ciascun punto. Per $t = 0$ si ha

$$\varphi = \lambda \quad , \quad \frac{d\varphi}{dt} = k\mu ,$$

e conseguentemente (*), ponendo $t = 0$ nelle formole (2), anche dopo averle derivate una volta rispetto a t,

$$u_0 = \sum_{i=1}^{i=\infty} \lambda_i u_i \quad , \quad u_0' = \sum_{i=1}^{i=\infty} k_i \mu_i u_i \; .$$

Si moltiplichi la prima eguaglianza per $\rho u_n dS$, e, dopo aver fatto altrettanto per v_0 e w_0, si sommi e si integri. Evidentemente si ottiene

$$K_{on} = \sum_{i=1}^{i=\infty} \lambda_i K_{in} = \lambda_n K_{nn} ,$$

vale a dire

$$\lambda_n = \frac{\int (u_0 u_n + v_0 v_n + w_0 w_n)\rho dS}{\int (u_n^2 + v_n^2 + w_n^2)\rho dS} .$$

(*) Vedi Poincaré, *loc. cit.*, p. 113.

Basta cambiare λ_n in $k_n \mu_n$ ed u_0, v_0, w_0 in u_0', v_0', w_0' per trovare μ_n:

$$\mu_n = \frac{\int (u_0' u_n + v_0' v_n + w_0' w_n) \rho dS}{k_n \int (u_n^2 + v_n^2 + w_n^2) \rho dS} .$$

Qui si osservi che le costanti così calcolate sono quelle che determinano le *ampiezze* degli infiniti moti pendolari componenti, mentre le *durate* periodiche degli stessi moti riescono determinate mediante $k_1, k_2, k_3, \ldots$ Dalla precedente analisi risulta dunque che, *mentre le ampiezze delle oscillazioni dipendono dalle circostanze iniziali del moto, la loro durata dipende invece dalla forma geometrica e dalle dimensioni del corpo*. In altri termini, il variare delle circostanze iniziali del moto in un dato corpo non influisce che sull'ampiezza delle oscillazioni, restando sempre inalterato, per ogni oscillazione componente, il tempo in cui essa si compie (*).

9. In tutta l'analisi precedente rimane un dubbio, cioè che l'equazione che deve fornire i valori delle k possa non ammettere infinite radici, ed anche che possa non ammetterne alcuna, nel qual caso non esisterebbero soluzioni delle equazioni (2') e (2''), della forma considerata. Ora noi dimostreremo (**) che *le dette equazioni ammettono infinite soluzioni diverse*. Tra gli infiniti spostamenti, obbligati alla condizione

$$\int (u^2 + v^2 + w^2) \rho dS = 1 , \tag{5}$$

cerchiamo quello che fa prendere a $-\int \Pi dS$ il minimo valore. Tutto fa credere che un tal minimo esista, e sia positivo o nullo, perchè la funzione considerata, essenzialmente positiva, è continua in virtù delle ipotesi fatte fin dal principio sugli spostamenti. Il *calcolo delle variazioni* conduce a porre

$$\int \delta \Pi dS + \lambda \int (u \delta u + v \delta v + w \delta w) \rho dS = 0 , \tag{6}$$

(*) Clebsch, *Théorie de l'élasticité*, p. 125.

(**) Poincaré, *loc. cit.*, p. 104. Questa dimostrazione, in verità, lascia molto a desiderare in quanto afferma l'esistenza del minimo di $-\int \Pi dS$.

rappresentando con λ una costante, e con δu, δv, δw le variazioni arbitrarie di u, v, w. In particolare, se si fa $\delta u = u$, $\delta v = v$, $\delta w = w$, si ha pure

$$\delta a = \delta \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \delta u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} = a \text{ , ecc.;}$$

quindi

$$\delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial a} \delta a + \ldots = \frac{\partial \Pi}{\partial a} a + \ldots = 2\Pi \text{ ,}$$

e la (6) diventa, in virtù di (5),

$$-\int \Pi dS = \frac{1}{2} \lambda . \tag{7}$$

Dunque λ è un numero positivo, o nullo, che rappresenteremo con k_1^2. Se poi paragoniamo la (6) con l'equazione ottenuta applicando il principio di Lagrangia, e dalla quale si sono ricavate (IV, 2) tutte insieme le equazioni dell'equilibrio elastico, si vede che le sei equazioni nelle quali, per l'arbitrarietà di δu, δv, δw, si scinde la (6), si possono comodamente dedurre dalle equazioni stesse dell'equilibrio, facendovi $X = \rho\lambda u$, $Y = \rho\lambda v$, $Z = \rho\lambda w$, $L = M = N = 0$. In tal modo si ritrovano precisamente le equazioni (2') e (2''), le quali debbono dunque ammettere, per $k = k_1$, una soluzione (u_1, v_1, w_1) costituita appunto dalle funzioni che, soddisfacendo alla (5), rendono minima $-\int \Pi dS$. Stabilita così l'esistenza di queste particolari soluzioni, consideriamo, fra le infinite funzioni soddisfacenti alla (5), quelle che soddisfano anche alla condizione

$$\int (uu_1 + vv_1 + ww_1) \rho dS = 0 \text{ ,} \tag{8}$$

e fra esse determiniamo quelle che rendono minima $-\int \Pi dS$. Per tali funzioni, qualunque siano le variazioni δu, δv, δw, e per convenienti valori di λ e λ_1, si deve avere

$$\int \delta\Pi dS + \lambda \int (u\delta u + v\delta v + w\delta w) \rho dS + \lambda_1 \int (u_1 \delta u + v_1 \delta v + w_1 \delta w) \rho dS = 0 . \tag{9}$$

In particolare, per $\delta u = u_1$, $\delta v = v_1$, $\delta w = w_1$,

$$\int \delta \Pi dS + \lambda_1 = 0 \ ,$$

dove

$$\delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial a} \delta a + \ldots = \frac{\partial \Pi}{\partial a} a_1 + \ldots$$

D'altra parte la (6), soddisfatta dalle funzioni u_1, v_1, w_1, diventa, per $\delta u = u$, $\delta v = v$, $\delta w = w$,

$$\int \delta \Pi dS = 0 \ , \quad \text{dove} \quad \delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial a_1} a + \ldots = \frac{\partial \Pi}{\partial a} a_1 + \ldots$$

Dunque $\lambda_1 = 0$. Dopo ciò la (9) assume la forma della (6), e però λ dev'essere un numero k_2^2, *non inferiore a* k_1^2, poichè le nuove funzioni u_2, v_2, w_2, soddisfacenti alle (2') per $k = k_2$, sono obbligate a verificare la relazione (8), oltre la (5). In modo analogo si perviene a determinare le funzioni u_3, v_3, w_3, per le quali $-\int \Pi dS$ raggiunge un valore $\frac{1}{2} k_3^2$, minimo fra tutti quelli che può assumere per funzioni u, v, w, soddisfacenti alle condizioni (5), (8), ed alla nuova condizione

$$\int (uu_2 + vv_2 + ww_2) \rho dS = 0 \, .$$

È ovvio che k_3^2 non è inferiore a k_2^2; ecc.

10. Ottenuti così i numeri $k_1^2 \leqq k_2^2 \leqq k_3^2 \leqq \ldots$, bisogna dimostrare che essi sono realmente tutti fra loro diversi, e per questo cominceremo dal togliere il dubbio che essi possano essere tutti nulli. Se ciò avvenisse, la (7) darebbe $\int \Pi dS = 0$, e le funzioni u_1, v_1, w_1 avrebbero necessariamente la forma caratteristica degli spostamenti rigidi. Altrettanto si avrebbe per le successive terne di funzioni; ma la settima terna si esprimerebbe linearmente nelle prime sei, e noi ora dimostreremo che ciò non può accadere, perchè *gli infiniti spostamenti* (u_i, v_i, w_i) *sono linearmente indipendenti fra loro*. Infatti, se si avesse

$$u_n = \sum_1^{n-1} \lambda_i u_i \ , \quad v_n = \sum_1^{n-1} \lambda_i v_i \ , \quad w_n = \sum_1^{n-1} \lambda_i w_i \ ;$$

con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ costanti, si avrebbe anche

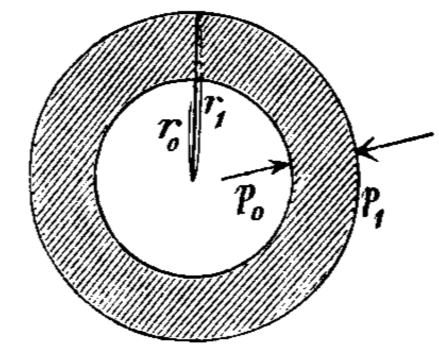
$$\int (u_n^2 + v_n^2 + w_n^2) \rho dS = \sum_1^{n-1} \lambda_i K_{in} = 0 \ .$$

ed invece, essendo le funzioni u_n, v_n, w_n fra quelle che soddisfano alla (5), il primo membro è uguale all'unità.

VIII. APPLICAZIONE ALLA SFERA.

1. Le considerazioni svolte nei precedenti capitoli ci mettono in grado di risolvere completamente il problema generale proposto in principio del quarto capitolo, purchè si sappiano integrare certe equazioni differenziali. In seguito ci occuperemo dei mezzi di facilitare o di effettuare tale integrazione in generale; ma in certi casi speciali la semplicità stessa dei dati fa intuire la forma da attribuire agli spostamenti perchè siano soddisfatte le equazioni dell'equilibrio o del moto. Prenderemo ad esempio la sfera, col solo scopo di fare un'applicazione immediata dei risultati precedentemente ottenuti.

2. **Equilibrio.** Si consideri un involucro sferico, omogeneo ed isotropo, sottoposto internamente ad una pressione p_0 per unità di superficie, ed esternamente ad una pressione p_1. Sia r_0 il raggio interno, r_1 il raggio esterno. Se le pressioni sono uniformemente distribuite, si capisce che lo spostamento alla distanza



r dal centro deve dipendere dalla sola r e non può aver luogo che nella direzione stessa del raggio, dimodochè, chiamato ϵ l'allungamento unitario, sia $u = \epsilon x$, $v = \epsilon y$, $w = \epsilon z$, e conseguentemente

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon + x \frac{d\epsilon}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = \epsilon + \frac{x^2}{r} \frac{d\epsilon}{dr} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x \frac{d\epsilon}{dr} \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{xy}{r} \frac{d\epsilon}{dr} , \quad \text{ecc.}$$

Quindi

$$\Theta = 3\epsilon + r \frac{d\epsilon}{dr} \quad , \quad \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_3 = 0 ,$$

e le equazioni indefinite diventano

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = \frac{\partial \Theta}{\partial y} = \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0 .$$

Dunque Θ è una costante, che chiameremo 3λ. Da

$$3\epsilon + r \frac{d\epsilon}{dr} = 3\lambda$$

si deduce, integrando,

$$\epsilon = \lambda + \frac{\mu}{r^3} . \tag{1}$$

Ora si tratta di determinare le costanti λ e μ. La prima equazione ai limiti, relativa ad una qualunque delle due superficie sferiche, diventa, a prescindere dagli indici 0 ed 1 che distinguono le dette superficie l'una dall'altra,

$$p \frac{dx}{dn} + 2B \frac{du}{dn} + (A - 2B) \Theta \frac{dx}{dn} = 0 ,$$

cioè, osservando che per n bisogna mettere r o $-r$,

$$p \frac{x}{r} + 2B \left(\epsilon \frac{x}{r} + x \frac{d\epsilon}{dr} \right) + 3\lambda (A - 2B) \frac{x}{r} = 0 .$$

Ne segue, dividendo per $\frac{x}{r}$ e adoperando la (1),

$$p - \frac{4\mu B}{r^3} + \lambda (3A - 4B) = 0 .$$

Allo stesso risultato si perviene mediante le altre due condizioni ai limiti. Si hanno così le equazioni

$$p_0 r_0^3 = 4\mu B - \lambda(3A - 4B) r_0^3 \quad , \quad p_1 r_1^3 = 4\mu B - \lambda(3A - 4B) r_1^3 \quad ,$$

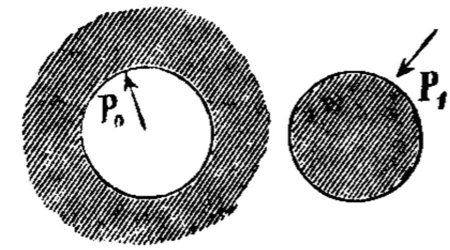
dalle quali si deduce

$$\lambda = - \frac{p_1 r_1^3 - p_0 r_0^3}{(3A - 4B)(r_1^3 - r_0^3)} \quad , \quad \mu = - \frac{(p_1 - p_0) r_1^3 r_0^3}{4B(r_1^3 - r_0^3)} . \qquad (2)$$

Sostituendo in (1) si ha il mezzo di conoscere la deformazione in ciascun punto, le variazioni dello spessore, del volume, ecc. Per esempio l'aumento totale di volume è

$$\int \Theta dS = 3\lambda \cdot \frac{4}{3} \pi (r_1^3 - r_0^3) = \frac{4\pi (p_0 r_0^3 - p_1 r_1^3)}{3A - 4B} .$$

3. Nel caso d'una sfera piena o d'un mezzo indefinito, provvisto d'una cavità sferica, non si ha più che una superficie sola da considerare, e quindi una sola equazione per determinare λ e μ; ma in tal caso si provvede subito alla determinazione d'una costante osservando che lo spostamento ϵr deve serbarsi finito, e però deve essere $\mu = 0$ nel primo caso, $\lambda = 0$ nel secondo. Si osservi che le formole (2) sussistono anche in questi casi estremi, giacchè dànno, per $r_0 = 0$,



$$\lambda = - \frac{p_1}{3A - 4B} \quad , \quad \mu = 0 \ ,$$

e per r_1 infinito, supponendo inoltre $p_1 = 0$,

$$\lambda = 0 \quad , \quad \mu = \frac{p_0 r_0^3}{4B} .$$

Si noti che le penultime formole convengono ugualmente al caso d'un involucro sferico qualunque, sottoposto a pressioni opposte ed uguali per unità di superficie.

4. Pressioni e tensioni. Per qualunque corpo isotropo si ha

$$\left\{\begin{aligned} -p_{xx} &= (A-2B)\Theta + 2B\frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad -p_{yz} = B\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right), \\ -p_{yy} &= (A-2B)\Theta + 2B\frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad -p_{zx} = B\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right), \\ -p_{zz} &= (A-2B)\Theta + 2B\frac{\partial w}{\partial z} \quad , \quad -p_{xy} = B\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right). \end{aligned}\right.$$

Nel caso attuale queste formole diventano

$$-p_{xx} = \lambda(3A-4B) + 2\mu B\frac{y^2+z^2-2x^2}{r^5}, \quad \text{ecc.},$$

$$p_{yz} = 6\mu B\frac{yz}{r^5} \quad , \quad p_{zx} = 6\mu B\frac{zx}{r^5} \quad , \quad p_{xy} = 6\mu B\frac{xy}{r^5}.$$

Se facciamo passare l'asse delle z nel punto intorno al quale vogliamo studiare la distribuzione delle azioni interne, le ultime formole dànno, facendovi $x=y=0$, $z=r$,

$$\varpi_1 = \varpi_2 = -\lambda(3A-4B) - \frac{2\mu B}{r^3} \quad , \quad \varpi_3 = -\lambda(3A-4B) + \frac{4\mu B}{r^3}.$$

In particolare, per $\mu=0$, si ha $\varpi_1=\varpi_2=\varpi_3=p_1$, e l'ellissoide di elasticità, in ogni punto, diventa una sfera. Dunque in una sfera piena, sottoposta ad una pressione uniforme, si può dire che questa pressione si trasmette normalmente a tutti gli elementi superficiali interni, con eguale intensità, come nei fluidi. Invece, se si fa $\lambda=0$, si ha

$$\varpi_1 = \varpi_2 = -\frac{1}{2}\varpi_3 = -\frac{p_0}{2}\left(\frac{r_0}{r}\right)^3$$

e l'ellissoide di elasticità è di rotazione intorno al raggio. Dunque in un mezzo indefinito, omogeneo ed isotropo, provvisto d'una cavità sferica, ogni pressione uniformemente distribuita sulle pareti della cavità si trasmette sugli elementi superficiali, perpendicolari ai raggi, con una intensità che si va affievolendo in ragione inversa del cubo della distanza al centro della cavità, e provoca tensioni in tutti gli elementi che contengono il raggio. In altri termini, se ci figuriamo il mezzo suddiviso in sottilissimi strati sferici, concentrici alla cavità, possiamo dire che ogni strato, mentre tende a *lacerarsi*, con eguale intensità, secondo tutti i suoi circoli massimi, subisce anche, nel suo spessore, uno *schiacciamento* due volte più intenso.

5. **Vibrazioni.** Per lo studio delle vibrazioni ci limiteremo a considerare il caso d'una sfera piena, di raggio a. Si ha sempre $u = \epsilon x$, $v = \epsilon y$, $w = \epsilon z$; ma ϵ è funzione di r e di t. Quindi

$$\Theta = 3\epsilon + r \frac{\partial \epsilon}{\partial r} \quad , \quad \mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}_3 = 0 ,$$

e le equazioni indefinite diventano

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A \frac{\partial \Theta}{\partial x} \quad , \quad \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = A \frac{\partial \Theta}{\partial y} \quad , \quad \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = A \frac{\partial \Theta}{\partial z} .$$

La prima equazione si può anche scrivere

$$\rho x \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial t^2} = A \frac{\partial \Theta}{\partial r} \frac{x}{r} \quad , \quad \text{cioè} \quad \rho \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial t^2} = \frac{A}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} ,$$

e le altre conducono allo stesso risultato:

$$\rho \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial t^2} = A \left(\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial \epsilon}{\partial r} \right) . \tag{3}$$

Inoltre sulla sfera di raggio a si deve avere

$$2B \frac{\partial u}{\partial r} + (A - 2B) \Theta \frac{\partial x}{\partial r} = 0 ,$$

cioè

$$2B \left(\epsilon \frac{x}{r} + x \frac{\partial \epsilon}{\partial r} \right) + (A - 2B) \left(3\epsilon + r \frac{\partial \epsilon}{\partial r} \right) \frac{x}{r} = 0 ,$$

ovvero, dividendo per $\frac{x}{r}$ e riducendo,

$$A r \frac{\partial \epsilon}{\partial r} + (3A - 4B) \epsilon = 0 . \tag{4}$$

Si tratta di integrare l'equazione (3), in modo che, per $r = a$, sia soddisfatta l'equazione (4).

6. Per trovare una soluzione particolare di (3) poniamo

$$\epsilon = \mathfrak{R}\left[\lambda\cos(kt) + \mu \operatorname{sen}(kt)\right] , \tag{5}$$

con $\mathfrak{R}$ funzione della sola r, e k costante. Sostituendo in (3) e (4), e ponendo, per semplicità, $\rho k^2 = Ah^2$, si trova facilmente che $\mathfrak{R}$ deve soddisfare all'equazione

$$\frac{d^2\mathfrak{R}}{dr^2} + \frac{4}{r}\frac{d\mathfrak{R}}{dr} + h^2\mathfrak{R} = 0 , \tag{6}$$

in modo che, per $r = a$, si abbia

$$Ar\frac{d\mathfrak{R}}{dr} + (3A - 4B)\,\mathfrak{R} = 0 . \tag{7}$$

L'integrazione della (6) è fondata sulle proprietà delle *trascendenti di Bessel*, che non differiscono sostanzialmente dalle funzioni

$$F_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2(n+1)} + \frac{x^4}{2 \,.\, 4(n+1)(n+3)} - \frac{x^6}{2 \,.\, 4 \,.\, 6(n+1)(n+3)(n+5)} + \dots$$

Derivando due volte questa eguaglianza si osserva agevolmente la relazione

$$F''_n(x) + \frac{n}{x}F'_n(x) + F_n(x) = 0 . \tag{8}$$

Ciò premesso, prendiamo $\mathfrak{R} = r^\nu F_n(hr)$. L'equazione (6) diventa

$$F''_n(hr) + \frac{2\nu + 4}{hr}F'_n(hr) + \left(1 + \frac{\nu(\nu+3)}{h^2r^2}\right)F_n(hr) = 0 ,$$

e questa non può coincidere con (8) se non è

$$\nu(\nu+3) = 0 \quad , \quad n = 2\nu + 4 .$$

Dunque dev'essere $\nu = 0$, $n = 4$, o $\nu = -3$, $n = -2$, e però si hanno le due seguenti soluzioni particolari dell'equazione (6):

$$\mathfrak{R} = F_4(hr) \quad , \quad \mathfrak{R} = r^{-3}F_{-2}(hr) .$$

E poichè la detta equazione è lineare e del secondo ordine, la soluzione generale è

$$\mathfrak{R} = \alpha F_4(hr) + \frac{\beta}{r^3} F_{-2}(hr). \tag{9}$$

Intanto la funzione $\mathfrak{R}r$ deve serbarsi finita. È dunque necessario che sia $\alpha = 0$ nel caso d'un mezzo indefinito, munito d'una cavità sferica, e $\beta = 0$ nel caso d'una sfera piena. Limitandoci a quest'ultimo caso noi non terremo conto, nell'espressione (9), che del primo termine, ometteremo l'indice 4, oramai inutile, e, preso $\alpha = 1$, scriveremo:

$$\mathfrak{R} = F(hr) = 1 + \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{(-1)^i (hr)^{2i}}{2.4.\ldots.2i.5.7.\ldots(2i+3)}. \tag{10}$$

7. Posto $ha = x$, si porti l'ultimo risultato nell'equazione (7). Si ottiene

$$AxF'(x) + (3A - 4B)F(x) = 0,$$

cioè adoperando lo sviluppo (10),

$$(3A - 4B) - \frac{5A - 4B}{2.5}x^2 + \frac{7A - 4B}{2.4.5.7}x^4 - \frac{9A - 4B}{2.4.6.5.7.9}x^6 + \ldots = 0.$$

È questa l'equazione trascendente, le cui radici, *tutte reali*, forniscono i valori $k_1, k_2, k_3, \ldots$ di k. Sostituendo un determinato k_i nell'espressione (5) si ottiene una particolare soluzione, e combinando linearmente le soluzioni corrispondenti agli infiniti valori dell'indice i si trova

$$\epsilon = \sum_{i=1}^{i=\infty} \left[\lambda_i \cos(k_i t) + \mu_i \operatorname{sen}(k_i t)\right] F(h_i r). \tag{11}$$

Ed ora ci resta soltanto da determinare le costanti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \mu_1, \mu_2, \ldots$ fissando le condizioni iniziali del moto. Supponghasi che, all'origine del tempo, un punto qualunque, situato, nel caso dell'equilibrio, alla distanza r dal centro, si trovi spostato di $\varphi(r)$, ed animato dalla velocità $\psi(r)$, dimodochè per $t=0$ debba essere

$$\varphi(r)=\epsilon r \quad , \quad \psi(r)=\frac{\partial \epsilon r}{\partial t}=r\frac{\partial \epsilon}{\partial t} \, ,$$

cioè, utilizzando (11),

$$\frac{\varphi(r)}{r}=\sum_1^\infty \lambda_i F(h_i r) \quad , \quad \frac{\psi(r)}{r}=\sum_1^\infty k_i \mu_i F(h_i r) \, . \tag{12}$$

Osserviamo che le funzioni u_i del penultimo capitolo sono qui rappresentate dalle $rF(h_i r)$, e però, riferendoci a quanto si è dimostrato nel detto capitolo, possiamo scrivere, per $i \gtrless j$,

$$\int_0^a F(h_i r)\,F(h_j r)\,r^4\,dr=0 \, .$$

Ciò premesso, moltiplichiamo le equazioni (12) per $F(h_n r)r^4 dr$, ed integriamo fra $r=0$ ed $r=a$. Se si tien conto dell'ultima osservazione si vede che tutti i termini dei secondi membri, tranne i termini n^{imi}, vanno a zero, e si ottiene

$$\lambda_n=\frac{\int_0^a F(h_n r)\,\varphi(r)\,r^3\,dr}{\int_0^a F^2(h_n r)\,r^4\,dr} \quad , \quad \mu_n=\frac{\int_0^a F(h_n r)\,\psi(r)\,r^3\,dr}{k_n\int_0^a F^2(h_n r)\,r^4\,dr} \, .$$

8. Osserviamo, per finire, che la funzione $F_n(x)$, considerata nel § 6, si può, per tutti i valori pari di n, esprimere in forma finita mediante le funzioni trigonometriche. Anzitutto si ha

$$-\frac{n+1}{x}F_n'(x)=1-\frac{x^2}{2(n+3)}+\frac{x^4}{2\,.\,4(n+3)(n+5)}-\ldots=F_{n+2}(x) \, .$$

Quando si conosce $F_n(x)$, la formola precedente permette di calcolare F_{n+2}. Inversamente, se si conosce $F_{n+2}(x)$, si ha

$$F_n(x)=1-\frac{1}{n+1}\int_0^x xF_{n+2}(x)\,dx \, .$$

Ciò premesso, si noti che

$$F_0(x) = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots = \cos x .$$

Dunque

$$F_{-2}(x) = 1 + \int_0^x x \cos x \, dx = x \operatorname{sen} x + \cos x .$$

Invece

$$F_2(x) = -\frac{1}{x} F_0'(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \quad , \quad F_4(x) = -\frac{3}{x} F_2'(x) = \frac{3}{x^3} (\operatorname{sen} x - x \cos x) .$$

Ora la formola (10) diventa

$$\mathfrak{R} = \frac{3}{h^3 r^3} (\operatorname{sen} hr - hr \cos hr) ,$$

e l'equazione trascendente

$$AxF'(x) + (3A - 4B) F(x) = 0 ,$$

che deve ammettere infinite radici reali e nessuna immaginaria, si trasforma in

$$\frac{1}{x} - \cot x = \frac{Ax}{4B} .$$

Le radici sono le ascisse dei punti nei quali la curva $y = \cot x$ è incontrata dall'iperbole

$$y = \frac{1}{x} - \frac{Ax}{4B} .$$

La rappresentazione grafica ci fa subito scorgere come in ciascun intervallo $(i\pi - \pi , i\pi)$ cada una radice ed una sola. A misura che il numero intero i cresce, la formola

$$ah_i = i\pi - \frac{4B}{i\pi A}$$

tende a diventare esatta, ed i periodi delle infinite vibrazioni componenti tendono, per i infinitamente grande, ad assumere la forma $\frac{2a}{i}\sqrt{\frac{\rho}{A}}$.