Introduzione alla teoria matematica della elasticità

Ernesto Cesàro

PREFAZIONE

Ecco il primo d'una serie di volumi sulle **matematiche superiori**, nei quali mi propongo di avviare i giovani alla conoscenza delle varie discipline che andrò man mano insegnando liberamente nell'Università di Napoli. Queste che oggi pubblico sono le lezioni che ho avuto l'onore di fare in sostituzione del Prof. G. BATTAGLINI, durante l'anno scolastico 1892-93. Esse non contengono nulla di nuovo, e nemmeno hanno la pretesa di costituire un corso completo sulla teoria matematica della elasticità, ma vogliono soltanto essere considerate come una preparazione alla lettura di tanti eccellenti trattati ed allo studio delle memorie, specialmente italiane, che sono state pubblicate su tale argomento.

Portici, 20 agosto, 1893.

E. CESÀRO.

PARTE PRIMA

Indice della

I. CINEMATICA DEI PICCOLI MOTI.

1. In un primo studio approssimato dei fenomeni che si manifestano in un mezzo qualsiasi, questo si può paragonare ad un sistema di punti vicinissimi fra loro. Qui ci proponiamo di studiare le deformazioni d'un tal sistema, limitandoci a quelle che sono trascurabili rispetto alle mutue distanze dei punti, dimodochè, chiamati O ed M due di questi punti, e rappresentate con O' ed M' le loro posizioni, in seguito alla deformazione, sia lecito trattare gli spostamenti OO' ed MM' come infinitesimi rispetto alla stessa distanza infinitesima OM. Lo spostamento OO' d'un punto qualunque è individuato in grandezza e direzione dalle sue projezioni su tre assi ortogonali. Queste projezioni, che si chiamano *gli spostamenti* del punto O, e si rappresentano con u, v, w, sono, evidentemente, funzioni delle coordinate x, y, z di O. Supporremo che tali funzioni, già obbligate a prendere valori piccolissimi, siano inoltre continue, uniformi, derivabili una volta almeno, e che tutte queste proprietà appartengano anche alle derivate parziali prime e séconde. Nello studio cinematico delle piccole deformazioni hanno importanza le derivate parziali prime, considerate nelle seguenti combinazioni:

$$a=\frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad f=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right) \quad , \quad p=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right) ,$$

$$b=\frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad g=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad , \quad q=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right) ,$$

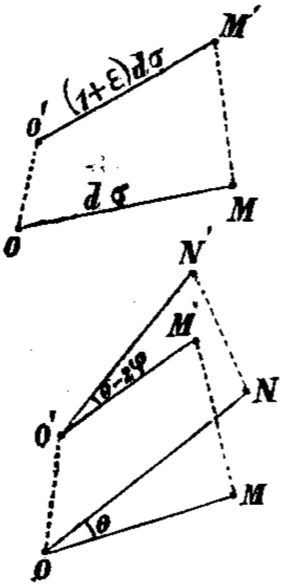
$$c=\frac{\partial w}{\partial z} \quad , \quad h=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad , \quad r=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) .$$

Presto vedremo perchè le funzioni a, b, c, f, g, h, portano il nome di *componenti della deformazione*, mentre a p, q, r si dà quello di *componenti della rotazione* del mezzo.

2. Analizzando una deformazione si è naturalmente condotti a studiare, innanzi tutto, l'*alterazione delle distanze* dei punti vicinissimi, e l'*alterazione degli angoli* di due elementi lineari, con un estremo comune. Se

$$OM = d\sigma \quad , \qquad O'M' = (1+\epsilon)d\sigma ,$$

il rapporto ϵ fra l'incremento di $d\sigma$ e lo stesso $d\sigma$ è il *coefficiente di allungamento* nella direzione OM. Se gli elementi OM ed ON fanno l'angolo θ prima della deformazione, e se $\theta - 2\varphi$ è, dopo la deformazione, l'angolo degli elementi stessi, che si son trasferiti in $O'M'$ ed $O'N'$, si dice che 2φ è lo *scorrimento* mutuo degli elementi considerati. Per calcolare queste due importanti quantità, ϵ e φ, è necessario stabilire alcune formole preliminari, che tendono a far conoscere le variazioni $\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma$ subìte dai coseni direttori d'un elemento lineare qualunque, per effetto della deformazione.



3. Se dx, dy, dz sono le projezioni di OM sugli assi, quelle di $O'M'$ sono $dx+du$, $dy+dv$, $dz+dw$. Dunque

$$\alpha = \frac{dx}{d\sigma} \quad , \qquad \alpha + \delta\alpha = \frac{dx+du}{(1+\epsilon)d\sigma} ,$$

cioè

$$(1+\epsilon)(\alpha+\delta\alpha) = \alpha + \frac{du}{d\sigma} ;$$

poi, trascurando $\epsilon\delta\alpha$ nel primo membro, e scrivendo altre due relazioni analoghe per β e γ,

$$\delta\alpha = \frac{du}{d\sigma} - \epsilon\alpha \quad , \qquad \delta\beta = \frac{dv}{d\sigma} - \epsilon\beta \quad , \qquad \delta\gamma = \frac{dw}{d\sigma} - \epsilon\gamma .$$

In altri termini, se si osserva che

$$\frac{du}{d\sigma}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{d\sigma}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{d\sigma}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{d\sigma}=a\alpha+(h-r)\beta+(g+q)\gamma\ ,$$

si ha

$$\left\{\begin{aligned}\delta\alpha&=-\epsilon\alpha+(q\gamma-r\beta)+(a\alpha+h\beta+g\gamma)\ ,\\ \delta\beta&=-\epsilon\beta+(r\alpha-p\gamma)+(h\alpha+b\beta+f\gamma)\ ,\\ \delta\gamma&=-\epsilon\gamma+(p\beta-q\alpha)+(g\alpha+f\beta+c\gamma)\ .\end{aligned}\right. \tag{1}$$

4. Ciò premesso, si considerino due elementi, definiti in direzione dalle terne di coseni $(\alpha\,,\beta\,,\gamma)$ ed $(\alpha'\,,\beta'\,,\gamma')$. Sia θ il loro angolo, dimodochè

$$\cos\theta=\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'.$$

Se 2φ è l'angolo di cui θ diminuisce per effetto della deformazione, si ha pure

$$\cos(\theta-2\varphi)=(\alpha+\delta\alpha)(\alpha'+\delta\alpha')+(\beta+\delta\beta)(\beta'+\delta\beta')+(\gamma+\delta\gamma)(\gamma'+\delta\gamma')\ ,$$

cioè

$$2\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta=(\alpha'\delta\alpha+\beta'\delta\beta+\gamma'\delta\gamma)+(\alpha\delta\alpha'+\beta\delta\beta'+\gamma\delta\gamma')\,.$$

Ora le formole (1) dànno

$$\begin{aligned}&\alpha'\delta\alpha+\beta'\delta\beta+\gamma'\delta\gamma\\ &=-\epsilon\cos\theta+p(\beta\gamma'-\gamma\beta')+q(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')+r(\alpha\beta'-\beta\alpha')\\ &+a\alpha\alpha'+b\beta\beta'+c\gamma\gamma'+f(\beta\gamma'+\gamma\beta')+g(\gamma\alpha'+\alpha\gamma')+h(\alpha\beta'+\beta\alpha')\,.\end{aligned}$$

Similmente, se si scambiano fra loro le due terne,

$$\begin{aligned}&\alpha\delta\alpha'+\beta\delta\beta'+\gamma\delta\gamma'\\ &=-\epsilon'\cos\theta-p(\beta\gamma'-\gamma\beta')-q(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')-r(\alpha\beta'-\beta\alpha')\\ &+a\alpha\alpha'+b\beta\beta'+c\gamma\gamma'+f(\beta\gamma'+\gamma\beta')+g(\gamma\alpha'+\alpha\gamma')+h(\alpha\beta'+\beta\alpha')\,.\end{aligned}$$

Sommando si perviene alla formola generale

$$\varphi \operatorname{sen} \theta + \frac{1}{2}(\epsilon + \epsilon')\cos\theta$$
$$= a\alpha\alpha' + b\beta\beta' + c\gamma\gamma' + f(\beta\gamma' + \gamma\beta') + g(\gamma\alpha' + \alpha\gamma') + h(\alpha\beta' + \beta\alpha').$$

5. Supponiamo che le due direzioni coincidano; allora si ha $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, $\epsilon = \epsilon'$, $\theta = 0$, e la formola precedente diventa

$$\epsilon = a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + 2f\beta\gamma + 2g\gamma\alpha + 2h\alpha\beta. \tag{2}$$

Se le due direzioni sono fra loro perpendicolari, è $\theta = \frac{\pi}{2}$, e la medesima formola dà

$$\varphi = a\alpha\alpha' + b\beta\beta' + c\gamma\gamma' + f(\beta\gamma' + \gamma\beta') + g(\gamma\alpha' + \alpha\gamma') + h(\alpha\beta' + \beta\alpha'). \tag{3}$$

In particolare, per $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, è $\epsilon = a$, ecc. Per $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$ ed $\alpha' = 0$, $\beta' = 0$, $\gamma' = 1$, è $\varphi = f$; ecc. Dunque *a, b, c sono i coefficienti di allungamento dei tre elementi lineari paralleli agli assi,* ed *f, g, h sono le metà degli scorrimenti mutui dei medesimi elementi.*

6. Se i valori che le componenti della deformazione assumono nel punto O non sono tutti nulli, l'eguaglianza (2), in cui si pone $\epsilon = 0$, diventa un'equazione omogenea di secondo grado in α, β, γ. Dunque *gli elementi,* uscenti da O, *che non si allungano nè si accorciano, sono collocati sulle generatrici d'un cono quadrico,* col vertice in O. Questa superficie, che si chiama *cono di scorrimento,* può essere immaginaria o reale. Se reale, essa dirime gli elementi lineari, intorno ad O, in due classi: quelli d'una classe si allungano tutti, gli altri si accorciano, poichè ϵ, funzione continua di α, β, γ, non può cambiar segno senza annullarsi quando α, β, γ variano in modo continuo, cioè non è possibile passare dalla regione degli allungamenti a quella degli accorciamenti senza attraversare la superficie conica. Se il cono di scorrimento è immaginario, ciò vuol dire che ϵ conserva sempre lo stesso segno, e però, intorno al punto considerato, gli elementi lineari si allungano tutti o si accorciano tutti.

7. Più generalmente, il luogo degli elementi lineari, che subiscono uno stesso allungamento unitario, è un cono quadrico, perchè la formola (2) si può scrivere così:

$$(a-\epsilon)\alpha^2+(b-\epsilon)\beta^2+(c-\epsilon)\gamma^2+2f\beta\gamma+2g\gamma\alpha+2h\alpha\beta=0. \quad (4)$$

Ad ogni valore di ϵ corrisponde un cono reale o immaginario, e tutti questi coni hanno gli stessi assi del cono di scorrimento. Se immaginiamo che gli assi coordinati siano già stati scelti paralleli agli assi dei coni, l'equazione precedente deve aver la forma

$$(a-\epsilon)\alpha^2+(b-\epsilon)\beta^2+(c-\epsilon)\gamma^2=0\,, \quad (5)$$

vale a dire che per una particolare scelta di assi debbono esser nulli gli scorrimenti f, g, h. Adunque, *esiste sempre una terna ortogonale di elementi*, ed in generale una sola, *che resta ortogonale dopo la deformazione*. Le rette sulle quali son collocati questi elementi si chiamano le *rette principali*, relative al punto considerato.

8. Perchè l'equazione (5) rappresenti un cono reale è necessario che $a-\epsilon$, $b-\epsilon$, $c-\epsilon$ non abbiano lo stesso segno, e però ϵ è sempre compreso fra la più piccola e la più grande delle quantità a, b, c. Se, per fissare le idee, si suppone $a>b>c$, il minimo valore di ϵ è c, il massimo è a. Per $\epsilon=a$, come per $\epsilon=c$, l'equazione (5) non è soddisfatta da infiniti valori reali di α, β, γ, perchè dev'essere, nel primo caso, $\beta=0$, $\gamma=0$, $\alpha=1$, e nel secondo $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=1$. Dunque intorno ad ogni punto *esistono due elementi, che subiscono il minimo ed il massimo allungamento*, e questi elementi *sono sempre fra loro ortogonali.* Quanto agli elementi, che sopportano l'allungamento unitario $\epsilon=b$, essi stanno in una coppia di piani, intersecantisi lungo la terza retta principale ($\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$). Si noti che, per ciascuno dei tre coefficienti di allungamento, secondo le rette principali, è degenere il cono corrispondente. Dunque, ritornando ad un'arbitraria scelta di assi, i detti coefficienti debbono annullare il discriminante della forma quadratica (4). Essi sono dunque le radici, sempre reali, dell'equazione

$$\begin{vmatrix} a-\epsilon & h & g \\ h & b-\epsilon & f \\ g & f & c-\epsilon \end{vmatrix} = 0 ,$$

cioè

$$\epsilon^3 - (a+b+c)\epsilon^2 + (bc+ca+ab-f^2-g^2-h^2)\epsilon$$
$$-(abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2) = 0 .$$

Ancora si osservi che i coefficienti di questa equazione, essendo funzioni delle sole radici, le quali hanno un significato indipendente dalla scelta degli assi, sono anch'essi indipendenti da tale scelta, sono cioè *invarianti*. Ne segue, in particolare, che *la somma dei coefficienti di allungamento di tre elementi ortogonali non varia quando gli elementi, restando fra loro ortogonali, ruotano intorno all'estremità comune*. Fra breve si vedrà che ciò si deve all'importante significato meccanico della somma stessa.

9. Il variare di ϵ si discute anche più facilmente ricorrendo alla seguente rappresentazione geometrica. Sopra ciascun elemento OM si porti una distanza $OP = \frac{1}{\sqrt{\pm\epsilon}}$. Le coordinate di P, quando O si assume ad origine, sono

$$x = \frac{\alpha}{\sqrt{\pm\epsilon}} , \quad y = \frac{\beta}{\sqrt{\pm\epsilon}} , \quad z = \frac{\gamma}{\sqrt{\pm\epsilon}} .$$

Sostituendo in (2) si trova che il luogo dei punti P è la superficie rappresentata dall'equazione

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = \pm 1 . \qquad (6)$$

Così vediamo che *il valore assoluto del coefficiente di allungamento varia*, intorno a ciascun punto, *in ragione inversa del quadrato del diametro d'una quadrica,* che ha il centro nel punto considerato, ed è assintotica al cono di scorrimento. Se questo è immaginario, la superficie rappresentativa è un ellissoide. Ciò si vede anche osservando che, in questo caso, ϵ conserva sempre lo stesso segno, dimodochè in (6) il segno del secondo membro è necessariamente quello dei coefficienti a, b, c. Se il cono di scorrimento è reale, bisogna prendere, nel secondo membro di (6), il segno $+$ per una regione dello spazio, ed il segno $-$ per l'altra. Allora la superficie rappresentativa è costituita da due iperboloidi, ad una e due falde, con centro, assi e cono assintotico comuni.

10. Presa, intorno ad O, una *particella*, sia M uno dei punti in essa inclusi. Continuando a tenere l'origine in O, si noti che, nel passaggio da O ad M, lo spostamento u diventa

u' = u + du

$$u' = u + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z}.$$

È questa un'eguaglianza rigorosamente esatta quando per $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ si mettono i valori che queste funzioni assumono in un punto convenientemente scelto nell'interno del segmento OM; ma, poichè le dette funzioni si suppongono continue, è lecito prenderne i valori nel punto O, trascurando, in u', infinitesimi di ordine superiore. Allora, se si osserva che

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = h - r \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial z} = g + q \ ,$$

si può anche scrivere la prima delle seguenti formole:

$$\left\{\begin{aligned} u' &= (u + qz - ry) + (ax + hy + gz) = u_1 + u_2 \\ v' &= (v + rx - pz) + (hx + by + fz) = v_1 + v_2 \\ w' &= (w + py - qx) + (gx + fy + cz) = w_1 + w_2 . \end{aligned}\right. \qquad (7)$$

Gli spostamenti u_1, v_1, w_1 si riferiscono all'ipotesi d'una particella rigida, sottoposta ad una traslazione (u, v, w) e ad una rotazione (p, q, r). Per riconoscere poi l'indole degli spostamenti u_2, v_2, w_2 basta orientare gli assi secondo le rette principali. Allora $u_2 = ax$, $v_2 = by$, $w_2 = cz$, si hanno cioè semplici dilatazioni secondo gli assi. Questi tre movimenti speciali (traslazione, rotazione, triplice dilatazione) si possono anche riguardare come *consecutivi* se si osserva che, da un punto all'altro della particella, gli spostamenti e le loro derivate subiscono variazioni trascurabili. Adunque *la deformazione d'una particella si può sempre*, a prescindere da un moto rigido, *considerare come risultante di tre dilatazioni secondo le rette principali.*

11. Presto vedremo che la mancanza, in tutte le particelle, del terzo moto componente, che può dirsi moto di *pura* deformazione, caratterizza la rigidità dell'intero sistema. La mancanza del secondo moto componente definisce una speciale deformazione, che dicesi *deformazione potenziale.* Qui si noti che l'annullamento di p, q, r, in tutto il sistema, è necessario e sufficiente perchè $udx + vdy + wdz$ sia un differenziale esatto. Dunque la deformazione potenziale è caratterizzata dall'esistenza d'una funzione, le cui derivate parziali prime forniscono gli spostamenti in ogni punto del sistema. Se, inoltre, a, b, c, f, g, h sono costanti, si ha la deformazione detta *omogenea* da Thomson e Tait (*).

12. Tornando a studiare la deformazione generale d'una particella, osserviamo che, in virtù delle formole (7), le coordinate $x + u'$, $y + v'$, $z + w'$ di M' sono *linearmente* legate a quelle di M, e però ogni elemento piano o rettilineo d'una particella resta piano o rettilineo nella deformazione, e due elementi paralleli restano paralleli, ecc. Dunque, se si considera un *parallelepipedo elementare*, cioè un parallelepipedo costruito, col vertice in O, sugli spigoli dx, dy, dz, paralleli agli assi, esso si trasforma in un altro pa-

(*) *Natural philosophy*, § 190.

rallelepipedo, generalmente obliquangolo, i cui spigoli sono $(1+a)dx$, $(1+b)dy$, $(1+c)dz$, mentre gli angoli piani, intorno ad O, son diventati $\frac{\pi}{2}-2f$, $\frac{\pi}{2}-2g$, $\frac{\pi}{2}-2h$. Fra gli infiniti parallelepipedi elementari, che si possono considerare, un solo resta rettangolo dopo la deformazione. Ce ne serviremo per calcolare il *coefficiente di dilatazione cubica* Θ, cioè il rapporto fra l'aumento del volume della particella ed il volume iniziale dS. Siccome è chiaro che, pel suo significato, Θ è indipendente dalla forma della particella, si può immaginare che questa sia il parallelepipedo elementare costruito sulle rette principali, dimodochè

$$dS = dxdydz \quad , \quad (1+\Theta)dS = (1+a)(1+b)(1+c)dxdydz\,,$$

e però

$$1+\Theta = (1+a)(1+b)(1+c)\,,$$

cioè, trascurando infinitesimi di ordine superiore, $\Theta = a+b+c$; e poichè questa espressione è invariante, si può, per qualunque scelta di assi, scrivere

$$\Theta = a+b+c = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\,. \tag{8}$$

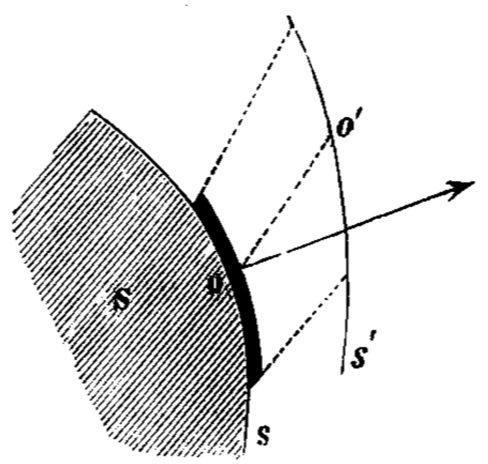
Per dimostrare in altro modo questa importante formola, faremo una breve digressione.

13. Avremo spesso occasione di servirci d'un teorema, che permette di trasformare un integrale esteso ad uno spazio S in un integrale esteso alla sola superficie s, che limita S. La dimostrazione del teorema di cui si tratta è inclusa in quella d'un teorema più generale, che daremo in seguito. Qui ci limitiamo ad enunciare la relazione

$$\int \frac{\partial F}{\partial x}\,dS = -\int F\frac{dx}{dn}\,ds\,, \tag{9}$$

in cui F è una funzione di x, y, z, finita, continua ed uniforme. Inoltre $\frac{dx}{dn}$ rappresenta il coseno dell'angolo che la normale alla superficie s, considerata come *positiva* quando è diretta verso l'*interno* di S, fa con l'asse delle x. Si osservi che le condizioni imposte alla funzione F, indispensabili per la dimostrazione del teorema, non sono strettamente necessarie, nel senso che, se qualcheduna di esse viene a mancare, non è impossibile che la formola (9) sussista. Si dimostra, per esempio, che questa formola è valida anche quando F diventa infinita in un punto O, purchè, indicando con r la distanza di O al punto in cui si calcola F, e con μ una costante compresa fra 0 e 2, il prodotto Fr^{μ} si serbi finito nel tendere di r a zero.

14. Ritornando al calcolo di Θ, proponiamoci di valutare la totale dilatazione subìta da S, considerandola come la somma dei volumi che gli elementi superficiali ds generano trasferendosi sulla nuova superficie s'. Preso in ds un punto O, il volume generato da ds è misurato dal prodotto di ds per la projezione dello spostamento OO' sulla normale alla superficie, diretta verso l'*esterno* di S.



Questa projezione è $-u\frac{dx}{dn}-v\frac{dy}{dn}-w\frac{dz}{dn}$, e però la dilatazione totale è data da

$$-\int\left(u\frac{dx}{dn}+v\frac{dy}{dn}+w\frac{dz}{dn}\right)ds\,,$$

ovvero, adoperando (9), da

$$\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dS\,.$$

Siccome questo calcolo è applicabile a qualunque porzione dello spazio considerato, è chiaro che l'ultimo risultato include la formola (8): basta immaginare lo spazio S ridotto all'unica particella dS. Con maggior rigore si può ragionare come segue. Siccome, per la natura delle deformazioni che ci proponiamo di studiare, Θ è una funzione continua, altrettanto si può dire di

$$\vartheta=\Theta-\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

Intanto, poichè $\int\Theta dS$ rappresenta manifestamente la dilatazione totale, si ha

$$\int\vartheta dS=0$$

per qualunque porzione dello spazio considerato. Ora, se in un punto si avesse, per esempio, $\vartheta > 0$, si potrebbe intorno ad esso circoscrivere uno spazio, nell'interno del quale si avrebbe sempre, in virtù della continuità, $\vartheta > 0$, dimodochè anche $\int \vartheta dS$, esteso a quello spazio, sarebbe positivo. Ciò non può accadere. È dunque assurdo supporre che la differenza ϑ possa, anche in un punto solo, non essere nulla.

II. LE COMPONENTI DELLA DEFORMAZIONE (*).

1. « *Le condizioni*

$$a=0\ ,\quad b=0\ ,\quad c=0\ ,\quad f=0\ ,\quad g=0\ ,\quad h=0$$

sono necessarie e sufficienti per la rigidità ».

Se il sistema si muove rigidamente, ϵ dev'essere nullo in ogni punto, qualunque sia la direzione (α, β, γ), e però debbono annullarsi identicamente a, b, c, f, g, h. Inversamente dimostreremo che, se le condizioni

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0 \quad (1') \qquad \frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}=0\ , \quad (1'')$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad (2') \qquad \frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=0\ , \quad (2'')$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=0 \quad (3') \qquad \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0\ , \quad (3'')$$

sono soddisfatte, le funzioni u, v, w hanno necessariamente la forma caratteristica, già nota dalla Meccanica razionale, degli spostamenti

(*) In un primo studio è utile omettere questo capitolo.

d'un sistema rigido. Derivando (3″) rispetto ad y, ed osservando (2′), si ottiene

$$0=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Derivando poi (3″) rispetto a z e (2″) rispetto ad y si ottiene, sommando e tenendo conto di (1″),

$$0=2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}.$$

Dunque, osservando (1′),

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}=0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}=0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial y}=0 .$$

Ne segue che $\frac{\partial u}{\partial y}$ è costante. Similmente si dimostra che $\frac{\partial u}{\partial z}$ è costante. Inoltre, a motivo di (1′), u non dipende da x. Dunque

$$u=l+r'y+qz \;,\quad v=m+p'z+rx \;,\quad w=n+q'x+py .$$

Le nove costanti si riducono a sei. Infatti, per sostituzione degli ultimi risultati in (1″), (2″), (3″), si ottiene $p+p'=0$, $q+q'=0$, $r+r'=0$. Quindi

$$u=l+qz-ry \;,\quad v=m+rx-pz \;,\quad w=n+py-qx .$$

2. « *Una deformazione è pienamente determinata quando se ne conoscono le componenti in tutto il corpo, e si dànno, in un punto, i valori degli spostamenti e tre relazioni lineari fra le derivate prime degli spostamenti* » (*).

Suppongasi, infatti, che alle condizioni enunciate possa soddisfare, non solo un sistema (u', v', w') di spostamenti, ma anche qualche altro sistema (u'', v'', w''), e si considerino gli spostamenti residui

(*) Betti, *Teoria della elasticità*, p. 8.

$u'-u''=u$, $v'-v''=v$, $w'-w''=w$. Siccome a, b, c, f, g, h hanno valori assegnati in ciascun punto, dev'essere

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial z}=0\ ,\quad \frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0\ ,$$

e però, come si è dimostrato precedentemente,

$$u=l+qz-ry\ ,\quad v=m+rx-pz\ ,\quad w=n+py-qx\ ,$$

dove l, m, n, p, q, r rappresentano quantità costanti in tutto il corpo. Ma in un punto, che si può assumere come origine, u' ed u'', v' e v'', w' e w'' debbono prendere gli stessi valori, cioè u, v, w debbono annullarsi. Dunque $l=m=n=0$. Ora debbono, in quel punto, essere soddisfatte, tanto da u', v', w', quanto da u'', v'', w'', tre relazioni come la seguente:

$$\alpha_1\frac{\partial u'}{\partial x}+\alpha_2\frac{\partial w'}{\partial y}+\alpha_3\frac{\partial v'}{\partial z}+\alpha_4\frac{\partial v'}{\partial y}+\alpha_5\frac{\partial u'}{\partial z}$$
$$+\alpha_6\frac{\partial w'}{\partial x}+\alpha_7\frac{\partial w'}{\partial z}+\alpha_8\frac{\partial v'}{\partial x}+\alpha_9\frac{\partial u'}{\partial y}+\alpha_{10}=0\ .$$

Scrivendo la medesima relazione per u'', v'', w'', e sottraendo, si ottiene

$$\alpha_2\frac{\partial w}{\partial y}+\alpha_3\frac{\partial v}{\partial z}+\alpha_5\frac{\partial u}{\partial z}+\alpha_6\frac{\partial w}{\partial x}+\alpha_8\frac{\partial v}{\partial x}+\alpha_9\frac{\partial u}{\partial y}=0\ ,$$

cioè, con altre due relazioni analoghe,

$$(\alpha_2-\alpha_3)p+(\alpha_5-\alpha_6)q+(\alpha_8-\alpha_9)r=0\ ,$$
$$(\beta_2-\beta_3)p+(\beta_5-\beta_6)q+(\beta_8-\beta_9)r=0\ ,$$
$$(\gamma_2-\gamma_3)p+(\gamma_5-\gamma_6)q+(\gamma_8-\gamma_9)r=0\ .$$

Se, come si suppone, queste relazioni sono fra loro distinte, esse non possono coesistere senza che sia $p=0$, $q=0$, $r=0$, e conseguentemente $u=0$, $v=0$, $w=0$, cioè $u'=u''$, $v'=v''$, $w'=w''$.

3. Il teorema precedente si può applicare alla deformazione omogenea. Per questa si conoscono i valori *costanti* di a, b, c, f, g, h, e si dànno tre relazioni, che definiscono l'assenza di rotazione, cioè

$$\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=0\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}=0\ ,\quad \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0\ . \tag{1}$$

Se, inoltre, fissiamo un punto, assumendolo come origine, dovrà essere $u=v=w=0$ per $x=y=z=0$. Possiamo attribuire ad u, v, w espressioni arbitrarie, per abbandonarle poi se con esse non è possibile soddisfare alle condizioni imposte; ma, se arriviamo a far sì che queste condizioni siano soddisfatte, le espressioni trovate sono *le sole possibili*. Nel caso attuale dev'essere

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a\ ,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=b\ ,\quad \frac{\partial w}{\partial z}=c\ ,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}=2f\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=2g\ ,\quad \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=2h\ ,$$

e si vede subito che a queste condizioni, ed alle altre $u=v=w=0$ per $x=y=z=0$, si soddisfa prendendo

$$u=ax+hy+gz\ ,\quad v=hx+by+fz\ ,\quad w=gx+fy+cz\ ,$$

dimodochè vengono ad essere soddisfatte anche le (1), non solo nell'origine, ma in tutto lo spazio. La linearità delle ultime formole mostra che i piani e le rette del sistema restano piani e rette. Ciò non accade nelle deformazioni più generali; ma si può dire che, prescindendo dai moti rigidi, ogni deformazione è omogenea *in ciascheduna particella*, variando solo le *costanti* della deformazione da una particella all'altra.

4. Ogni deformazione è caratterizzata da un particolare sistema di funzioni a, b, c, f, g, h. Inversamente, prese ad arbitrio queste funzioni, corrispondono esse ad una deformazione possibile? Dalle formole di definizione si deduce subito

$$\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial z}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}+\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Quindi

$$\frac{\partial^2 a}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Similmente

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial z} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial z^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial z^2}\right).$$

Dunque le condizioni

$$(2)\ \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 a}{\partial y \partial z} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial g}{\partial y} + \dfrac{\partial h}{\partial z} - \dfrac{\partial f}{\partial x}\right) \\ \dfrac{\partial^2 b}{\partial z \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial h}{\partial z} + \dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial g}{\partial y}\right) \\ \dfrac{\partial^2 c}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y} - \dfrac{\partial h}{\partial z}\right) \end{array}\right. \begin{array}{c} , \\ , \\ , \end{array} \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 b}{\partial z^2}\right) \\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial z \partial x} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2 a}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2}\right) \\ \dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2 b}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 a}{\partial y^2}\right) \end{array}\right\}\ (3)$$

sono necessarie per l'esistenza di u, v, w. Sono esse sufficienti?

5. Ecco in qual modo il prof. Beltrami dimostra (*) che *le condizioni* (2) *e* (3) *sono necessarie e sufficienti perchè* a, b, c, f, g, h *possano rappresentare le componenti d'una deformazione.* Supponiamo date, oltre alle sei funzioni predette, le tre componenti della rotazione. Si deve avere

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial u}{\partial x} = a \quad , & \dfrac{\partial v}{\partial x} = h + r \quad , & \dfrac{\partial w}{\partial x} = g - q \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = h - r \quad , & \dfrac{\partial v}{\partial y} = b \quad , & \dfrac{\partial w}{\partial y} = f + p \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = g + q \quad , & \dfrac{\partial v}{\partial z} = f - p \quad , & \dfrac{\partial w}{\partial z} = c . \end{array}\right. \qquad (4)$$

Consideriamo le tre equazioni che si riferiscono ad u. È noto che,

(*) *Sull'interpretazione meccanica delle formole di Maxwell* (Nota in fondo; ***Memorie di Bologna***, 1886).

per l'esistenza d'una funzione u, soddisfacente alle dette equazioni, è necessario e sufficiente che si abbia

$$\frac{\partial a}{\partial y}=\frac{\partial(h-r)}{\partial x}\quad,\quad\frac{\partial a}{\partial z}=\frac{\partial(g+q)}{\partial x}\quad,\quad\frac{\partial(g+q)}{\partial y}=\frac{\partial(h-r)}{\partial z}\,. \tag{5}$$

Considerando le altre due equazioni, analoghe all'ultima delle (5), si ha

$$\frac{\partial q}{\partial y}+\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{\partial h}{\partial z}-\frac{\partial g}{\partial y}\quad,\quad\frac{\partial r}{\partial z}+\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial h}{\partial z}\quad,\quad\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial x}\,;$$

poi, sommando,

$$\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial y}+\frac{\partial r}{\partial z}=0\,,$$

e le ultime tre relazioni diventano

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial h}{\partial z}\quad,\quad\frac{\partial q}{\partial y}=\frac{\partial h}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial x}\quad,\quad\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial g}{\partial y}\,.$$

Quindi, tenendo conto delle (5),

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial h}{\partial z}\;,\quad \frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\partial a}{\partial z}-\frac{\partial g}{\partial x}\;,\quad \frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial y}\\
&\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial b}{\partial z}\;,\quad \frac{\partial q}{\partial y}=\frac{\partial h}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial x}\;,\quad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial h}{\partial y}\\
&\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial c}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial z}\;,\quad \frac{\partial q}{\partial z}=\frac{\partial g}{\partial z}-\frac{\partial c}{\partial x}\;,\quad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial g}{\partial y}
\end{aligned}\right. \tag{6}$$

Queste sono condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di u, v, w, quando si dànno a, b, c, f, g, h, p, q, r. È poi noto che, per l'integrabilità delle (6), sono necessarie e sufficienti, per ciò che riguarda p, le relazioni

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial h}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial b}{\partial z}\right)\quad,\quad\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial h}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial c}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial z}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial c}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial b}{\partial z}\right),$$

che si possono scrivere così:

$$\frac{\partial^2 b}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial y}\right) \; , \quad \frac{\partial^2 c}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial z}\right) \; ,$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} = 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} .$$

Con ciò vediamo che le relazioni (2) e (3) sono appunto le condizioni necessarie e sufficienti per l'integrabilità delle (6). Quando esse sono soddisfatte, esistono le funzioni p, q, r, soddisfacenti alle (6), e però esistono anche u, v, w.

6. Un'altra dimostrazione, egualmente dovuta al prof. Beltrami (*), si ottiene tentando l'effettiva integrazione delle (2) e delle (3), considerate come equazioni alle derivate parziali del terzo ordine in u, v, w. Si possono sempre trovare tre funzioni U, V, W, tali che sia

$$a = \frac{\partial U}{\partial x} \; , \quad b = \frac{\partial V}{\partial y} \; , \quad c = \frac{\partial W}{\partial z} .$$

La prima delle (2) diventa

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}\right) = 0 , \tag{7}$$

e la prima delle (3)

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\left(f - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\right)\right) = 0 . \tag{8}$$

Posto

$$f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\right) + f' ,$$

dev'essere, per le (8),

$$\frac{\partial^2 f'}{\partial y \partial z} = 0 \; , \quad \frac{\partial^2 g'}{\partial z \partial x} = 0 \; , \quad \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial y} = 0 \; , \tag{9}$$

(*) *Rendiconti del Circ. mat. di Palermo* (t. III, 1889, Note fisico-matematiche).

e per le (7), osservando prima che

$$\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial g'}{\partial y}+\frac{\partial h'}{\partial z}-\frac{\partial f'}{\partial x}$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}\right)\right]$$

$$=\frac{\partial g'}{\partial y}+\frac{\partial h'}{\partial z}-\frac{\partial f'}{\partial x}+\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial z},$$

dev'essere ancora

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g'}{\partial y}+\frac{\partial h'}{\partial z}-\frac{\partial f'}{\partial x}\right)=0.$$

In altri termini, $\frac{\partial g'}{\partial y}+\frac{\partial h'}{\partial z}-\frac{\partial f'}{\partial x}$ è indipendente da x, e però si può rappresentare come derivata seconda rispetto ad y e z d'una funzione U_x di y e z. Poniamo dunque

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial g'}{\partial y}+\frac{\partial h'}{\partial z}-\frac{\partial f'}{\partial x}&=\frac{\partial^2 U_x}{\partial y\partial z},\\ \frac{\partial h'}{\partial z}+\frac{\partial f'}{\partial x}-\frac{\partial g'}{\partial y}&=\frac{\partial^2 V_y}{\partial z\partial x},\\ \frac{\partial f'}{\partial x}+\frac{\partial g'}{\partial y}-\frac{\partial h'}{\partial z}&=\frac{\partial^2 W_z}{\partial x\partial y},\end{aligned}\right.$$

essendo V_y indipendente da y, e W_z indipendente da z. Le ultime due relazioni, sommate, dànno

$$\frac{\partial f'}{\partial x}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 W_z}{\partial x\partial y}\right),$$

cioè

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f'-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_z}{\partial y}+\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\right)=0.$$

Per conseguenza possiamo porre

$$f'=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_z}{\partial y}+\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)+f'',$$

indicando con f'', g'', h'' funzioni soddisfacenti alle equazioni

$$\frac{\partial f''}{\partial x}=0 \;,\quad \frac{\partial g''}{\partial y}=0 \;,\quad \frac{\partial h''}{\partial z}=0 \;, \tag{10}$$

ed alle altre che si deducono dalle (9):

$$\frac{\partial^2 f''}{\partial y \partial z}=0 \;,\quad \frac{\partial^2 g''}{\partial z \partial x}=0 \;,\quad \frac{\partial^2 h''}{\partial x \partial y}=0 \,. \tag{11}$$

Le condizioni (10) e (11) mostrano che f'' è la somma di due funzioni, una della sola y, l'altra della sola z. La prima possiamo sempre rappresentarla come derivata d'una funzione $\frac{1}{2} W_y$ della sola y, e l'altra come derivata d'una funzione $\frac{1}{2} V_z$ della sola z. In altri termini possiamo porre

$$f''=\frac{1}{2}\left(\frac{dW_y}{dz}+\frac{dV_z}{dy}\right).$$

Dunque, riassumendo,

$$f=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_z}{\partial y}+\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{dW_y}{dy}+\frac{dV_z}{dz}\right) \;,$$

ovvero

$$f=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial y}(W+W_z+W_y)+\frac{\partial}{\partial z}(V+V_y+V_z)\right] ,$$

$$g=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial z}(U+U_x+U_z)+\frac{\partial}{\partial x}(W+W_z+W_x)\right] ,$$

$$h=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(V+V_y+V_x)+\frac{\partial}{\partial y}(U+U_x+U_y)\right] .$$

Ora, osservando che dev'essere

$$f=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right) \;,\quad g=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right) \;,\quad h=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) ,$$

si vede che si può prendere

$$
\begin{aligned}
u &= U + U_x + U + U_z \ , \\
v &= V + V_x + V_y + V_z \ , \\
w &= W + W_x + W_y + W_z \ ,
\end{aligned}
$$

giacchè in tal modo sono anche soddisfatte le relazioni

$$a = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad b = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad c = \frac{\partial w}{\partial z} .$$

7. Alla prima dimostrazione si riannodano eleganti considerazioni del Prof. Beltrami (*), con le quali si mostra che le condizioni (2) e (3) si riassumono in un'eguaglianza unica, ponendo uguale a zero una certa parte δJ della variazione subìta dall'integrale

$$J = \frac{1}{2} \iiint \left(\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial z}{\partial r} \right) dp\, dq\, dr \tag{12}$$

quando ad a, b, c, f, g, h, si attribuiscono variazioni arbitrarie δa, δb, δc, δf, δg, δh. Prima esprimiamo J nelle variabili x, y, z. Il determinante funzionale

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} & \frac{\partial p}{\partial z} \\ \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y} & \frac{\partial q}{\partial z} \\ \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial z} \end{vmatrix}$$

è diverso da zero. Infatti le funzioni p, q, r sono fra loro indipendenti, benchè fra le derivate sussista il vincolo

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} = 0 . \tag{13}$$

Ciò premesso, dalle relazioni

$$
\left\{
\begin{aligned}
dp &= \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \ , \\
dq &= \frac{\partial q}{\partial x} dx + \frac{\partial q}{\partial y} dy + \frac{\partial q}{\partial z} dz \ , \\
dr &= \frac{\partial r}{\partial x} dx + \frac{\partial r}{\partial y} dy + \frac{\partial r}{\partial z} dz \ ,
\end{aligned}
\right.
$$

(*) *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris* (1889, p. 502).

si deduce

$$\Delta \, . \, dx = \begin{vmatrix} dp & \frac{\partial p}{\partial y} & \frac{\partial p}{\partial z} \\ dq & \frac{\partial q}{\partial y} & \frac{\partial q}{\partial z} \\ dr & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial z} \end{vmatrix} . \tag{14}$$

Essendo

$$dx = \frac{\partial x}{\partial p} dp + \frac{\partial x}{\partial q} dq + \frac{\partial x}{\partial r} dr \, ,$$

si ottiene, uguagliando i coefficienti di dp nei due membri di (14),

$$\Delta \frac{\partial x}{\partial p} = \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial z} - \frac{\partial q}{\partial z} \frac{\partial r}{\partial y} \, ;$$

poi

$$\Delta \left(\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial z}{\partial r} \right) = \left(\frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial z} - \frac{\partial q}{\partial z} \frac{\partial r}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial q}{\partial x} \right) .$$

Dunque, sostituendo in (12), e rappresentando, secondo il solito, con dS l'elemento di spazio $dxdydz$,

$$J = \frac{1}{2} \int \left[\left(\frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial z} - \frac{\partial q}{\partial z} \frac{\partial r}{\partial y} \right) + \ldots \right] dS . \tag{15}$$

8. Cerchiamo di trasformare J in integrale di superficie. Si ha

$$\frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial z} - \frac{\partial q}{\partial z} \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(q \frac{\partial r}{\partial z} - r \frac{\partial q}{\partial z} \right) + \left(r \frac{\partial^2 q}{\partial y \partial z} - q \frac{\partial^2 r}{\partial y \partial z} \right) .$$

Similmente

$$\frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial z} - \frac{\partial q}{\partial z} \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial q}{\partial y} - q \frac{\partial r}{\partial y} \right) + \left(q \frac{\partial^2 r}{\partial y \partial z} - r \frac{\partial^2 q}{\partial y \partial z} \right) .$$

Dunque, sommando,

$$2 \left(\frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial z} - \frac{\partial q}{\partial z} \frac{\partial r}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(q \frac{\partial r}{\partial z} - r \frac{\partial q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial q}{\partial y} - q \frac{\partial r}{\partial y} \right) ;$$

poi, sostituendo in (15), e raccogliendo i termini derivati rispetto ad x,

$$J = \frac{1}{4} \int \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial r}{\partial z} - r \frac{\partial p}{\partial z} + p \frac{\partial q}{\partial y} - q \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \ldots \right] dS . \tag{16}$$

D'altronde si ha, in virtù di (13),

$$p\frac{\partial r}{\partial z}-r\frac{\partial p}{\partial z}+p\frac{\partial q}{\partial y}-q\frac{\partial p}{\partial y}=-\left(p\frac{\partial p}{\partial x}+q\frac{\partial p}{\partial y}+r\frac{\partial p}{\partial z}\right).$$

Ora, se indichiamo con $d\sigma$ l'elemento lineare collocato sull'asse di rotazione (p, q, r), dimodochè

$$\frac{dx}{p}=\frac{dy}{q}=\frac{dz}{r}=\frac{d\sigma}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},$$

possiamo anche dare, all'espressione precedente, la forma

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{d\sigma}+\frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{d\sigma}+\frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{d\sigma}\right)\sqrt{p^2+q^2+r^2}=-\frac{dp}{d\sigma}\sqrt{p^2+q^2+r^2},$$

e così, sostituendo in (16), e facendo uso della formola (10) del precedente capitolo, si ottiene

$$J=\frac{1}{4}\int\left(\frac{dp}{d\sigma}\frac{dx}{dn}+\frac{dq}{d\sigma}\frac{dy}{dn}+\frac{dr}{d\sigma}\frac{dz}{dn}\right)\sqrt{p^2+q^2+r^2}\,ds.$$

9. L'ultimo risultato non ha importanza per noi. Deve soltanto interessarci la possibilità di trasformare J in integrale di superficie, dobbiamo cioè constatare che J è *solo in apparenza* un integrale triplo, mentre in realtà è un integrale doppio. Ne segue che quella parte della sua variazione δJ che non si riduce ad integrale di superficie deve per necessità essere nulla identicamente. Intanto si è visto che, ammessa l'esistenza di p, q, r insieme a quella di a, b, c, f, g, h, le relazioni (6) sono sufficienti e necessarie per l'esistenza di u, v, w. Per mezzo di esse l'espressione sottoposta al segno di integrazione, in (15), diventa

$$\left(\frac{\partial h}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial g}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial g}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial h}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial h}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial h}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$
$$-\left(\frac{\partial g}{\partial z}-\frac{\partial c}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial h}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial c}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial b}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial a}{\partial z}-\frac{\partial g}{\partial x}\right).$$

Ora suppongasi che ad a, b, c, f, g, h si diano variazioni arbitrarie, e si tenti di porre la variazione che ne risulta per J sotto la forma

$$\delta J=\int(\mathfrak{A}\delta a+\mathfrak{B}\delta b+\mathfrak{C}\delta c+\mathfrak{F}\delta f+\mathfrak{G}\delta g+\mathfrak{H}\delta h)\,dS,$$

a prescindere da integrali di superficie. Facendo variare la sola a si ottiene

$$\delta J=\frac{1}{2}\int\left[\left(\frac{\partial c}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial\delta a}{\partial y}+\left(\frac{\partial b}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial\delta a}{\partial z}\right]dS,$$

cioè, integrando per parti,

$$\delta J = \frac{1}{2}\int\left[\frac{\partial}{\partial y}\left\{\left(\frac{\partial c}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial z}\right)\delta a\right\}+\frac{\partial}{\partial z}\left\{\left(\frac{\partial b}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)\delta a\right\}\right]dS$$
$$-\frac{1}{2}\int\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial c}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial b}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]\delta a\,dS\,.$$

La prima parte è riducibile ad integrale doppio mediante la formola (10) del capitolo precedente, e la seconda parte è l'espressione di $\int\mathfrak{A}\delta a dS$. Dunque

$$\mathfrak{A}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial c}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial b}{\partial z}\right)\right]=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 b}{\partial z^2}\right).$$

Operando analogamente per f si ottiene prima

$$\delta J=\frac{1}{2}\int\left[-2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\delta f}{\partial x}+\left(\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}\right)\frac{\partial\delta f}{\partial x}+\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial z}\right)\frac{\partial\delta f}{\partial y}+\left(\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial y}\right)\frac{\partial\delta f}{\partial z}\right]dS;$$

poi, integrando per parti,

$$=\frac{1}{2}\iint\left[-2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\delta f\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}\right)\delta f\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial z}\right)\delta f\right\}+\frac{\partial}{\partial z}\left\{\left(\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial y}\right)\delta f\right\}\right]dS$$
$$-\frac{1}{2}\iint\left[-2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial y}\right)\right]\delta f dS\,.$$

Trascurando la prima parte, che in realtà è un integrale doppio, e paragonando la seconda a $\int\mathfrak{F}\delta f dS$, si ottiene

$$\mathfrak{F}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a}{\partial z}-\frac{\partial g}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a}{\partial y}-\frac{\partial h}{\partial x}\right)$$
$$=\frac{\partial^2 a}{\partial y\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Abbiamo così

$$\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{A}&=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 b}{\partial z^2}\right), &\mathfrak{F}&=\frac{\partial^2 a}{\partial y\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial x}\right),\\
\mathfrak{B}&=\frac{\partial^2 g}{\partial z\partial x}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 a}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\right), &\mathfrak{G}&=\frac{\partial^2 b}{\partial z\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial h}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial g}{\partial y}\right),\\
\mathfrak{C}&=\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 b}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a}{\partial y^2}\right), &\mathfrak{H}&=\frac{\partial^2 c}{\partial x\partial y}-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial h}{\partial z}\right),
\end{aligned}\right.$$

e vediamo che le funzioni $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H}$, il cui simultaneo annullamento è sufficiente e (data l'arbitrarietà di $\delta a, \delta b, \delta c, \delta f, \delta g, \delta h$) necessario per l'annullamento identico di δJ, sono appunto quelle che, poste uguali a zero, forniscono le condizioni sufficienti e necessarie perchè a, b, c, f, g, h siano le componenti d'una deformazione possibile.

III. IL POTENZIALE DELLE FORZE ELASTICHE.

1. L'esperienza insegna che i corpi della natura, sottoposti a forze convenientemente piccole, si deformano, ma riprendono la forma primitiva tostochè cessi l'azione delle forze deformatrici. Ciò si esprime dicendo che la deformazione dà origine a *forze elastiche*, le quali tendono a ricondurre i punti del corpo nelle loro antiche posizioni. In questo ritorno ad uno stato di *equilibrio stabile* intervengono unicamente le forze elastiche, ed è noto dalla Meccanica razionale che in un sistema equilibrato, soggetto a forze che dipendono solo dalle posizioni relative dei punti del sistema, quali sono le forze elastiche, il *potenziale* o lavoro eseguito dalle forze è un *massimo* o un *minimo* secondo che l'equilibrio è *stabile* o *instabile*. Si sa inoltre che questo lavoro non può dipendere dalle infinite configurazioni che va prendendo il sistema per raggiungere l'equilibrio, ma dipende soltanto dalle configurazioni iniziale e finale. E però, se con ΠdS rappresentiamo il potenziale relativo alla particella dS, potremo asserire che Π dipende soltanto da quelle quantità che caratterizzano le configurazioni estreme della particella, cioè, computando il lavoro a partire dalla configurazione di equilibrio, Π sarà funzione delle quantità a, b, c, f, g, h, che caratterizzano la pura deformazione, giacchè, nei moti rigidi della particella, le forze elastiche non fanno lavoro. Adoperando una nota formola, e rappresentando in generale con φ_θ ciò che la funzione φ di a, b, c, f, g, h diventa, quando le variabili si moltiplicano pel numero positivo θ, inferiore all'unità, potremo esprimere il potenziale unitario Π nel seguente modo:

$$\Pi = \Pi_0 + a\left(\frac{\partial \Pi}{\partial a}\right)_0 + b\left(\frac{\partial \Pi}{\partial b}\right)_0 + \ldots + h\left(\frac{\partial \Pi}{\partial h}\right)_0$$
$$+ \frac{1}{2}\left[a^2\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial a^2}\right)_\theta + 2ab\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial a \partial b}\right)_\theta + \ldots + h^2\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial h^2}\right)_\theta\right].$$

Per convenzione $\Pi_0 = 0$. Inoltre, poichè la funzione Π ha valore massimo per a, b, c, f, g, h evanescenti, dev'essere *nulla* la sua prima variazione, *negativa* la variazione seconda. Finalmente, quando φ è continua, si può ad ogni φ_θ sostituire φ_0, trascurando quantità piccolissime, dell'ordine di a, b, c, f, g, h. Dunque Π *è una forma quadratica, essenzialmente negativa, delle componenti della deformazione.* Segnaliamo fin d'ora l'altissima importanza che ha il potenziale unitario Π in tutta questa teoria: « esso ha l'insigne proprietà di rappresentare l'*energia,* riferita all'unità di volume, che il corpo elastico possiede nell'intorno del punto che si considera, energia la quale è equivalente sia al lavoro che l'unità di volume del corpo può svolgere nel restituirsi dallo stato attuale allo stato naturale, sia al lavoro che hanno dovuto svolgere le forze esterne per condurre la detta unità di volume dallo stato naturale all'attuale suo stato di coazione elastica » (*).

2. Se nell'espressione di Π mettiamo in evidenza i termini che contengono soltanto a, b, c, o soltanto f, g, h, possiamo scrivere

$$\Pi = -\frac{1}{2}(Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + 2A'bc + 2B'ca + 2C'ab)$$
$$-2(Ff^2 + Gg^2 + Hh^2 + 2F'gh + 2G'hf + 2H'fg)$$
$$-2a(F_1 f + G_1 g + H_1 h) - 2b(F_2 f + G_2 g + H_2 h) - 2c(F_3 f + G_3 g + H_3 h).$$

Se il mezzo è omogeneo, i coefficienti $A, B, \ldots, H_3$ sono costanti

(*) Beltrami, *Sulle condizioni di resistenza dei corpi elastici* (Rendiconti dell'Istituto lombardo, 11 Giugno, 1885).

in tutto il corpo, purchè non si abbiano variazioni di temperatura, come si è finora tacitamente supposto e si continuerà a supporre. Si osservi che, nel caso più generale, queste costanti, o *coefficienti di elasticità*, sono *ventuno*. Rankine (*) le distingue con le seguenti denominazioni:

A, B, C: elasticità *dirette*

F, G, H: » *tangenziali* o *di rigidità*

A', B', C': » *laterali*

$F', G', H'; F_1, G_1, H_1; F_2, G_2, H_2; F_3, G_3, H_3$: elasticità *asimmetriche*.

Se il mezzo è dotato, per ciò che riguarda l'elasticità, d'un *piano di simmetria*, ciò vuol dire che Π non varia nella forma quando, preso il detto piano per piano delle yz, si cambia x in $-x$. Questo cambiamento trae con sè il cambiamento di u in $-u$, e quindi di g ed h in $-g$ e $-h$, mentre a, b, c, f restano inalterati. Dunque deve aversi

$$G' = G_1 = G_2 = G_3 = 0 \quad , \quad H' = H_1 = H_2 = H_3 = 0 .$$

Se il mezzo è dotato di due piani ortogonali di simmetria, sono nulle *tutte* le elasticità asimmetriche. Ciò svela l'esistenza necessaria d'un terzo piano di simmetria, perpendicolare ai primi due. In tal caso il potenziale unitario assume la forma semplicissima

$$= -\frac{1}{2}(Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + 2A'bc + 2B'ca + 2C'ab) - 2(Ff^2 + Gg^2 + Hh^2).$$

3. Se, invece d'un piano, si ha un *asse di simmetria*, il mezzo dicesi dotato d'*isotropia* intorno a questo asse. È noto (**) che, se

---

(*) *On axes of Elasticity and crystallin Forms* (R. Società di Londra, 21 Giugno, 1855).

(**) Per la dimostrazione basta osservare che, se la condizione di ortogonalità

$$\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' = 0$$

si conserva quando i coseni $\lambda, \lambda', \ldots$ variano di $\delta\lambda, \delta\lambda', \ldots$, si ha

$$\Sigma\lambda\delta\lambda' + \Sigma\lambda'\delta\lambda = 0 , \quad \text{ovvero} \quad \Sigma\lambda(\lambda' + \delta\lambda') + \Sigma\lambda'(\lambda + \delta\lambda) = 0 ,$$

vale a dire $\cos(xy') = -\cos(x'y)$; ecc.

si spostano infinitamente poco tre assi ortogonali intorno all'origine, in modo che restino ortogonali, i coseni direttori dei nuovi assi si possono rappresentare nel seguente modo:

	x'	y'	z'
x	1	γ	$-\beta$
y	$-\gamma$	1	α
z	β	$-\alpha$	1

Gli angoli α, β, γ sono infinitesimi, e si suppone che si trascurino gli infinitesimi di ordine superiore. Intanto le formole (2) e (3) del primo capitolo forniscono i nuovi valori di a, b, c, f, g, h. Esse mostrano che le variazioni subìte da queste quantità sono

$$\delta a = 2(g\beta - h\gamma) \quad , \quad \delta f = (b-c)\alpha - h\beta + g\gamma$$
$$\delta b = 2(h\gamma - f\alpha) \quad , \quad \delta g = h\alpha + (c-a)\beta - f\gamma$$
$$\delta c = 2(f\alpha - g\beta) \quad , \quad \delta h = -g\alpha + f\beta + (a-b)\gamma.$$

Ne segue, adoperando (1),

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\delta\Pi = &-(g\beta - h\gamma)(Aa + C'b + B'c) - 2\left[(b-c)\alpha - h\beta + g\gamma\right]Ff \\ &-(h\gamma - f\alpha)(C'a + Bb + A'c) - 2\left[h\alpha + (c-a)\beta - f\gamma\right]Gg \\ &-(f\alpha - g\beta)(B'a + A'b + Cc) - 2\left[-g\alpha + f\beta + (a-b)\gamma\right]Hh\,,\end{aligned}$$

ovvero, ordinando tutto rispetto ad α, β, γ,

$$\frac{1}{2}\delta\Pi = -\sum\left\{\left[(B'-C')a + (A'-B)b + (C-A')c + 2(b-c)F\right]f + 2(G-H)gh\right\}\alpha.$$

Se prendiamo l'asse d'isotropia come asse delle x, Π deve rimanere invariato quando il piano delle yz gira su sè stesso intorno all'origine. Bisogna dunque che, per $\beta = \gamma = 0$, si abbia identicamente $\delta\Pi = 0$, cioè

$$B' = C' \quad , \quad G = H \quad , \quad B - A' = C - A' = 2F\,.$$

Nel caso di due assi ortogonali d'isotropia si ha

$$A = B = C \quad , \quad A' = B' = C' \quad , \quad F = G = H \quad , \quad A - A' = 2F\,;$$

ma allora $\delta\Pi$ è identicamente nullo, qualunque sia la terna di valori attribuiti ad α, β, γ. Il mezzo è dunque pienamente *isotropo*, cioè le sue proprietà elastiche si manifestano con eguale intensità in tutte le direzioni. Intanto, se per introdurre la segnatura abituale, proposta da Green, si cambia F in B, osservando che $A' = A - 2B$, la formola (1) diventa

$$\Pi = -\frac{1}{2}A(a+b+c)^2 - 2B(f^2+g^2+h^2-bc-ca-ab)\ ,$$

ovvero (*)

$$\Pi = -\frac{1}{2}(A-2B)(a+b+c)^2 - B(a^2+b^2+c^2+2f^2+2g^2+2h^2).$$

I coefficienti A e B sono le *costanti d'isotropia*, variabili da un mezzo all'altro.

4. Un più elegante modo di trovare la speciale forma che Π assume nel caso dell'isotropia incompleta, o simmetria elastica rispetto ad un asse, è stato dal prof. Beltrami esposto nelle « *Note fisico-matematiche* ». Si è visto nel § 8 del primo capitolo che le funzioni

$$a+b+c\ ,\ bc+ca+ab-f^2-g^2-h^2\ ,\ abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2$$

hanno un significato indipendente dalla scelta degli assi. Ora, prendendo come asse delle x l'asse di simmetria, se si fa ruotare il piano delle yz su sè stesso, intorno all'origine, a resta invariato, ma è sempre arbitrario, e però debbono rimanere separatamente invariate, in ogni funzione invariante di a, b, c, f, g, h, la parte che contiene a e quella che non contiene a. Dunque, osservando

(*) Vedi nella *Teoria della elasticità* del Prof. Betti, alla fine del secondo capitolo, l'interpretazione meccanica di $a^2+b^2+c^2+2f^2+2g^2+2h^2$.

che le espressioni invarianti, ottenute precedentemente, si possono scrivere nel seguente modo

$$a+(b+c) \;,\quad a(b+c)+(bc-f^2-g^2-h^2)\;,$$
$$a(bc-f^2)+(2fgh-bg^2-ch^2)\;,$$

si vede che rimangono invariate le espressioni

$$a\;,\quad b+c\;,\quad bc-f^2-g^2-h^2\;,\quad bc-f^2\;,\quad 2fgh-bg^2-ch^2\;,$$

ovvero

$$a^2\;,\quad a(b+c)\;,\quad (b+c)^2\;,\quad f^2-bc\;,\quad g^2+h^2\;,$$

tralasciando l'ultima, che non può entrare nell'espressione di Π. Questa è infatti del secondo grado, e si può tentare di scriverla così:

$$-\Pi=Aa^2+Ba(b+c)+C(b+c)^2+D(f^2-bc)+E(g^2+h^2). \quad (2)$$

Poi si può ritenere che questa sia l'espressione generale di Π, appena si osservi che contiene *cinque* coefficienti arbitrarii, e che d'altra parte l'espressione di Π, nel caso considerato, non può racchiudere più di cinque coefficienti. Infatti i *nove* coefficienti trovati nel caso che il mezzo sia dotato di tre piani ortogonali di simmetria si riducono già a *sei* quando si suppone soltanto che si possano scambiare fra loro due assi. È poi chiaro che ogni ulteriore particolarizzazione deve apportare qualche riduzione nel numero dei coefficienti di elasticità, numero che, per conseguenza, non può essere maggiore di cinque. Si passa poi all'espressione del potenziale, pel caso dei mezzi pienamente isotropi, rendendo l'espressione (2) simmetrica rispetto ad a, b, c e ad f, g, h. Si ottiene

$$A=C\;,\quad D=E\;,\quad B=2C-D\;,$$

e si ricade sulle formole del precedente paragrafo cambiando A e C in $\frac{1}{2}A$, D ed E in $2B$, e B in $A-2B$.

5. I coefficienti di elasticità sono soggetti a limitazioni, imposte dal carattere essenzialmente positivo della forma $-\Pi$. Siccome il discriminante di questa forma è

$$\frac{1}{64}\begin{vmatrix} 4B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A & A-2B & A-2B \\ 0 & 0 & 0 & A-2B & A & A-2B \\ 0 & 0 & 0 & A-2B & A-2B & A \end{vmatrix},$$

le condizioni necessarie e sufficienti perchè a qualunque sistema di valori delle variabili corrisponda un valore positivo di $-\Pi$ sono, per un noto teorema di Algebra,

$$B>0\,,\ A>0\,,\ \begin{vmatrix} A & A-2B \\ A-2B & A \end{vmatrix}>0\,,\ \begin{vmatrix} A & A-2B & A-2B \\ A-2B & A & A-2B \\ A-2B & A-2B & A \end{vmatrix}>0\,,$$

cioè

$$B>0\ ,\quad A>0\ ,\quad A-B>0\ ,\quad 3A-4B>0\ ,$$

e si riducono alla prima ed all'ultima, perchè, soddisfatte queste due, le altre restano soddisfatte *a fortiori*. Dunque *le costanti dell'isotropia*, A *e* B, *sono necessariamente positive, ed inoltre la prima supera i quattro terzi della seconda*. Sotto altra forma queste limitazioni, che hanno importanza in certe ricerche (*), sono state date da Green (**) e dimostrate da Beltrami (***) nel modo semplicissimo che qui appresso si espone.

6. Ogni sistema di valori *costanti* di a, b, c, f, g, h corrisponde (II, 4) ad una deformazione possibile. Supponendo $f=g=h=0$, il potenziale unitario si riduce a $-B(a^2+b^2+c^2)$ se $a+b+c=0$,

---

(*) Beltrami, *Sull'interpretazione meccanica delle formole di Maxwell.*
(**) *Mathematical Papers*, pp. 246, 330.
(***) *Sulle condizioni di resistenza dei corpi elastici* (Rend. Istituto lombardo, 1885).

ed a $-\frac{3}{2}(3A-4B)$ se $a=b=c=1$. Si ritrovano così le condizioni

$$B>0 \quad , \quad 3A-4B>0 \tag{3}$$

come *necessarie*. Per dimostrare che sono anche *sufficienti* basta mettere in evidenza il carattere essenzialmente negativo di Π, ed a ciò si perviene mediante una semplicissima trasformazione algebrica. Proponiamoci di determinare un numero reale k, in modo che sia

$$\Pi=-B\left[(a-k\Theta)^2+(b-k\Theta)^2+(c-k\Theta)^2+2f^2+2g^2+2h^2\right].$$

Paragonando con

$$\Pi=-\frac{1}{2}(A-2B)\Theta^2-B(a^2+b^2+c^2+2f^2+2g^2+2h^2)$$

si vede che dev'essere

$$\frac{1}{2}(A-2B)=B(3k^2-2k)\ ,$$

e se ne deduce

$$k=\frac{1}{3}\pm\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3A-4B}{2B}}\,.$$

Quando le condizioni (3) sono soddisfatte, k è reale, e $-\Pi$ resta espresso mediante una somma di quadrati. Inoltre vien messo in evidenza il fatto che per l'annullamento di Π è necessario e sufficiente l'annullamento simultaneo di a, b, c, f, g, h, giacchè da $a-k\Theta=b-k\Theta=c-k\Theta=0$ si deduce successivamente

$$\Theta-3k\Theta=0\ ,\quad \Theta=0\ ,\quad a=b=c=0.$$