Capitolo IX

LA TORSIONE

Nei problemi di torsione, è opportuno distinguere lo studio delle travi a sezione circolare da quello di travi con altri tipi di sezione.

Nella generica sezione circolare, di momento polare d'inerzia J_P rispetto al centro, il momento torcente M_T provoca solo tensioni tangenziali. Esse sono, su ogni areola, normali al raggio che la unisce al centro; il modulo è:

$$\tau = \frac{M_T \cdot r}{J_P}$$

ove r è la distanza dell'areola dal centro.

La rotazione relativa di due sezioni, in seguito alla deformazione del tronco elementare tra esse compreso, vale:

$$d\theta = \frac{M_T \cdot ds}{G J_P} .$$

Se, invece, ci si riferisce ad una trave a sezione rettangolare, di lati a e b con $a > b$, si può porre:

$$\tau_{max} = \alpha \frac{M_T}{ab^2}$$

$$d\theta = \beta \frac{M_T \, ds}{ab^3} .$$

La massima tensione tangenziale compete ai punti di mezzo dei lati più lunghi.

Infine, per le travi tubolari a parete sottile, vale la formula di BREDT:

$$\tau = \frac{M_T}{2 \cdot \Omega \cdot s} .$$

In essa:

s = spessore locale della parete;

Ω = area racchiusa dalla linea media della sezione della parete.

In ogni caso, lo stato di tensione (puramente tangenziale) è biassiale.

* * *

61. - Due travi coassiali, di cui l'una a sezione circolare piena e l'altra tubolare, sono incastrate ad un'estremità. All'altra, sono collegate da un disco indeformabile, a cui è applicata una coppia torcente *C*. Eseguire le verifiche di resistenza.

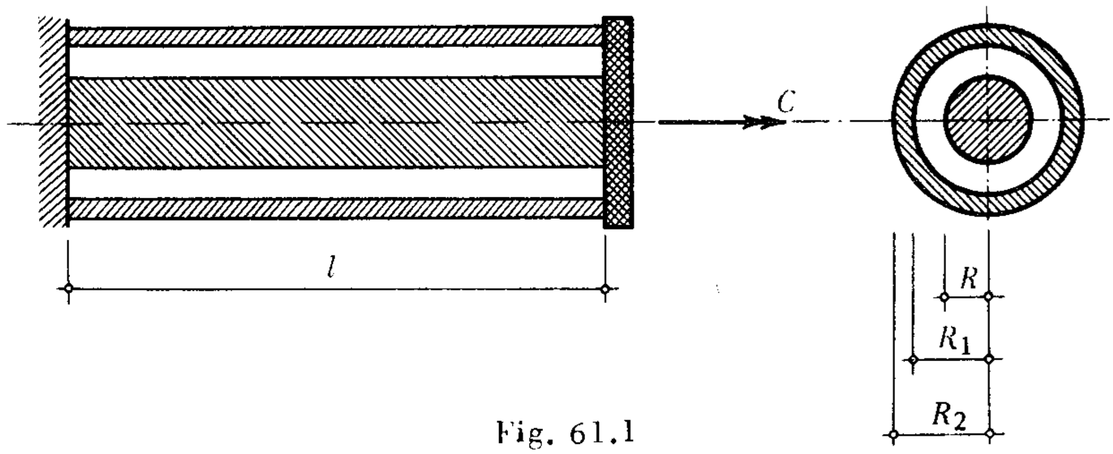

Fig. 61.1

Il problema è staticamente indeterminato: non è possibile stabilire, in base a semplici considerazioni d'equilibrio, in che proporzioni la coppia esterna si ripartisce tra le due travi.

Ciascuna di esse è soggetta soltanto a torsione; la soluzione del problema è data dall'unica ripartizione per la quale sono uguali le rotazioni torsionali delle sezioni estreme.

Poiché entrambe le travi hanno la medesima lunghezza, è sufficiente uguagliare i loro angoli unitari di torsione.

Indichiamo con l'indice 1 tutte le quantità statiche e geometriche relative alla trave a sezione piena; con l'indice 2, quella della trave tubolare.

Sia poi, per ciascuna di esse:

C_i = parte di coppia esterna che le compete;
G_i = modulo di elasticità trasversale del materiale di cui è costituita;
J_i = momento polare d'inerzia rispetto al centro di torsione (che è il baricentro) della sezione retta corrente.

Per ragioni di equilibrio del disco indeformabile, separato dalle travi, deve risultare:

$$C_1 + C_2 = C.$$

L'uguaglianza degli angoli unitari di torsione si traduce nella relazione:

$$\frac{C_1}{G_1 J_1} = \frac{C_2}{G_2 J_2}$$

La soluzione risulta:

$$C_1 = C \frac{G_1 J_1}{G_1 J_1 + G_2 J_2} \qquad C_2 = C \frac{G_2 J_2}{G_1 J_1 + G_2 J_2}.$$

La coppia esterna si ripartisce proporzionalmente alle rigidezze torsionali delle due travi.

Le massime tensioni tangenziali, per ciascuna trave, sono al contorno, e valgono:

$$\tau_1 = \frac{C_1 R}{J_1} = C \frac{R G_1}{G_1 J_1 + G_2 J_2}$$

$$\tau_2 = \frac{C_2 R_2}{J_2} = C \frac{R_2 G_2}{G_1 J_1 + G_2 J_2}.$$

CASO PARTICOLARE.

Se le due travi sono dello stesso materiale, è $G_1 = G_2$, e si ha semplicemente:

$$C_1 = C \frac{J_1}{J_1 + J_2} \qquad C_2 = C \frac{J_2}{J_1 + J_2}$$

Le tensioni tangenziali valgono:

$$\tau_1 = \frac{C R}{J_1 + J_2} \qquad \tau_2 = \frac{C R_2}{J_1 + J_2}.$$

Allo stesso risultato si poteva giungere riguardando il complesso come un'unica trave, di momento polare d'inerzia

$$J = J_1 + J_2.$$

Le massime tensioni tangenziali sono al contorno, e valgono:

$$\tau = C \frac{R_2}{J} = \frac{C R_2}{J_1 + J_2}$$

VERIFICA DI RESISTENZA. - È necessario riferirsi ad un caso concreto. Trattandosi di materiali metallici, si può porre:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{E}{2{,}6}.$$

La trave 1 sia di acciaio. Per esso:

$$E_1 = 2{,}1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2; \qquad G_1 = 8 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2.$$

La trave 2 sia di rame:

$$E_2 = 1{,}2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2; \qquad G_2 = 4{,}6 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2.$$

Siano, inoltre, assegnate le seguenti dimensioni:

$$R = 5 \text{ cm} \qquad R_1 = 9 \text{ cm} \qquad R_2 = 10 \text{ cm}.$$

La coppia sia

$$C = 5 \text{ kgm} = 500 \text{ kg cm}.$$

Risulta:

$$J_1 = \frac{\pi R^4}{2} = 983 \text{ cm}^4$$

$$J_2 = \frac{\pi}{2}(R_2^4 - R_1^4) = 5400 \text{ cm}^4$$

Si ottiene infine:

$$\tau_1 = 500 \frac{5 \times 8 \times 10^5}{(983 \times 8 + 5400 \times 4{,}6)\, 10^5} = 652 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_2 = 500 \frac{10 \times 4{,}6 \times 10^5}{(983 \times 8 + 5400 \times 4{,}6)\, 10^5} = 750 \text{ kg/cm}^2$$

Verifichiamo la resistenza della trave di rame, che è la più sollecitata ed ha carico di sicurezza inferiore:

$$K = 1000 \text{ kg/cm}^2.$$

Se si adotta il criterio della massima dilatazione, è necessario limitare la massima tensione ideale al carico di sicurezza a tensione monoassiale.

Trattandosi di stato di tensione tangenziale pura, la massima tensione ideale risulta:

$$\sigma_{id} = \tau_2(1+\nu) = 1{,}3 \times 750 = 975 \text{ kg/cm}^2.$$

La resistenza è assicurata.

OSSERVAZIONE. - Ricordiamo che la massima tensione ideale può essere calcolata in funzione di quelle principali, ottenute, ad esempio, mediante il circolo di MOHR.

Nell'intorno di un punto della periferia, in cui è massima la tensione tangenziale, si scelgano due elementi piani, tra loro ortogonali.

Il primo appartiene al piano della sezione retta, perché su questa sono già note le tensioni.

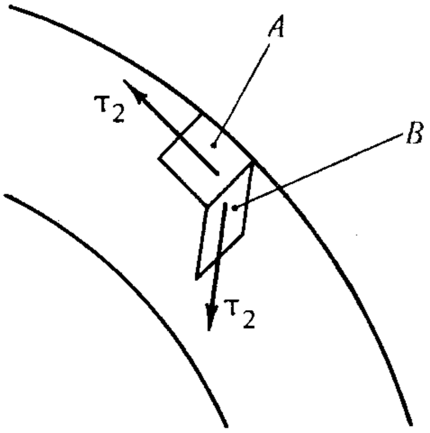

Fig. 61.2

L'altro elemento deve essere scelto in modo che su di esso la tensione tangenziale sia la reciproca della τ_2 già nota. Allo scopo, lo spigolo comune ai due piani deve essere normale alla τ_2; pertanto, il secondo elemento, oltre ad essere normale alla sezione retta, deve contenere l'asse longitudinale.

Indichiamo, rispettivamente, con A e B i due elementi piani. Su ciascuno di essi, le componenti di tensione valgono:

$$\sigma = 0$$
$$\tau = \tau_2.$$

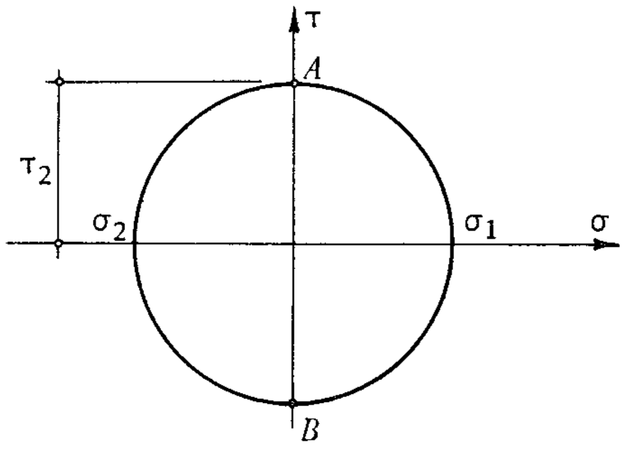

Fig. 61.3

Il circolo di Mohr assume l'aspetto indicato nella fig. 61.3.

Le tensioni principali valgono, numericamente:

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_2$$

per cui la tensione ideale risulta:

$$\sigma_{id} = \sigma_1 - \nu\sigma_2 = \tau_2(1+\nu).$$

* * *

62. - Confrontare la resistenza a torsione di un profilato UPN 300 con quella di una trave a cassone avente la sezione con le stesse dimensioni esterne dell'UPN.

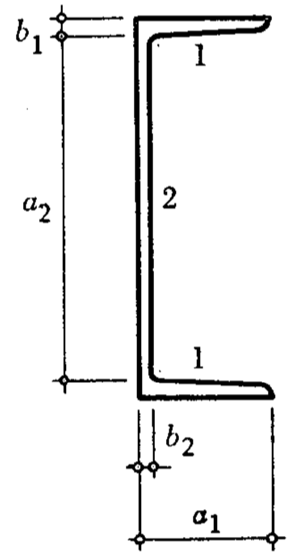

Fig. 62.1

TRAVE UPN 300. - Le dimensioni medie della sezione sono indicate nella fig. 62.1

$$a_1 = 10 \text{ cm}$$
$$b_1 = 1{,}6 \text{ «}$$
$$a_2 = 26{,}8 \text{ «}$$
$$b_2 = 1 \text{ «}$$

Lo stato di tensione, che si desta nella sezione per effetto di una coppia torcente C, può determinarsi scomponendo la sezione stessa in tre parti rettangolari: l'anima e le ali.

Per una sezione rettangolare di dimensioni a e b ($a > b$) si possono esprimere la massima tensione tangenziale τ e l'angolo unitario di torsione θ mediante le formule:

$$\tau = \alpha \frac{M_t}{ab^2} ; \qquad \theta = \beta \frac{M_t}{G \cdot ab^3} .$$

I coefficienti adimensionali α e β sono tabellati in funzione del rapporto tra i lati. Si possono, però, usare delle espressioni approssimate, che dànno precisione più che sufficiente per gli scopi pratici:

$$\alpha \cong 3 + 1{,}8 \frac{b}{a}$$

$$\beta \cong \frac{3}{1 - 0{,}6 \frac{b}{a}}$$

Ciascuna parte della sezione assorbe una quota della coppia esterna, determinabile uguagliando le rotazioni torsionali delle varie parti.

Con le dimensioni di questo problema:

$$\beta_1 = 3{,}32; \qquad \beta_2 = 3{,}07.$$

L'equazione di congruenza interna diviene:

$$\beta_1 \frac{C_1}{G a_1 b_1^3} = \beta_2 \frac{C_2}{G a_2 b_2^3}$$

e l'equilibrio complessivo:

$$2 C_1 + C_2 = C.$$

Si ottiene facilmente:

$$C_1 = C \frac{\dfrac{a_1 b_1^3}{\beta_1}}{\Sigma \dfrac{a_1 b_1^3}{\beta_i}} = \frac{12{,}34}{33{,}41} C = 0{,}369\ C$$

$$C_2 = C \frac{\dfrac{a_2 b_2^3}{\beta_2}}{\Sigma \dfrac{a_i b_i^3}{\beta_i}} = \frac{8{,}73}{33{,}41} C = 0{,}262\ C$$

Per quanto concerne le massime tensioni (nei punti di mezzo dei lati più lunghi di ciascun rettangolo) si ha:

$$\alpha_1 = 3{,}29; \qquad \alpha_2 = 3{,}07$$

$$\tau_1 = \alpha_1 \frac{C_1}{a_1 b_1^2} = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \frac{C b_1}{\Sigma \dfrac{a_i b_i^3}{\beta_i}} = 0{,}0475\ C$$

$$\tau_2 = \alpha_2 \frac{C_2}{a_2 b_2^2} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} \cdot \frac{C b_2}{\Sigma \dfrac{a_i b_i^3}{\beta_i}} = 0{,}0299\ C$$

Se il profilo è di acciaio Fe 42, avente $K = 1400$ kg/cm², si può porre:

$$t = \frac{K}{1 + \nu} = 1080 \text{ kg/cm}^2$$

La massima coppia torcente sopportabile dalla sezione si ottiene ponendo $\tau_1 = t$:

$$C_{1\,max} = \frac{t}{0{,}0475} = 22\,700 \text{ kg cm} = 227 \text{ kg m.}$$

OSSERVAZIONE. - Nelle formule che forniscono le tensioni, $\frac{\alpha_1}{\beta_1} \cong \frac{\alpha_2}{\beta_2}$. È subito evidente che le τ massime si verificano ove è massimo lo spessore.

Questo fatto può giustificarsi anche sinteticamente, ove si osservi che un aumento di b_i fa crescere più rapidamente la coppia C_i (proporzionale ad $a_i b_i^3$) che non la resistenza (proporzionale ad $a_i b_i^2$).

Oppure, si può ragionare valendosi dell'analogia idrodinamica. In ogni punto, la tensione tangenziale è l'analoga della velocità di un fluido perfetto dotato di moto rotazionale permanente in un recipiente avente sezione uguale a quella della trave.

A causa della forma della sezione, e della diversità degli spessori, non tutte le linee di corrente seguono il contorno. Alcune si chiudono su se stesse all'interno delle ali e delle anime. È intuitivo che, al crescere del rapporto tra lo spessore delle ali e dell'anima, il flusso tende sempre più a concentrarsi nelle ali, interessando l'anima solo in maniera molto limitata.

In altre parole, l'addensamento del flusso nelle ali fa crescere la portata più rapidamente della sezione utile per il deflusso. Al crescere del rapporto b_1/b_2 cresce anche il rapporto v_1/v_2 tra le velocità, e quindi le tensioni tangenziali, nei punti come 1 e 2.

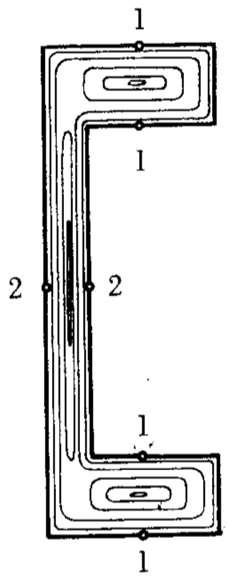

Fig. 62.2

TRAVE A CASSONE. - Le dimensioni geometriche della sezione sono indicate nella fig. 62.3.

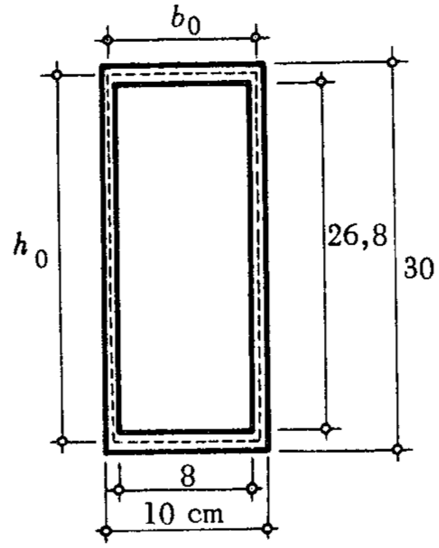

Fig. 62.3

La sezione può considerarsi tubolare a parete sottile. Le massime tensioni tangenziali si destano in tutti i punti delle anime, aventi lo spessore di 1 cm, e sono date dalla formula:

$$\tau = \frac{\bar{C}}{2\,\Omega s}.$$

Qui risulta:

$$\Omega = h_0 \cdot b_0 = 28{,}4 \times 9 = 255{,}6 \text{ cm}^2$$

$$\tau_{max} = \frac{\bar{C}}{2 \times 255{,}6 \times 1} = 0{,}00196 \cdot \bar{C}.$$

Posto $\tau_{max} = t$ si ha:

$$\bar{C}_{max} = \frac{t}{0{,}00196} = 551000 \text{ kg cm} = 5510 \text{ kgm}.$$

OSSERVAZIONE. - Il rapporto tra i massimi momenti sopportabili dai due tipi di sezione risulta:

$$\frac{\bar{C}_{max}}{C_{max}} = \frac{5510}{227} = 24{,}3.$$

Le aree delle due sezioni sono invece:

- UPN 300 $A = 58{,}8\ \text{cm}^2$
- trave a cassone $\bar{A} = 85{,}6\ \text{cm}^2$.

Il loro rapporto risulta:

$$\frac{\bar{A}}{A} = \frac{85{,}6}{58{,}8} = 1{,}45.$$

Come si vede, l'aggiunta dell'anima di destra provoca un aumento di peso del 45 %, ma un aumento di resistenza ben più cospicuo: il 2330 %.