

## CAPITOLO VIII

### LO SFORZO DI TAGLIO

La comune trattazione dei problemi di flessione e taglio, nelle travi, riposa sulla teoria approssimata dello JOURAWSKI.

Nella sezione corrente di una trave soggetta a momento flettente variabile, la tensione indotta dal taglio è, per ogni elemento di superficie, puramente tangenziale.

Per una sezione semplicemente connessa si può tracciare una corda qualsiasi, di lunghezza  $b$ , che la divida in due parti. Sia  $\tau$  la componente della tensione tangenziale normale alla corda nel suo punto generico.

Il valor medio del suo modulo vale:

$$(VIII.1) \quad \tau = \frac{TS_x}{bJ_x}$$

in cui:

$J_x$  = momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse neutro;

$S_x$  = momento statico, rispetto ad esso, di una delle parti in cui la corda divide la sezione.

Quando occorra, si può determinare la componente di tensione parallela alla corda, ricordando che essa varia linearmente e che la tensione totale, agli estremi, deve risultare tangente al contorno della sezione.

Lo stato tensionale così dedotto è tanto più aderente alla realtà fi-

sica quanto meglio sono verificate due fondamentali ipotesi:

1) agli estremi della corda, le tangenti al contorno della sezione hanno direzione prossima alla normale alla corda stessa;

2) la larghezza della corda è piccola, rispetto alle dimensioni medie della sezione.

Se, in particolare, la corda giace sull'asse neutro della flessione, la tensione tangenziale ha il modulo:

$$(VIII.2) \quad \tau_0 = \frac{T}{b h_0}$$

ove  $h_0$  è il braccio della coppia interna equivalente al momento flettente.

Per le sezioni con pareti sottili, la formula dà le tensioni totali, in quanto sono note (parallele al contorno) le traiettorie delle tensioni tangenziali. La teoria approssimata dà risultati molto aderenti alla realtà, perché le due ipotesi fondamentali sono quasi esattamente soddisfatte.

La deformazione globale del tronco elementare può riassumersi nello scorrimento, normale all'asse, delle facce estreme:

$$(VIII-3) \quad d\eta = \chi \frac{T \cdot ds}{GA}$$

essendo  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  il modulo di elasticità trasversale (o tangenziale).

In ogni punto lo stato di tensione è biassiale. La verifica di resistenza va fatta, di regola, tenendo conto della compresenza delle tensioni tangenziali taglianti e di quelle normali flessionali (non si dimentichi che il taglio è sempre accompagnato dal momento flettente, salvo, al più, sezioni isolate).

\* \* \*

55. - Determinare l'andamento delle tensioni tangenziali in una sezione quadrata, sollecitata da uno sforzo di taglio applicato lungo una delle diagonali.

### PRIMA SOLUZIONE.

Sia  $T$  l'intensità dello sforzo di taglio che sollecita la sezione quadrata, di lato  $a$ . Risolviamo, dapprima, il problema ricercando direttamente la componente normale media  $\tau$  su una corda parallela all'asse neutro della flessione.

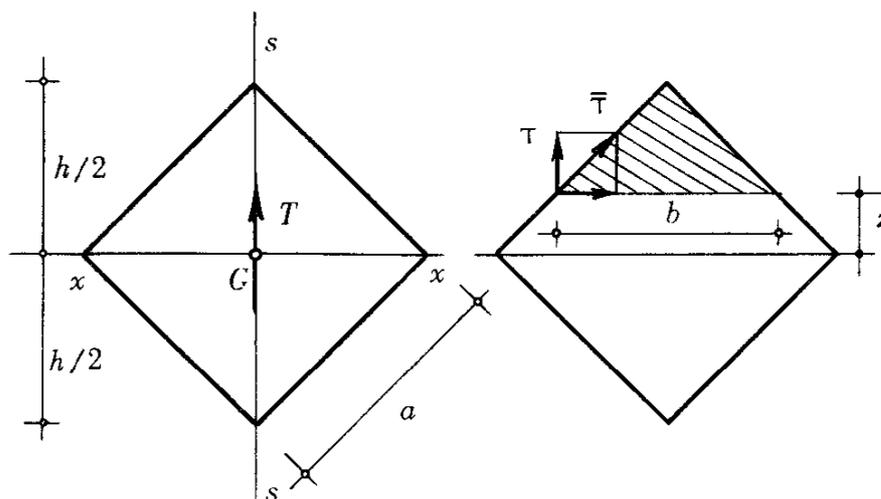


Fig. 55.1

Si ottiene facilmente:

$$J_x = \frac{a^4}{12}$$

$$S_x = \frac{b}{2} \left( \frac{h}{2} - z \right) \left[ z + \frac{1}{3} \left( \frac{h}{2} - z \right) \right] = \frac{b}{2} \left( \frac{h}{2} - z \right) \left( \frac{h}{6} + \frac{2}{3} z \right)$$

e perciò:

$$\tau(z) = \frac{T}{b} \frac{S_x}{J_x} = \frac{6T}{a^4} \left( \frac{h}{2} - z \right) \left( \frac{h}{6} + \frac{2}{3}z \right).$$

Agli estremi della corda, la tensione tangenziale totale  $\bar{\tau}$  è diretta lungo il contorno.

Si ha allora:

$$\bar{\tau} = \tau \sqrt{2} = \frac{6T \sqrt{2}}{a^4} \left( \frac{h}{2} - z \right) \left( \frac{h}{6} + \frac{2}{3}z \right)$$

In particolare, sull'asse neutro:

$$\tau_0 = \tau(0) = \frac{6T}{a^4} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{6} = \frac{T}{a^2}.$$

Il massimo valore della  $\tau$  compete alla corda per cui risulta massimo il rapporto  $\frac{S_x}{b}$ , cioè nulla la sua derivata rispetto a  $z$ .

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{S_x}{b} \right) = \frac{d}{dz} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} - z \right) \left( \frac{h}{6} + \frac{2}{3}z \right) \right] = \frac{1}{6} (h - 4z).$$

Essa si annulla per  $z_0 = \frac{h}{8}$ ; in corrispondenza di tale ordinata si trova:

$$\tau_{\max} = \frac{9}{8} \cdot \frac{T}{a^2}.$$

Per la corda generica, le tensioni totali, in ogni punto, convergono nell'intersezione delle tangenti agli estremi. Ne segue che le tensioni che competono ai punti contenuti nella metà superiore della sezione convergono nel suo vertice superiore; le altre, nel vertice inferiore.

Le traiettorie delle tensioni tangenziali assumono allora l'aspetto indicato nella fig. 55.2. In essa è riportato anche il diagramma delle tensioni tangenziali verticali.

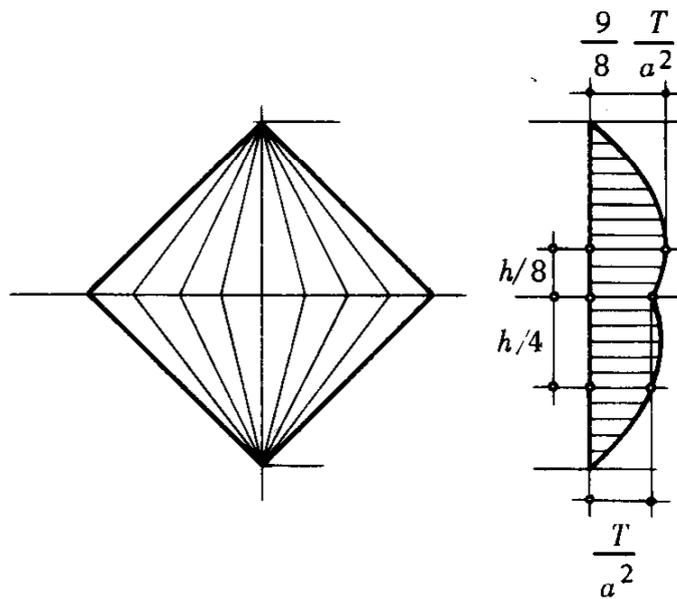


Fig. 55.2

## SECONDA SOLUZIONE.

Decomponiamo lo sforzo di taglio secondo le mediane parallele ai lati del quadrato. Sarà sufficiente studiare la sezione soggetta ad una delle componenti  $T/\sqrt{2}$ : alla fine, si otterranno i risultati cercati per sovrapposizione di effetti.

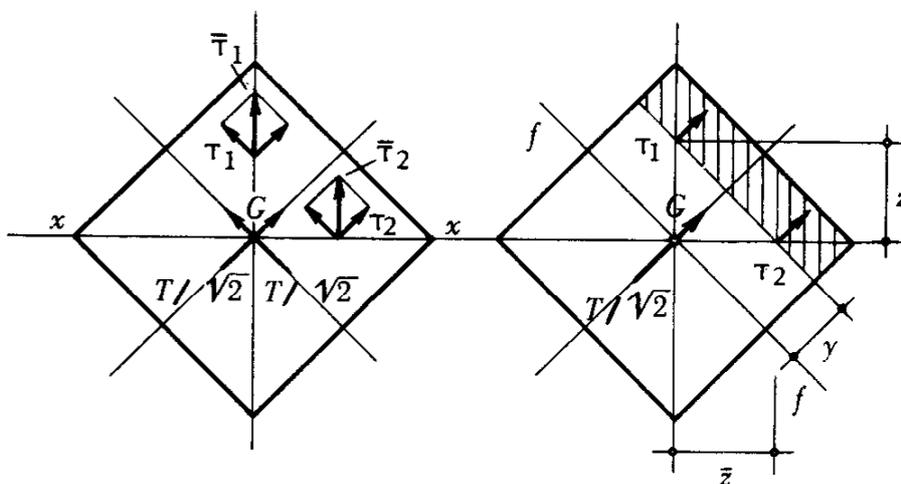


Fig. 55.3

La  $\tau_1$ , dovuta allo sforzo  $T/\sqrt{2}$  secondo una delle mediane, è costante sulla corda distante  $y$  dall'asse neutro  $f$ . Perciò,  $\tau_1$  fornisce anche il valore che compete al punto, della diagonale verticale, di quota  $z = y\sqrt{2}$ . Si ottiene subito:

$$J_f = \frac{a^4}{12}$$

$$S_f = b\left(\frac{a}{2} - y\right)\left(y + \frac{a}{2} - y\right) = b\left(\frac{a^2}{4} - y^2\right)$$

$$\tau_1 = \frac{T S_f}{\sqrt{2} \cdot b \cdot J_f} = \frac{6 T}{a^4 \sqrt{2}} \left(\frac{a^2}{4} - y^2\right)$$

oppure:

$$\tau_1 = \frac{3 T}{a^4 \sqrt{2}} \left(\frac{a^2}{2} - z^2\right)$$

La tensione totale (verticale)  $\bar{\tau}_1$ , nel generico punto della diagonale verticale, risulta:

$$\bar{\tau}_1 = \tau_1 \sqrt{2} = \frac{3 T}{a^4} \left(\frac{a^2}{2} - z^2\right).$$

In particolare, il massimo valore si ha nel centro:

$$\bar{\tau}_{1 \max} = \frac{3 T}{2 a^2}.$$

Si riscontra facilmente che, in ogni punto della diagonale orizzontale, la tensione totale è verticale, e vale ancora:

$$\bar{\tau}_2 = \tau_2 \sqrt{2} = \tau_1 \sqrt{2} = \frac{3 T}{a^4} \left(\frac{a^2}{2} - \bar{z}^2\right).$$

Essa è massima nel baricentro, nulla agli estremi (in corrispondenza dei vertici).

Le traiettorie delle tensioni tangenziali, insieme al diagramma delle  $\bar{\tau}_1$  sulla diagonale verticale, sono riportate in fig. 55.4.

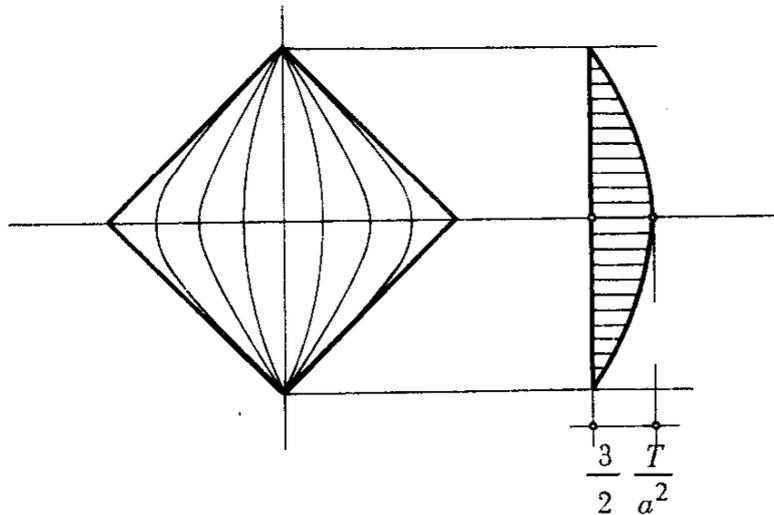


Fig. 55.4

*PRIMA OSSERVAZIONE.* - Procedendo per vie diverse, si sono ottenuti risultati tra loro in disaccordo. In particolare, non sembra più valido il principio di sovrapposizione degli effetti. Questo comportamento, apparentemente anormale, non deve meravigliare. Esso deriva semplicemente dall'aver usato, per le tensioni tangenziali, un metodo di calcolo approssimato.

Poiché la precisione è legata, essenzialmente, alla scelta della direzione della corda corrente, è chiaro che, in seguito a diverse scelte, si possono ottenere risultati con diverso grado di approssimazione.

*SECONDA OSSERVAZIONE.* - I risultati della prima soluzione sono palesemente meno attendibili. Un esame delle traiettorie delle  $\tau$  (fig. 55.2) mostra, in corrispondenza dell'asse neutro, delle cuspidi fisicamente prive di senso. Del pari illogica è la forma del diagramma delle tensioni nell'intorno dell'asse neutro.

Infine, il valore medio  $\frac{T}{a^2}$  su detto asse non ha molto significato:

è noto infatti che agli estremi l'esistenza dei due vertici comporta l'assenza di tensione tangenziale.

Tutti questi difetti scompaiono nella seconda soluzione.

Ciò si spiega facilmente rilevando che, nella prima soluzione, le tangenti al contorno, agli estremi della generica corda, si discostano molto dalla sua normale.

Viene così a mancare una delle ipotesi che rendono plausibile la teoria approssimata.

Se, invece, la corda è scelta parallelamente ai lati (seconda soluzione) le tangenti sono, ai suoi estremi, rigorosamente normali.

Appare chiaro, in conclusione, come l'attendibilità dei risultati sia legata ad un'oculata scelta della direzione della corda su cui determinare le tensioni tangenziali.

\* \* \*

**56. - Determinare l'andamento delle tensioni tangenziali e verificare la resistenza della sezione di un tubo d'acciaio  $\varnothing 146 \times 4$  mm, soggetto allo sforzo di taglio  $T = 8$  t.**

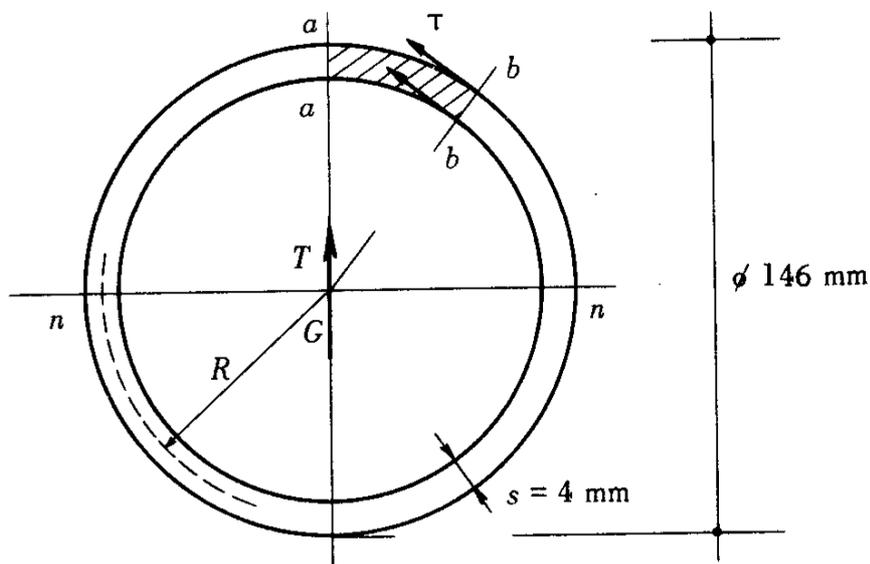


Fig. 56.1

Le caratteristiche geometriche della sezione risultano:

$$A = 2\pi R \cdot s = 17,8 \text{ cm}^2$$

$$J_n = \frac{1}{2} J_G = \pi R^3 \cdot s = 450,1 \text{ cm}^4$$

Esse sono state dedotte in approssimazione, ritenendo trascurabile lo spessore rispetto al raggio medio.

Ai lembi di una corda radiale, come la  $b-b$ , le tensioni risultano tangenti al contorno.

Attesa la sottigliezza della parete, è lecito ritenere le tensioni tangenziali totali parallele e costanti lungo tutta la corda.

In altre parole, la piccolezza dello spessore permette di conoscere a priori le traiettorie delle tensioni tangenziali. Esse sono cerchi concentrici ai due contorni della sezione. Il valore della tensione  $\tau$  è fornito dalla formula classica. Del resto, è agevole ritrovarla esprimendo l'equilibrio di un prisma elementare avente altezza infinitesima lungo l'asse della trave, e base coincidente con la porzione di sezione tra  $a-a$  e  $b-b$  (tratteggiata nella fig. 56.1).

Equilibrando alla traslazione longitudinale (in  $a-a$  la  $\tau$  è nulla per simmetria):

$$\tau s dx = dC = \int_{\bar{A}} d\sigma \cdot dA$$

da cui:

$$\tau = \frac{T S_n}{s J_n}$$

Nelle precedenti formule,  $\bar{A}$  è l'area tratteggiata,  $S_n$  il suo momento statico rispetto all'asse neutro.

Confondendo, poi, lo spessore del tubo con la sua linea media, e ricordando che l'ordinata  $\bar{y}$  del baricentro di un arco di apertura  $\alpha$  vale:

$$\bar{y} = R \frac{\text{sen } \alpha}{\alpha}$$

si ottiene:

$$\bar{A} = R \cdot \alpha \cdot s$$

$$S_n = \bar{A} \bar{y} = R^2 \cdot s \cdot \text{sen } \alpha$$

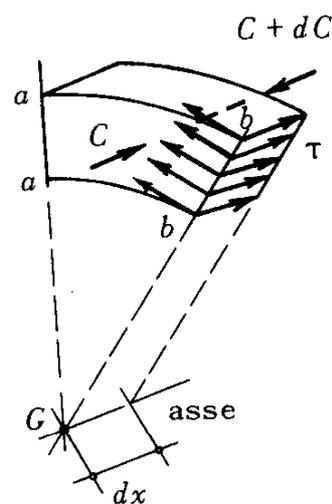


Fig. 56.2

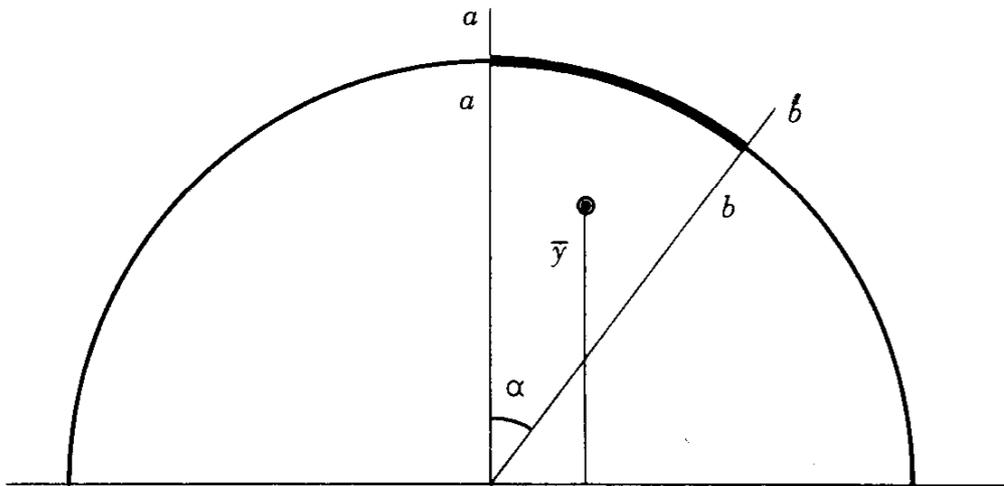


Fig. 56.3

$$\tau = \frac{T S_n}{s J_n} = \frac{T}{\pi R s} \operatorname{sen} \alpha = 2 \frac{T}{A} \operatorname{sen} \alpha$$

Il massimo valore si raggiunge sull'asse neutro, ove la tensione è verticale.

Si ha:

$$\tau_{\max} = 2 \frac{T}{A} = 2 \frac{8000}{17,8} = 900 \text{ kg/cm}^2.$$

**VERIFICHE DI RESISTENZA.** - Quando lo stato di tensione è monoassiale, è sufficiente limitare la massima tensione al carico di sicurezza. In tal modo è evidente e immediata la connessione con la classica esperienza di trazione o compressione semplice.

Nei casi, invece, bi- o triassiali ci si può ricondurre ad un problema monoassiale solo limitando, al carico di sicurezza, la massima tensione ideale.

Quest'ultima assume diverse espressioni a seconda del criterio di sicurezza adottato.

Esprimeremo, in concreto, la verifica con le due teorie di più largo credito, limitandoci, naturalmente, alla considerazione dei casi biasziali.

a) **Teoria della massima dilatazione (SAINT VENANT-GRASHOF).** - Attribuisce il collasso del materiale all'eccesso di deformazione. Allora la tensione ideale è proporzionale alla massima dilatazione (principale).

In termini di tensioni principali  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , con  $|\sigma_1| > |\sigma_2|$ , e per materiali con uguale resistenza a trazione e compressione:

$$\sigma_{1 \text{ id}} = \sigma_1 - \nu \sigma_2.$$

In funzione, invece, delle componenti di tensione in un arbitrario riferimento ortogonale (e per materiali metallici):

$$\sigma_{1 \text{ id}} = 0,35 (\sigma_x + \sigma_y) + 0,65 \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

Nel caso in esame si ha:

$$\sigma_x = \sigma_y = 0; \quad \sigma_1 = -\sigma_2 = \tau$$

$$\sigma_{\text{id}} = (1 + \nu)\tau = 1,3 \tau$$

e perciò la verifica è soddisfatta solo se:

$$\tau \leq \frac{K}{1 + \nu} = 1080 \text{ kg/cm}^2$$

b) **Teoria del massimo lavoro di distorsione o cambiamento di forma (HUBER-HENCKY-VON MISES).** - Attribuisce la crisi all'eccesso della quota di lavoro di deformazione conseguente al solo cambiamento di forma.

In funzione delle tensioni principali  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ :

$$\sigma_{1 \text{ id}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}.$$

Esprimendola, invece, mediante le tensioni nel riferimento generico:

$$\sigma_{1 \text{ id}} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3 \tau_{xy}^2}.$$

Per uno stato di tensione puramente tangenziale:

$$\sigma_{1 \text{ id}} = \tau \sqrt{3}$$

e quindi la condizione di resistenza è:

$$\tau \leq \frac{K}{\sqrt{3}} = 810 \text{ kg/cm}^2$$

*OSSERVAZIONE.* - La resistenza è assicurata, o meno, a seconda del criterio adottato.

La condizione proveniente dal secondo è alquanto più restrittiva. Convieni ricordare che, almeno per i metalli duttili, l'esperienza mostra un migliore accordo col criterio di VON MISES <sup>(1)</sup>.

\* \* \*

**57.** - Determinare l'andamento delle tensioni tangenziali, conseguenti ad uno sforzo di taglio  $T = 10,5 \text{ t}$ , agente secondo l'asse maggiore di simmetria di un profilo IPE 270.

Lo sforzo di taglio, nella sezione, sia volto verso l'alto. Inoltre, supponiamo che il momento flettente (che sempre accompagna il taglio) ne comprima la parte superiore.

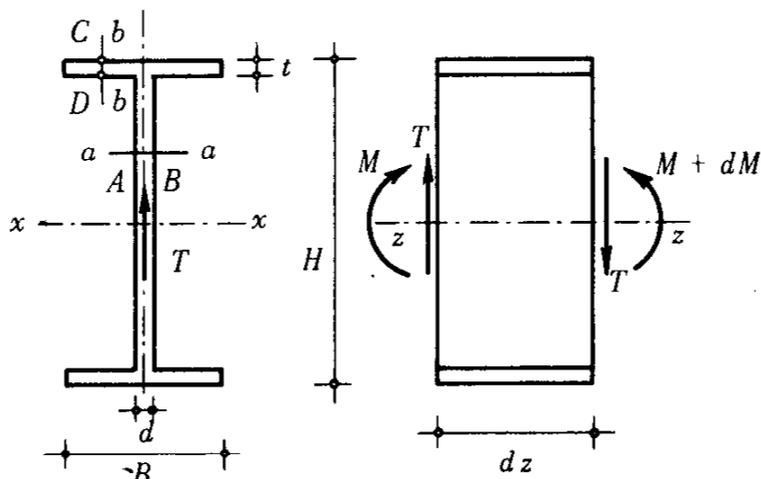


Fig. 57.1

<sup>(1)</sup> Mette conto di rilevare che esso è adottato nelle attuali norme per le costruzioni di acciaio (CNR-UNI 10011-67).

La sezione è composta di parti aventi spessore piccolo rispetto alle sue dimensioni. Sono perciò note a priori le traiettorie delle tensioni tangenziali.

Agli estremi della corda  $a-a$ , parallela all'asse neutro  $x-x$  e che taglia l'anima, le tensioni sono verticali. Ugual direzione (e modulo costante) mantengono in ogni suo altro punto. Così, su una corda come la  $b-b$  che taglia le ali ed è verticale, le tensioni risultano orizzontali e costanti.

La legge di variazione delle tensioni è fornita, in ogni caso, dalla formula:

$$\tau = \frac{T S_x}{b J_x}$$

a) **Tensioni verticali (sull'anima).** - La legge di variazione è parabolica, e se ne può tracciare l'andamento esatto solo nella zona compresa tra le ali. All'interno di queste, le tensioni verticali, per ragioni di continuità, possono svilupparsi solo in zone limitate adiacenti all'anima.

L'andamento (tratteggiato nel diagramma di fig. 57.2) è approssimativamente lineare.

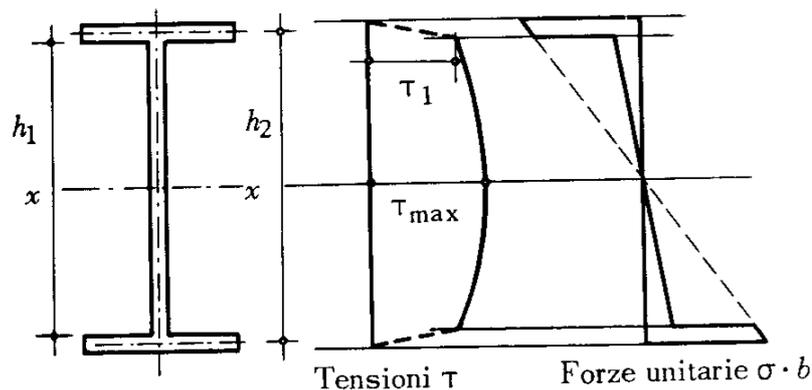


Fig. 57.2

Il massimo valore delle tensioni si verifica sull'asse neutro, e vale:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{d \cdot h_0}$$

ove  $h_0$  è il braccio della coppia interna, e può ottenersi dal diagramma delle forze interne flessionali  $\sigma$ .

Se la resistenza dell'anima fosse trascurabile, il braccio  $h_0$  coinciderebbe, all'incirca, con la distanza  $h_2$  tra i baricentri delle ali. Il contributo dell'anima fa diminuire  $h_0$ , che può ritenersi uguale all'altezza  $h_1$  dell'anima (al netto delle ali).

Calcoliamo numericamente la tensione sulle corde più significative.

Il profilo IPE 270 <sup>(1)</sup> ha le seguenti caratteristiche geometriche:

$$\begin{array}{lll} A = 45,9 \text{ cm}^2; & W_x = 429 \text{ cm}^3; & I_x = 5790 \text{ cm}^4 \\ B = 13,5 \text{ cm}; & d = 0,66 \text{ cm}; & t = 1,02 \text{ cm}. \end{array}$$

1) *Attacco anima-ala.* - In corrispondenza dell'attacco tra anima e ali, i profili IPE presentano un ampio raccordo. Per il 270 si può ritenere che la larghezza  $d = 0,66$  cm si raggiunga circa 1 cm al di sotto del filo interno dell'ala.

Il momento statico  $S_x$  è quello dell'ala; si trascura il contributo dell'area tra l'ala e la fine del raccordo.

$$S_x \cong 13,5 \times 1,02 (13,5 - 0,51) = 179 \text{ cm}^3$$

$$\tau_1 = \frac{10500 \times 179}{0,66 \times 5790} = 492 \text{ kg/cm}^2$$

2) *Asse neutro.* - Trascurando i raccordi, il momento statico si può calcolare come differenza di due rettangoli, rispettivamente di dimensioni  $\frac{H}{2} \cdot B$  e  $\left(\frac{H}{2} - t\right) \cdot (B - d)$ :

---

<sup>(1)</sup> Per le relative tabelle, vedi in Appendice.

$$S_x = \frac{BH^2}{8} - \frac{(B-d)}{2} \left( \frac{H}{2} - t \right)^2 = 230,3 \text{ cm}^3$$

$$\tau_{\max} = \frac{10500 \times 230,3}{0,66 \times 5790} = 633 \text{ kg/cm}^2$$

Oppure, usando la formula approssimata:

$$h_0 \cong h_1 = (H - 2t) = 24,96 \text{ cm}$$

$$\tau_{\max} = \frac{10500}{0,66 \times 24,96} = 636 \text{ kg/cm}^2$$

Come si vede, le due formule danno risultati differenti meno dell'1 %.

b) **Tensioni orizzontali (sulle ali).** - Sulla corda generica, distante  $x$  dal più prossimo lembo, la tensione vale:

$$\bar{\tau} = \frac{T S_x}{t J_x} = \frac{T \cdot t \cdot x \cdot \bar{y}}{t \cdot J_x} = \frac{T \cdot \bar{y}}{J_x} x$$

ove  $\bar{y} = \frac{1}{2} (H - t)$  è la distanza, dall'asse neutro, della fibra media dell'ala.

La  $\bar{\tau}$  varia linearmente dal bordo libero all'attacco con l'anima, ove assume il valore (teorico):

$$\bar{\tau} = \frac{T}{J_x} \frac{H-t}{2} \frac{B-d}{2} = 151 \text{ kg/cm}^2.$$

In pratica, il valore massimo, a causa del raccordo, si verifica a circa 1 cm dall'attacco teorico:

$$\bar{\tau} = \frac{10500}{5790} 12,99 (6,42 - 1) = 128 \text{ kg/cm}^2.$$

L'andamento delle  $\bar{\tau}$ , sull'intera ala, è emisimmetrico, ed è rappresentato in fig. 57.3.

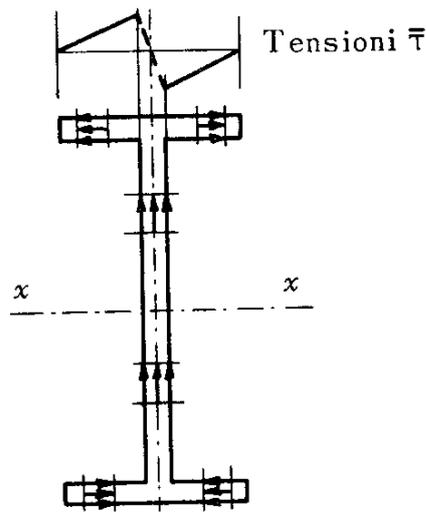


Fig. 57.3

Nella stessa figura è indicato anche il verso delle  $\tau$  (oppure  $\bar{\tau}$ ) nelle varie parti della sezione.

\*\*\*

58. - Progettare la trave Gerber della fig. 58.1 in profilato IPE.

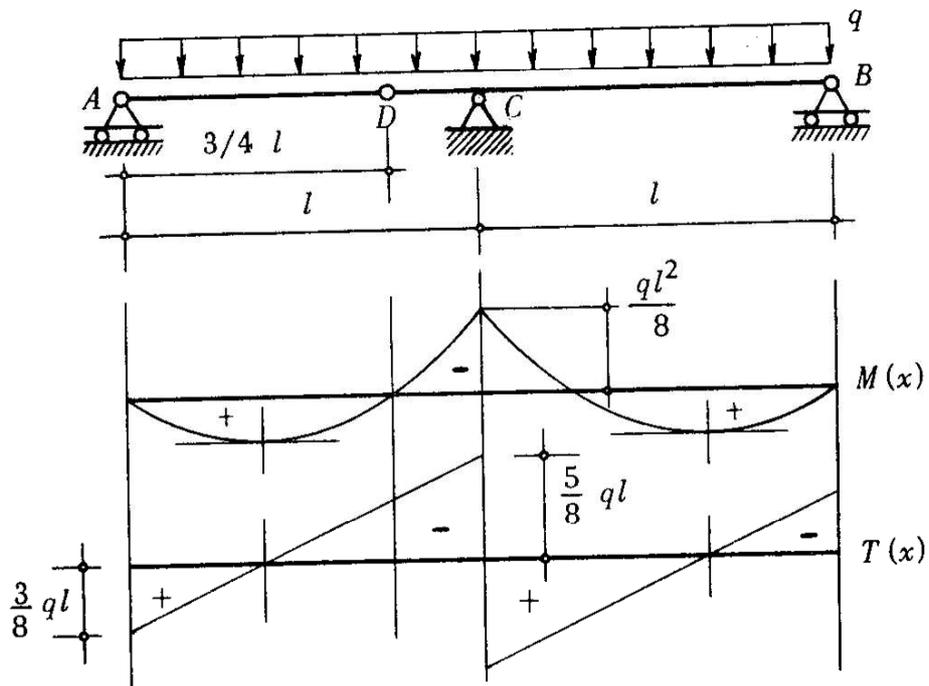


Fig. 58.1

Siano assegnati i seguenti dati numerici:

$$l = 2,85 \text{ m}; \quad q = 5,90 \text{ t/m.}$$

*CALCOLO DELLE SOLLECITAZIONI.* - La reazione dell'appoggio  $A$  è la metà del carico che insiste sul tratto  $AD$ .

$$V_A = \frac{q \cdot 3}{2 \cdot 4} l = \frac{3}{8} ql.$$

Il taglio a sinistra dell'appoggio  $C$  è allora:

$$T_C = ql - V_A = \frac{5}{8} ql = 10,50 \text{ t.}$$

Il momento flettente sull'appoggio  $C$  vale:

$$M_C = V_A \cdot l - \frac{ql^2}{2} = -\frac{ql^2}{8} = -6,00 \text{ tm}$$

Quello nella sezione in cui si annulla il taglio: .

$$M_m = \left| V_A \cdot x - q \frac{x^2}{2} \right|_{x=\frac{3}{8}l} = \frac{ql^2}{14,2}$$

Le sezioni più sollecitate, pertanto, sono quelle adiacenti all'appoggio centrale, poiché ad esse competono contemporaneamente il massimo assoluto del taglio e del momento flettente.

Per quella alla sinistra dell'appoggio:

$$T = -10,50 \text{ t}$$

$$M = -6,00 \text{ tm.}$$

*PROGETTO.* - Si esegue il progetto a semplice flessione, salvo poi eseguire la verifica tenendo conto anche del taglio.

Adottando il carico di sicurezza  $K = 1400 \text{ kg/cm}^2$ , il modulo di resistenza necessario è:

$$W = \frac{M}{K} = \frac{6 \times 10^5}{1,4 \times 10^3} = 429 \text{ cm}^3.$$

Si adotta il profilo IPE 270, che ha le seguenti caratteristiche geometriche:

$$\begin{aligned} A &= 45,9 \text{ cm}^2; & W_x &= 429 \text{ cm}^3; & J_x &= 5790 \text{ cm}^4 \\ B &= 13,5 \text{ cm}; & d &= 0,66 \text{ cm}; & t &= 1,02 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Come si vede, i dati numerici sono in comune col precedente esercizio, al quale ci si può riferire per determinare lo stato tensionale conseguente allo sforzo di taglio. I moduli delle tensioni restano invariati, cambiano però i segni. È ora facile individuare i punti più sollecitati della sezione, sotto l'effetto combinato del momento flettente e dello sforzo di taglio.

Essi sono:

a) i punti dei lembi estremi della sezione, appartenenti alle corde di transizione tra le semiali e l'anima: in essi è massima la tensione normale flessionale e la tangenziale orizzontale del taglio;

b) i punti dell'anima sulle corde di transizione con le ali: in essi, la tensione normale flessionale è prossima alla massima, e così discasi per quella tangenziale del taglio.

Eseguiamo separatamente le relative verifiche, limitandoci, qui, all'uso del criterio di SAINT VENANT.

a) Sezioniamo l'ala con un piano avente per traccia la corda verticale adiacente al raccordo (fig. 58.2). Determiniamo, mediante il circolo di MOHR, lo stato tensionale del fascio di piani, nell'intorno del punto *A*, avente la suddetta corda come sostegno.

Sull'elemento di piano 1, appartenente alla sezione retta, agiscono le tensioni:

$$\sigma = \frac{M}{W} = 1400 \text{ kg/cm}^2 \quad (\text{trazione})$$

$$\bar{\tau} = 128 \text{ kg/cm}^2.$$

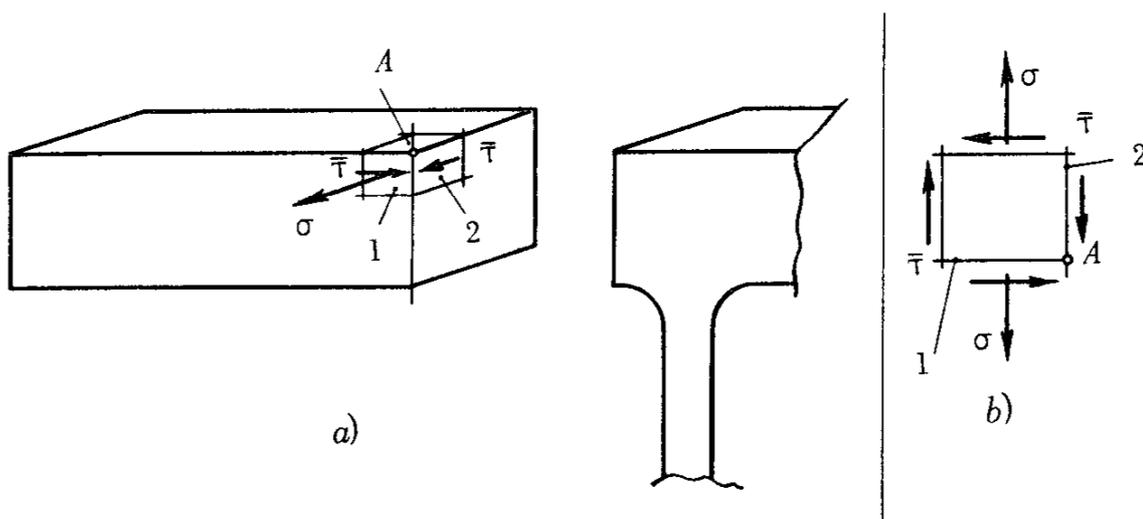


Fig. 58.2

Sull'elemento 2, ad esso ortogonale, vi è, per reciprocità, la medesima  $\bar{\tau}$ .

Tracciamo il circolo di MOHR, staccando dalla trave, per maggior evidenza, un prisma elementare (fig. 58.2, b) che converremo di osservare dall'alto.

L'immagine  $P_1$  del piano 1 ha coordinate:

$$\sigma_1 = +1400; \quad \bar{\tau}_1 = -128 \text{ kg/cm}^2$$

mentre l'immagine  $P_2$  di 2:

$$\sigma_2 = 0; \quad \bar{\tau}_2 = +128 \text{ kg/cm}^2.$$

Il circolo è indicato nella fig. 58.3.

Da esso si rilevano le tensioni principali:

$$\begin{aligned} \sigma_\xi &= +1412 \text{ kg/cm}^2 \\ \sigma_\eta &= -12 \quad \text{«} \end{aligned}$$

La massima tensione ideale risulta:

$$\sigma_{\xi \text{ id}} = \sigma_\xi - \nu \sigma_\eta = 1416 \text{ kg/cm}^2$$

che supera solo dell'1 % il carico di sicurezza.

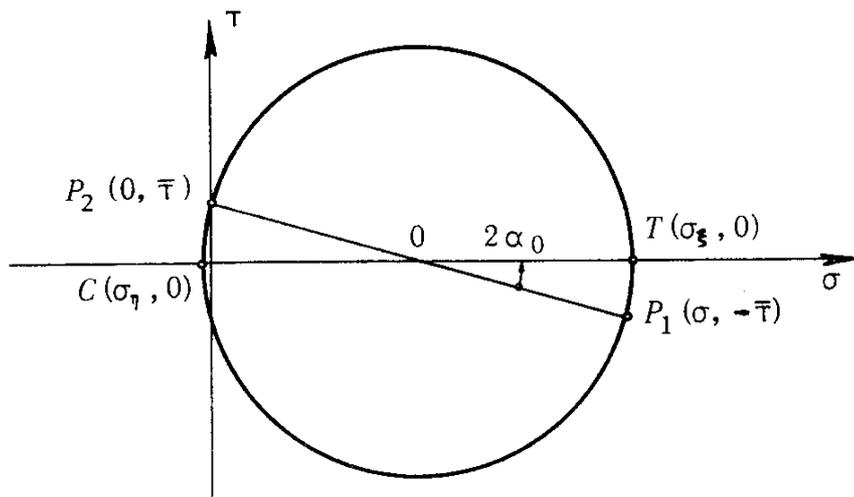


Fig. 58.3

Si poteva, anche, ottenere direttamente:

$$\sigma_{\xi \text{ id}} = 0,35 \sigma + 0,65 \sqrt{\sigma^2 + 4\bar{\tau}^2} = 1412 \text{ kg/cm}^2.$$

È evidente che l'effetto della  $\bar{\tau}$  è del tutto irrilevante.

b) Procedendo analogamente, sulla corda dell'anima di transizione con le ali si ha:

$$\sigma = 1400 \frac{13,5 - 1,02}{13,5} = 1294 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau = 492 \text{ «}$$

La tensione ideale massima vale:

$$\sigma_{\text{id}} = 0,35 \times 1294 + 0,65 \sqrt{1294^2 + 4 \times 492^2} = 1509 \text{ kg/cm}^2.$$

Essa è di poco superiore a quella al lembo estremo, nel punto A.

*OSSERVAZIONE.* - Non sfugga il fatto che varie circostanze hanno concorso a rendere importanti le sollecitazioni del taglio. In particolare:

- piccole luci e forti carichi;
- massimi del momento e del taglio nella medesima sezione.

Tutto ciò giustifica la scarsa importanza della verifica a taglio quando tali circostanze non si presentano insieme: ed è quasi la generalità dei casi.

Infatti, pur in una situazione gravosa come quella del presente esercizio, l'aumento di sollecitazioni, rispetto agli effetti della sola flessione, ammonta solo al 6 %.

\* \* \*

59. - Verificare la resistenza delle chiodature della trave composta avente la sezione indicata nella fig. 59.1. La trave, semplicemente appoggiata su una luce di 16 m, sopporta un carico di 38 t concentrato nella sezione di mezzaria.

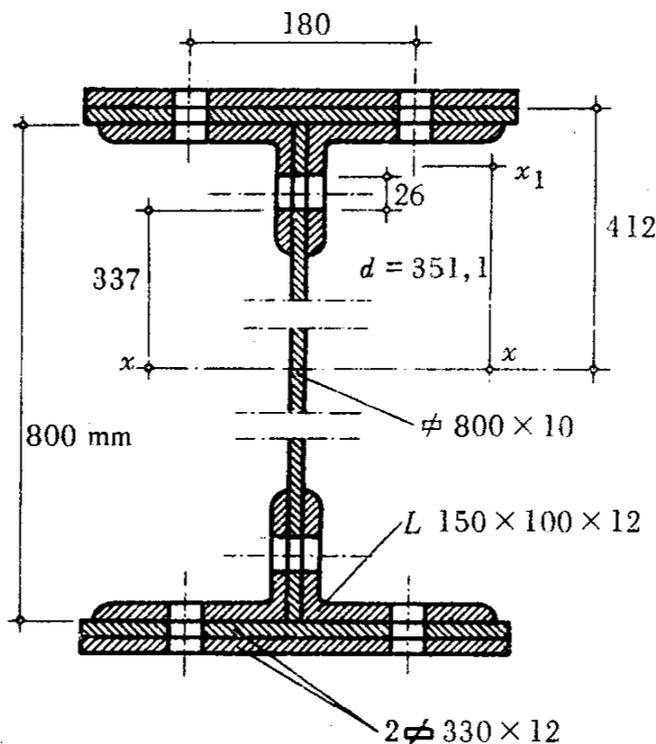


Fig. 59.1

La trave è composta da:

- 1 anima  $800 \times 10$ ;

- 4 piattabande  $330 \times 12$ ;
- 4 cantonali  $150 \times 100 \times 12$ .

Le varie parti sono riunite mediante chiodi  $\phi$  25 mm (quindi, i fori che li ricevono hanno il diametro di 26 mm) <sup>(1)</sup>.

Lo schema statico è indicato nella fig. 59.2.

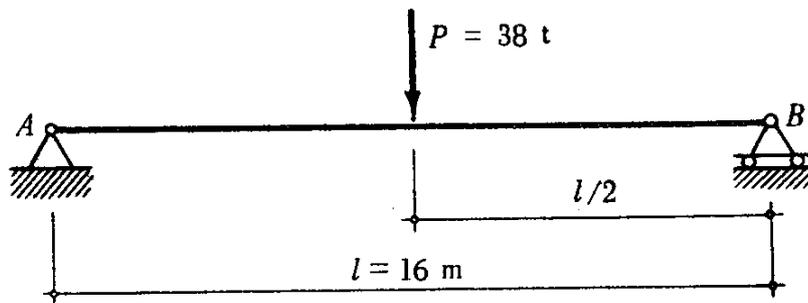


Fig. 59.2

**CALCOLO DELLE SOLLECITAZIONI MASSIME.** - Si verificano nelle sezioni adiacenti alla mezzaria:

$$T = \frac{P}{2} = 19 \text{ t}$$

$$M = \frac{Pl}{4} = 152 \text{ tm.}$$

**VERIFICHE DI RESISTENZA.** - Si suppone di usare acciaio per carpenteria di tipo tale da permettere:

$$K = 1600 \text{ kg/cm}^2.$$

**CARATTERISTICHE GEOMETRICHE DELLA SEZIONE.** - È necessario detrarre le aree corrispondenti ai fori dei chiodi. Le chiodature sull'anima e sulle ali sono, di solito, sfalsate in senso longitudinale.

<sup>(1)</sup> Per le norme sulle strutture di acciaio si vedano le tabelle UNI-CNR 10011.

La sezione più indebolita è quella con i fori delle chiodature ali-cantonali.

a) **Area della sezione:**

- Anima:	$1 \times 80 = 80$	$\text{cm}^2$
- Piattabande:	$4 \times 33 \times 1,2 = 158,4$	$\text{cm}^2$
- Cantonali:	$4 \times 28,7 = 114,8$	$\text{cm}^2$
- Detrazione fori:	$4 \times 2,6 \times 3,6 = 37,6$	$\text{cm}^2$
<b>TOTALE</b>	<b><math>A = 315,6</math></b>	<b><math>\text{cm}^2</math></b>

b) **Momento d'inerzia:**

$$\begin{aligned}
 \text{- Anima:} & \quad 1 \times \frac{80^3}{12} = 42\,700 \text{ cm}^4 \\
 \text{- Piattabande:} & \quad 2 \left( \frac{33}{12} \overline{2,4}^3 + 33 \times 2,4 \times \overline{41,2}^2 \right) = 268\,950 \text{ cm}^4
 \end{aligned}$$

Per il singolo cantonale risulta:

$$A = 28,7 \text{ cm}^2; \quad J_x = 650 \text{ cm}^4; \quad d = 35,11 \text{ cm.}$$

Pertanto, per il complesso dei

$$\begin{aligned}
 \text{- Cantonali:} & \quad 4 (650 + 28,7 \times \overline{35,11}^2) = 144\,120 \text{ cm}^4 \\
 \text{- Detrazione fori:} & \quad 2 (5,2 \times 3,6 \times \overline{40,6}^2) = 61\,710 \text{ cm}^4 \\
 \text{TOTALE:} & \quad J_x \cong 394\,000 \text{ cm}^4
 \end{aligned}$$

c) **Modulo di resistenza:**

$$W_x = \frac{J_x}{y_m} = \frac{394\,000}{42,4} = 9290 \text{ cm}^3$$

*CALCOLO DELLE TENSIONI MASSIME.* - Ai lembi estremi:

$$\tau = 0$$

$$\sigma = \frac{M}{W_x} = \frac{152 \times 10^5}{9290} = 1636 \text{ kg/cm}^2.$$

Questa tensione supera il carico di sicurezza  $K = 1600 \text{ kg/cm}^2$  appena del 2,2 %; pertanto è pienamente accettabile.

Le massime tensioni tangenziali competono ai punti dell'asse neutro; quelli più sollecitati per flessione e taglio sono, però, subito al di sotto della chiodatura orizzontale, che collega all'anima il complesso ali-angolari.

Il filo inferiore della chiodatura si trova a 33,7 cm dall'asse neutro. Inoltre:

$$\tau = \frac{TS}{bJ_x}.$$

$S$  è il momento statico del complesso ali-cantionali (che tende a scorrere rispetto all'anima), depurato da quello dei fori.

$$S = 79,2 \times 41,2 + 2 \times 28,7 \times 35,1 - 5,2 \times 3,6 \times 40,6 = 4510 \text{ cm}^3$$

$$\tau = \frac{19 \times 10^3 \times 4,51 \times 10^3}{1 \times 39,4 \times 10^4} = 218 \text{ kg/cm}^2$$

Alla stessa quota, la tensione flessionale risulta:

$$\sigma = 1636 \frac{33,7}{42,4} = 1300 \text{ kg/cm}^2.$$

La verifica alla massima dilatazione è certamente superflua.

*VERIFICA DELLE CHIODATURE.* - I chiodi più affaticati sono quelli ad asse orizzontale: essi devono sopportare lo scorrimento indotto dagli sforzi flessionali del complesso ali-cantionali. In altre parole, essi fanno le veci delle  $\tau$  longitudinali che, in un profilo di un sol pezzo,

impediscono scorrimenti tra anima e ala.

Per un tratto  $\Delta x$ , corrispondente all'interasse longitudinale tra due chiodi, lo scorrimento vale:

$$\Delta N = \int_{A_1} d\sigma dA = \frac{TS}{J} \Delta x$$

ove  $S$  è il momento statico, rispetto all'asse  $x$ , del complesso ali-cantionali, di area  $A_1$ .

Con i risultati numerici già acquisiti:

$$\Delta N = 218 \cdot \Delta x \text{ kg} \quad (\Delta x \text{ espresso in cm}).$$

Se si sceglie un interasse

$$\Delta x = 15 \text{ cm}$$

risulta:

$$\Delta N = 218 \times 15 = 3260 \text{ kg.}$$

Ciascun chiodo è sollecitato a recisione simmetricamente in due sezioni resistenti (tra anima e cantionali). Poiché la sezione resistente del chiodo  $\phi 25$  è

$$\omega = 4,9 \text{ cm}^2$$

si ha, nel chiodo stesso, la tensione tangenziale media:

$$\tau_c = \frac{\Delta N}{2 \omega} = \frac{3260}{2 \times 4,9} = 332 \text{ kg/cm}^2,$$

tensione pienamente accettabile.

Poiché il taglio è costante (a parte il segno) per tutta la trave, i chiodi possono tenersi tutti all'interasse costante di 15 cm.

I chiodi verticali sono soggetti a tensioni tangenziali un po' inferiori. Invero, lo scorrimento che ciascuna coppia di chiodi (lavoranti in una sezione) deve assorbire è quello relativo alle due piattabande. In pratica, l'interasse può ancora tenersi a 15 cm, sfalsando i chiodi (per comodità costruttiva) rispetto a quelli ad asse orizzontale.

\* \* \*

60. - Armare la mensola di cemento armato, a sezione costante, indicata nella fig. 60.1.

*CALCOLO DELLE SOLLECITAZIONI.* - Il peso unitario della trave risulta:

$$g = 0,3 \times 0,5 \times 2,5 = 0,375 \text{ t/m.}$$

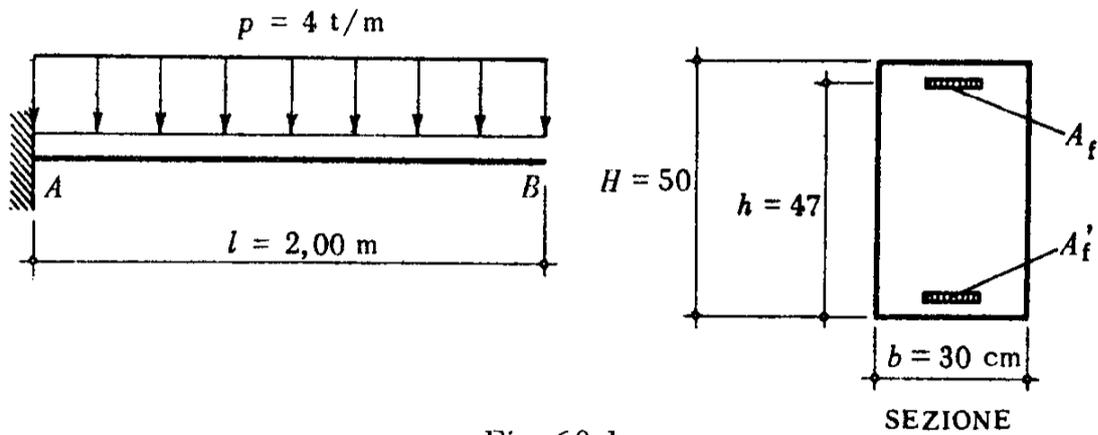


Fig. 60.1

Il carico totale è, allora:

$$q = p + g = 4,375 \text{ t/m.}$$

Le massime sollecitazioni competono alla sezione A d'incastro:

**Momento flettente:**

$$M = q \frac{l^2}{2} = 8,750 \text{ tm} \quad (\text{tende le fibre superiori})$$

**Sforzo di taglio:**

$$T = ql = 8,750 \text{ t} \quad (\text{positivo})$$

*PROGETTO FLESSIONALE DELLA TRAVE.* - Le dimensioni della sezione sono assegnate: si tratta di un problema misto verifica-progetto.

**Verifica del calcestruzzo:**

$$r = \frac{h}{\sqrt{\frac{M}{b}}} = \frac{47}{171} = 0,284$$

Prefissato  $K_f = 1600 \text{ kg/cm}^2$ , e con  $A_f' = 0,25 A_f$  si ottiene:

$$\sigma_c = 74 \text{ kg/cm}^2.$$

**Progetto dell'armatura:**

$$t = 0,00239$$

$$A_f = t b \sqrt{\frac{M}{b}} = 0,00239 \times 30 \times 171 = 12,3 \text{ cm}^2.$$

Si adottano 8  $\phi$  14.

$$A_f' = 0,25 A_f = 3,08 \text{ cm}^2.$$

Si adottano 2  $\phi$  14.

I ferri inferiori fungono da reggistaffe, vengono perciò estesi per tutta la lunghezza della trave.

Quelli superiori, invece, divengono esuberanti via via che ci si sposta dalla sezione d'incastro. Vengono, perciò, ripiegati a  $45^\circ$  per formare parte delle armature a taglio.

Per determinare le sezioni in cui è lecito piegare i ferri si può ragionare come segue.

Per la sezione d'incastro, l'equivalenza tra momento flettente e momento resistente interno è espressa dalla relazione:

$$M = A_f \cdot K_f \cdot h_0 = 8,750 \text{ tm}$$

ove  $h_0$  è il braccio della coppia interna.

Ne segue che ciascun ferro  $\phi$  14, di sezione  $\omega = 1,54 \text{ cm}^2$ , fornisce un ottavo del momento resistente totale:

$$M_0 = \omega \cdot K_f h_0 = \frac{M}{8} = 1,094 \text{ tm.}$$

Riportiamo, sul diagramma del momento flettente, quello dei momenti resistenti.

In corrispondenza di ogni piegatura, il momento resistente diminuisce bruscamente di  $M_0$ . Il diagramma assume, così, il caratteristico aspetto a gradini. Affinché la resistenza a flessione sia ovunque assicurata, bisogna piegare i ferri in modo che il momento flettente, in ciascuna sezione, risulti, con un certo margine, inferiore a quello resistente.

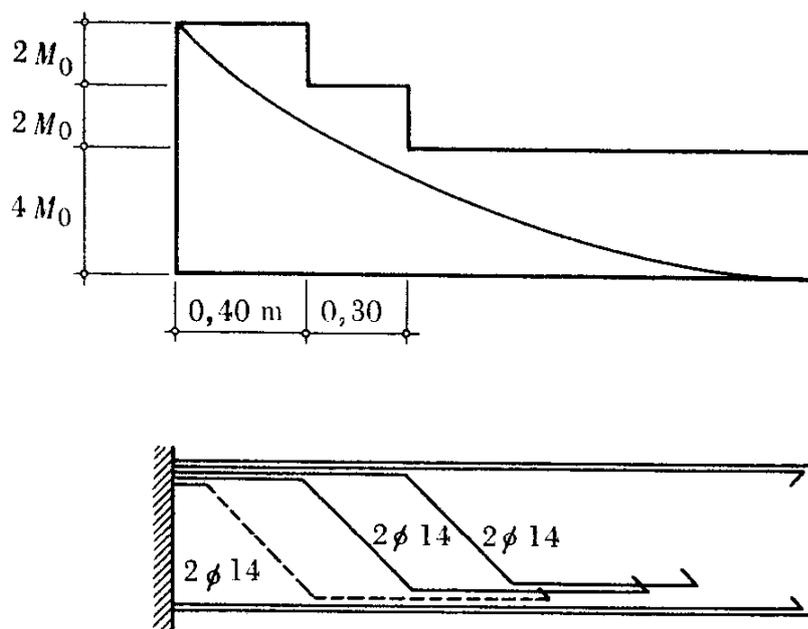


Fig. 60.2

Si piegano  $4 \phi 14$ , a non meno di  $40 \text{ cm}$  dall'incastro. Se i ferri fossero piegati più vicino ad esso, non avrebbero sufficiente lunghezza per sviluppare tutta la loro resistenza per il momento flettente.

Per non lasciare sguarnita di ferri piegati la zona d'imposta della trave, conviene aggiungere due spezzoni (tratteggiati in figura).

La disposizione delle armature deve intendersi puramente indicativa, poiché in questa sede non si può entrare in dettagli costruttivi.

*VERIFICA A TAGLIO DELLA TRAVE.* - Le massime tensioni tangenziali si verificano all'incastro.

$$\tau_{\max} \cong \frac{T}{0,9 \times b \times h} = \frac{8750}{0,9 \times 30 \times 47} = 6,9 \text{ kg/cm}^2.$$

A norma di Regolamento, è indispensabile armare a taglio.

Lo sforzo totale (scorrimento) che le armature devono assorbire vale:

$$S = \frac{Tl}{2h_0} = \frac{M_{\max}}{h_0} = 20\,700 \text{ kg.}$$

Almeno la sua metà deve essere sopportare dalle staffe. Adottando staffe semplici del  $\varnothing 8$ , che ha sezione  $\omega = 0,5 \text{ cm}^2$ , l'area resistente di ciascuna di esse è  $2 \times 0,5 = 1 \text{ cm}^2$ .

Se il carico di sicurezza è  $K_f = 1600 \text{ kg/cm}^2$ , l'area necessaria risulta:

$$n A_s = \frac{10\,350}{1600} = 6,48 \text{ cm}^2$$

$$A_s = 2\omega = 1 \text{ cm}^2$$

$$n = 6,48.$$

In pratica si dispongono 7 staffe, all'interasse di  $\sim 30 \text{ cm}$ .

Ai ferri piegati resta lo sforzo:

$$S_p = 10\,350 \text{ kg.}$$

Sono necessari:

$$A_p = \frac{S_p}{K_f \sqrt{2}} = \frac{10\,350}{1600 \sqrt{2}} = 4,57 \text{ cm}^2.$$

I 6  $\varnothing 14$  piegati, invece, hanno sezione complessiva di  $9,24 \text{ cm}^2$ .

Le armature sono largamente sufficienti.