

## CAPITOLO VII

### LA FLESSIONE COMPOSTA

La sollecitazione di flessione composta, o pressoflessione, può notoriamente studiarsi sovrapponendo gli effetti della semplice flessione e dello sforzo assiale.

Tuttavia, la frequenza con cui si presenta nella pratica ne giustifica un'autonoma trattazione.

La sezione retta generica di una trave, composta di materiale resistente a trazione e compressione, è soggetta ad uno stato di tensione dipendente dallo sforzo applicato e dalla sua eccentricità. L'asse neutro, su cui sono nulle le tensioni e le dilatazioni, è l'antipolare del centro di pressione rispetto all'ellisse centrale d'inerzia. A seconda che il centro sia interno, sul contorno o esterno al nocciolo, il diagramma delle tensioni è trapezio, triangolare o intrecciato.

All'areola generica è applicata la tensione normale:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{J_x} y$$

ove i simboli hanno il seguente significato:

$N$  = sforzo assiale

$M$  = momento flettente

$A$  = area della sezione

$J_x$  = suo momento d'inerzia rispetto all'asse di flessione, calcolato con

distanze parallele all'asse di sollecitazione;

$y$  = distanza dall'asse di flessione, misurata come sopra.

Le tensioni massime competono di solito al lembo più prossimo al centro di pressione, nel qual caso hanno lo stesso segno dello sforzo assiale.

Il loro modulo può ottenersi attraverso l'uso delle formule monomie o binomia.

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M}{W}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{Nz}{S_n}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{Mz}{J_x}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{\bar{M}}{W}$$

Il significato dei simboli è il seguente:

$\bar{M}$  = momento rispetto al punto di nocciolo opposto al lembo più sollecitato

$W$  = suo modulo di resistenza

$z$  = sua distanza dall'asse neutro

$S_n$  = momento statico della sezione rispetto all'asse neutro.

Se la trave è costruita con materiale privo di resistenza alla trazione, non è lecito procedere per sovrapposizione d'effetti. L'asse neutro, che delimita la sezione reagente, può determinarsi per via elementare solo in casi semplici.

Nell'ipotesi che l'asse di sollecitazione sia, per la sezione, di simmetria ortogonale, l'asse neutro gli è normale, e se ne determina la posizione con la nota costruzione grafica.

La massima tensione si determina, solitamente, con la formula monomia:

$$\sigma_{\max} = \frac{Nz}{S_n}$$

e questa volta  $S_n$  è il momento statico, rispetto all'asse neutro, della sola sezione reagente.

In ogni caso, la verifica di resistenza può eseguirsi limitando le massime tensioni ai rispettivi carichi di sicurezza.

\*\*\*

48. - Progettare, in profilato IPN di acciaio Fe 42, il portale della fig. 48.1.

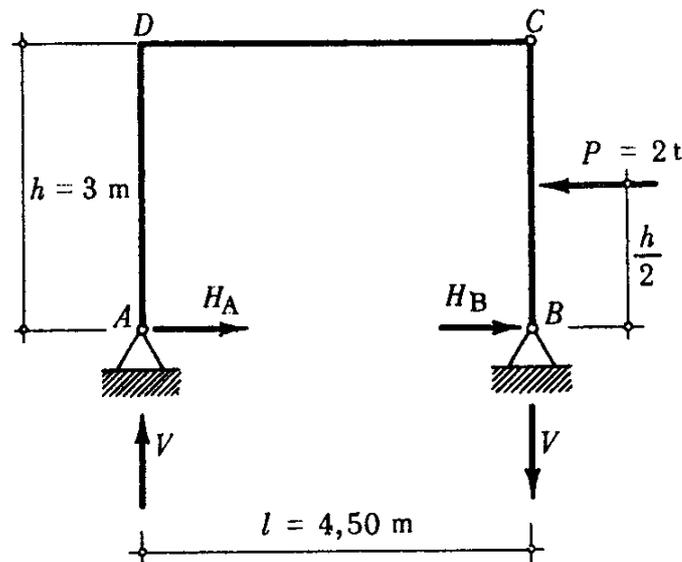


Fig. 48.1

Notiamo, innanzi tutto, che la struttura assegnata è isostatica. Le sue sollecitazioni si ricavano in base a semplici considerazioni d'equilibrio, pertanto non dipendono dalle dimensioni della sezione retta corrente.

È allora possibile progettare la struttura, dopo averne determinato le azioni interne.

**CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI.** - Le componenti di reazione sono state indicate nella fig. 48.1. È bene ricordare che, a stretto rigore, esse possono rendersi esplicite solo in seguito a svincolamento. Qui, sono state sovrapposte allo schema geometrico della struttura solo per economia di spazio.

**Equilibrio alla rotazione intorno a B (oppure A):**

$$V \cdot l - \frac{Ph}{2} = 0$$

$$V = \frac{Ph}{2l} = 0,667 \text{ t}$$

**Momento flettente nullo in C (forze alla sinistra):**

$$Vl - H_A \cdot h = 0$$

$$H_A = V \frac{l}{h} = \frac{P}{2} = 1,000 \text{ t}$$

**Equilibrio alla traslazione orizzontale:**

$$H_B = P - H_A = \frac{P}{2} = 1,000 \text{ t}$$

**CALCOLO DELLE AZIONI INTERNE.** - È noto dalla teoria che, in generale, il proporzionamento delle strutture correnti è indipendente dalle sollecitazioni taglianti. Ci limiteremo perciò a determinare le leggi di variazione dello sforzo assiale e del momento flettente.

**Momento flettente.**

1. *Piedritto AD.* - Varia linearmente dallo zero in A al massimo  $H_A \cdot h = 3,000 \text{ tm}$  in sommità. Le fibre tese sono quelle esterne.

2. *Traverso DC.* Varia ancora linearmente; in *D* vale 3 tm, e si annulla in *C*. Risultano tese le fibre esterne.

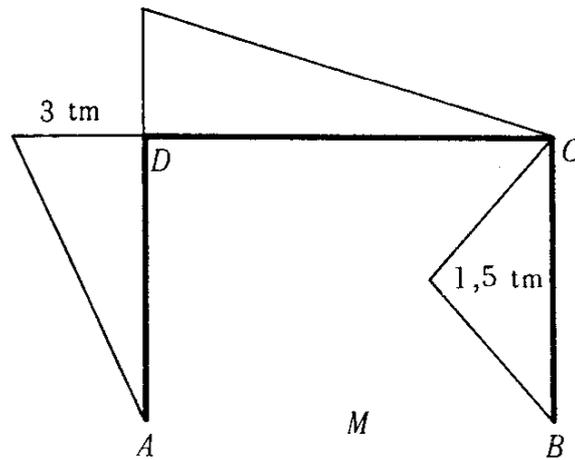


Fig. 48.2

3. *Piedritto BC.* - Il momento flettente è quello della trave a due appoggi (gli sforzi di taglio alle estremità valgono, infatti,  $\frac{P}{2}$ ).

In mezzaria vale  $P \frac{h}{4} = 1,500 \text{ tm}$ .

**Sforzo assiale.**

1. *Piedritto AD.* - È costante, di compressione, e vale  $V = 0,667 \text{ t}$ .

2. *Traverso CD.* - È costante, di compressione e vale  $H_A = 1,000 \text{ t}$ .

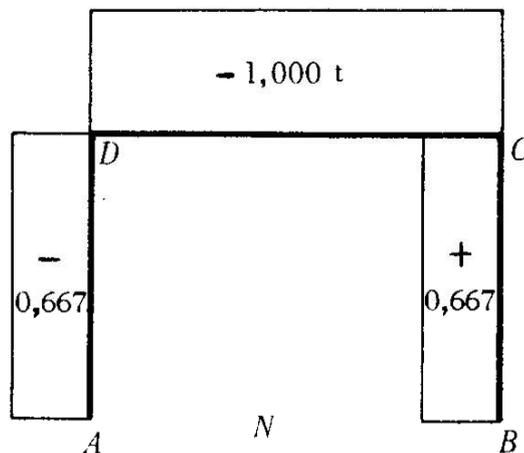


Fig. 18.3

3. *Piedritto CB.* - È ancora costante, però di trazione, e vale:  
 $V = 0,667 \text{ t.}$

*PROGETTO DEL PORTALE.* - Supponiamo di voler costruire la struttura a sezione costante. Basterà progettare la sezione più sollecitata. Essa è quella del traverso adiacente al nodo *D*, perché le competono contemporaneamente il massimo assoluto del momento flettente e quello dello sforzo assiale. Risulta:

$$M = 3,000 \text{ tm} \quad N = 1,000 \text{ t}$$

con un'eccentricità:

$$e = \frac{M}{N} = 3,000 \text{ m.}$$

Il centro di pressione è l'intersezione della reazione  $R_A$  con il piano della sezione, quindi coincide col baricentro della sezione d'imposta *A*.

Le fibre più sollecitate sono quelle dalla parte del centro di pressione, cioè quelle all'intradosso.

Si prevede di usare un IPN avente l'altezza dell'ordine di 20 cm, molto modesta rispetto all'eccentricità. Lo stato di sollecitazione della

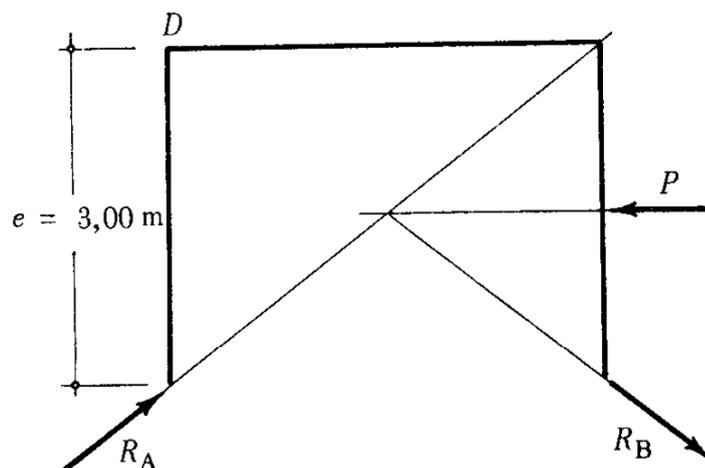


Fig. 48.4

sezione si avvicina molto a quello di semplice flessione (a cui compete eccentricità infinita).

È allora attendibile progettare, in prima approssimazione, a momento flettente puro. La successiva verifica a pressoflessione non potrà cambiare sostanzialmente i risultati.

Usiamo, come materiale, acciaio Fe 42, con  $K = 1400 \text{ kg/cm}^2$ .

Il progetto a flessione comporta il verificarsi della relazione (in condizioni di sicurezza e massima economia):

$$W = \frac{M}{K} = \frac{3 \times 10^5}{1,4 \times 10^3} = 214 \text{ cm}^3.$$

L'IPN 200 ha, per l'appunto, tale modulo di resistenza. Le altre principali caratteristiche geometriche hanno i seguenti valori (rilevati dalle tabelle):

- momento d'inerzia:  $J_x = 2138 \text{ cm}^4$
- raggio d'inerzia:  $\rho_x = 8 \text{ cm}$
- area della sezione:  $A = 33,4 \text{ cm}^2$ .

**VERIFICA DELLA SEZIONE.** - Confrontiamo i risultati ottenuti impiegando tutte le formule disponibili. Ricordiamo che, trattandosi di stato di tensione monoassiale, è sufficiente limitare la massima tensione al carico di sicurezza del materiale.

**Formula binomia.**

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{10^3}{33,4} + \frac{3 \times 10^5}{214} = 1432 \text{ kg/cm}^2.$$

La massima tensione supera il carico di sicurezza solo del 2%, è quindi accettabile. Si noti anche che tale 2% è proprio l'influenza dello sforzo assiale sul valore finale della massima tensione.

**Formule monomie.** - Sono applicabili quando sia nota la posizione dell'asse neutro della pressoflessione.

Dalla teoria si ha:

$$d = -\frac{\rho_x^2}{e} = -\frac{64}{300} = -0,213 \text{ cm,}$$

Quindi:

$$z = \frac{h}{2} + d = 10,213 \text{ cm.}$$

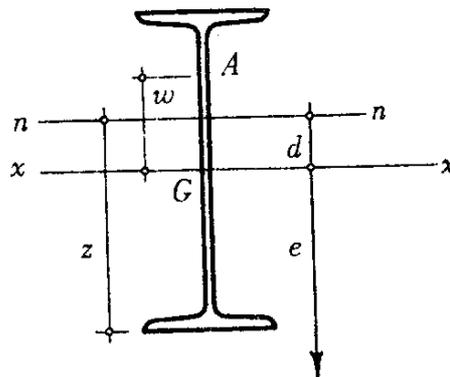


Fig. 48.5

Il momento statico  $S_n$  dell'intera sezione rispetto all'asse neutro  $n$  risulta:

$$S_n = A \cdot d = 33,4 \times 0,213 = 7,13 \text{ cm}^3.$$

Infine, possiamo calcolare le tensioni massime con entrambe le formule monomie:

$$\sigma_{\max} = \frac{Nz}{S_n} = \frac{10^3 \times 10,213}{7,13} = 1432 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{\max} = \frac{Mz}{J_x} = \frac{3 \times 10^5 \times 10,213}{2,138 \times 10^3} = 1433 \text{ kg/cm}^2$$

**Uso dei momenti di nocciolo.** - Le tensioni all'intradosso sono esprimibili in funzione del momento rispetto al punto di nocciolo  $A$  superiore. Il raggio di nocciolo è:

$$w = \frac{W}{A} = \frac{214}{33,4} = 6,4 \text{ cm.}$$

Il momento di nocciolo:

$$M_A = N(e+w) = 10^3 \times 306,4 = 3,064 \times 10^5 \text{ kg cm}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_A}{W} = \frac{3,064 \times 10^5}{214} = 1432 \text{ kg/cm}^2.$$

\*\*\*

49. - Verificare la resistenza dell'arco semicircolare a tre cerniere, indicato nella fig. 49.1.

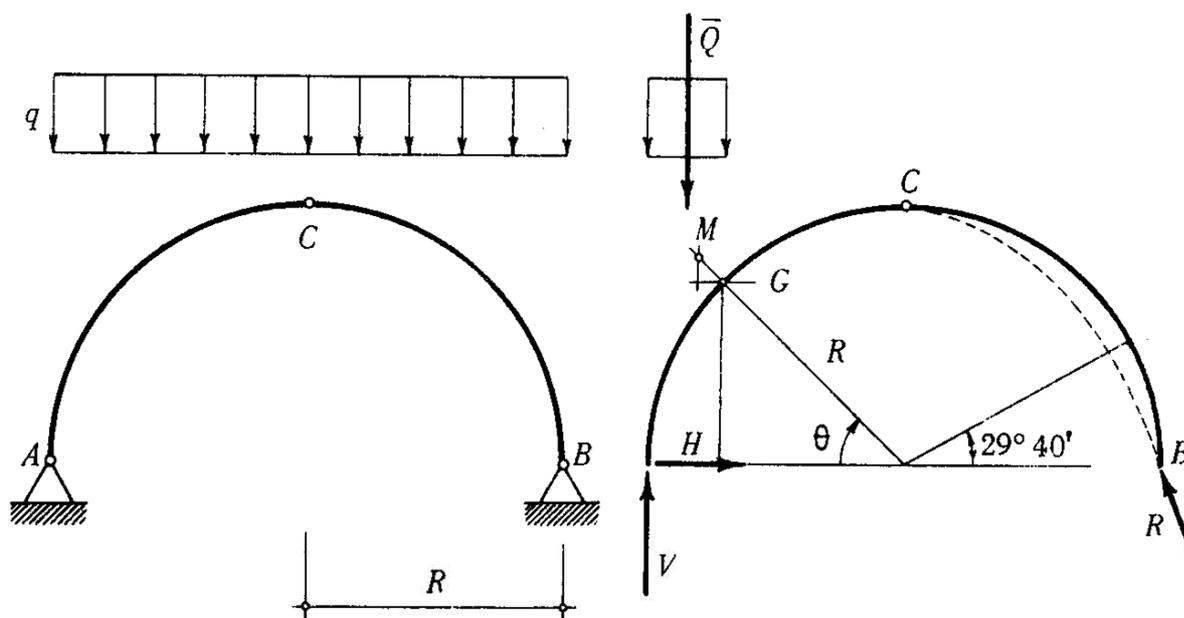


Fig. 49.1

*CALCOLO DELLE SOLLECITAZIONI.* - La curva delle pressioni, derivante da una distribuzione uniforme di carico, è la parabola che passa per le tre cerniere. Essa risulta tutta al di sotto della semicirconferenza; pertanto, in ogni sezione dell'arco il centro di pressione è al di sotto del baricentro. Supposto che la sezione retta corrente sia simmetrica rispetto all'asse di flessione, le fibre più sollecitate sono ovunque quelle dal lato del centro di pressione, cioè all'intradosso.

È noto, dalla teoria, che nelle strutture snelle lo sforzo di taglio

ha poca influenza sulle verifiche di resistenza. Basterà perciò determinare le leggi di variazione dello sforzo assiale e del momento flettente. Inoltre, lo scostamento piuttosto ridotto tra curva delle pressioni ed asse della struttura fa ritenere sensibile l'effetto, sulle tensioni interne, dello sforzo assiale.

Le reazioni vincolari sono di calcolo immediato,

Le componenti verticali valgono metà del carico:

$$V = qR.$$

Quelle orizzontali si ottengono annullando il momento flettente in C:

$$V \cdot R - H \cdot R - qR \frac{R}{2} = 0,$$

da cui:

$$H = q \frac{R}{2}.$$

**Sforzo assiale.** - Alla sinistra della sezione corrente vi sono le componenti di reazione ed il carico  $\bar{Q} = qR(1 - \cos\theta)$ ; col riferimento polare indicato nella fig. 49.1 si ottiene:

$$\begin{aligned} N(\theta) &= -V \cos\theta - H \sin\theta + \bar{Q} \cdot \cos\theta = \\ &= -qR \left( \cos^2\theta + \frac{1}{2} \sin\theta \right). \end{aligned}$$

Esso presenta dei massimi relativi alle anomalie che ne annullano la derivata:

$$\frac{dN(\theta)}{d\theta} = -qR \left( \frac{1}{2} \cos\theta - 2 \sin\theta \cos\theta \right).$$

Risulta:

$$\frac{dN(\theta)}{d\theta} = 0$$

nei seguenti casi:

$$\begin{aligned} \text{per } \theta_1 &= 90^\circ & N(\theta_1) &= -q \frac{R}{2} \\ \text{per } \theta_2 &= 14^\circ 29' & N(\theta_2) &= -1,066 q R. \end{aligned}$$

Il secondo valore è il massimo assoluto dello sforzo assiale.

**Momento flettente.** - Operando, ancora, con i carichi che precedono, si ottiene:

$$\begin{aligned} M(\theta) &= VR(1 - \cos \theta) - H \cdot R \operatorname{sen} \theta - \bar{Q} \frac{R}{2} (1 - \cos \theta) = \\ &= -q \frac{R^2}{2} \operatorname{sen} \theta (1 - \operatorname{sen} \theta). \end{aligned}$$

I massimi relativi si ottengono annullando la derivata:

$$\frac{dM(\theta)}{d\theta} = -q \frac{R^2}{2} (\cos \theta - 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta)$$

e sono:

$$\begin{aligned} \text{per } \theta_3 &= 90^\circ & M(\theta_3) &= 0 \\ \text{per } \theta_4 &= 30^\circ & M(\theta_4) &= -0,125 q R^2. \end{aligned}$$

Come si vede, i massimi assoluti dello sforzo assiale e del momento flettente si presentano separatamente in due distinte sezioni rette. Non è possibile stabilire a priori la sezione più sollecitata: essa risulta quella in cui è massima la tensione prodotta dall'associazione delle due componenti dell'azione interna.

Supponiamo, ulteriormente, di voler realizzare l'arco a sezione costante.

È, intanto, evidente che alla ricerca della sezione più sollecitata male si adatta l'uso delle formule di tipo binomio per il calcolo delle tensioni.

Converrà allora ricorrere a formule di tipo monomio, e, tra esse, quelle che non presuppongono la conoscenza della posizione dell'asse neutro. Si prestano particolarmente bene le espressioni che danno le

tensioni ai lembi mediante i momenti di nocciolo. Se, per la sezione corrente sono  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  le tensioni rispettivamente all'estradosso e all'intradosso, e  $W$  ne è il modulo di resistenza, si ha:

$$\sigma_1 = \frac{M_1}{W} \quad \text{e} \quad \sigma_2 = \frac{M_2}{W}$$

ove  $M_1$ ,  $M_2$  sono i momenti dell'azione interna rispetto agli estremi del diametro del nocciolo disteso sull'asse di sollecitazione.

Si intende che, per ogni lembo, si deve prendere in considerazione il punto di nocciolo posto dalla parte opposta rispetto al baricentro.

È allora sufficiente determinare le leggi di variazione dei momenti di nocciolo  $M_1$  e  $M_2$ . Di più, avendo riconosciuto che le fibre più sollecitate sono, per ogni sezione, quelle all'intradosso, basta limitarsi al calcolo del momento  $M_2$  rispetto al punto di nocciolo superiore.

In definitiva, la sezione più sollecitata (alla pressoflessione) risulta quella a cui compete il massimo assoluto del momento rispetto all'estremo superiore del nocciolo.

È anche chiaro che l'entità delle sollecitazioni è legata alla posizione del punto di nocciolo, cioè alle dimensioni della sezione retta. Perciò, pur trattandosi di una struttura isostatica, non si potrà che procedere ad una verifica delle sue dimensioni, senza possibilità di progettarela direttamente.

Assegnamo, ora, i dati numerici indispensabili per risolvere il problema. Si ponga:

$$R = 4 \text{ m} \quad q = 3 \text{ t/m.}$$

Si adotti la sezione resistente formata da due profili UPN 220 affiancati. Per ciascuno di essi:

$$A = 37,4 \text{ cm}^2; \quad J_x = 2691 \text{ cm}^4; \quad W_x = 245 \text{ cm}^3.$$

Il raggio di nocciolo (disteso sull'asse  $y$  di sollecitazione) dell'intera sezione coincide con quello di un solo profilo:

$$w = \frac{W_x}{A} = \frac{245}{37,4} = 6,55 \text{ cm.}$$

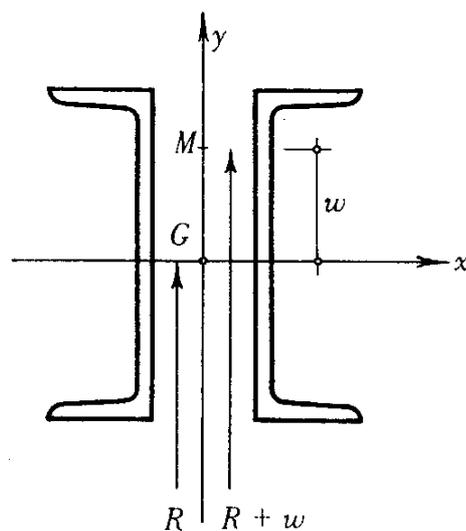


Fig. 49.2

Il momento di nocciolo, nella sezione retta corrente, si ottiene semplicemente calcolando il momento delle forze che la precedono (o seguono) rispetto al punto posto sul circolo di raggio:

$$\bar{R} = R + w = 406,55 \text{ cm.}$$

Calcoliamo separatamente i contributi derivanti dalle singole forze alla sinistra della sezione all'anomalia  $\theta$ .

Momento della reazione verticale:

$$V [R(1 - \cos \theta) - w \cos \theta].$$

Momento della spinta:

$$H [R \sin \theta + w \sin \theta].$$

Momento del carico:

$$\bar{Q} \left[ \frac{R}{2} (1 - \cos \theta) - w \cos \theta \right].$$

A conti fatti:

$$M_M(\theta) = -q \frac{R}{2} [R \sin \theta (1 - \sin \theta) + w (\sin \theta + \cos \theta + \cos^2 \theta)].$$

Esso è massimo ove si annulla la sua derivata:

$$\frac{dM_M}{d\theta} = -q \frac{R}{2} [-w \operatorname{sen} \theta + (R+w) \cos \theta - (R+w) \operatorname{sen} 2\theta] = 0,$$

Soluzione:

$$\bar{\theta} = 29^\circ 40'.$$

Il massimo momento di nocciolo risulta:

$$\bar{M}_M = -q \frac{R}{2} (0,250 R + 2,119 w) = -6,830 \text{ tm.}$$

**Verifica di resistenza (al lembo inferiore):**

$$\sigma_{\max} = \frac{\bar{M}_M}{W_x} = \frac{6,830 \times 10^5}{2 \times 245} = 1390 \text{ kg/cm}^2.$$

Se i profilati sono di Fe 42, è ammissibile  $K = 1400 \text{ kg/cm}^2$ ; la resistenza è assicurata.

*OSSERVAZIONE.* - Le massime tensioni dovute al solo momento flettente risultano:

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{6 \times 10^5}{490} = 1225 \text{ kg/cm}^2.$$

L'aggravio dovuto alla presenza dello sforzo assiale è:

$$100 \frac{1390 - 1225}{1225} = 13,5 \%.$$

Esso è alquanto modesto, pur con la curva delle pressioni abbastanza vicina all'asse. Infatti:

$$N(\bar{\theta}) = -q R; \quad M(\bar{\theta}) = -0,125 q R^2; \quad e = 0,125 R = 50 \text{ cm.}$$

\*\*\*

50. - Studiare il sistema di bielle, connesse ad un blocco indeformabile, della fig. 50.1.

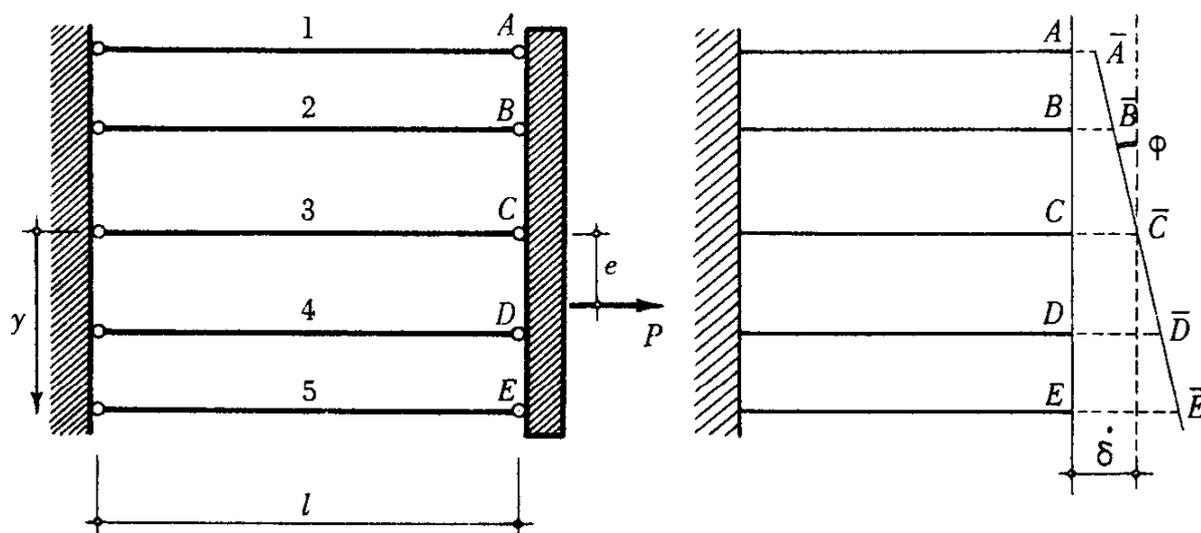


Fig. 50.1

Indichiamo con  $A_i$  l'area della generica sezione retta, con  $y_i$  la posizione della generica biella rispetto a quella centrale. L'asse dell'asta 3 sia di simmetria per la struttura, cioè risulti:

$$\begin{aligned} y_2 &= -y_4; & y_1 &= -y_5; \\ A_2 &= A_4; & A_1 &= A_5. \end{aligned}$$

### PRIMA SOLUZIONE. IL METODO DELLE DEFORMAZIONI.

Il moto di corpo rigido, che il blocco indeformabile subisce per effetto della deformazione delle bielle, può scomporsi in una pura traslazione orizzontale  $\delta$  e una pura rotazione  $\phi$  attorno a C. Tutti gli allungamenti delle varie bielle sono esprimibili in funzione di questi due soli parametri.

Con i versi indicati in figura:

$$\Delta l_1 = \delta - \varphi \gamma_1$$

$$\Delta l_2 = \delta - \varphi \gamma_2$$

$$\Delta l_3 = \delta$$

$$\Delta l_4 = \delta + \varphi \gamma_2$$

$$\Delta l_5 = \delta + \varphi \gamma_1.$$

In generale:

$$\Delta l_i = \delta + \varphi \gamma_i.$$

In funzione di tali allungamenti è possibile esprimere gli sforzi di trazione nelle singole bielle. Per quella generica:

$$N_i = EA_i \frac{\Delta l_i}{l}.$$

Ora, scriviamo le due equazioni di equilibrio del blocco rigido svincolato.

**Equilibrio alla traslazione orizzontale:**

$$\sum N_i = P$$

cioè

$$\sum EA_i \frac{\Delta l_i}{l} = P$$

oppure:

$$\sum \left( EA_i \frac{\delta}{l} + \sum A_i \frac{\varphi}{l} \gamma_i \right) = P.$$

In conseguenza della simmetria, il secondo termine della sommatoria è nullo. Si ottiene allora:

$$\delta = \frac{Pl}{E \sum A_i}.$$

**Equilibrio alla rotazione intorno alla cerniera C.**

$$\sum N_i y_i - Pe = 0$$

cioè

$$\sum \frac{E A_i}{l} (\delta + \varphi y_i) y_i = +Pe.$$

Ancora, per ragioni di simmetria risulta:

$$\frac{E \delta}{l} \sum A_i y_i = 0,$$

quindi:

$$\varphi = + \frac{Pe}{\sum A_i y_i^2} \frac{l}{E}.$$

Alla fine, si ottiene:

$$\begin{aligned} N_i &= \sum E A_i \frac{\Delta l_i}{l} = \frac{E}{l} \sum A_i (\delta + \varphi y_i) = \\ &= P A_i \left[ \frac{1}{\sum A_i} + \frac{e y_i}{\sum A_i y_i^2} \right]. \end{aligned}$$

È implicito che la formula va intesa in senso algebrico, con le  $y$  positive se si riferiscono alle bielle poste al di sotto dell'asse di simmetria.

## SECONDA SOLUZIONE.

L'indeforabilità del blocco di collegamento fa sì che, anche dopo la deformazione, le estremità delle bielle appartengano ad un unico piano. È allora lecito schematizzare la struttura come una trave pressoinflessa: il suo asse è quello di simmetria; la sezione, il complesso delle cinque sezioni; in sostanza, risulta composta da cinque sole fibre, disposte, in maniera discontinua, secondo gli assi delle bielle.

La sezione resistente ha l'area:

$$A = \sum A_i$$

ed il momento d'inerzia baricentrico:

$$J = \sum A_i y_i^2$$

La tensione nell'asta (fibra) generica vale:

$$\sigma_i = \frac{P}{A} + \frac{Pe \cdot y_i}{J}$$

e poiché ogni asta è soggetta solamente a sforzo assiale:

$$N_i = \sigma_i A_i = P A_i \left[ \frac{1}{\sum A_i} + \frac{e y_i}{\sum A_i y_i^2} \right]$$

\*\*\*

51. - Un plinto di fondazione trasmette un carico complessivo di 100 t ai quattro pali che lo sostengono. Determinare la quota di carico assorbita dal palo più sollecitato.

Dati numerici:

$$P = 100 \text{ t}$$

$$e_1 = 0,20 \text{ m}$$

$$e_2 = 0,40 \text{ m}$$

$$d_1 = 0,70 \text{ m}$$

$$d_2 = 1,00 \text{ m}$$

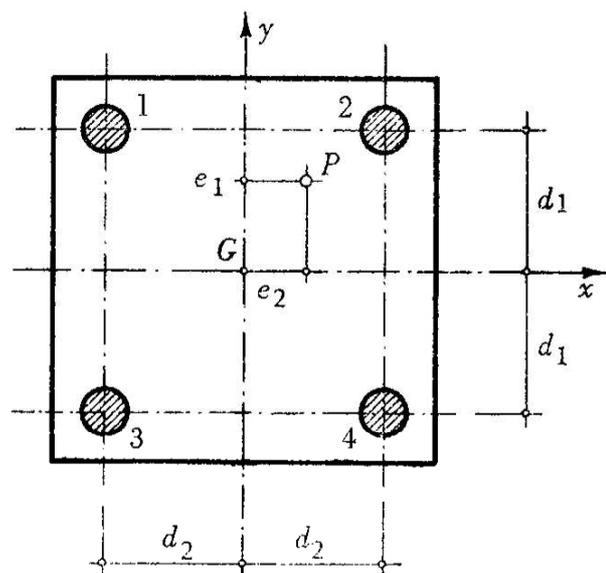


Fig. 51.1

Le fondazioni, nelle strutture civili, sono quelle parti destinate a trasmettere i carichi al terreno su cui riposano. Talvolta esse sono costituite da zatteroni (plinti), sostenuti da pali infissi nel terreno.

I pali hanno sezione trasversale piuttosto modesta, trascurabile rispetto alle dimensioni del plinto, che si può considerare indeformabile rispetto ad essi ed al terreno.

In base all'esperienza, è lecito ritenere, sia pure in prima approssimazione, che l'abbassamento sotto carico dei pali sia proporzionale alla forza applicata e si annulli con essa.

Inoltre, la scarsa rigidezza flessionale dei pali fa ritenere attendibile che le loro reazioni sul plinto siano verticali e dirette secondo i rispettivi assi geometrici.

In tal modo, l'insieme delle teste dei quattro pali può considerarsi come una sezione retta di una trave, composta di sole quattro fibre, soggetta a pressoflessione.

L'area  $A$  elementare di ciascuna fibra è quella della sezione del palo.

La natura del collegamento tra pali e terreno fa sì che essi non siano adatti a sopportare sforzi di trazione. Per prima cosa, quindi, è opportuno accertarsi che il centro di pressione cada entro il nocciolo centrale d'inerzia della sezione.

Per determinarne il contorno, ricorriamo alla definizione. Basterà, in pratica, trovare il centro relativo di uno qualsiasi dei lati del rettangolo definito dalle quattro masse puntiformi (supposte concentrate nei baricentri dei pali).

Riferiamoci, ad esempio, alla tangente inferiore  $b$ . Il suo antipolo si trova sull'asse di simmetria; la sua distanza dalla tangente è:

$$x_B = \frac{J_b}{S_b}.$$

Nella fattispecie:

$$\begin{aligned} J_b &= 2A(2d_1)^2 = 8Ad_1^2 \\ S_b &= 2A \cdot 2d_1 = 4Ad_1 \\ x_B &= 2d_1. \end{aligned}$$

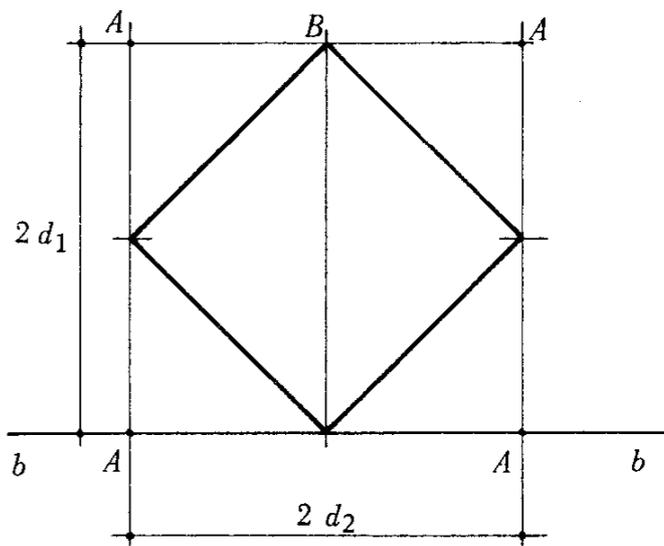


Fig. 51.2

Il nocciolo della sezione è costituito dal rombo che ha i vertici nei punti di mezzo dei lati del rettangolo identificato dai pali.

Si può controllare facilmente che il centro di pressione è interno al nocciolo, quindi tutti i pali risultano compressi.

Il più sollecitato è il numero 2.

Le caratteristiche geometriche della sezione pressoinflessa sono le seguenti.

$$\begin{aligned}
 A_t &= 4A \\
 J_x &= 4A d_1^2 & J_y &= 4A d_2^2 \\
 W_x &= 4A d_1 & W_y &= 4A d_2.
 \end{aligned}$$

Il momento del carico esterno rispetto al baricentro ha componenti:

$$M_x = P e_1 \quad M_y = P e_2.$$

La tensione nel palo più sollecitato è:

$$\sigma_2 = \frac{P}{A_t} + \frac{P e_1}{4A d_1} + \frac{P e_2}{4A d_2}.$$

e il relativo sforzo assiale:

$$N_2 = \sigma_2 \cdot A = \frac{P}{4} \left( 1 + \frac{e_1}{d_1} + \frac{e_2}{d_2} \right) = 42\,15 \text{ t.}$$

Invece il palo meno sollecitato è il 3:

$$N_3 = \frac{P}{4} \left( 1 - \frac{e_1}{d_1} - \frac{e_2}{d_2} \right) = 7,85 \text{ t.}$$

\*\*\*

52. - Un pilastro di calcestruzzo, privo di armature, ha la sezione di base delle dimensioni indicate nella fig. 52.1.

Calcolarne la massime tensioni, nell'ipotesi che essa sia sollecitata da una forza verticale di 132 800 kg, applicata sull'asse di simmetria alla distanza di 2,59 m dal lembo sinistro.

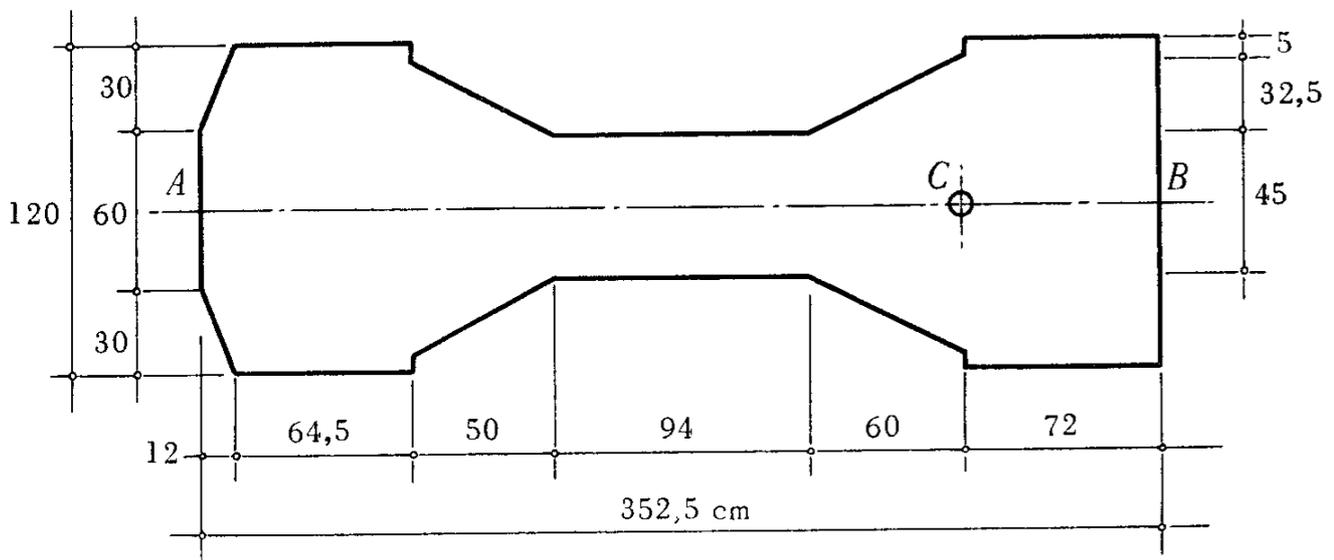


Fig. 52.1

Il calcestruzzo ha resistenza a trazione limitata ed incerta; è pertanto buona norma ritenere nullo il relativo carico di sicurezza.

La sezione è soggetta a pressoflessione; sarà necessario eseguirne la verifica astraendo dal contributo portato, alla resistenza, da eventuali parti tese.

Poiché la sezione ha forma irregolare, pur presentando un asse di simmetria ortogonale, ci si può valere della nota costruzione grafica (di SPANGENBERG) per definire la posizione dell'asse neutro. Questo è ortogonale all'asse di sollecitazione; inoltre, risulta baricentrico per i momenti statici delle aree reagenti rispetto alla verticale per il centro di pressione  $C$ .

Determinata la posizione dell'asse neutro, ove esso tagli la sezione ne risulta anche la retta separatrice tra zona compressa (reagente) e tesa (inerte).

Per verificare la resistenza, basterà calcolare la massima tensione di compressione e controllare che non risulti superiore al carico di sicurezza del calcestruzzo.

Ricerchiamo innanzi tutto la posizione dell'asse neutro. Suddivisa la sezione in strisce, mediante rette parallele alla direzione dell'asse neutro (e perciò verticali), calcoliamo, di ciascuna di esse, l'area ed il momento statico rispetto alla verticale  $r$  per il centro di pressione.

Si riportano i momenti statici (o quantità ad esse proporzionali), in scala opportuna, sulla retta delle forze.

Si traccia poi il poligono funicolare che collega dette forze, appoggiandosi sulle verticali baricentriche delle strisce.

L'intersezione del primo lato con quello generico fornisce la posizione dell'asse neutro.

Nella seguente tabella si riportano:

- la numerazione delle strisce, in base agli estremi delle forze che le rappresentano;
- le loro aree;
- i momenti statici rispetto alla verticale per il centro di pressione.

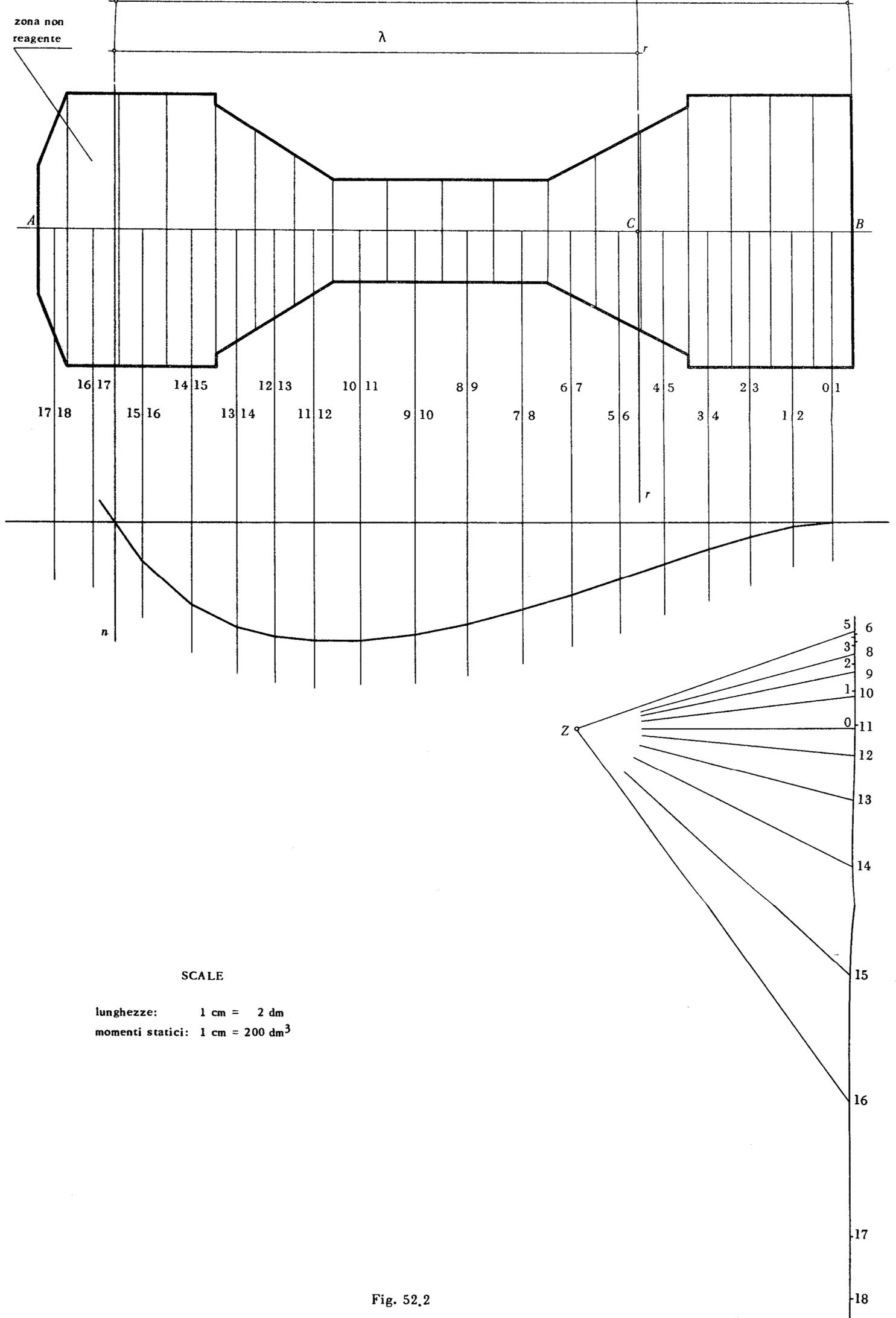


Fig. 52.2

STRISCIA	AREA	DISTANZA DALLA RETTA $r$	MOMENTO STATICO RISPETTO ALLA $r$
	dm <sup>2</sup>	dm	dm <sup>3</sup>
0-1	21,60	-7,45	-161,00
1-2	21,60	-5,65	-122,00
2-3	21,60	-3,85	-83,20
3-4	21,60	-2,05	-44,30
4-5	19,84	-1,15	-22,80
5-6	15,50	0,85	13,20
6-7	11,16	2,85	31,80
7-8	10,57	5,03	53,20
8-9	10,57	7,38	78,00
9-10	10,57	9,73	102,80
10-11	10,57	12,08	127,70
11-12	9,30	14,08	131,00
12-13	12,92	15,75	203,50
13-14	16,54	17,42	288,10
14-15	25,80	19,33	498,70
15-16	25,80	21,48	554,20
16-17	25,80	23,63	609,70
17-18	10,80	25,30	273,20

Le lunghezze sono state espresse in dm per ottenere numeri più comodi.

Nella fig. 52.2 è, invece, riportata la costruzione grafica che identifica l'asse neutro.

Dalla costruzione grafica si rileva che l'asse neutro taglia la sezione, e dista dal lembo maggiormente compresso  $B$ :

$$y = 320 \text{ cm} = 32,0 \text{ dm.}$$

La massima tensione (di compressione) può calcolarsi con la formula:

$$\sigma = \frac{Qy}{S}$$

ove  $S$  è il momento statico della sezione reagente rispetto all'asse neutro.

Se con  $m_i$  si indica il generico momento statico (calcolato in tabella) rispetto alla  $r$ ; se  $\omega_i$  è l'area della generica striscia (della zona reagente) e se  $\lambda$  è la distanza tra centro di pressione ed asse neutro, risulta:

$$S = \lambda \sum \omega_i - \sum m_i = 22,75 \times 265,54 - 1649 = 4392 \text{ dm}^3$$

$$\sigma = \frac{132800 \times 32}{4392} = 967 \text{ kg/dm}^2 = 9,67 \text{ kg/cm}^2.$$

Tale tensione è pienamente accettabile per il calcestruzzo, il cui carico di sicurezza varia con la composizione, ma raggiunge sempre alcune decine di  $\text{kg/cm}^2$ ,

\*\*\*

**53. - Progettare la sezione di un pilastro di cemento armato, sollecitato da una forza assiale di 30 t con l'eccentricità di 2 m.**

Il pilastro, a sezione rettangolare, sia costruito con i seguenti materiali:

- calcestruzzo di cemento 425, con carico di sicurezza:  $K_c = 75 \text{ kg/cm}^2$ ;
- acciaio Aq 50, avente  $K_f = 1600 \text{ kg/cm}^2$ .

Nella fig. 53.1 sono indicate le dimensioni geometriche della sezione, il cui lato maggiore conviene che sia disposto secondo l'asse di sollecitazione.

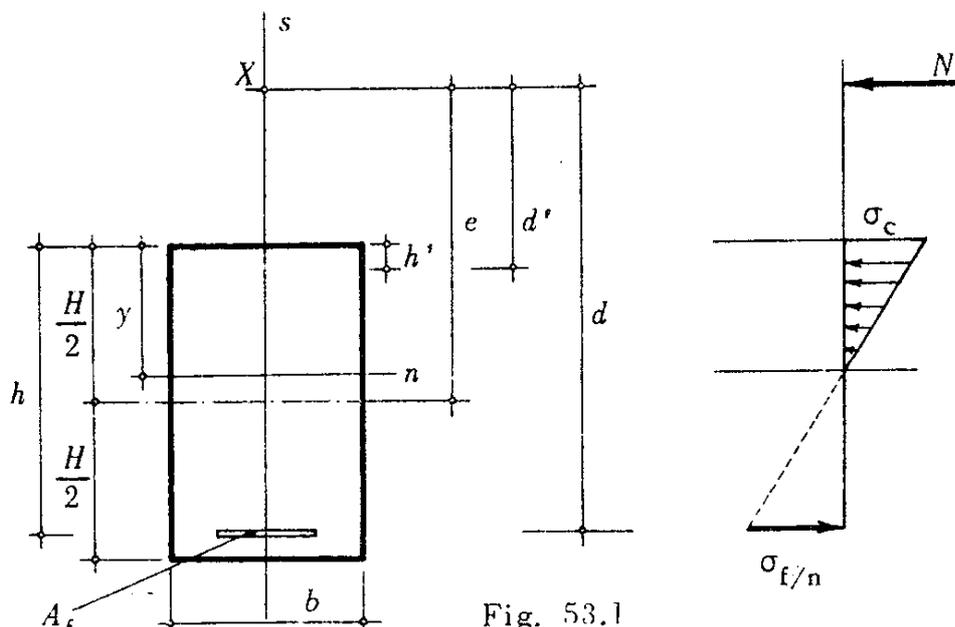


Fig. 53.1

Il diagramma delle tensioni interne è pure rappresentato nella medesima figura. È noto che non sempre si può imporre:

$$\sigma_c = K_c \quad \text{e contemporaneamente} \quad \sigma_f = K_f.$$

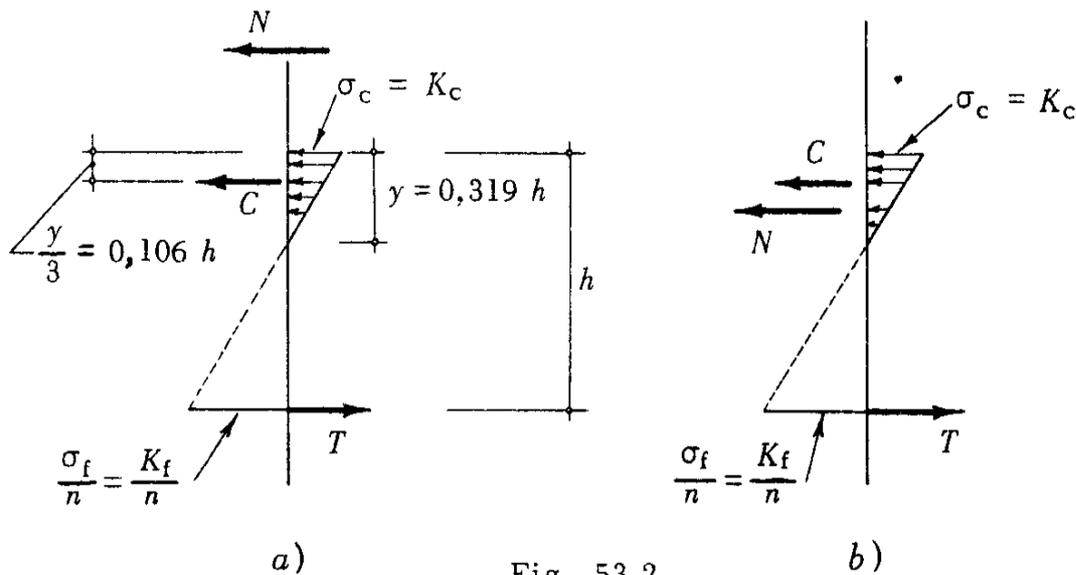
Tale possibilità dipende essenzialmente dalla posizione del centro di pressione.

Se si pone  $\sigma_c = K_c$  e  $\sigma_f = K_f$ , risulta:

$$y = 0,319 h; \quad \frac{y}{3} = 0,106 h.$$

Il centro di compressione dista 0,106 h dal centro superiore; il centro di trazione è nel baricentro dell'armatura.

Se l'eccentricità è notevole, l'equivalenza tra  $N$  ed il complesso



$C, T$  è possibile (fig. 53.2, a). Se, invece, il centro di pressione cade entro la sezione, in modo che  $N$  sia compreso entro la striscia definita da  $C$  e  $T$ , la situazione statica che ne deriva è impossibile. La forza  $N$  non può equivalere a due forze  $C, T$  discordi (fig. 53.2, b).

Il problema diviene possibile solo se, mantenendo  $\sigma_c = K_c$ , si dispone tanto ferro perché risulti  $\sigma_f < K_f$ . In tal modo, l'asse neutro si sposta verso il basso, finché la  $C$  passa di nuovo al di sotto di  $N$ .

Si può affermare, in linea di massima, che è lecito imporre  $\sigma_f = K_f$

quando  $\frac{d'}{d} \geq 0,25$ .

In questo caso, prevista, per la sezione, l'altezza effettiva di 1 m, e poiché  $e = 2$  m:

$$d' = e - \frac{H}{2} + h' = 153 \text{ cm}$$

$$d = e + \frac{H}{2} - h' = 247 \text{ cm}$$

quindi

$$\frac{d'}{d} = 0,62.$$

Potremo, allora, progettare imponendo:

$$\sigma_f = K_f = 1600 \text{ kg/cm}^2.$$

Usiamo il metodo del momento di trasporto, e prefissiamo la larghezza della sezione:

$$b = 40 \text{ cm.}$$

Progettiamo a semplice flessione, per

$$\bar{M} = N \cdot d.$$

**Primo tentativo.** - Posto  $h_1 = 97$  cm ( $H = 100$  cm), dalle tabelle si ha:

$$r = 0,306 \quad t = 0,00229$$

$$\bar{M}_1 = N \cdot d_1 = 30 \times 2,47 = 74,1 \text{ tm}$$

$$h = r \sqrt{\frac{\bar{M}}{b}} = 0,306 \times \sqrt{\frac{74100}{0,40}} = 132 \text{ cm}$$

**Secondo tentativo.** - Posto  $h_2 = 135$  cm;  $d_2 = 266$  cm,

$$\bar{M}_2 = N \cdot d_2 = 30 \times 2,66 = 79,8 \text{ tm}$$

$$h = 0,306 \sqrt{\frac{79800}{0,40}} = 0,306 \times 446 = 137 \text{ cm.}$$

I tentativi possono, a questo punto, arrestarsi.  
L'altezza totale della sezione può assumersi

$$H = 140 \text{ cm.}$$

Per la semplice flessione:

$$\bar{A}_f = tb\sqrt{\frac{M}{b}} = 0,00229 \times 40 \times 446 = 40,9 \text{ cm}^2$$

$$A_f = \bar{A}_f - \frac{N}{K_f} = 40,9 - \frac{30\,000}{1600} = 22,1 \text{ cm}^2.$$

Si adottano  $5\phi 24$ , pari a  $22,62 \text{ cm}^2$ . Non è necessaria armatura compressa.

\*\*\*

54. - Progettare l'armatura di una sezione di calcestruzzo, quadrata con lato di 1 m, pressoinflessa dal carico di 70 t applicato in corrispondenza di uno dei suoi vertici.

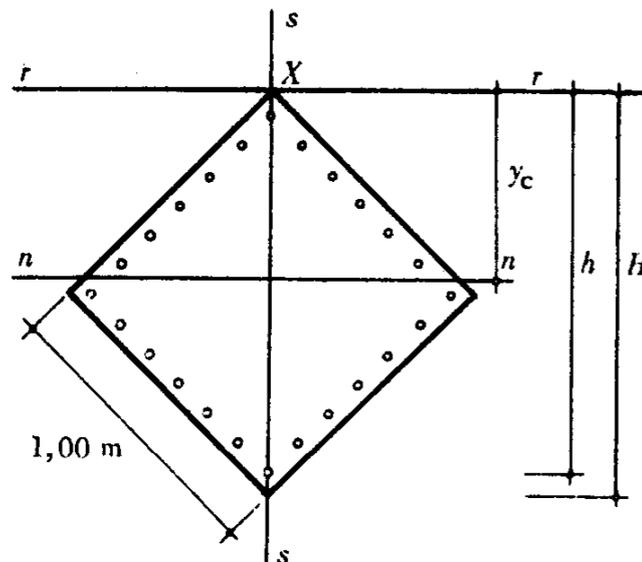


Fig. 54.1

L'asse di sollecitazione coincide con la diagonale che contiene il centro di pressione  $X$ . Per ragioni di simmetria, l'asse neutro  $n$  risulterà ortogonale all'asse di sollecitazione.

La sezione priva di ferri non può resistere. È allora necessario armare almeno la zona tesa.

Per ragioni costruttive, si suppone di dover disporre dei tondini di ugual sezione lungo tutta la periferia, alla distanza mutua di 15 cm. La distanza dei loro baricentri dalla superficie esterna del calcestruzzo sia di 5 cm. Tale disposizione rispetta la simmetria del problema.

La zona compressa non ha forma rettangolare.

Non vi sono, quindi, formule semplici per il progetto. Bisognerà procedere per tentativi, armando nella maniera ritenuta più opportuna, per eseguire poi la verifica per via grafica.

Naturalmente, conviene riconoscere, sia pure in via approssimata, il comportamento statico della sezione. In tal modo si ridurranno i tentativi al minimo indispensabile.

*STATO DI TENSIONE.* - La posizione effettiva dell'asse neutro dipende da quella del centro di pressione, oltre che, ovviamente, dall'entità delle aree reagenti.

Poiché il centro di pressione è sul vertice superiore, è attendibile supporre che l'asse neutro cada a metà dell'altezza totale  $H$ .

Risulta:

$$H = 100 \sqrt{2} = 141 \text{ cm}$$

inoltre:

$$h = \quad = 134 \text{ cm.}$$

In prima approssimazione si può porre:

$$y_c = \frac{H}{2} \cong \frac{h}{2} = 67 \text{ cm.}$$

In questa ipotesi, la massima tensione nel ferro teso risulta:

$$\sigma_f = n\sigma_c \frac{h - y_c}{y_c} = n\sigma_c.$$

Un progetto di massima dell'armatura può eseguirsi, col metodo del momento di trasporto, conoscendo (in approssimazione) la distanza  $h_0$  tra il centro di compressione  $P_c$  e quello di trazione  $P_T$ .

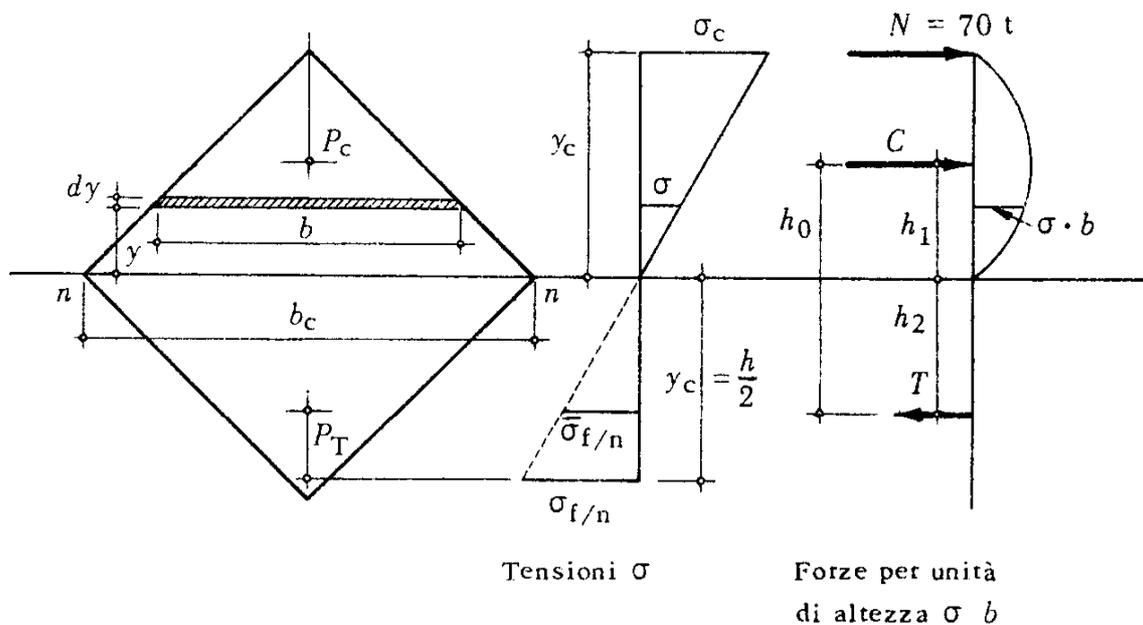


Fig. 54.2

**Centro di trazione.** - È il baricentro delle armature tese (sotto l'asse neutro), caricate delle tensioni rispettive.

Si ottiene facilmente:

$$h_2 = 0,339 h = 46 \text{ cm.}$$

**Centro di compressione.** - È il baricentro delle forze  $dF = \sigma \cdot b dy$ . Ora, risulta:

$$\sigma = \sigma_c \frac{y}{y_c}$$

$$b = b_c \frac{y_c - y}{y_c}$$

pertanto:

$$dF = \frac{b_c \sigma_c}{y_c^2} (y_c y - y^2) dy.$$

Le forze  $dF$  variano con legge parabolica; perciò:

$$h_1 = 0,5 y_c = 0,25 h = 34 \text{ cm.}$$

In totale:

$$h_0 = h_1 + h_2 = 80 \text{ cm.}$$

*PROGETTO DELL'ARMATURA.* - Trasportiamo  $N$  in  $P_T$ , insieme al momento

$$\bar{M} = N \cdot d$$

$$d = \frac{h}{2} + h_2 = 114 \text{ cm}; \quad \bar{M} = 80 \text{ tm.}$$

Lo sforzo di compressione nel calcestruzzo vale:

$$C = \frac{\bar{M}}{h_0} = \frac{8 \times 10^6}{80} = 10^5 \text{ kg}$$

La zona compressa ha l'area:

$$A_c = \frac{1 \times 1}{2} = 0,5 \text{ m}^2 = 5000 \text{ cm}^2;$$

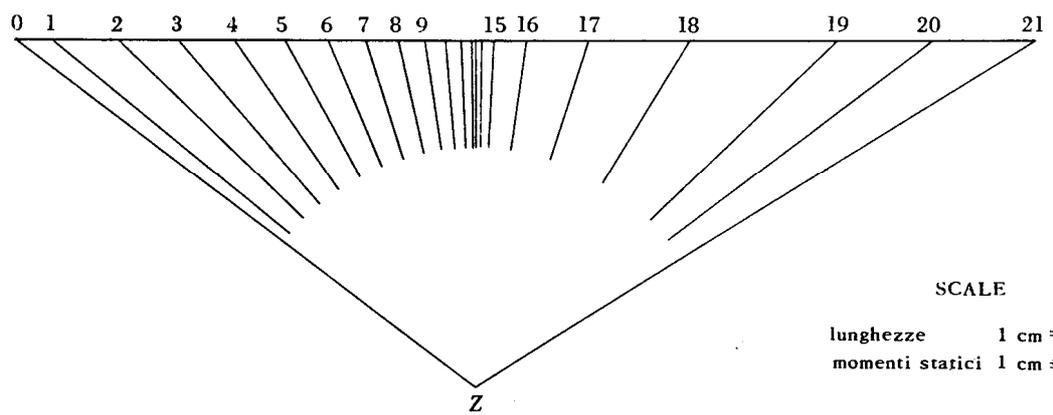
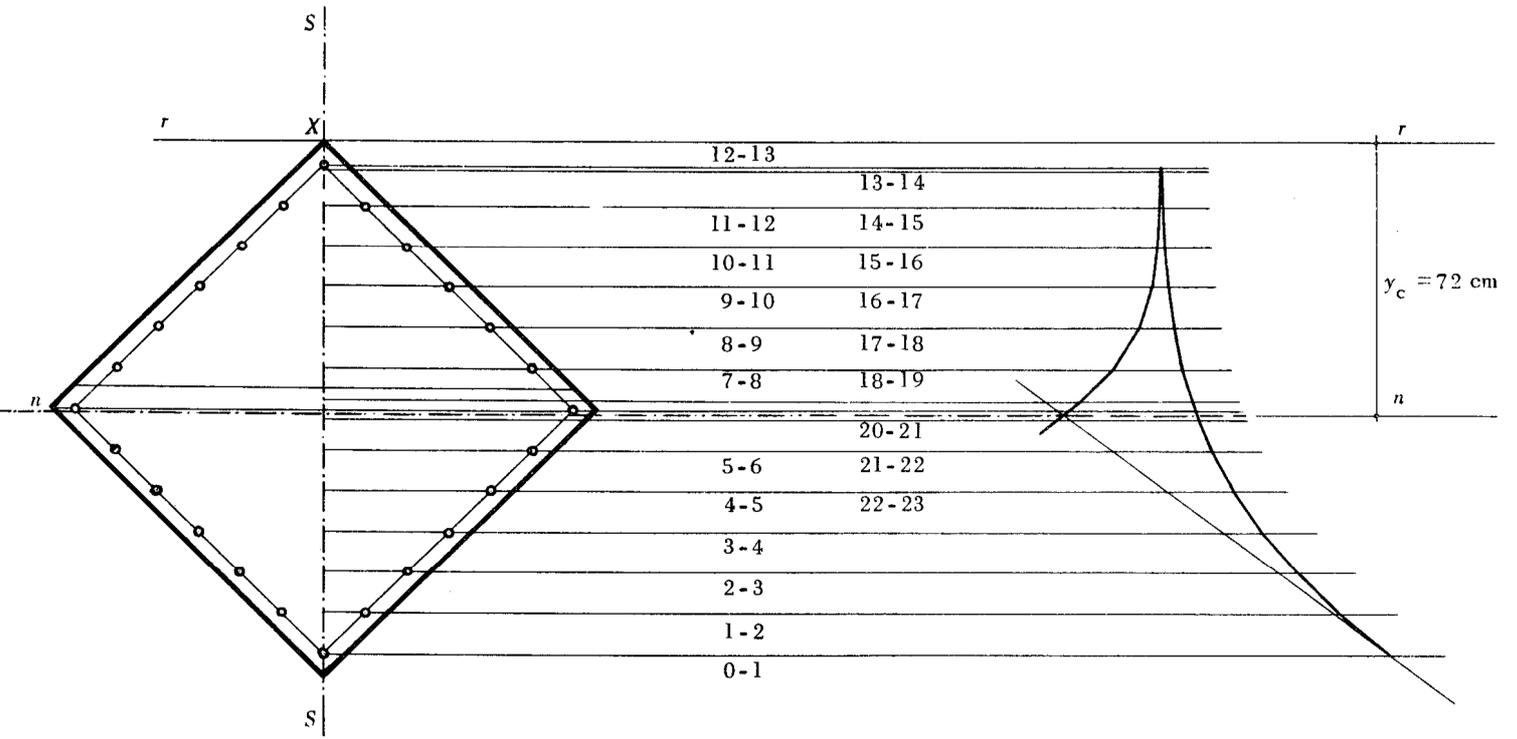
la sua tensione media risulta:

$$\sigma_{cm} = \frac{C}{A_c} = \frac{10^5}{5 \times 10^3} = 20 \text{ kg/cm}^2.$$

Questa tensione compete al baricentro della zona compressa, posto ad un terzo della sua altezza. Allora:

$$\sigma_c = 3 \cdot \sigma_{cm} = 60 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_f = n \cdot \sigma_c \frac{h - y_c}{y_c} \cong n \cdot \sigma_c = 600 \text{ kg/cm}^2.$$



SCALE  
 lunghezze 1 cm = 20 cm  
 momenti statici 1 cm = 20000 cm<sup>2</sup>

Fig. 54.3

ELEMENTO	AREA	DISTANZA DALLA RETTA $r$	MOMENTO STATICO RISPETTO ALLA $r$
	cm <sup>2</sup>	cm	cm <sup>3</sup>
0-1	$10 \times 7,1 = 71$	134,7	9 550
1-2	$2 \times 10 \times 7,1 = 142$	124,1	17 630
2-3	142	113,5	16 100
3-4	142	102,9	14 600
4-5	142	92,3	13 100
5-6	142	81,7	11 600
6-7	142	71	10 100
7-8	142	60,3	8 580
8-9	142	49,7	7 070
9-10	142	39,1	5 560
10-11	142	28,5	4 050
11-12	142	17,9	2 540
12-13	$10 \times 7,1 = 71$	7,1	500
13-14	$12,6 \times 12,6 = 159$	6,9	1 100
14-15	$10,6 \times 17,9 = 190$	17,9	3 400
15-16	$10,6 \times 28,5 = 302$	28,5	8 620
16-17	$10,6 \times 39,1 = 415$	39,1	16 200
17-18	$10,6 \times 49,7 = 527$	49,7	26 200
18-19	$10,6 \times 60,3 = 640$	60,3	38 600
19-20	$5,3 \times 68,3 = 362$	68,3	24 750
20-21	362	73,7	26 700
21-22	640	81,7	52 200

$$S_n = 4661 \times 72 - 266050 = 69540 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_c = \frac{70000 \times 72}{69450} = 72,5 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_f = n \sigma_c \frac{h - y_c}{y_c} = 725 \frac{64}{72} = 645 \text{ kg/cm}^2$$

Per l'acciaio, la resistenza è senz'altro assicurata,

Le tensioni nel calcestruzzo sono accettabili se la sua tensione di rottura (su cubi, a 28 giorni di stagionatura) non è inferiore a  $225 \text{ kg/cm}^2$ .

*OSSERVAZIONE.* - A prima vista può sembrare che l'acciaio sia mal utilizzato, perché lavora ad un tasso molto modesto.

Si rifletta, però, che un aumento di tensione (e quindi diminuzione di sezione metallica tesa) provocherebbe uno spostamento verso l'alto dell'asse neutro, con riduzione della zona compressa.

Ciò comporterebbe un aumento, senz'altro intollerabile, delle massime tensioni nel calcestruzzo.