

CAPITOLO VI

LA FLESSIONE SEMPLICE

In ogni punto della generica sezione di una trave, la sollecitazione di semplice flessione provoca uno stato di tensione monoassiale. L'asse neutro, coniugato a quello di sollecitazione rispetto all'ellisse centrale d'inerzia, è baricentrico, e divide la sezione in due parti, l'una tesa e l'altra compressa. La tensione normale, agente sull'areola posta a distanza y dall'asse neutro, vale:

$$\sigma = M \frac{y}{J_x}.$$

M è il momento flettente, J_x il momento d'inerzia dell'intera sezione rispetto all'asse neutro (tutte le distanze si intendono calcolate secondo l'asse di sollecitazione).

Ogni sezione retta è, inoltre, priva di tensioni tangenziali. L'effetto deformante, sul tronco elementare lungo ds , si riassume in una rotazione relativa delle sezioni che lo delimitano:

$$d\varphi = \frac{M}{EJ_x \sin \theta} ds$$

ove θ è l'inclinazione dell'asse neutro rispetto all'asse di sollecitazione.

La variazione locale di curvatura dell'asse geometrico risulta:

$$\frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{M}{EJ_x \sin \theta}$$

La flessione semplice, perciò, produce solo un incurvamento dell'asse della trave, senza alterarne la lunghezza.

La verifica di resistenza consiste nel limitare la massima tensione. In generale, detti rispettivamente W_T e W_C i moduli di resistenza dei lembi teso e compresso più distanti dall'asse neutro, e K_T e K_C i carichi di sicurezza a trazione e compressione, dovrà risultare:

$$\frac{M}{W_T} \leq K_T \quad \text{e} \quad \frac{M}{W_C} \leq K_C.$$

Nel caso che il materiale abbia ugual carico di sicurezza K a trazione e compressione, basterà limitare, ad esso, la tensione massima in modulo.

45. - Progettare in acciaio una trave appoggiata, inflessa da un carico uniformemente distribuito, nei seguenti casi particolari:

- 1) la flessione è retta;
- 2) la flessione è deviata di 30° .

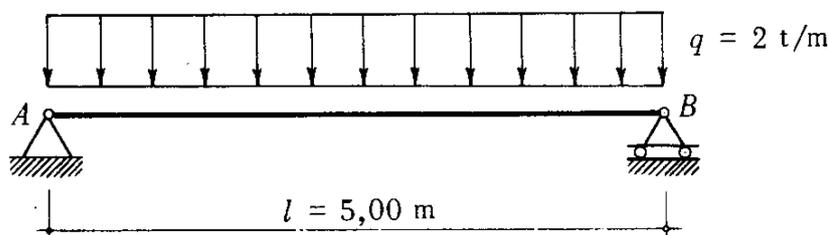


Fig. 45.1

Le reazioni dei vincoli sono verticali e volte verso l'alto. Il loro modulo è

$$V = \frac{ql}{2} = 5,00 \text{ t.}$$

Il momento flettente varia con legge parabolica. Il massimo (positivo) è in mezzaria, e vale:

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = 6,250 \text{ tm.}$$

Nella medesima sezione lo sforzo di taglio è nullo; pertanto, si può tranquillamente progettare a flessione semplice.

Si voglia realizzare la trave con profilati, ottenuti per laminazione con acciaio Fe 42 UNI 5334/64.

Per esso è ammissibile il carico di sicurezza a sollecitazione monoassiale ⁽¹⁾:

$$K = 1400 \text{ kg/cm}^2.$$

1) FLESSIONE RETTA.

Il progetto della sezione più sollecitata (e quindi di tutta la trave, ovviamente prismatica) dovrà farsi in base alla formula:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq K.$$

W è il modulo di resistenza della sezione rispetto all'asse neutro. In condizioni di sicurezza e di massima economia:

$$W = \frac{M_{\max}}{K} = \frac{6,25 \times 10^5}{1,4 \times 10^3} = 446 \text{ cm}^3.$$

Si voglia scegliere un profilato IPN UNI 5679-65 ⁽²⁾. Il materiale è sfruttato nel modo migliore se si dispone il profilato con l'asse, su cui è disteso il massimo raggio di nocciolo, contenuto nel piano di sollecitazione.

Nella tabella sopracitata si trova che la trave avente massimo modulo di resistenza più vicino al valore di 446 cm^3 è quella alta 260 mm (IPN 260). Per essa:

⁽¹⁾ Per le norme riguardanti le costruzioni d'acciaio, si veda la tabella UNI-CNR 10011.

⁽²⁾ Vedasi l'omonima tabella, riportata anche in appendice a questo volume.

$$W_x = 441 \text{ cm}^3$$

e quindi:

$$\sigma_{\max} = \frac{6,25 \times 10^5}{441} = 1417 \text{ kg/cm}^2.$$

Tale tensione è pienamente accettabile, perché supera il carico di sicurezza soltanto dell'1 %.

Per completezza, calcoliamo anche le deformazioni della trave. Nella sezione di mezzaria, la curvatura risulta:

$$\frac{1}{R_x} = \frac{M_{\max}}{EJ_x}$$

ove

$$E = 2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

e, dalla tabella:

$$J_x = 5735 \text{ cm}^4.$$

Segue:

$$\frac{1}{R_x} = \frac{6,25 \times 10^5}{2,1 \times 10^6 \times 5,735 \times 10^3} = 0,52 \times 10^{-4} \text{ cm}^{-1}.$$

Il raggio di curvatura è, pertanto:

$$R_x = 192 \text{ m.}$$

Calcoliamo, infine, la rotazione relativa delle due sezioni d'imposta.

La rotazione relativa delle facce estreme del tronco elementare lungo dx , posto all'ascissa x generica (contata da una delle imposte) è:

$$\frac{M dx}{EJ_x}.$$

La rotazione relativa cercata è allora:

$$\Phi = \int_0^l \frac{M dx}{EJ_x}.$$

In pratica, basta moltiplicare la curvatura media per la lunghezza d'asse della trave.

Poiché la rigidità flessionale EJ_x è costante, il diagramma delle curvature è parabolico come quello del momento flettente. Il valore medio della curvatura vale i $2/3$ del massimo. Allora:

$$\Phi = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{R_x} \cdot l = \frac{2}{3} \cdot 0,52 \times 10^{-4} \times 5 \times 10^2 = 1,73 \times 10^{-2} \text{ rad.}$$

PRIMA OSSERVAZIONE. - Il profilato IPN 260 pesa 41,9 kg/m. È senz'altro lecito il procedimento usato, in cui tale peso è stato trascurato rispetto al sovraccarico di 2000 kg/m (l'errore è circa del 2 %).

SECONDA OSSERVAZIONE. - È opportuno confrontare il peso della trave con sezione a I con quello di una trave a sezione rettangolare, aventi uguale altezza e modulo di resistenza.

Se b e h sono le dimensioni della sezione, deve essere:

$$W = \frac{bh^2}{6} = 441 \text{ cm}^3 \quad \text{e} \quad h = 26 \text{ cm.}$$

Si ottiene facilmente:

$$b = 3,91 \text{ cm.}$$

L'area della sezione rettangolare è $bh = 3,91 \times 26 = 102 \text{ cm}^2$, mentre quella dell'IPN 260 è di $53,3 \text{ cm}^2$.

A parità di resistenza, l'area (e quindi il peso) della trave rettangolare è $\frac{102}{53,3} = 1,91$ volte quella dell'IPN.

Allo stesso risultato si poteva giungere, altrettanto rapidamente, confrontando i raggi di nocciolo.

Per la sezione rettangolare:

$$w_R = \frac{h}{6} = \frac{26}{6} = 4,33 \text{ cm.}$$

Per il profilato:

$$w_I = \frac{W_x}{A} = \frac{441}{53,3} = 8,27 \text{ cm.}$$

Il rapporto risulta:

$$\frac{w_I}{w_R} = \frac{8,27}{4,33} = 1,91$$

2) FLESSIONE DEVIATA DI 30°.

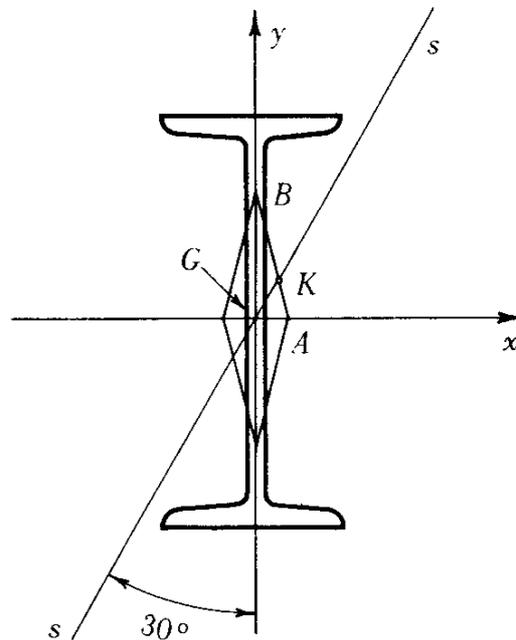


Fig. 45.2

Il momento flettente massimo, che condiziona il proporzionamento, è ancora

$$M_{\max} = 6,25 \text{ tm.}$$

Usiamo ancora il profilato IPN 260. La sua resistenza è proporzionale al raggio di nocciolo $w = \overline{GK}$ disteso sull'asse di sollecitazione.

Per calcolarlo, valutiamo dapprima i raggi massimo e minimo. Risultata:

$$u_1 = \frac{W_y}{A} = \frac{50,9}{53,3} = 0,955 \text{ cm}$$

$$w_2 = \frac{W_x}{A} = \frac{441}{53,3} = 8,274 \text{ cm.}$$

L'equazione del lato AB , nel riferimento principale, risulta:

$$\frac{x}{0,955} + \frac{y}{8,274} = 1$$

Invece, l'asse di sollecitazione ha equazione:

$$y = x \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = 1,732 x.$$

La loro intersezione K ha le coordinate:

$$x_K = 0,796 \text{ cm; } y_K = 1,379 \text{ cm}$$

e perciò:

$$w = \overline{GK} = \sqrt{x_K^2 + y_K^2} = 1,59 \text{ cm}$$

Il modulo di resistenza, infine, è:

$$W = A w = 53,3 \cdot 1,59 = 84,7 \text{ cm}^3$$

e la massima tensione:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{6,25 \times 10^5}{84,7} = 7370 \text{ kg/cm}^2.$$

Il risultato è soltanto teorico: non appena si supera lo snervamento dell'acciaio (intorno ai 3000 kg/cm^2), la trave si piega plasticamente senza che si riesca, in pratica, a produrne la rottura.

Tuttavia, è chiaro che la sezione è largamente insufficiente a sopportare il momento flettente assegnato. Ciò deriva dal fatto che essa ha i moduli di resistenza estremi molto diversi tra loro, quindi non è adatta a sopportare sollecitazioni deviate.

Per poter rientrare nei limiti di sicurezza, usando uno stesso tipo di profilo, sarebbe necessario un IPN 500. Esso ha:

$$W_x = 2746 \text{ cm}^3; \quad W_y = 268 \text{ cm}^3; \quad A = 179 \text{ cm}^2.$$

Le componenti della coppia flettente secondo gli assi principali sono:

$$M_x = M \cos \frac{\pi}{6} = 5,434 \times 10^5 \text{ kg cm}$$

$$M_y = M \sin \frac{\pi}{6} = 3,125 \times 10^5 \text{ kg cm.}$$

e perciò la tensione massima vale:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \left(\frac{5,434}{2746} + \frac{3,125}{268} \right) 10^5 = 1363 \text{ kg/cm}^2.$$

È, comunque, molto più economico ricorrere ad altro tipo di sezione.

PRIMA SOLUZIONE.

DUE UPN 260 AFFIANCATI. - Si accoppiano due profili UPN 260, formando una sezione a scatola. Per un solo profilo, si ha dalle tabelle (UNI 5680-65):

$$A_1 = 48,3 \text{ cm}^2$$

$$W_{1x} = 371 \text{ cm}^3$$

$$J_{1y} = 317 \text{ cm}^4$$

$$d = 6,63 \text{ cm.}$$

Si ottiene facilmente, per la sezione complessiva:

$$J_y = 2 [J_{1y} + A_1 d^2] = 4880 \text{ cm}^4$$

$$W_y = \frac{J_y}{B} = \frac{4880}{9} = 543 \text{ cm}^3.$$

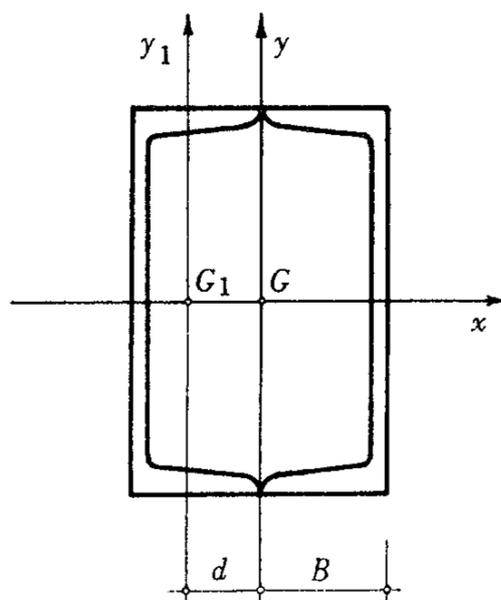


Fig. 45.3

Inoltre:

$$\begin{aligned} W_x &= 2 W_{1x} = 742 \text{ cm}^3 \\ A &= 2 A_1 = 96,6 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Allora:

$$\sigma_{\max} = \left(\frac{5,434}{742} + \frac{3,125}{543} \right) 10^5 = 1308 \text{ kg/cm}^2.$$

Si noti che, rispetto all'IPN 500, si è ottenuto un risparmio di materiale del

$$100 \frac{179 - 96,6}{179} = 46 \%.$$

SECONDA SOLUZIONE.

PROFILO HE 280 A. - Recentemente sono stati introdotti nuovi tipi di profili a facce parallele, unificati nel campo del Mercato Comune Europeo.

Tra quelli ad ali larghe (HE) il profilo HE 280 A ⁽¹⁾ ha le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned} A &= 97,3 \text{ cm}^2 \\ W_x &= 1010 \text{ cm}^3 \\ W_y &= 340 \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

Ne segue:

$$\sigma_{\max} = \left(\frac{5,434}{1010} + \frac{3,125}{340} \right) 10^5 = 1458 \text{ kg/cm}^2.$$

Tale tensione è ancora accettabile, perché supera il carico di sicurezza solo del 4%.

(1) UNI 5397-64. Vedi tabelle in appendice.

Il risparmio di materiale, rispetto all'IPN 500, è analogo a quello ottenuto con i due UPN 260:

$$100 \frac{179 - 97,3}{179} = 45,7 \%$$

46. - Determinare il massimo momento flettente sopportabile da una sezione rettangolare di legno di 6×12 cm, rinforzata da due piatti di acciaio di 60×4 mm.

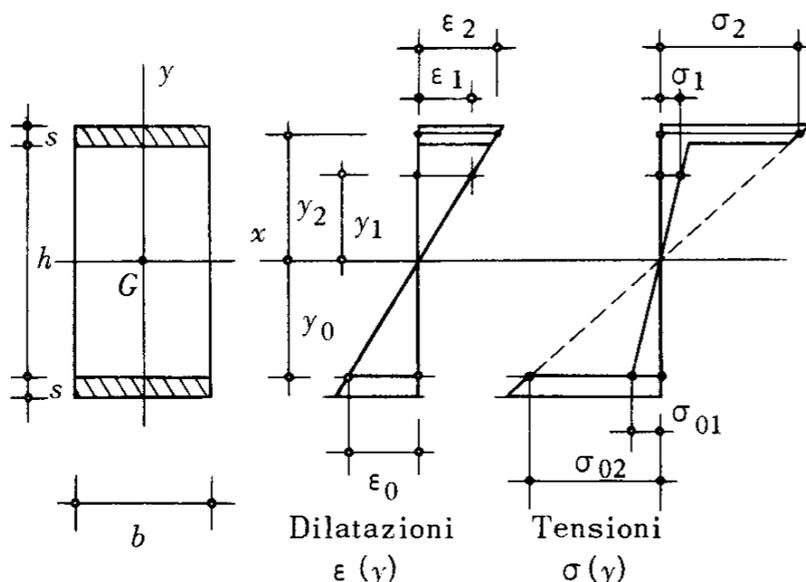


Fig. 46.1

Supponiamo che la flessione sia retta e l'asse di sollecitazione coincida con la mediana verticale y . Rimane valida la conservazione delle sezioni piane, nonché la legge di HOOKE per ciascuno dei materiali. Contraddistinguiamo con l'indice 1 tutte le caratteristiche geometriche e meccaniche del legno, col 2 quelle dell'acciaio.

Le tensioni nei due materiali, a parità di dilatazione, risultano diverse. Così, per le fibre (tra loro adiacenti) a quota y_0 , si ha:

$$\sigma_{01} = E_1 \varepsilon_0$$

$$\sigma_{02} = E_2 \varepsilon_0$$

e perciò:

$$\sigma_{02} = \frac{E_2}{E_1} \sigma_{01}$$

Si ha, in media:

$$\begin{aligned} E_1 &= 10^5 \text{ kg/cm}^2 \\ E_2 &= 2,1 \times 10^6 \text{ «} \end{aligned}$$

e quindi:

$$\sigma_{02} = 21 \cdot \sigma_{01}.$$

Il diagramma delle tensioni presenta due discontinuità, come è indicato anche nella fig. 46.1.

Le equazioni che risolvono il problema sono le seguenti:

$$\int \sigma \cdot dA = 0; \quad \int \sigma \cdot y \cdot dA = M$$

ove M è il momento flettente.

Separando i contributi delle aree di differenti materiali, si può scrivere:

$$\int_1 E_1 \cdot \varepsilon_1 \cdot dA + \int_2 E_2 \cdot \varepsilon_2 \cdot dA = 0$$

e

$$\int_1 E_1 \cdot \varepsilon_1 \cdot y_1 \cdot dA + \int_2 E_2 \cdot \varepsilon_2 \cdot y_2 \cdot dA = M$$

Indicando con K una costante (la stessa per i due materiali) si ha:

$$\varepsilon_1 = K \cdot y_1; \quad \varepsilon_2 = K \cdot y_2$$

e perciò:

$$KE_1 \left[\int_1 y_1 dA + \int_2 y_2 \left(\frac{E_2}{E_1} dA \right) \right] = 0$$

$$KE_1 \left[\int_1 y_1^2 dA + \int_2 y_2^2 \left(\frac{E_2}{E_1} dA \right) \right] = M$$

Valgono ancora le proprietà della flessione dei materiali omogenei: basta amplificare le aree di acciaio nel rapporto $\frac{E_2}{E_1}$. In altre parole, tutto va come se la sezione fosse tutta di legno; però le parti corrispondenti all'acciaio risultano amplificate nel rapporto $\frac{E_2}{E_1} = 21$.

In conclusione, si può studiare la sezione di legno avente la forma e le dimensioni indicate nella fig. 46.2.

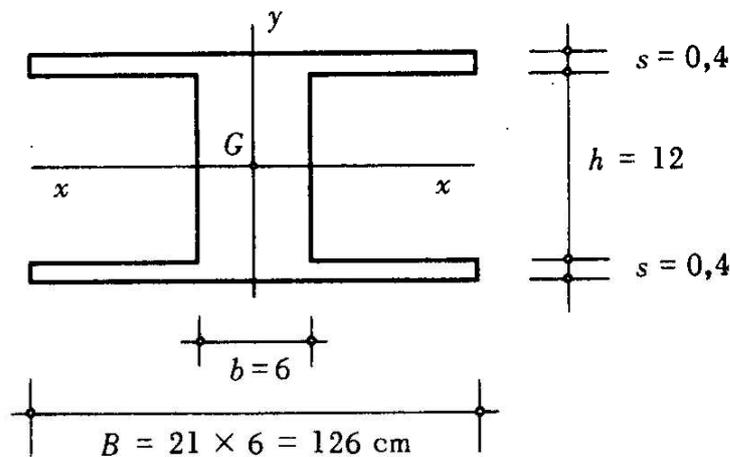


Fig. 46.2

L'asse neutro è ancora baricentrico. Le tensioni valgono ancora:

$$\sigma = \frac{M}{J_x} y$$

ove J_x è il momento d'inerzia, rispetto all'asse neutro, della sezione ridotta a legno.

Ovviamente, le vere tensioni nei piatti si ottengono moltiplicando per $\frac{E_2}{E_1} = 21$ i valori trovati con la formula suddetta. Si ha:

$$J_x = \frac{B(h + 2s)^3 - (B - b)h^3}{12} = 4740 \text{ cm}^4$$

$$W = \frac{J_x}{\frac{h}{2} + s} = 764 \text{ cm}^3$$

Per determinare il massimo momento ammissibile è necessario prefissare i carichi di sicurezza dei due materiali. Poniamo:

$$\begin{array}{ll} \text{per il legno} & K_1 = 60 \text{ kg/cm}^2 \\ \text{per l'acciaio} & K_2 = 1400 \text{ «} \end{array}$$

Se si vuole che l'acciaio lavori, al lembo estremo, proprio alla tensione K_2 , la massima tensione nel legno (che si verifica alla transizione tra i due materiali) vale:

$$\sigma_{01} = \frac{E_1}{E_2} K_2 \frac{h/2}{h/2 + s} = 62,5 \text{ kg/cm}^2$$

Se, invece, si fa lavorare al massimo il legno, nell'acciaio si ha:

$$\sigma_2 = \frac{E_2}{E_1} k_1 \frac{h/2 + s}{h/2} = 1340 \text{ kg/cm}^2$$

La seconda condizione è, ovviamente, la più restrittiva. La sezione può essere calcolata come se, ai lembi, vi fosse legno sollecitato alla tensione:

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{E_1}{E_2} \sigma_2 = \frac{1340}{21} = 64 \text{ kg/cm}^2$$

Il massimo momento sopportabile è allora:

$$M_{\max} = \bar{\sigma}_1 \bar{W} = 48800 \text{ kg cm} = 488 \text{ kg m.}$$

OSSERVAZIONE. - A titolo di confronto, calcoliamo il momento sopportabile dalla sola sezione di legno. Risulta, per essa:

$$\bar{W} = \frac{bh^2}{6} = 144 \text{ cm}^3$$

$$M_{\max} = K_1 \bar{W} = 60 \times 144 = 8640 \text{ kg cm} \cong 86 \text{ kg m.}$$

L'aggiunta dei rinforzi di acciaio comporta, perciò, un aumento di resistenza pari al

$$\frac{488 - 86}{86} 100 = 467 \text{ \%..}$$

* * *

47. - Una trave di cemento armato a due appoggi e sbalzo è percorsa da un carico concentrato verticale. Armare la sezione posta alla mezzaria della campata tra gli appoggi, in base alle dimensioni geometriche indicate nella fig. 47.1.

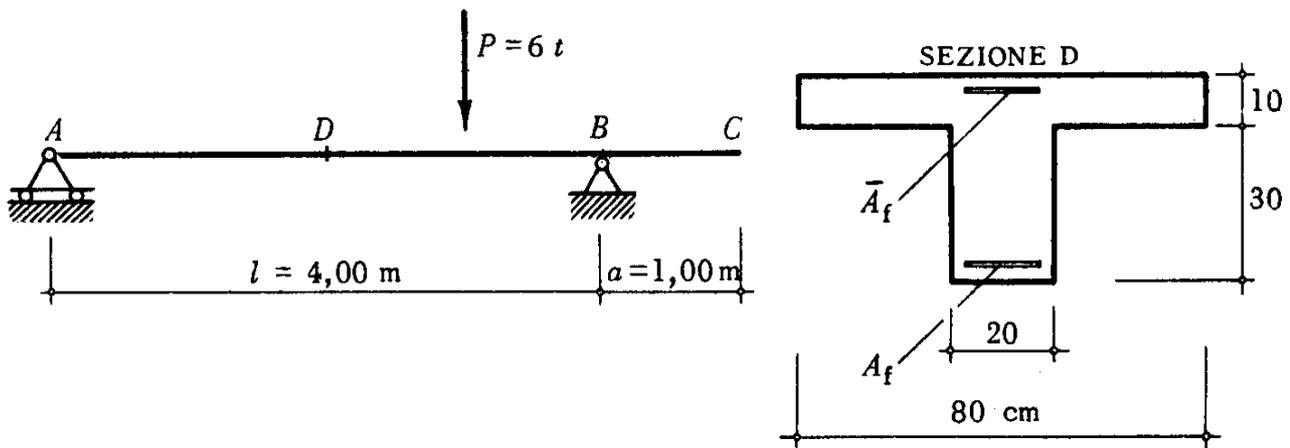


Fig. 47.1

La sezione *D*, da progettare, è soggetta ad inversioni di segno del momento flettente, in dipendenza delle varie posizioni che il carico può assumere lungo l'asse della trave.

CALCOLO DELLE SOLLECITAZIONI.

PESO PROPRIO. - Il peso unitario della trave risulta:

$$g = (0,1 \times 0,8 + 0,2 \times 0,3) 2500 = 350 \text{ kg/ml.}$$

Il diagramma del momento flettente che ne deriva è rappresentato nella fig. 47.2.

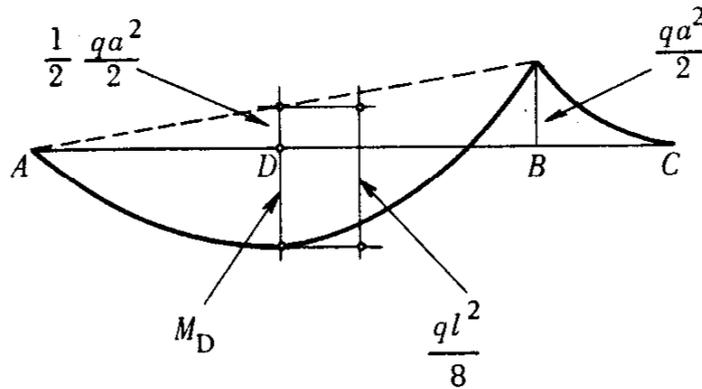


Fig. 47.2

Il momento in D risulta:

$$M_D = \frac{ql^2}{8} - \frac{qa^2}{4} = \frac{7}{64} ql^2 = +610 \text{ kgm.}$$

CARICO VIAGGIANTE.

Massimo momento positivo. - Si verifica quando il carico è sulla sezione D .

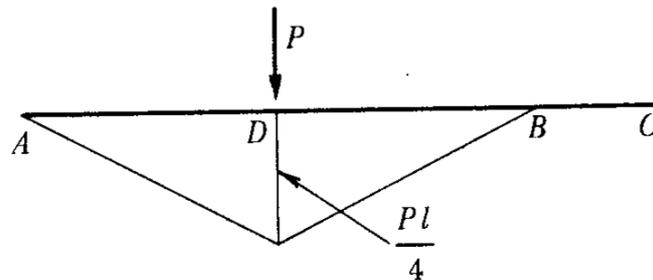


Fig. 47.3

Il momento in D risulta:

$$M_D = +\frac{Pl}{4} = \frac{4}{4} 6000 = +6000 \text{ kgm.}$$

Massimo momento negativo. - Si verifica quando il carico è all'estremo libero dello sbalzo (fig. 47.4).

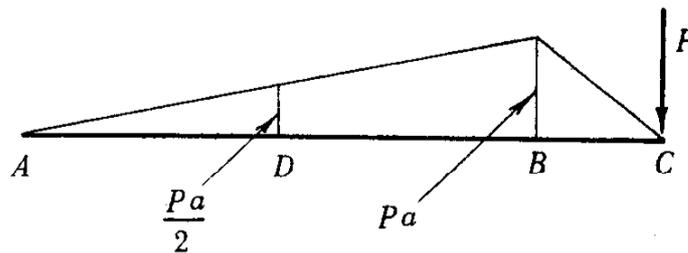


Fig. 47.4

Si ottiene:

$$M_D = -\frac{1}{2}Pa = -6000 \cdot \frac{1}{2} = -3000 \text{ kgm.}$$

SOLLECITAZIONI TOTALI. - Sovrapponendo gli effetti:

- massimo positivo: $M_1 = +6000 + 610 = +6610 \text{ kgm}$
- massimo negativo: $M_2 = -3000 + 610 = -2390 \text{ kgm.}$

VERIFICHE STATICHE DELLA SEZIONE.

Si tratta di armare una sezione già dimensionata (è il problema che più spesso si presenta nella pratica). È necessario fissare il carico di sicurezza dell'acciaio, in base al quale progettare le armature, e quello del calcestruzzo, per poter verificare l'adeguatezza delle dimensioni già assegnate.

Il calcestruzzo sia formato con 3 quintali di cemento 425 per metro cubo, ed abbia resistenza cubica a 28 giorni non inferiore a 225 kg/cm^2 .

L'acciaio sia del tipo Aq 50, con snervamento non inferiore a 3200 kg/cm^2 .

In base alle norme vigenti ⁽¹⁾ si possono assumere i seguenti cari-

⁽¹⁾ Si veda il regolamento già citato nell'es. 44.

chi di sicurezza:

$$\begin{array}{ll} \text{per il calcestruzzo} & K_c = 75 \text{ kg/cm}^2 \\ \text{per l'acciaio} & K_f = 1600 \text{ «} \end{array}$$

La sezione è soggetta ad inversioni di momento; sarà indispensabile una doppia armatura. Poiché il momento positivo (che tende le fibre inferiori) è circa 2,8 volte maggiore del negativo, disporremo, in linea di principio, un'armatura superiore \bar{A}_f pari a $\frac{1}{2,8} = 0,36$ della inferiore A_f .

Verifica a momento positivo: $M = 6610$ kgm. - Per maggior comodità nell'uso delle tabelle, poniamo:

$$\bar{A}_f = 0,375 A_f.$$

Poiché l'ala risulta compressa, progetteremo, come sezione rettangolare larga $b = 80$ cm, salvo verificare che l'asse neutro cada realmente entro la soletta.

L'altezza totale della sezione è 40 cm, perciò per quella utile si può assumere:

$$h = 37 \text{ cm.}$$

Si ha:

$$\sqrt{\frac{M}{b}} = \sqrt{\frac{6610}{0,80}} = 91$$

$$r = \frac{h}{\sqrt{\frac{M}{b}}} = \frac{37}{91} = 0,406.$$

Nelle tabelle per le sezioni doppiamente armate con $\bar{A}_f = 0,375 A_f$, si trova che a tale valore di r corrisponde, per $K_f = 1600 \text{ kg/cm}^2$:

$$\sigma_c = 50 \text{ kg/cm}^2.$$

Le dimensioni della sezione sono accettabili.

Si trova, anche:

$$t = 0,00167$$

e quindi si può progettare l'armatura metallica:

$$A_f = tb \sqrt{\frac{M}{b}} = 0,00167 \times 80 \times 91 = 12,2 \text{ cm}^2$$

$$\bar{A}_f = 0,375 A_f = 4,58 \text{ cm}^2.$$

Si adottano, in pratica:

$$8 \phi 14 \text{ inferiori, } A_f = 12,30 \text{ cm}^2$$

$$3 \phi 14 \text{ superiori, } \bar{A}_f = 4,62 \text{ cm}^2.$$

Posizione dell'asse neutro:

$$y = sh \quad \text{e} \quad s = 0,238 \quad (\text{dalle tabelle})$$

$$y = 0,238 \times 37 = 8,8 \text{ cm.}$$

L'asse neutro cade entro la soletta.

Verifica a momento negativo: $M = 2390 \text{ kgm.}$ - Tutte le dimensioni, comprese quelle delle armature, sono assegnate. Ci si può limitare ad eseguire una verifica.

La sezione si comporta come rettangolare, con larghezza $b = 20 \text{ cm}$ ed altezza utile $h = 37 \text{ cm}$.

L'armatura tesa è

$$\bar{A}_f = 4,62 \text{ cm}^2$$

e quella compressa

$$A_f = 12,30 \text{ cm}^2.$$

Posizione dell'asse neutro:

$$y = \frac{n(\bar{A}_f + A_f)}{b} \left[-1 + \sqrt{1 + 2b \frac{\bar{A}_f h + A_f h'}{n(\bar{A}_f + A_f)^2}} \right] = 8,25 \text{ cm.}$$

Il momento d'inerzia baricentrico della sezione reagente è:

$$J_{ci} = \frac{by^3}{3} + n\bar{A}_f(h-y)^2 + nA_f(y-h)^2 =$$

$$= \frac{20}{3} \times 8,25^3 + 46,2 \times 28,75^2 + 123 \times 5,25^2 = 45\,400 \text{ cm}^4$$

$$\sigma_c = \frac{M \cdot y}{J_{ci}} = \frac{239\,000}{45\,400} 8,25 = 43,4 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\sigma_f = n\sigma_c \frac{h-y}{y} = 434 \frac{28,75}{8,25} = 1510 \text{ kg/cm}^2.$$

La resistenza è largamente assicurata.