CAPITOLO V

LO SFORZO ASSIALE

Nella generica sezione retta di una trave, la sollecitazione di semplice sforzo assiale produce esclusivamente una distribuzione uniforme di tensioni normali. Il loro modulo, detta A l'area della sezione e N l'intensità dello sforzo assiale, risulta:

$$\sigma = \frac{N}{A}.$$

La sezione retta è priva di tensioni tangenziali, pertanto l'asse della trave è direzione principale di tensione (e di dilatazione).

Un tronco elementare, compreso tra due sezioni rette poste a distanza mutua infinitesima, si deforma in maniera che dette sezioni compiono una pura traslazione relativa assiale. Le fibre longitudinali subiscono perciò una dilatazione uniforme:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA}$$

ove E è il modulo di elasticità longitudinale (di YOUNG).

Le fibre trasversali, invece, subiscono la dilatazione:

$$\bar{\varepsilon} = -\frac{\nu\sigma}{E} = -\frac{\nu N}{EA}$$

avendo indicato con $\nu = \frac{1}{m}$ il modulo di POISSON.

La verifica di resistenza (prescindendo dal pericolo di instabilità per sforzi di compressione) può farsi limitando la massima tensione al carico di sicurezza del materiale:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leqslant k.$$

* * *

38. - Studiare il regime statico di una trave prismatica doppiamente incastrata, soggetta ad un salto termico uniforme.

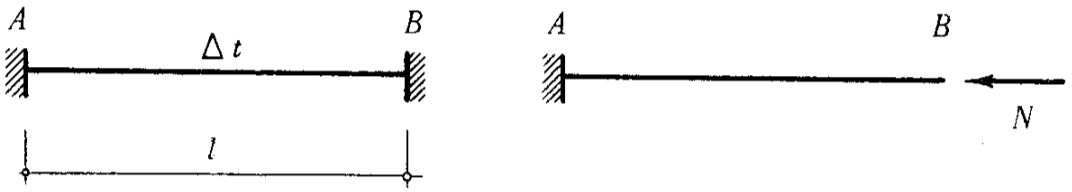


Fig. 38.1

SOLUZIONE IPERSTATICA.

La trave è tre volte iperstatica: in linea di principio, il problema non è risolubile con le semplici equazioni della statica dei corpi rigidi.

Per scrivere le necessarie equazioni di elasticità, riconduciamoci ad una struttura principale isostatica, ad esempio liberando completamente la sezione di estremità B dall'incastro. Non appena si svincola, è necessario mettere in evidenza l'azione meccanica esplicata del vincolo, cioè la sua reazione. Essa ha in generale tre componenti (l'incastro è vincolo triplo); è però agevole riconoscere che l'unica diversa dallo zero è quella assiale N.

Supponiamo, infatti, che il salto termico Δt, rispetto alla tempera-

tura di costruzione sia un riscaldamento, uniforme lungo tutta la trave. Nella struttura principale a mensola, esso provoca un semplice allungamento dell'asse. La sezione B trasla orizzontalmente rispetto alla A; poiché questa è fissata dall'incastro, il moto assoluto di B è ancora una traslazione orizzontale verso destra.

L'ufficio della reazione è quello di riportare la sezione B nella posizione iniziale; e per far ciò deve, da sola, farla traslare verso sinistra. Tale tipo di deformazione è compatibile solo con una reazione assiale.

Oppure, si può giungere alla medesima conclusione osservando che il problema è simmetrico rispetto all'asse della trave.

Dovrà rispettare tale carattere di simmetria anche la reazione di B; e ciò è possibile solo se sono nulli il taglio ed il momento d'incastro.

Notiamo, ulteriormente, che la struttura principale, in quanto isostatica, è in equilibrio per ogni arbitrario valore di N. Questo andrà allora determinato con una condizione di congruenza, che esprima il rispetto delle condizioni geometriche imposte dall'incastro B.

È necessario imporre che la lunghezza dell'asse della trave resti quella iniziale (o, che è equivalente, che la sezione B non subisca spostamento assiale). Ciò si traduce nell'annullarsi della somma algebrica delle variazioni di lunghezza imputabili alle varie cause agenti sulla trave.

Siano:

α il coefficiente di dilatazione termica lineare del materiale costituente la trave, espresso in $°C^{-1}$;

E il modulo di elasticità longitudinale del materiale;

A l'area della sezione retta della trave;

Δt il salto termico, misurato in °C.

L'allungamento dell'asse prodotto dal riscaldamento Δt vale:

$$\alpha \Delta t \, l \, .$$

Lo sforzo N deve risultare allora di compressione, in maniera da

accorciare la trave di

$$\frac{Nl}{EA} .$$

La condizione di congruenza si scrive:

$$\alpha \Delta t \, l - \frac{Nl}{EA} = 0$$

da cui

$$N = \alpha \Delta t \, EA.$$

La tensione (uniforme) agente su ogni elemento di sezione trasversale risulta:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \alpha \Delta t \, E$$

e, come lo sforzo assiale, riesce indipendente dalla lunghezza della trave.

OSSERVAZIONE. - Agli stessi risultati si può giungere rapidamente per altra via.

Sia il salto termico che la reazione N provocano dilatazioni uniformi lungo l'asse. Annullare la variazione di lunghezza della trave equivale ad annullare la dilatazione complessiva.

La dilatazione ε prodotta dalla reazione N deve allora valere:

$$\varepsilon = \alpha \Delta t.$$

Per la legge di HOOKE:

$$\sigma = E\varepsilon = \alpha \Delta t \, E$$

e quindi:

$$N = \sigma A = \alpha \Delta t \, EA.$$

VERIFICA DI RESISTENZA. - Trattandosi di stato di tensione monoassiale, è sufficiente limitare la tensione massima al carico di sicurezza a compressione del materiale (non ci occupiamo qui dell'eventuale pericolo di instabilità dell'equilibrio, di cui si dirà più oltre).

Supponiamo di costruire la trave con acciaio per carpenteria, ad esempio Fe 50 UNI 5334/64, avente coefficiente di dilatazione termica

$$\alpha = 1{,}2 \times 10^{-5} \ {}^{\circ}C^{-1}$$

e le seguenti caratteristiche meccaniche:

tensione di snervamento	R_s	$= 3200$	kg/cm^2
tensione di rottura	R_m	$= 5000$	«
modulo di elasticità	E	$= 2{,}1 \times 10^6$	«

Le suddette caratteristiche sono rilevate mediante prova a trazione semplice. Riportiamo anche il diagramma $\sigma - \varepsilon$, limitato alla parte più interessante.

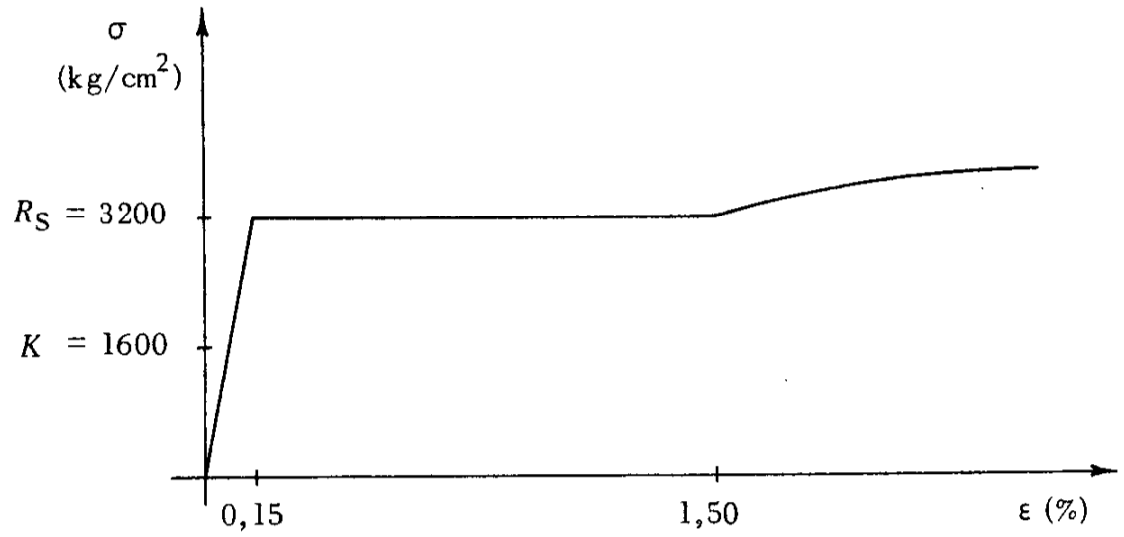


Fig. 38.2

Il tratto iniziale è approssimativamente rettilineo (legge di HOOKE), lo snervamento inizia alla tensione di 3200 kg/cm^2, a cui corrisponde la dilatazione:

$$\varepsilon_s = \frac{R_s}{E} = \frac{3200}{2{,}1 \times 10^6} \cong 0{,}15 \ \%.$$

La tensione si mantiene, poi, all'incirca costante, con oscillazioni non indicate per semplicità in diagramma, fino a dilatazioni dell'ordine dell'1,50 %. Poi inizia il campo delle grandi deformazioni, fino a giungere alla rottura.

Nel caso che la sollecitazione sia di compressione, la prima parte del diagramma resta invariata. Non è però possibile giungere ad una vera e propria rottura, perché il materiale si deforma plasticamente.

Il carico di sicurezza del materiale è al massimo:

$$k = \frac{R_s}{2} = 1600 \text{ kg/cm}^2,$$

Il massimo salto termico che la trave può sopportare in condizioni di sicurezza si ottiene ponendo k al posto di σ nella formula che dà le tensioni:

$$k = \alpha \Delta t E$$

$$\Delta t_{max} = \frac{k}{E \alpha} = \frac{1{,}6 \times 10^3}{2{,}1 \times 10^6 \times 1{,}2 \times 10^{-5}} = 63{,}5 \text{ °C}.$$

Lo snervamento si raggiunge per un salto termico:

$$\Delta t_s = \frac{R_s}{E \alpha} = 2 \Delta t_{max} = 127 \text{ °C}.$$

Questi risultati sono validi nell'ipotesi che le caratteristiche meccaniche del materiale non varino con la temperatura. Ciò è sufficientemente accettabile fino a temperature dell'ordine di 200 °C (a rigore, R_m aumenta, R_s diminuisce leggermente).

Si noti che, ancora in tale ipotesi, la fine dello snervamento (e inizio delle grandi deformazioni) si avrebbe per $\varepsilon = 1{,}5\ \% = 1{,}5 \times 10^{-2}$, cioè:

$$\alpha \Delta t = 1{,}5 \times 10^{-2}$$

$$\Delta t = \frac{1{,}5 \times 10^{-2}}{1{,}2 \times 10^{-5}} = 1250 \text{ °C}$$

temperatura alla quale l'acciaio comincia a fondere, e quindi priva di significato sotto l'aspetto statico.

Ad analoghe conclusioni si giunge se la trave è raffreddata, invece che riscaldata. La fine dello snervamento si raggiungerebbe (con α indipendente dalla temperatura) per $\Delta t = -1250\ °C$; se la temperatura di costruzione è $+20\ °C$, ciò corrisponde ad una temperatura finale di

$$-1250 + 20 = -1230\ °C$$

fisicamente irraggiungibile.

In sostanza, con un salto termico uniforme è impossibile rompere una trave d'acciaio, a causa della sua duttilità.

La rottura potrebbe, in teoria, prodursi solo se il materiale fosse fragile (vetro, ghisa).

* * *

39. - Studiare il regime statico di un sistema di bielle, collegate da un corpo rigido e sollecitate da una forza diretta secondo l'asse di simmetria del complesso.

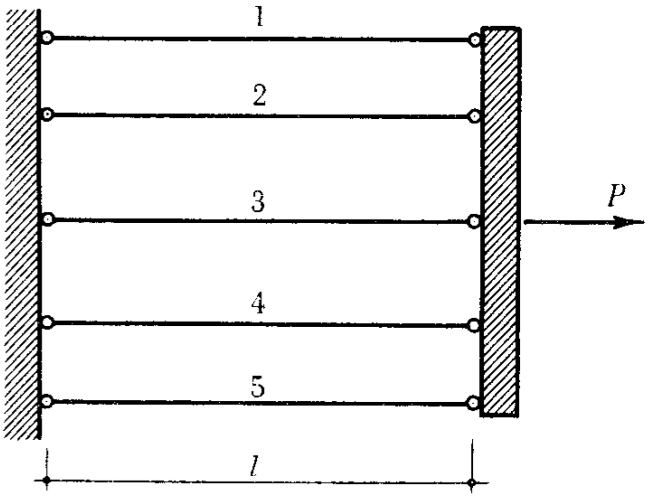


Fig. 39.1

Le cinque bielle, di ugual lunghezza, sono collegate da un blocco indeformabile, a cui è applicata la forza P. Si suppone, inoltre, che le

aste poste simmetricamente rispetto a quella centrale abbiano la medesima sezione resistente A_i. In questa maniera, l'asse dell'asta 3 è di simmetria per la struttura e per il carico esterno.

La struttura è labile. Tuttavia, la particolare disposizione dei vincoli e del carico rende il problema staticamente possibile, ma indeterminato.

PRIMA SOLUZIONE: METODO DELLE FORZE.

Svincoliamo le aste dal blocco rigido, mettendo in evidenza le azioni mutue (assiali per le bielle). Le azioni tra loro diverse, per ragioni di simmetria, sono solo tre. L'equilibrio di corpo rigido del blocco svincolato (fig. 39.2) fornisce una condizione statica:

$$P - 2F_1 - 2F_2 - F_3 = 0.$$

Ne segue che le incognite staticamente indeterminate si riducono a due.

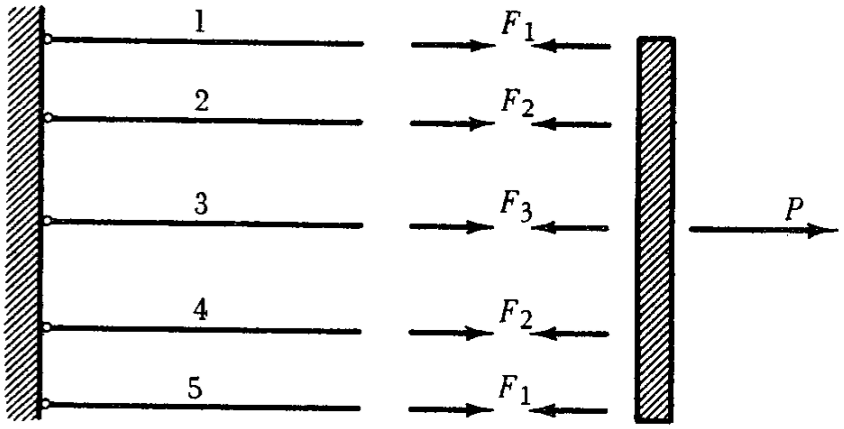


Fig. 39.2

È allora necessario imporre due condizioni di congruenza. In seguito alla deformazione delle bielle il moto del corpo rigido, per simmetria, è una pura traslazione orizzontale: tutte le bielle devono subire il medesimo allungamento. Si ha allora:

$$\frac{F_1 l}{EA_1} = \frac{F_2 l}{EA_2} = \frac{F_3 l}{EA_3} .$$

Accoppiando queste due equazioni con quella d'equilibrio, è possibile determinare le tre incognite:

$$F_1 = P \frac{A_1}{2A_1 + 2A_2 + A_3}$$

$$F_2 = P \frac{A_2}{2A_1 + 2A_2 + A_3}$$

$$F_3 = P \frac{A_3}{2A_1 + 2A_2 + A_3} .$$

In forma più raccolta:

$$F_i = P \frac{A_i}{\Sigma A_i} .$$

La forza esterna si ripartisce proporzionalmente alle rigidezze assiali delle singole aste.

SECONDA SOLUZIONE: METODO DELLE DEFORMAZIONI.

Si è già riconosciuto che, per ragioni di simmetria, tutte le bielle subiscono il medesimo allungamento δ. Scegliamo proprio quest'ultimo come incognita.

Per la biella generica, il legame tra allungamento e sforzo assiale risulta:

$$\delta = \frac{F_i l}{EA_i}$$

da cui:

$$F_i = \frac{EA_i}{l} \delta .$$

A questo punto, basta scrivere l'equazione di equilibrio del corpo rigido per ottenere l'unica equazione che determina l'incognita δ:

$$P - \Sigma F_i = 0$$

cioè

$$P - \delta \Sigma \frac{EA_i}{l} = 0$$

da cui

$$\delta = \frac{Pl}{E \Sigma A_i} .$$

Infine:

$$F_i = EA_i \frac{\delta}{l} = P \frac{A_i}{\Sigma A_i} .$$

OSSERVAZIONE. - Il metodo delle forze è forse il più naturale e immediato; ha però l'inconveniente di tradursi, analiticamente, in un sistema di tante equazioni quante sono le incognite statiche.

Esso equivale, fisicamente, a ricercare l'unica soluzione congruente tra infinite equilibrate a priori.

Il metodo delle deformazioni conduce invece ad una sola equazione in una sola incognita; e ciò indipendentemente dal numero di aste di cui la struttura è composta. Esso è tanto più conveniente quanto maggiore è il grado di indeterminazione statica. Equivale, fisicamente, alla ricerca dell'unica situazione equilibrata fra infinite a priori congruenti.

Naturalmente, con l'uno o l'altro dei due metodi si individua l'unica configurazione, contemporaneamente equilibrata e congruente, assunta in realtà dalla struttura in seguito all'azione del carico esterno.

TERZA SOLUZIONE.

Il moto del blocco rigido si riduce alla traslazione orizzontale δ (verso destra).

L'insieme delle bielle si comporta come una trave, composta solo di 5 fibre, soggetta a sforzo assiale.

L'area complessiva della sezione retta è

$$A = \Sigma A_i$$

La tensione è uniforme, e vale:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{P}{\Sigma A_i}$$

Lo sforzo assiale in ciascuna biella, infine, ha il modulo:

$$F_i = \sigma A_i = P \frac{A_i}{\Sigma A_i} .$$

Come è chiaro, l'indeformabilità del blocco che collega le bielle equivale all'ipotesi della conservazione delle sezioni piane per la determinazione dello stato tensionale nella trave sollecitata assialmente.

* * *

40. - Studiare il regime statico del cavalletto composto da tre aste della fig. 40.1, caricato una volta in modo simmetrico, l'altra antisimmetrico.

CARICO SIMMETRICO. - Le aste inclinate abbiano la stessa sezione resistente A; quella verticale, la sezione A_1. Per mantenere la simmetria del problema, conviene svincolare come indicato nella fig. 40.1. L'asta verticale è sollecitata dalla forza X, a priori incognita; al cavalletto ADC compete la forza residua $P - X$. Poiché il cavalletto ADC è isostatico, e l'asta BD labile ma staticamente determinata, l'incognita X non è calcolabile con condizioni d'equilibrio. Ciò è in armonia col fatto che la struttura inizialmente assegnata è una volta iperstatica. Poiché la struttura principale è stata ottenuta sciogliendo la solidarietà in D, la condizione che determina l'incognita X consiste nell'annullare lo spostamento relativo della sezione D'' rispetto al nodo D'.

Iniziamo con il calcolo dei movimenti di D''. Per simmetria, la sezione di base B dell'asta BD'' è immobile. Allora lo spostamento assoluto di D'', che è verticale, coincide col moto relativo di D'' rispetto a B.

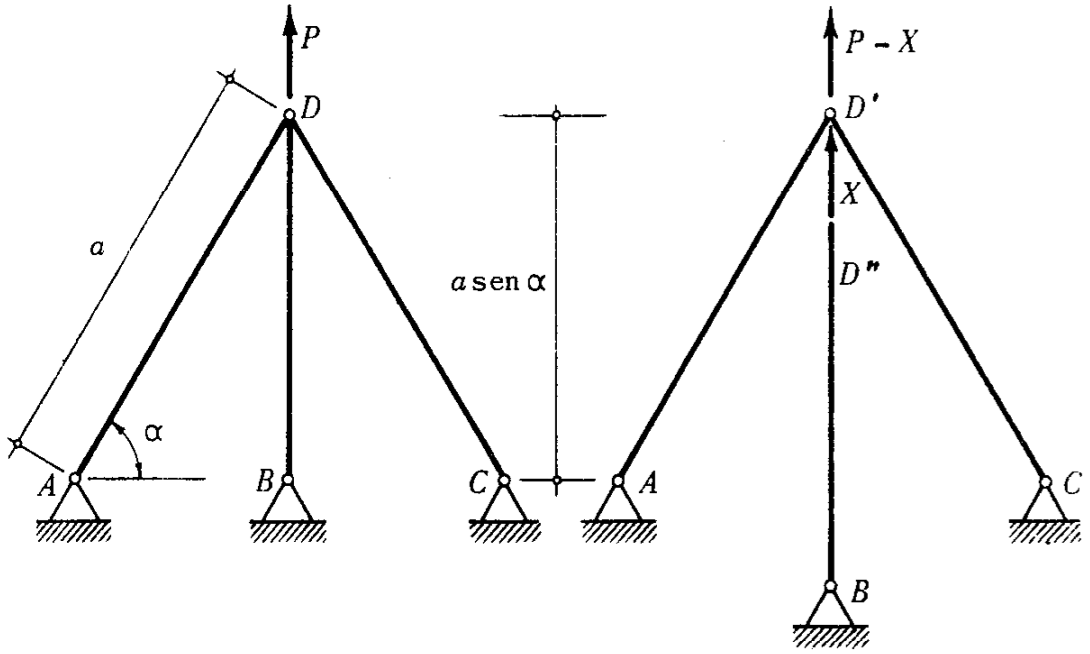


Fig. 40.1

Tale moto relativo è dovuto alla deformabilità assiale; l'innalzamento di D'' vale allora:

$$\eta_{D''} = \frac{X\, a \operatorname{sen}\alpha}{EA_1}.$$

Invece, il moto di D' dipende, oltre che dal suo spostamento rispetto alle imposte A e C, anche dai moti permessi dai rispettivi vincoli a queste due sezioni.

Tuttavia, la simmetria permette un calcolo rapido per via geometrica di detto spostamento, che risulta ancora verticale.

Tutti i movimenti, derivanti dalla deformabilità della struttura, sono da ritenersi infinitesimi rispetto alle sue dimensioni originarie. La geometria della struttura resta, per ipotesi, invariata, e quindi:

$$\eta_{D'} = \frac{\Delta a}{\operatorname{sen}\alpha}.$$

Inoltre:

$$\Delta a = \frac{N \cdot a}{EA} \qquad \text{e} \qquad N = \frac{P - X}{2 \operatorname{sen}\alpha};$$

perciò:

$$\eta_{D'} = \frac{(P - X)\, a}{2\, EA \operatorname{sen}^2\alpha}.$$

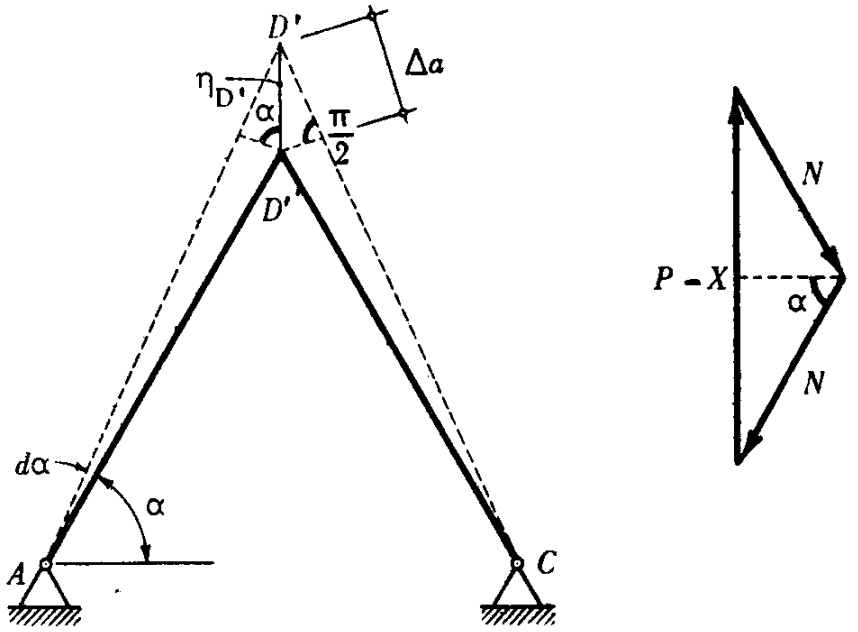


Fig. 40.2

Allo stesso risultato si può giungere con un ragionamento leggermente diverso.

Supponiamo di sciogliere provvisoriamente la solidarietà, in D', tra le due aste, mantenendo immobili le sezioni d'imposta A e C. Sotto l'azione dello sforzo assiale $N = \dfrac{P-X}{2 \operatorname{sen} \alpha}$ le aste si allungano di $\Delta a = \dfrac{Na}{EA}$.

In questa maniera, le sezioni all'estremo superiore vengono ad allontanarsi. Per ripristinare la congruenza, imposta dalla cerniera D, è sufficiente far compiere, a ciascuna asta, una rotazione $d\alpha$ di corpo rigido intorno alla cerniera di base (fig. 40.3). Geometricamente si ottiene subito:

$$\eta_{D'} = \frac{\Delta a}{\operatorname{sen} \alpha}$$

vale a dire lo stesso risultato già ottenuto prima.

Alla fine, la condizione di congruenza si scrive:

$$\eta_{D'} = \eta_{D''}$$

ed esplicitamente:

$$\frac{(P-X)\, a}{2\, EA \operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{X a \operatorname{sen} \alpha}{EA_1}$$

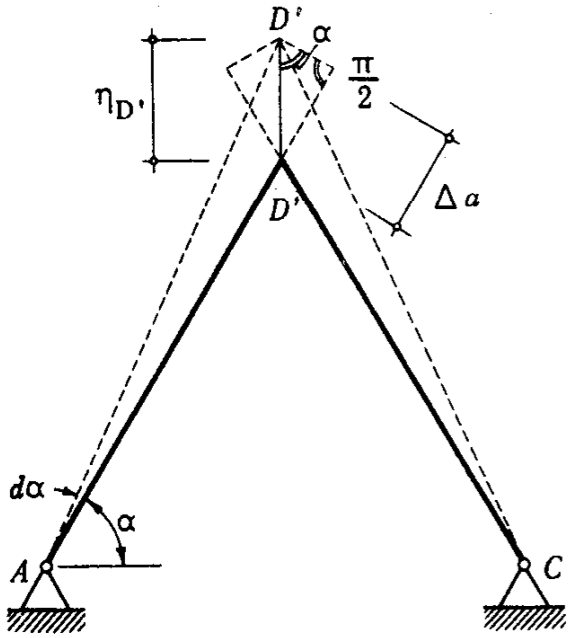


Fig. 40.3

da cui:

$$X = \frac{P}{1 + 2\frac{A}{A_1}\,\mathrm{sen}^3\,\alpha}.$$

CASI PARTICOLARI.

a) Se $\frac{A}{A_1} \longrightarrow 0$, cioè le aste inclinate hanno rigidezza evanescente rispetto a quella verticale, risulta:

$$X = P.$$

Com'è naturale, la forza esterna è sopportata dalla sola biella *BD*.

b) Se $\frac{A}{A_1} \longrightarrow \infty$, invece, risulta:

$$X = 0.$$

Questa volta è l'asta verticale ad avere rigidezza evanescente; ne segue che essa può deformarsi con carico al limite nullo, e la forza *P* è sopportata dalle sole aste inclinate.

CARICO ANTISIMMETRICO. - Svincoliamo ancora in D, separando l'asta verticale dal complesso delle altre due. L'eventuale reazione mutua può, ancora, avere solo direzione verticale, affinché l'asta BD resti in quiete. Come è naturale, il suo verso è legato al moto relativo, tra D' e D'', prodotto nella struttura principale dal carico esterno P.

La forza P carica unicamente il cavalletto, il cui nodo D' subisce, per antisimmetria, solo uno spostamento orizzontale:

$$\xi = \frac{\Delta a}{\cos \alpha} = \frac{Na}{EA \cos \alpha}$$

ove

$$N = \frac{P}{2 \cos \alpha}$$

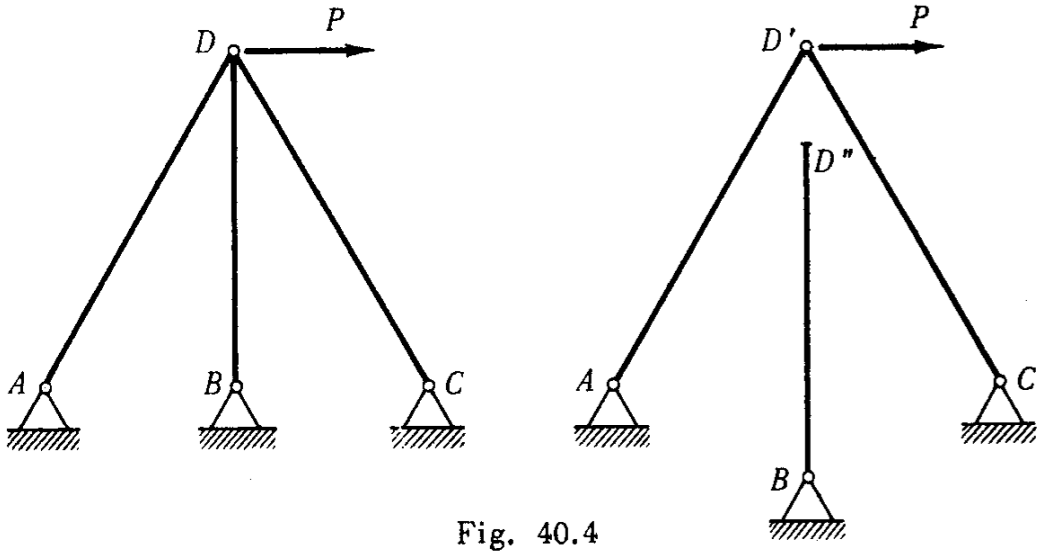
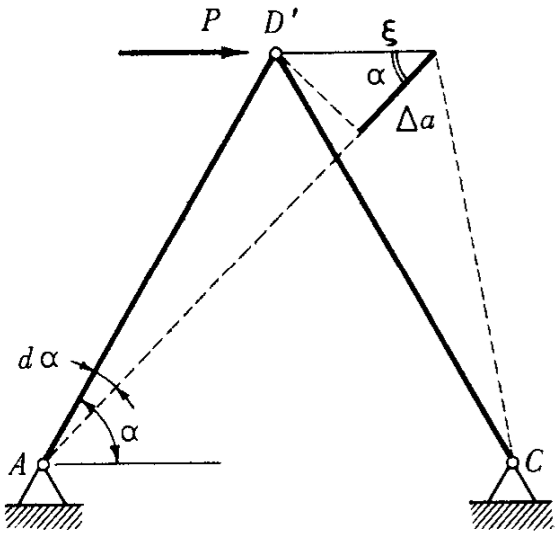


Fig. 40.4



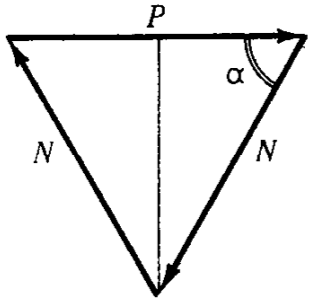


Fig. 40.5

e quindi:

$$\xi = \frac{Pa}{2\,EA\,\cos^2\alpha}.$$

Ciò che importa rilevare è che D' non ha componenti verticali di spostamento. Pertanto, lo spostamento verticale relativo tra D' e D'', per effetto di P, è nullo; e tale risulta anche la reazione mutua.

A tale risultato si giunge anche osservando che un'eventuale reazione, verticale per l'equilibrio dell'asta BD, non rispetta il carattere di antisimmetria, quindi non può esistere.

La biella verticale ruota rigidamente intorno alla cerniera di base, in modo che il suo estremo superiore rimanga connesso al cavalletto. La sua rotazione φ risulta:

$$\varphi = \frac{\xi}{a\,\operatorname{sen}\alpha} = \frac{P}{2\,EA\,\operatorname{sen}\alpha\,\cos^2\alpha}.$$

Il problema è, in conclusione, staticamente determinato, anche se iperstatico.

CASO NUMERICO. - Si voglia progettare la struttura caricata simmetricamente in tondo di acciaio, avente il carico di sicurezza:

$$k = 1400\ \text{kg/cm}^2.$$

Sia, inoltre:

$$P = 50\ \text{t} \qquad a = 3\ \text{m} \qquad \alpha = 60^\circ.$$

Il problema è iperstatico, quindi la soluzione dipende dal rapporto delle sezioni resistenti delle varie aste.

Supponiamo, allora, che risulti:

$$A = 1{,}5\,A_1.$$

Ricordando che $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}866$, si trova:

$$X = \frac{P}{1 + 2\,\dfrac{A}{A_1}\operatorname{sen}^3\alpha} = \frac{50}{1 + 2 \times 1{,}5 \times 0{,}65} = 16{,}9\ \text{t}.$$

Lo sforzo assiale nelle aste inclinate è:

$$N = \frac{P - X}{2 \operatorname{sen} \alpha} = \frac{33,1}{2 \times 0,866} = 19,1 \text{ t}$$

Le tensioni massime valgono rispettivamente:

- asta verticale $\sigma = \dfrac{X}{A_1} = \dfrac{16,9}{A_1}$

- aste inclinate $\sigma = \dfrac{P - X}{2 \operatorname{sen} \alpha \; A} = \dfrac{12,7}{A_1}$.

L'asta più sollecitata è quella verticale; imponendo:

$$\frac{X}{A_1} = K$$

si trova:

$$A_1 = \frac{X}{K} = \frac{16\,900}{1400} = 12,1 \text{ cm}^2.$$

È necessario un tondo ϕ 40, di area 12,57 cm^2.

Per le altre due aste:

$$A = 1,5 \, A_1 = 18,6 \text{ cm}^2,$$

È necessario un tondo ϕ 49 mm.

* * *

41. - Risolvere il cavalletto iperstatico della fig. 41.1.

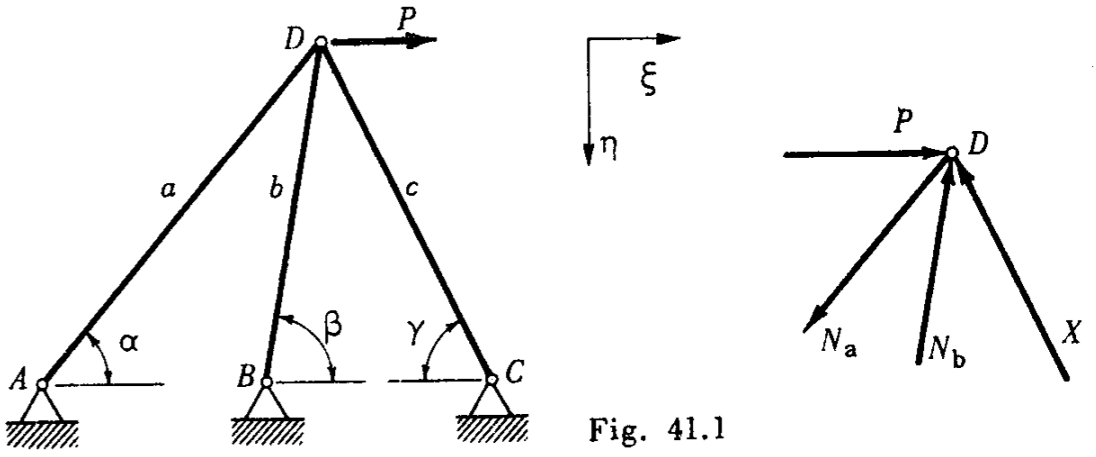


Fig. 41.1

Contrariamente a ciò che accadeva nel precedente esercizio, non vi sono particolari simmetrie che facilitino la risoluzione.

Sarà perciò necessario procedere nella maniera più generale. Inoltre, essendo la struttura una volta iperstatica, essa risulterà anche una volta staticamente indeterminata.

Scegliamo come incognita X lo sforzo in una qualsiasi delle aste, ad esempio la CD, che supporremo compressa. Di conseguenza, l'equilibrio della cerniera D permette di calcolare gli altri sforzi in funzione di P e X.

È opportuno eseguire la valutazione per via analitica, per ottenere espressioni facilmente adoperabili nel seguito. Allo scopo, basta scrivere due equazioni di equilibrio alla traslazione.

Equilibrio alla traslazione orizzontale. - Con i versi prefissati (ad arbitrio):

$$P - X\cos\gamma + N_b\cos\beta - N_a\cos\alpha = 0.$$

Equilibrio alla traslazione verticale.

$$X\,\mathrm{sen}\,\gamma + N_b\,\mathrm{sen}\,\beta - N_a\,\mathrm{sen}\,\alpha = 0.$$

La soluzione risulta:

$$N_a = \frac{X\,\mathrm{sen}\,(\beta+\gamma) - P}{\mathrm{sen}\,(\alpha-\beta)}; \qquad N_b = \frac{X\,\mathrm{sen}\,(\alpha+\gamma) - P}{\mathrm{sen}\,(\alpha-\beta)}.$$

La condizione di congruenza necessaria per risolvere il problema potrà essere determinata in base alla scelta della struttura principale.

Sciogliamo completamente la solidarietà in D, separando le tre bielle, che divengono così labili. Le condizioni che determinano il problema derivano dall'annullare gli spostamenti relativi delle loro estremità, temporaneamente separate, ma in realtà solidali (fig. 41.2).

La direzione dello spostamento di D è, a priori, incognita. È allora necessario scegliere due direzioni di riferimento, ed annullare separatamente le componenti degli spostamenti relativi.

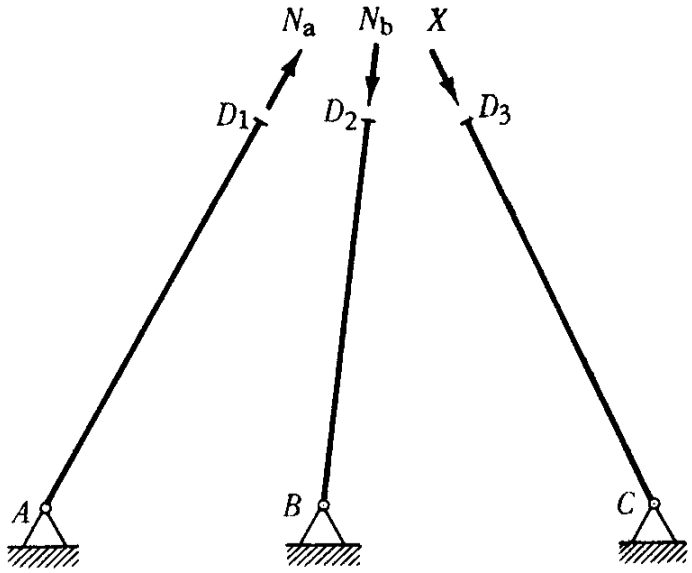


Fig. 41.2

Come direzioni, scegliamo la verticale e l'orizzontale, orientate come in fig. 41.1.

In forma simbolica, le equazioni si scrivono:

$$\xi_{D_1} = \xi_{D_2} = \xi_{D_3}$$

$$\eta_{D_1} = \eta_{D_2} = \eta_{D_3}.$$

Può sembrare strano che il problema, pur presentando una sola incognita staticamente indeterminata, necessiti di quattro equazioni per la risoluzione. Ma non si dimentichi che la struttura principale è tre volte labile, pertanto risulta incognita anche la rotazione di corpo rigido concessa, a ciascuna biella, intorno alla rispettiva cerniera d'imposta. Le quattro equazioni determinano l'incognita statica (X) e le tre incognite cinematiche (rotazioni rigide delle bielle).

A questo punto, è sufficiente calcolare esplicitamente le varie componenti di moto.

Notiamo che tutti i movimenti sono di natura elastica, pertanto possono trattarsi come infinitesimi rispetto alle dimensioni geometriche iniziali. Essi avvengono contemporaneamente all'atto dell'applicazione dei carichi: tuttavia, valendosi di un noto principio della Meccanica, si

può ragionare come se si manifestassero indipendentemente uno dall'altro, in istanti successivi.

In ultima analisi, a tutti i movimenti di carattere elastico è applicabile la cinematica dei moti elementari.

Fissiamo la nostra attenzione sulla biella AD; per le altre valgono risultati analoghi.

I moti della sezione estrema D_1 sono esprimibili, in funzione di quelli di A, come somma di due effetti:

a) componenti del moto assoluto di A;

b) componenti del moto relativo di D_1 rispetto ad A.

Indichiamo con un semplice indice i moti assoluti, con doppio indice quelli relativi.

Denominiamo, inoltre, φ_A la rotazione della sezione d'imposta A, e supponiamola positiva se oraria. Si ottiene quanto segue:

a) **Effetto del moto di** A:

$$\xi'_{D_1} = \xi_A + \varphi_A \; y_{DA}$$
$$\eta'_{D_1} = \eta_A + \varphi_A \; x_{DA} .$$

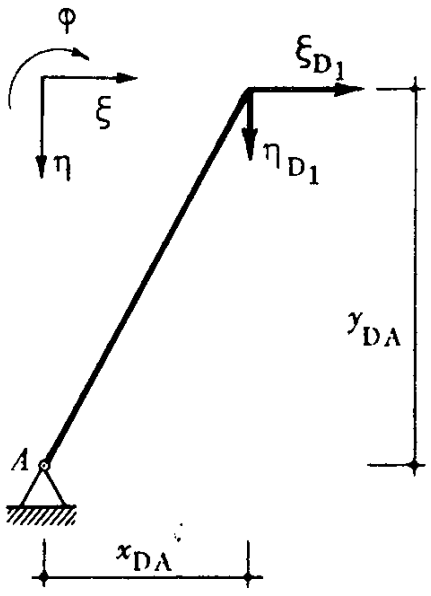


Fig. 41.3

Ma si ha pure, per le condizioni imposte dal vincolo alla sezione A

$$\xi_A = \eta_A = 0,$$

e inoltre:

$$y_{DA} = a \cdot \operatorname{sen}\alpha; \qquad x_{DA} = a \cdot \cos\alpha.$$

Allora:

$$\xi'_{D_1} = \varphi_A \cdot a \operatorname{sen}\alpha$$

$$\eta'_{D_1} = \varphi_A \cdot a \cos\alpha.$$

b) **Effetto del moto relativo.**

$$\xi''_{D_1} = \xi_{DA}$$

$$\eta''_{D_1} = \eta_{DA}.$$

Il moto relativo è dovuto alla sola deformabilità elastica, che si estrinseca in un allungamento dell'asta:

$$\Delta a = \frac{N_a \cdot a}{EA_1}.$$

Allora:

$$\xi''_{D_1} = + \frac{N_a \cdot a}{EA_1} \cos\alpha$$

$$\eta''_{D_1} = - \frac{N_a \cdot a}{EA_1} \operatorname{sen}\alpha$$

c) **In totale:**

$$\xi_{D_1} = \varphi_A \cdot a \operatorname{sen}\alpha + \frac{N_a \cdot a}{EA_1} \cos\alpha$$

$$\eta_{D_1} = \varphi_A \cdot a \cos\alpha - \frac{N_a \cdot a}{EA_1} \operatorname{sen}\alpha.$$

In maniera perfettamente analoga si procede per le altre aste, trovando:

$$\xi_{D_2} = \varphi_B \cdot b \cdot \operatorname{sen}\beta - \frac{N_B \; b}{EA_2} \cos\beta$$

$$\eta_{D_2} = \varphi_B \cdot b \cdot \cos\beta + \frac{N_B \cdot b}{EA_2} \operatorname{sen}\beta$$

e infine:

$$\xi_{D_3} = \varphi_C \cdot c \cdot \operatorname{sen}\gamma + \frac{X \cdot c}{EA_3} \cos\gamma$$

$$\eta_{D_3} = -\varphi_C \cdot c \cdot \cos\gamma + \frac{X \cdot c}{EA_3} \operatorname{sen}\gamma \, .$$

Ponendo le espressioni trovate nelle equazioni implicite, si ha la possibilità di risolvere il problema.

Calcolati, poi, gli sforzi nelle tre aste è possibile verificarne la resistenza.

OSSERVAZIONE. - La soluzione di questo problema, pur se concettualmente semplice, comporta una notevole complicazione analitica. Essa è inerente all'assenza di sezioni immobili, a cui riferire facilmente tutti gli spostamenti.

Vedremo più avanti come i problemi di questo tipo possano risolversi vantaggiosamente per via energetica.

* * *

42. - Una conduttura cilindrica è costituita da due tubi coassiali, che entrano esattamente uno nell'altro senza forzamento.

Studiarne il regime statico, quando in essi scorre un gas in pressione, riscaldato rispetto alla temperatura di costruzione.

I due tubi abbiano spessore sottile rispetto ai rispettivi raggi. È allora lecito, per ciascuno di essi, confondere i raggi esterno ed interno con quello medio. Inoltre, si possono ritenere coincidenti anche i raggi dei due tubi.

Trattandosi di un problema con simmetria longitudinale, si può studiare la trave ad anello ottenuta sezionando il tubo con due piani normali al suo asse e posti a distanza mutua unitaria.

Procedendo per sovrapposizione di effetti, studieremo separatamente l'effetto della pressione interna e quello del salto termico.

PRESSIONE INTERNA. - Separiamo i due tubi, mettendo in evidenza la reazione mutua distribuita. Essa risulta radiale e uniforme, per evidenti ragioni di simmetria assiale.

Denominiamo con gli indici 1 e 2 le caratteristiche statiche e geometriche, rispettivamente del tubo esterno e di quello interno.

Il verso dell'azione mutua dipende essenzialmente da considerazioni di congruenza.

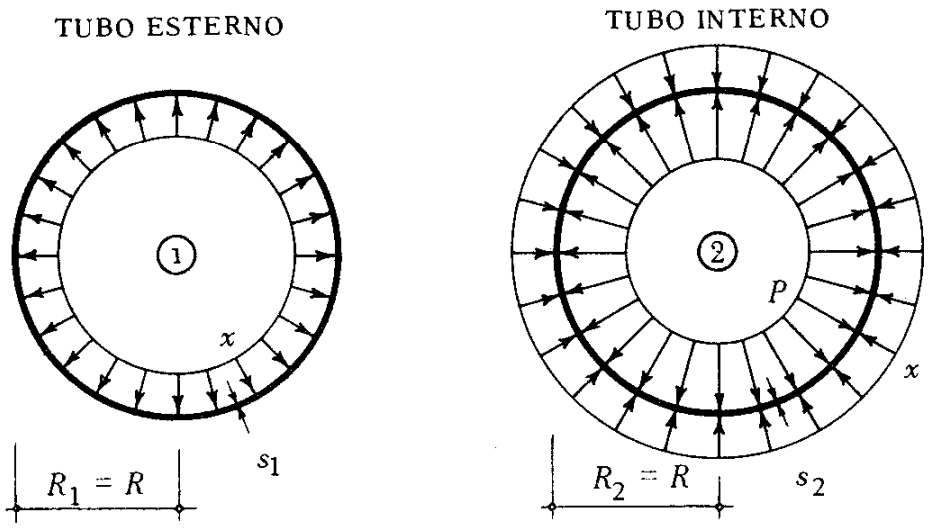


Fig. 42.1

L'anello interno si dilata sotto l'effetto della pressione p del gas. Quello esterno, con la sua elasticità, ne frena la deformazione, applicandogli una pressione x volta verso l'interno. Per reazione, l'anello

interno trascina quello esterno nella deformazione mediante la stessa x volta verso fuori. In totale, l'anello esterno è teso dalla pressione x; quello interno, dalla $p - x$.

L'incognita x si determina uguagliando l'aumento dei raggi (o dei diametri) dei due anelli. Cioè:

$$\Delta R_1 = \Delta R_2.$$

Per gli anelli siano:

- E_1, E_2 i moduli di elasticità longitudinale dei materiali che li costituiscono;
- s_1, s_2 gli spessori delle pareti.

Si ottiene:

$$\Delta R_1 = \frac{x R^2}{E_1 s_1} \qquad \Delta R_2 = \frac{(p - x) R^2}{E_2 s_2}.$$

La condizione di congruenza si scrive esplicitamente:

$$\frac{x R^2}{E_1 s_1} = \frac{(p - x) R^2}{E_2 s_2}$$

da cui:

$$x = p \frac{E_1 s_1}{E_1 s_1 + E_2 s_2}$$

e quindi

$$p - x = p \frac{E_2 s_2}{E_1 s_1 + E_2 s_2}.$$

La pressione p si ripartisce, tra i due tubi, in ragione diretta delle loro rigidezze assiali.

VARIAZIONE TERMICA. - La conduttura è ora priva di carico esterno. Per effetto del salto di temperatura sorge uno stato tensionale

soltanto se i due tubi sono di diverso materiale, quindi si dilatano diversamente per effetto termico.

Supponiamo, per fissar le idee, che il salto termico sia positivo (riscaldamento); inoltre, tra i coefficienti di dilatazione termica dei due materiali sussista la relazione:

$$\alpha_1 < \alpha_2 .$$

Il tubo interno si dilata di più, e trascina nella deformazione quello esterno mediante una pressione radiale uniforme y, volta verso l'esterno. La medesima y, col verso cambiato, sollecita il tubo interno. La condizione di congruenza consiste, ancora, nell'uguaglianza delle variazioni di lunghezza dei due raggi:

$$\Delta R_1 = \Delta R_2$$

cioè

$$\alpha_1 \Delta t R + \frac{y R^2}{E_1 s_1} = \alpha_2 \Delta t R - \frac{y R^2}{E_2 s_2} .$$

Si ottiene:

$$y = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{R} \Delta t \, \frac{E_1 s_1 \cdot E_2 s_2}{E_1 s_1 + E_2 s_2} .$$

EFFETTI TOTALI. - Si ottengono semplicemente per sovrapposizione di effetti.

Sul tubo esterno agisce la pressione (volta verso fuori):

$$p_1 = x + y = \frac{E_1 s_1}{E_1 s_1 + E_2 s_2} \left[p + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{R} \Delta t \cdot E_2 s_2 \right]$$

su quello interno, invece:

$$p_2 = p - x - y = \frac{E_2 s_2}{E_1 s_1 + E_2 s_2} \left[p - \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{R} \Delta t \cdot E_1 s_1 \right] .$$

VERIFICHE DI RESISTENZA. - Ciascun tubo è in stato di tensione monoassiale. Basta allora limitare la massima tensione al rispettivo carico di sicurezza. Cioè:

$$\sigma_1 = p_1 \frac{R}{s_1} \leqslant K_1 \qquad \text{e} \qquad \sigma_2 = p_2 \frac{R}{s_2} \leqslant K_2 .$$

CASO NUMERICO. - Siano assegnati i seguenti dati.

	MATERIALE	E (kg/cm^2)	α ($^\circ$C^{-1})	s (mm)	K (kg/cm^2)
Tubo 1 (esterno)	Acciaio	$2{,}1 \times 10^6$	$1{,}2 \times 10^{-5}$	4	1400
Tubo 2 (interno)	Rame	$1{,}2 \times 10^6$	$1{,}8 \times 10^{-5}$	8	1000

Inoltre:

pressione $p = 15$ kg/cm^2
variazione termica: $\Delta t = +80$ °C
raggio: $R = 500$ mm.

Si ottiene immediatamente:

$$p_1 = 0{,}467\,(15 + 0{,}92) = 7{,}43 \text{ kg/cm}^2$$
$$p_2 = 0{,}533\,(15 - 0{,}81) = 7{,}56 \text{ kg/cm}^2.$$

Di conseguenza:

$$\sigma_1 = p_1 \frac{R}{s_1} = 7{,}43 \frac{50}{0{,}4} = 929 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_2 = p_2 \frac{R}{s_2} = 7{,}56 \frac{50}{0{,}8} = 472 \text{ kg/cm}^2.$$

La resistenza è assicurata con largo margine per entrambi i materiali.

* * *

43. - Verificare la resistenza di un serbatoio cilindrico pieno di gas in pressione.

Il serbatoio è costituito da un tubo cilindrico, chiuso alle estremità da due fondi perpendicolari al suo asse longitudinale.

In via di semplificazione, si può supporre che i fondi siano vincolati al tubo in maniera da non ostacolarne le dilatazioni trasversali. In caso contrario, i risultati che otterremo saranno validi solo per le zone poste a sufficiente distanza dalle due estremità.

STATO DI TENSIONE LONGITUDINALE. - Sia P la risultante delle forze sviluppate dalla pressione del gas su ciascuno dei due fondi. Se si considera il tubo come trave, esso risulta soggetto a sforzo assiale uguale proprio a P. Le relative tensioni si mettono in evidenza con un sezionamento.

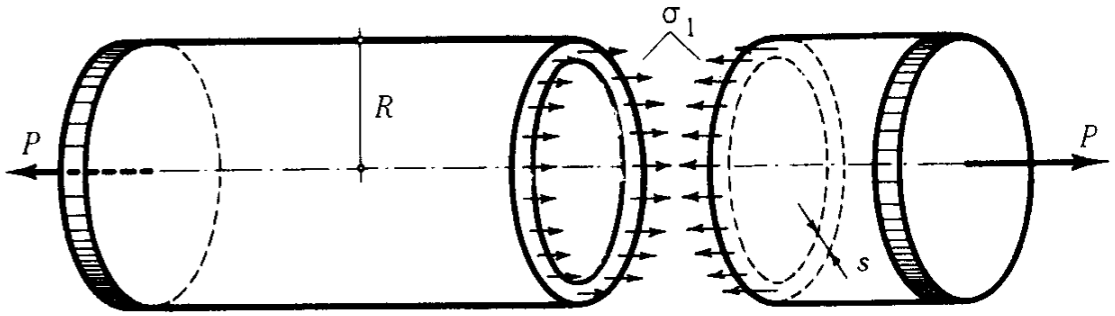


Fig. 43.1

Se il tubo ha spessore s sottile rispetto al raggio R, l'area della sezione retta risulta:

$$A = 2\pi R \cdot s .$$

Inoltre:

$$P = p \cdot \pi R^2$$

ove p è la pressione del gas.

La tensione longitudinale risulta allora:

$$\sigma_l = \frac{P}{A} = \frac{pR}{2s}.$$

STATO DI TENSIONE TRASVERSALE. - Isoliamo un anello di lunghezza unitaria, dal resto del tubo, mediante due sezioni rette. Le azioni che agiscono su di esso sono:

- le tensioni σ_l, applicate alle facce delle sezioni rette, che provocano dilatazioni, ma non tensioni, normalmente ad elementi di piano contenenti l'asse longitudinale;
- la pressione p, che provoca tensioni normali su detti elementi piani.

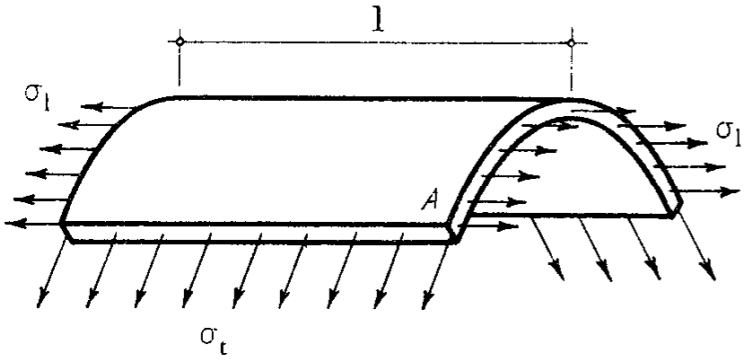


Fig. 43.2

Le tensioni risultano:

$$\sigma_t = p \frac{R}{s},$$

VERIFICHE DI RESISTENZA. - Per ovvie ragioni di simmetria, le sollecitazioni sono le stesse in corrispondenza di ogni punto A del mantello cilindrico. Gli elementi piani normale all'asse e longitudinale

sono principali, perché privi di tensioni tangenziali. La massima tensione, e quindi la massima dilatazione, è quella diretta secondo la tangente alla direttrice del tubo.

Poiché lo stato di tensione è biassiale, si può eseguire la verifica mediante il criterio della massima dilatazione.

Se K è il carico di sicurezza a semplice trazione del materiale di cui è costituito il tubo, deve porsi:

$$\sigma_{id} = \sigma_t - \nu \sigma_l \leqslant K$$

cioè

$$p \frac{R}{s}\left(1 - \frac{\nu}{2}\right) \leqslant K.$$

Per i materiali metallici: $\nu \cong 0{,}3$

$$0{,}85\, p \frac{R}{s} \leqslant K.$$

CASO NUMERICO. - Il tubo sia di rame. Inoltre:

$$R = 30 \text{ cm} \qquad s = 0{,}3 \text{ cm} \qquad p = 10 \text{ kg/cm}^2.$$

Per il rame è poi:

$$K = 1000 \text{ kg/cm}^2.$$

Risulta:

$$\sigma_{id} = p \frac{R}{s}\left(1 - \frac{\nu}{2}\right) = 1000 \cdot 0{,}85 = 850 \text{ kg/cm}^2.$$

La resistenza è largamente assicurata.

* * *

44. - Un pilastro di cemento armato deve sopportare un carico assiale di 80 t.

Progettarlo nell'ipotesi che sia a staffe isolate oppure cerchiato.

Per determinare le dimensioni geometriche della sezione resistente è necessario assegnare i carichi di sicurezza dei materiali. Trattandosi di sollecitazione a compressione semplice, è inutile precisare le caratteristiche dell'acciaio da impiegarsi. Le sue tensioni raggiungono, al massimo, un valore pari a n volte quelle del calcestruzzo (n è il coefficiente di equivalenza, pari al rapporto E_f/E_c, usualmente assunto uguale a 10), pertanto sono sicuramente al di sotto del rispettivo carico di sicurezza.

Per quanto riguarda il calcestruzzo, supponiamo che esso sia formato con 3 q di cemento 425 per metro cubo di getto.

Inoltre, esso abbia carico di rottura su cubi, a 28 giorni di stagionatura, non inferiore a 180 kg/cm^2.

Di conseguenza, le norme attualmente vigenti [1] permettono l'adozione del carico di sicurezza (a semplice compressione):

$$K_c = 60 \text{ kg/cm}^2.$$

PILASTRO A STAFFE ISOLATE. - Si progetta il pilastro a sezione rettangolare; l'armatura principale sarà costituita da quattro tondini disposti in corrispondenza degli spigoli.

La formula di progetto è:

$$N = \sigma_c (A_c + n A_f)$$

ove σ_c è la tensione nel calcestruzzo, A_c l'area di calcestruzzo, A_f

---

[1] Regio Decreto 16-11-1939, n. 2229, pubblicato nel Supplemento Ordinario alla Gazzetta Ufficiale n. 92 del 18-4-1940.

quella metallica. Per la progettazione si può, in prima approssimazione, trascurare nA_f rispetto ad A_c; posto, poi, $\sigma_c = K_c$, si ottiene l'area strettamente necessaria di calcestruzzo:

$$\bar{A}_c = \frac{N}{K_c} = \frac{80\,000}{60} = 1330 \text{ cm}^2.$$

Si può adottare una sezione di 45 × 30 cm, con un'effettiva area resistente:

$$A_c = 1350 \text{ cm}^2.$$

In base alle norme sopra richiamate, poiché $\bar{A}_c < 2000$ cm^2, deve porsi:

$$A_f \geqslant 0{,}008\ \bar{A}_c.$$

In questo caso:

$$0{,}008 \cdot 1330 = 10{,}6 \text{ cm}^2.$$

Si adottano 4 ϕ 18, per un'area complessiva:

$$A_f = 10{,}2 \text{ cm}^2.$$

L'effettiva tensione massima nel calcestruzzo risulta:

$$\sigma_c = \frac{N}{A_c + nA_f} = \frac{80\,000}{1350 + 102} = 55 \text{ kg/cm}^2.$$

L'armatura del pilastro va, poi, completata con la staffatura regolamentare (ad esempio, staffe ϕ 6 ogni 15 cm).

PILASTRO CERCHIATO. - Siano: D il diametro del nucleo staffato, p il passo della spirale, A_f l'armatura longitudinale, A_s l'armatura equivalente alla spirale, A_n l'area del nucleo.

La formula da usarsi è:

$$N = \sigma_c\,(A_n + 15\,A_f + 45\,A_s) = \sigma_c \cdot A_{ci}$$

con le limitazioni:

$$A_{ci} \leqslant 2\,A_n; \qquad A_s \leqslant 2\,A_f; \qquad p \leqslant \frac{D}{5}.$$

Supposto di voler costruire un pilastro a forma ottagonale, esso sarà armato con 8 ferri longitudinali.

Imponiamo $p = \frac{D}{5}$; scegliamo, per la spirale, un tondo ϕ 8; ne deriva:

$$pA_s = \pi D \omega = 5\,p\,\pi\omega$$

$$A_s = 5\,\pi\omega = 7{,}85 \text{ cm}^2.$$

Nella formula precedente, ω è la sezione del tondino ϕ 8, pari a 0,50 cm^2.

Disponiamo, poi, longitudinalmente, 8 tondini ϕ 16; ne deriva:

$$A_f = 8 \times 2{,}01 = 16{,}1 \text{ cm}^2.$$

La limitazione $A_s \leqslant 2\,A_f$ è rispettata.

Resta da determinare l'area del nucleo.

Dalla formula generale:

$$A_{ci} = \frac{N}{K_c} = 1330 \text{ cm}^2.$$

Allora:

$$A_n = A_{ci} - 15\,A_f - 45\,A_s =$$

$$= 1330 - 241 - 353 = 736 \text{ cm}^2.$$

$$D = 30{,}6 \text{ cm}.$$

Tenendo conto del ricoprimento delle armature, l'altezza dell'ottagono può assumersi in 35 cm.

Come è ovvio, la tensione nel calcestruzzo (convenzionale, perché tale è la formula usata) risulta proprio 60 kg/cm^2.