

CAPITOLO IV

LA GEOMETRIA DELLE MASSE

I problemi raccolti in questo capitolo sono in numero limitato, perché si propongono di illustrare solo le questioni più comuni sotto l'aspetto applicativo. In vista di questa finalità, si è sempre seguita la via più immediata ed elementare.

Si sono volutamente tralasciate quasi tutte le trattazioni di carattere grafico o proiettivo, limitandosi alla risoluzione analitica.

In questa maniera, si è cercato di far risaltare i concetti geometrici fondamentali, che (non sarà inopportuno ricordarlo) trovano continua applicazione in tutti i campi della Scienza delle Costruzioni.

* * *

31. - Determinare la posizione del baricentro di un arco di circonferenza e di un settore di cerchio.

ARCO DI CIRCONFERENZA.

Sull'arco di circonferenza, di apertura 2α , sia assegnata una distribuzione lineare di masse, con densità unitaria. La generica massa elementare coincide allora con la lunghezza dell'elemento di arco; ha sen-

so ricercarne il baricentro.

Riferiamo l'arco ad una coppia di diametri ortogonali, di cui uno coincidente col suo asse di simmetria. Su questo deve trovarsi il baricentro; per definirne la posizione basterà calcolarne l'ordinata y_G .

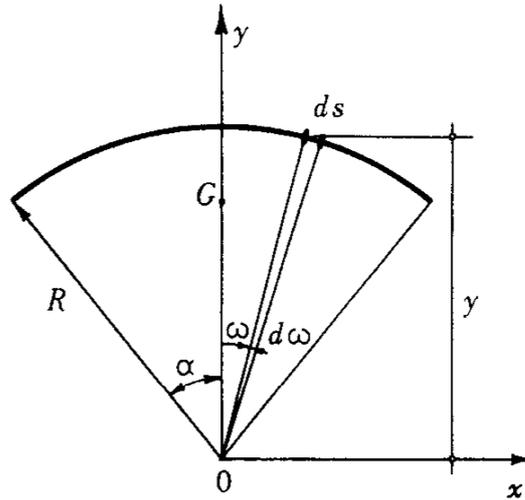


Fig. 31.1

Sia R il raggio della circonferenza; ds la lunghezza dell'elemento di arco; y la sua distanza dall'asse x ,

L'ordinata y_G si ottiene subito mediante la formula generale:

$$y_G = \frac{\int y \cdot ds}{\int ds} .$$

Gli integrali si intendono estesi a tutto l'arco. Per valutarli, scegliamo un riferimento ausiliario polare, avente polo nel centro dell'arco ed origine delle anomalie ω sull'asse y .

Si ottiene facilmente:

$$ds = R \cdot d\omega$$

$$y = R \cdot \cos \omega$$

$$\int y ds = 2 \int_0^{\alpha} R^2 \cos \omega d\omega = 2R^2 \text{sen } \alpha$$

$$\int ds = 2 \int_0^{\alpha} R d\omega = 2\alpha R$$

Pertanto:

$$y_G = R \frac{\text{sen } \alpha}{\alpha}$$

CASI PARTICOLARI.

a) Nel caso di una semicirconferenza, si ha:

$$2\alpha = \pi \quad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$y_G = \frac{2R}{\pi} \cong 0,6366 R.$$

b) Si voglia invece determinare la posizione del baricentro di un quarto AB di circonferenza.

Riferiamolo ai diametri che lo delimitano; inoltre, completiamolo in maniera da ottenere una semicirconferenza, di cui l'asse y è di simmetria,

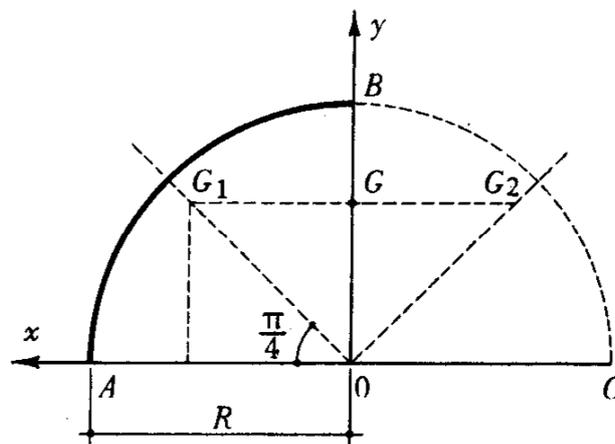


Fig. 31.2

Il baricentro G della semicirconferenza può ottenersi anche caricando i due baricentri G_1 e G_2 delle lunghezze dei due quarti di circonferenza. Ne segue subito che i tre baricentri G , G_1 , G_2 hanno la medesima ordinata:

$$y_{G_1} = y_G = \frac{2R}{\pi}.$$

Inoltre, G_1 si trova sull'asse di simmetria dell'arco AB , per cui:

$$x_{G_1} = y_{G_1} = \frac{2R}{\pi}.$$

SETTORE DI CERCHIO.

Usiamo il riferimento Oxy di fig. 31.3, e quello ausiliario polare con polo in O e origine delle anomalie in y .

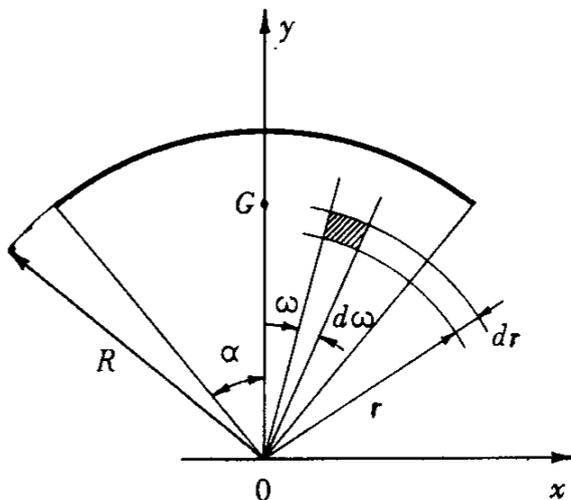


Fig. 31.3

L'ordinata del baricentro è data dalla relazione:

$$y_G = \frac{\int y \cdot dA}{\int dA}$$

ove gli integrali si devono intendere estesi a tutto il settore. Ma:

$$dA = r d\omega \cdot dr$$

$$y = r \cos \omega$$

e quindi:

$$\int y dA = 2 \int_0^R r^2 dr \int_0^\alpha \cos \omega d\omega = \frac{2}{3} R^3 \operatorname{sen} \alpha$$

$$\int dA = 2 \int_0^R r dr \int_0^\alpha d\omega = R^2 \alpha$$

$$y_G = \frac{2}{3} R \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha}.$$

CASI PARTICOLARI.

a) Semicerchio:

$$2\alpha = \pi$$

$$y_G = \frac{4}{3} \frac{R}{\pi} \cong 0,4244 R :$$

b) Quarto di cerchio. - Assunto, ancora, un riferimento coincidente con i due diametri estremi, e ragionando come per il quarto di circonferenza, si ottiene:

$$x_G = y_G = \frac{4}{3} \frac{R}{\pi}.$$

OSSERVAZIONE. - I risultati relativi al settore di cerchio potevano ottenersi anche per via sintetica.

Si può suddividere il settore in triangoli elementari, di raggio R e apertura $d\omega$.

Ciascuno di essi ha l'area

$$dA = \frac{1}{2}R \cdot ds$$

ed il baricentro posto a distanza $\frac{2}{3}R$ dal centro del cerchio.

Ai fini della ricerca del baricentro si può, alla distribuzione dei triangoli elementari, sostituire l'insieme dei loro baricentri caricati dalle rispettive aree.

Il baricentro cercato è allora quello di un arco omogeneo di raggio $\frac{2}{3}R$; pertanto:

$$y_G = \frac{2}{3}R \frac{\text{sen } \alpha}{\alpha}.$$

32. - La sezione di una trave a L ha le dimensioni indicate in fig. 32.1. Se ne determinino la posizione del baricentro ed il momento statico rispetto alla retta a .

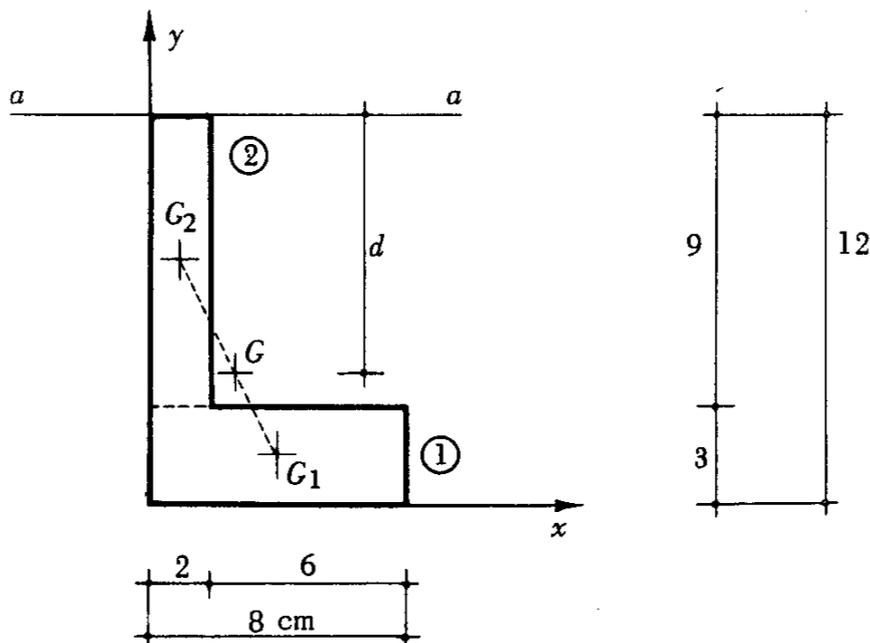


Fig. 32.1

POSIZIONE DEL BARICENTRO.

PRIMA SOLUZIONE ANALITICA.

La via più breve consiste nel decomporre la figura nei due rettangoli ① e ②. Di questi sono note le rispettive aree A_1 e A_2 ed i baricentri $G_1(x_1, y_1)$ e $G_2(x_2, y_2)$.

Risulta:

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 \text{ cm} & A_1 &= 3 \times 8 = 24 \text{ cm}^2 \\ y_1 &= 1,5 \text{ «} \\ x_2 &= 1 \text{ cm} & A_2 &= 2 \times 9 = 18 \text{ cm}^2 \\ y_2 &= 7,5 \text{ «} \end{aligned}$$

Le coordinate del baricentro G della figura sono:

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{S_y}{A} = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2}{A_1 + A_2} = 2,71 \text{ cm} \\ y_G &= \frac{S_x}{A} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = 4,07 \text{ cm.} \end{aligned}$$

In maniera perfettamente equivalente, si può determinare la posizione del baricentro riguardando la sezione come differenza dei due rettangoli di dimensioni, rispettivamente:

$$8 \times 12 \quad \text{e} \quad 6 \times 9 \text{ cm.}$$

SECONDA SOLUZIONE ANALITICA.

Il baricentro G si trova sulla congiungente di G_1 e G_2 ; le sue distanze da essi sono inversamente proporzionali ad A_1 e A_2 .

Si ritrovano, ovviamente, gli stessi risultati già ottenuti più sopra.

SOLUZIONE GRAFICA.

Applichiamo ai baricentri G_1 e G_2 due forze, tra loro parallele, di moduli proporzionali alle aree A_1 e A_2 . Il loro centro coincide, per definizione, con il baricentro G della sezione a L .

Trattandosi di due sole forze, il loro centro appartiene alla congiungente $G_1 G_2$.

Se allora si prefissa una qualsiasi direzione comune alle due forze (ad esempio, l'orizzontale) l'intersezione dalla loro risultante (a cui pure appartiene il centro) con la $G_1 G_2$ determina il baricentro G .

La risultante può essere individuata semplicemente con l'uso di un poligono funicolare. Riportati sulla retta delle forze i moduli A_1 e A_2 si costruisce un poligono funicolare. I suoi lati estremi si intersecano in L , per cui passa la retta d'azione della risultante. Il baricentro G è la sua intersezione con la congiungente $G_1 G_2$.

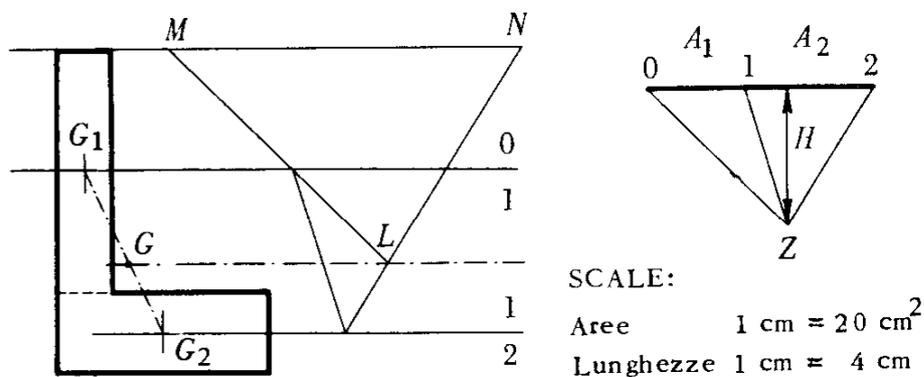


Fig. 32.2

MOMENTO STATICO RISPETTO ALLA RETTA a .

Usando il teorema di VARIGNON, si ottiene:

$$S_a = A \cdot d = 42 \times 7,93 = 333,06 \text{ cm}^3.$$

Oppure, si può procedere per via grafica.

Approfittando del fatto che alle masse A_1 e A_2 sono state associate forze parallele alla a , si può sfruttare il poligono funicolare già

tracciato per la ricerca del baricentro.

Il momento statico è fornito dal prodotto del segmento \overline{MN} per la distanza polare H .

Tenendo conto delle scale:

$$\begin{array}{ll} \text{lunghezza} & 1 \text{ cm} = 4 \text{ cm} \\ \text{area} & 1 \text{ cm} = 20 \text{ cm}^2 \end{array}$$

ed osservando che:

$$H = 1,3 \text{ cm}; \quad \overline{MN} = 3,3 \text{ cm}$$

si ottiene:

$$S_a = 1,3 \times 3,3 \times 4 \times 20 = 333,2 \text{ cm}^3.$$

Il risultato è, ovviamente approssimato, l'errore è, tuttavia, molto modesto.

* * *

33. - Disporre due ferri UPN 200 affiancati simmetricamente (figura 33.1) in maniera da rendere uguali i momenti principali centrali di inerzia della sezione complessiva.

Nella pratica costruttiva già da tempo sono in uso travi di acciaio, ottenute per laminazione, la cui sezione retta ha dimensioni unificate,

Tutti i manuali d'ingegneria riportano le caratteristiche geometriche delle sezioni dei profili commercialmente usati. Tali dati sono necessari per la determinazione delle sollecitazioni nelle varie sezioni di una trave caricata da forze esterne.

Supponiamo di affiancare due ferri UPN 200 (UNI 5680-65), come appare nella fig. 33.1. A priori, risulta arbitraria la distanza a tra i baricentri dei due profilati.

La determineremo in modo che riescano uguali i momenti principali centrali d'inerzia.

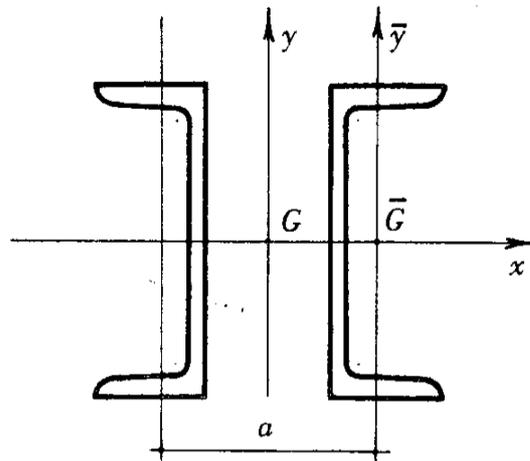


Fig. 33.1

Per la sezione del singolo profilo UPN 200, le tabelle ⁽¹⁾ forniscono i seguenti dati:

Area: $A = 32,2 \text{ cm}^2$

Momenti d'inerzia: $J_x = 1911 \text{ cm}^4$; $J_{\bar{y}} = 148 \text{ cm}^4$.

Il momento d'inerzia, rispetto all'asse x , della sezione complessiva si ottiene semplicemente raddoppiando quello relativo ad un solo profilo:

$$(J_x)_{\text{tot}} = 2 J_x = 3822 \text{ cm}^4.$$

Il momento rispetto all'asse y può invece calcolarsi mediante le formule di traslazione d'assi.

L'asse \bar{y} è baricentrico per ciascun profilato, e pertanto:

$$(J_y)_{\text{tot}} = 2 \left[J_{\bar{y}} + A \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] = 296 + 16,1 \cdot a^2.$$

La condizione

$$(J_x)_{\text{tot}} = (J_y)_{\text{tot}}$$

(1) Vedi la tabella UNI 5680-65; oppure un qualsiasi manuale di ingegneria. Il lettore può consultare la tabella in appendice.

si traduce nella:

$$3822 = 296 + 16,1 \cdot a^2$$

da cui:

$$a = 14,8 \text{ cm.}$$

L'ellisse centrale d'inerzia della sezione è una circonferenza: il momento d'inerzia è costante per ogni asse baricentrico, e vale:

$$J = 3822 \text{ cm}^4.$$

Il raggio d'inerzia risulta:

$$\rho = \sqrt{\frac{J}{A_{\text{tot}}}} = 7,70 \text{ cm.}$$

Esso coincide, com'è ovvio, con quello, rispetto all'asse x , di una sola delle due sezioni a C.

34. - Determinare l'ellisse centrale d'inerzia di un quarto di cerchio.

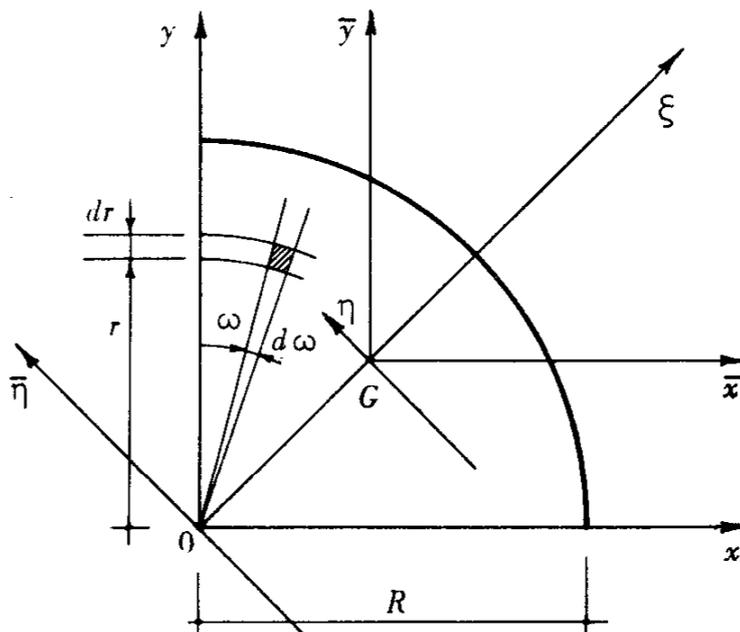


Fig. 34.1

PRIMA SOLUZIONE.

La determinazione dello stato d'inerzia centrale è subordinata alla conoscenza dei momenti del secondo ordine rispetto a due assi baricentrici ortogonali.

In questo caso, può essere conveniente la deduzione analitica dei momenti rispetto ai due diametri che delimitano il quarto di cerchio. È poi facile passare ai paralleli baricentrici \bar{x} e \bar{y} mediante le formule di traslazione d'assi.

Momenti rispetto agli assi (x, y) . - Con il riferimento polare ausiliario della fig. 34.1 si ottiene facilmente:

$$J_y = J_x = \iint y^2 dA \qquad J_{xy} = \iint xy dA$$

$$dA = r dr \cdot d\omega$$

$$y = r \cos \omega$$

$$x = r \sin \omega$$

e quindi:

$$J_x = J_y = \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/2} \cos^2 \omega d\omega = \frac{\pi}{16} R^4 = 0,1963 R^4$$

$$J_{xy} = \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/2} \sin \omega \cos \omega d\omega = \frac{R^4}{8} = 0,1250 R^4.$$

OSSERVAZIONE. - Il momento d'inerzia J_x poteva facilmente ottenersi anche ricordando che esso vale un quarto di quello dell'intero cerchio rispetto ad un suo diametro. Cioè:

$$J_x = J_y = \frac{1}{4} \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi}{16} R^4.$$

Momenti rispetto agli assi (\bar{x}, \bar{y}) . - Le formule di traslazione di assi dànno:

$$J_{\bar{x}} = J_{\bar{y}} = J_x - y_G^2 \cdot A$$

$$J_{\bar{x}\bar{y}} = J_{xy} - x_G y_G \cdot A.$$

Le coordinate del baricentro sono già note (vedi, ad esempio, l'esercizio 31):

$$x_G = y_G = \frac{4R}{3\pi} = 0,4244 R.$$

Inoltre:

$$A = \frac{\pi}{4} R^2$$

e quindi:

$$J_{\bar{x}} = J_{\bar{y}} = \frac{\pi R^4}{16} - \frac{16 R^2}{9\pi^2} \frac{\pi R^2}{4} = R^4 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) = +0,0548 R^4$$

$$J_{\bar{x}\bar{y}} = \frac{R^4}{8} - \frac{16 R^2}{9\pi^2} \frac{\pi R^2}{4} = R^4 \left(\frac{1}{8} - \frac{4}{9\pi} \right) = -0,0165 R^4$$

Stato d'inerzia centrale. - Si ottiene mediante l'uso delle formule di rotazione d'assi per i momenti del secondo ordine.

Sia (x_1, y_1) la generica coppia ortogonale ottenuta ruotando, in senso antiorario, dell'angolo α a partire dalla (\bar{x}, \bar{y}) . Risulta:

$$\begin{aligned} J_{x_1} &= \frac{J_{\bar{x}} + J_{\bar{y}}}{2} + \frac{J_{\bar{x}} - J_{\bar{y}}}{2} \cos 2\alpha - J_{\bar{x}\bar{y}} \sin 2\alpha = \\ &= J_{\bar{x}} - J_{\bar{x}\bar{y}} \sin 2\alpha = 0,0548 R^4 + 0,0165 R^4 \sin 2\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{x_1 y_1} &= \frac{J_{\bar{x}} - J_{\bar{y}}}{2} \sin 2\alpha + J_{\bar{x}\bar{y}} \cos 2\alpha = \\ &= J_{\bar{x}\bar{y}} \cos 2\alpha = -0,0165 R^4 \cos 2\alpha. \end{aligned}$$

Gli assi principali d'inerzia sono individuati dall'angolo α_0 che si ottiene dalla relazione:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{\bar{x}\bar{y}}}{J_{\bar{y}} - J_{\bar{x}}}.$$

Poiché $J_{\bar{x}} = J_{\bar{y}}$, la relazione suddetta è soddisfatta dagli angoli:

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{4}; \quad \alpha_0 + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi.$$

Come era prevedibile a priori, uno degli assi principali d'inerzia coincide con il diametro di simmetria ortogonale del settore.

Il massimo valore del momento d'inerzia compete all'asse ξ identificato dall'angolo $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$, per il quale:

$$\operatorname{sen} 2\alpha_0 = +1$$

$$J_{\xi} = J_{\bar{x}} - J_{\bar{x}\bar{y}} = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}\right)R^4 = 0,0713 R^4.$$

Invece, il minimo compete all'asse η avente

$$\operatorname{sen}(2\alpha_0 + \pi) = -1,$$

e quindi:

$$J_{\eta} = J_{\bar{x}} + J_{\bar{x}\bar{y}} = \left(\frac{\pi}{16} + \frac{1}{8} - \frac{8}{9\pi}\right)R^4 = 0,0384 R^4.$$

Come è naturale, si ha pure:

$$J_{\xi\eta} = 0.$$

Il circolo di Mohr. - Agli stessi risultati si può pervenire per via grafica, tracciando il circolo di MOHR. Allo scopo, è ancora necessaria la conoscenza degli elementi base, cioè i momenti del secondo ordine rispetto alla coppia ortogonale (\bar{x}, \bar{y}) .

In un piano rappresentativo $(J_{x_1}; J_{x_1 y_1})$, alle rette \bar{x} , \bar{y} corrispondono gli estremi di un diametro.

In particolare, il punto \bar{X} che rappresenta l'asse \bar{x} ha le coordinate:

$$J_{\bar{x}}, \quad J_{\bar{x}\bar{y}}.$$

Invece, \bar{Y} ha coordinate:

$$J_{\bar{x}}, \quad J_{\bar{y}\bar{x}} = -J_{\bar{x}\bar{y}}.$$

Il centro del circolo è l'intersezione dell'asse delle ascisse con il diametro $\bar{X}\bar{Y}$.

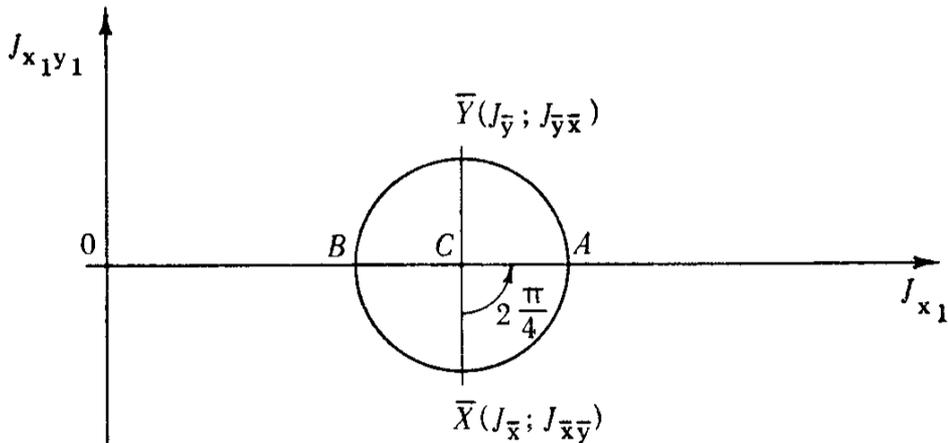


Fig. 34.2

Il punto A , rappresentativo dell'asse ξ , si ottiene, a partire da \bar{X} , ruotando in senso positivo (antiorario), sul circolo, di $\frac{\pi}{2}$.

L'asse ξ di massimo momento d'inerzia si ottiene, nel fascio centrale, ruotando di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario a partire da \bar{x} (fig. 34.1).

Il momento J_{ξ} vale poi:

$$J_{\xi} = \overline{OC} + \overline{CA} = J_{\bar{x}} - J_{\bar{x}\bar{y}}.$$

Analogamente:

$$J_{\eta} = \overline{OC} - \overline{CB} = J_{\bar{x}} + J_{\bar{x}\bar{y}}$$

e compete all'asse η ortogonale a ξ .

SECONDA SOLUZIONE.

Il procedimento sopra delineato è il più generale, e l'unico applicabile in ogni tipo di problema. Qui, lo studio si semplifica molto riconoscendo che il diametro bisettore del quarto di cerchio ne è asse di simmetria ortogonale. Allora sono note a priori le direzioni degli assi principali.

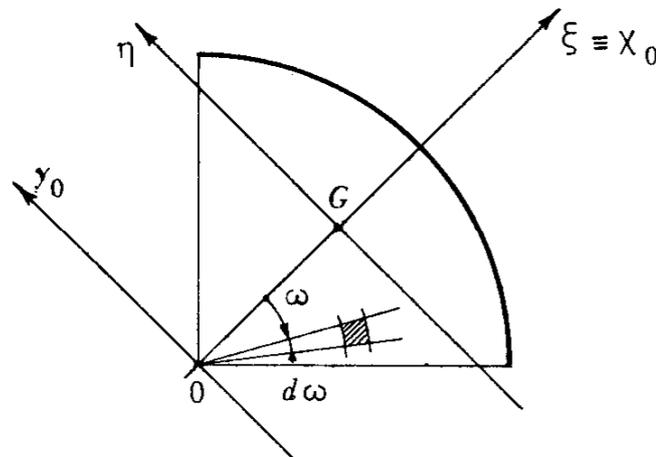


Fig. 34.3

Il momento d'inerzia rispetto all'asse ξ si può ottenere direttamente per via analitica.

$$J_{\xi} = \iint y_0^2 \cdot dA$$

ove:

$$dA = r d\omega \cdot dr$$

$$y_0 = r \operatorname{sen} \omega$$

e perciò:

$$J_{\xi} = 2 \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^2 \omega d\omega = R^4 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{1}{8} \right) = 0,0713 R^4.$$

Invece, il momento J_{η} può ottenersi da J_{y_0} mediante le formule di traslazione.

$$J_{y_0} = \iint x_0^2 dA$$

ove

$$x_0 = r \cos \omega$$

$$J_{y_0} = 2 \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/4} \cos^2 \omega d\omega = R^4 \left(\frac{\pi}{16} + \frac{1}{8} \right)$$

Inoltre:

$$\overline{OG} = \frac{4R}{3\pi} \sqrt{2},$$

quindi:

$$\begin{aligned} J_{\eta} &= J_{y_0} + \overline{OG}^2 \cdot A = R^4 \left(\frac{\pi}{16} + \frac{1}{8} \right) + \frac{16 R^2}{9 \pi^2} \cdot 2 \cdot \frac{\pi R^2}{4} = \\ &= R^4 \left(\frac{\pi}{16} + \frac{1}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) = 0,0384 R^4. \end{aligned}$$

Anche qui, la simmetria ortogonale fa riconoscere a priori che $J_{\xi\eta} = 0$.

L'ELLISSE CENTRALE D'INERZIA. - Ha per assi quelli principali d'inerzia, e per raggi quelli principali.

Si ottiene:

$$\begin{aligned} \rho_{\xi} &= \sqrt{\frac{J_{\xi}}{A}} = \sqrt{\frac{0,0713 R^4}{0,7854 R^2}} = 0,3013 R \\ \rho_{\eta} &= \sqrt{\frac{J_{\eta}}{A}} = \sqrt{\frac{0,0384 R^4}{0,7854 R^2}} = 0,2211 R \end{aligned}$$

I raggi ρ_ξ vanno distesi sull'asse η ; e viceversa (fig. 34.4).

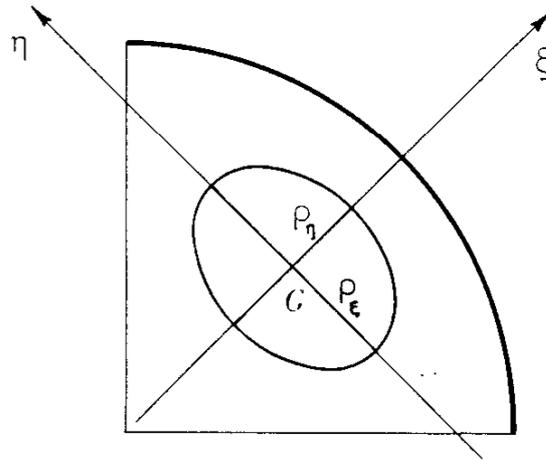


Fig. 34.4

35. - Determinare l'ellisse centrale d'inerzia del profilo a L della fig. 35.1.

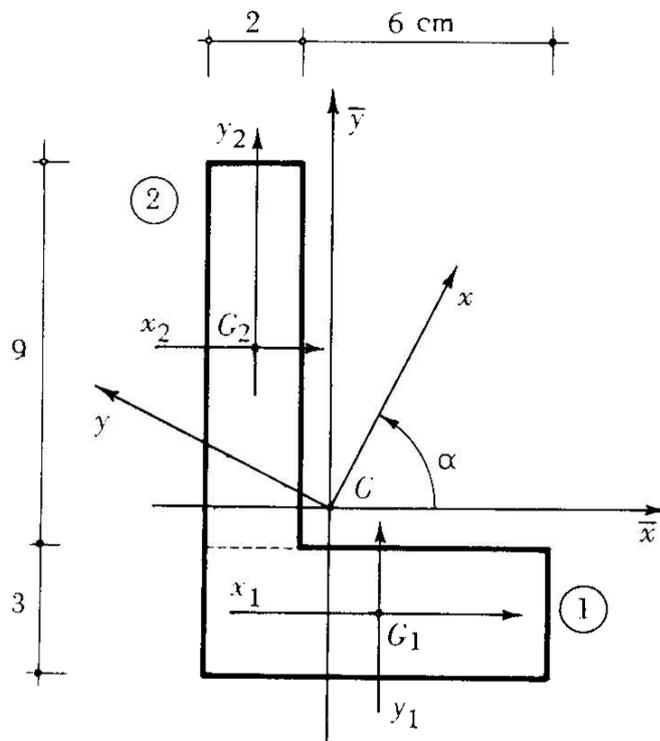


Fig. 35.1

La sezione non presenta particolari simmetrie, perciò il problema potrà essere risolto solo con metodi di carattere generale. Tuttavia, è possibile scomporre la figura in due rettangoli, di cui sono note le principali caratteristiche geometriche.

Si riesce allora ad ottenere facilmente i momenti del secondo ordine rispetto agli assi baricentrici (\bar{x}, \bar{y}) mediante il solo uso delle formule di traslazione d'assi.

POSIZIONE DEGLI ASSI BARICENTRICI. - Per la determinazione delle coordinate del baricentro rimandiamo il lettore all'esercizio 32, che ha i dati numerici in comune col presente.

Siano, poi, $G_1(x_1, y_1)$ e $G_2(x_2, y_2)$ i baricentri dei due rettangoli in cui si scompone la sezione. Le loro coordinate, nel riferimento (\bar{x}, \bar{y}) , risultano:

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= +1,29 \text{ cm} & \bar{x}_2 &= -1,71 \text{ cm} \\ \bar{y}_1 &= -2,57 \text{ «} & \bar{y}_2 &= +3,43 \text{ «}\end{aligned}$$

MOMENTI DEL SECONDO ORDINE RISPETTO AGLI ASSI (\bar{x}, \bar{y}) . - Le formule di traslazione dànno:

$$\begin{aligned}J_{\bar{x}} &= J_{x_1} + A_1 \bar{y}_1^2 + J_{x_2} + A_2 \bar{y}_2^2 \\ J_{\bar{y}} &= J_{y_1} + A_1 \bar{x}_1^2 + J_{y_2} + A_2 \bar{x}_2^2 \\ J_{\bar{x}\bar{y}} &= -J_{\bar{y}\bar{x}} = J_{x_1 y_1} + A_1 x_1 y_1 + J_{x_2 y_2} + A_2 x_2 y_2.\end{aligned}$$

Calcoliamo a parte gli elementi relativi ai due rettangoli.

Rettangolo 1.

$$\begin{aligned}A_1 &= 24 \text{ cm}^2 \\ J_{x_1} &= \frac{b_1 h_1^3}{12} = \frac{8 \times 3^3}{12} = 18 \text{ cm}^4\end{aligned}$$

$$J_{y_1} = \frac{h_1 b_1^3}{12} = \frac{3 \times 8^3}{12} = 128 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_1 y_1} = 0$$

perché gli assi x_1, y_1 sono principali per il rettangolo 1,

Rettangolo 2.

$$A_2 = 18 \text{ cm}^2$$

$$J_{x_2} = \frac{b_2 h_2^3}{12} = \frac{2}{12} \times 9^3 = 121,50 \text{ cm}^4$$

$$J_{y_2} = \frac{h_2 b_2^3}{12} = \frac{9 \times 2^3}{12} = 6 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_2 y_2} = 0$$

In totale:

$$J_{\bar{x}} = 18 + 24 \times \overline{2,57}^2 + 121,50 + 18 \times \overline{3,43}^2 = 509,79 \text{ cm}^4$$

$$J_{\bar{y}} = 128 + 24 \times \overline{1,29}^2 + 6 + 18 \times \overline{1,71}^2 = 226,57 \text{ cm}^4$$

$$J_{\bar{x}\bar{y}} = -24 \times 1,29 \times 2,57 - 18 \times 1,71 \times 3,43 = -185,14 \text{ cm}^4$$

$$J_{\bar{y}\bar{x}} = \phantom{J_{\bar{x}\bar{y}}} = +185,14 \text{ cm}^4$$

STATO D'INERZIA CENTRALE. - Si ottiene direttamente applicando le note formule di rotazione d'assi.

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{J_{\bar{x}} + J_{\bar{y}}}{2} + \frac{J_{\bar{x}} - J_{\bar{y}}}{2} \cos 2\alpha - J_{\bar{x}\bar{y}} \sin 2\alpha = \\ &= 368,18 + 141,61 \cos 2\alpha + 185,14 \sin 2\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{xy} &= \frac{J_{\bar{x}} - J_{\bar{y}}}{2} \sin 2\alpha + J_{\bar{x}\bar{y}} \cos 2\alpha = \\ &= +141,61 \sin 2\alpha - 185,14 \cos 2\alpha. \end{aligned}$$

J_x e J_{xy} si intendono espressi in cm^4 .

Gli assi principali d'inerzia si ottengono dalla relazione:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 J_{\bar{x}\bar{y}}}{J_{\bar{y}} - J_{\bar{x}}} = +1,307.$$

Le soluzioni sono:

$$\alpha_0 = 26^\circ 17'$$

$$\alpha_0 + \frac{\pi}{2} = 116^\circ 17'$$

I momenti principali si ottengono ponendo i suddetti valori al posto di α nelle formule di rotazione. Oppure si può usare la formula:

$$J_{\xi}, J_{\eta} = \frac{J_{\bar{x}} + J_{\bar{y}}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_{\bar{x}} - J_{\bar{y}})^2 + 4 J_{\bar{x}\bar{y}}^2}$$

A conti fatti, si ottiene:

$$J_{\xi} = J_x (\alpha = 26^\circ 17') = 601,86 \text{ cm}^4$$

$$J_{\eta} = J_x (\alpha = 116^\circ 17') = 134,50 \text{ cm}^4.$$

I corrispondenti raggi d'inerzia risultano:

$$\rho_{\xi} = \sqrt{\frac{J_{\xi}}{A}} = \sqrt{\frac{601,86}{42}} = 3,79 \text{ cm}$$

$$\rho_{\eta} = \sqrt{\frac{J_{\eta}}{A}} = \sqrt{\frac{134,50}{42}} = 1,79 \text{ cm}.$$

IL CIRCOLO DI MOHR. - Un altro modo di ottenere gli assi principali (e quindi l'ellisse) d'inerzia è quello grafico, basato sull'uso del circolo di MOHR.

Esso è determinato dal diametro che ha per estremi i punti rappresentativi degli assi (\bar{x}, \bar{y}) . Le coordinate di detti punti sono i momenti

del secondo ordine rispetto agli assi stessi.

Il punto \bar{X} , immagine dell'asse \bar{x} , ha le coordinate:

$$J_{\bar{x}} = 509,79 \text{ cm}^4; \quad J_{\bar{x}\bar{y}} = -185,14 \text{ cm}^4.$$

Invece \bar{Y} , rappresentativo di \bar{y} :

$$J_{\bar{y}} = 226,57 \text{ cm}^4; \quad J_{\bar{y}\bar{x}} = +185,14 \text{ cm}^4.$$

La costruzione del circolo, nel piano $(J_x; J_{xy})$ è allora immediata (fig. 35.2).

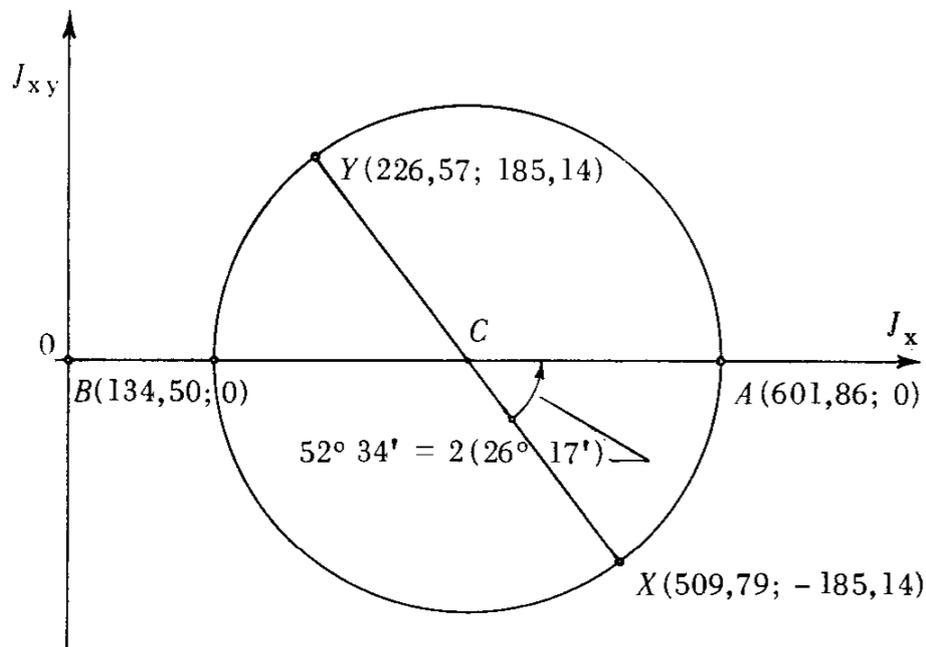


Fig. 35.2

Il punto A , rappresentativo dell'asse ξ di massimo momento d'inerzia, si ottiene ruotando in senso antiorario (positivo), a partire da \bar{X} , di $52^\circ 34'$. L'asse ξ , a cui compete il momento $J_\xi = 601,86 \text{ cm}^4$ (ascissa di A) si ottiene, nel fascio baricentrico, ruotando di $26^\circ 17'$, ancora in senso antiorario, a partire da \bar{x} .

Analogo discorso vale per η , che, più semplicemente, è ortogonale a ξ .

L'ELLISSE CENTRALE DI INERZIA. - Si ottiene riportando, nel noto modo, i raggi principali d'inerzia sugli assi ξ , η a partire dal baricentro (fig. 35.3).

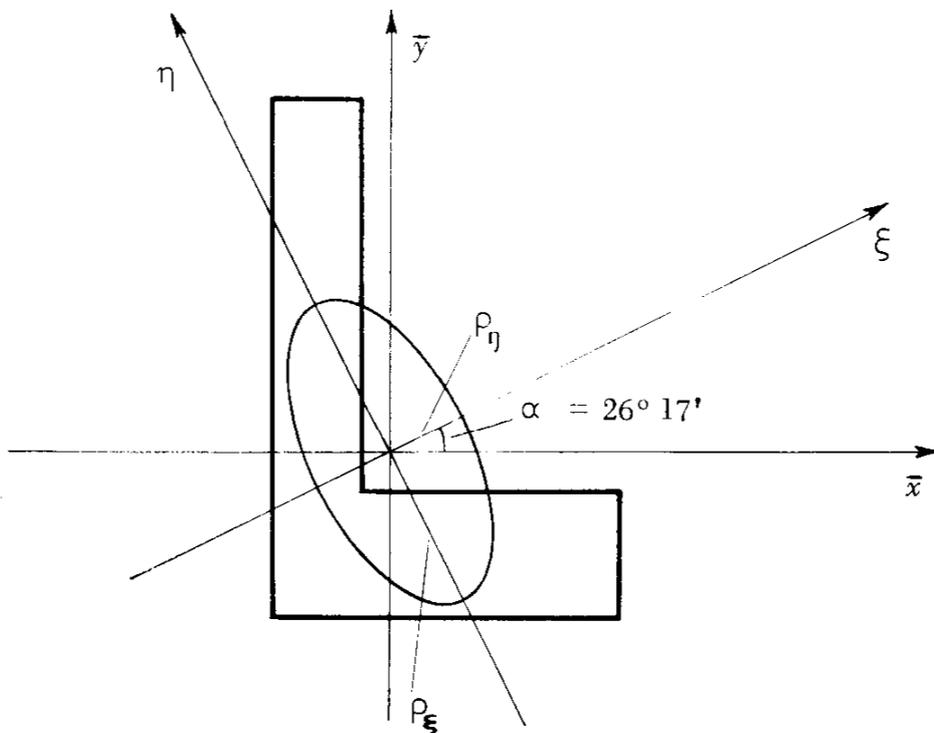


Fig. 35.3

* * *

36. - Determinare il nocciolo centrale d'inerzia di una sezione a T (fig. 36.1).

In base alla definizione, il nocciolo centrale d'inerzia è il luogo dei centri relativi delle rette che non tagliano la figura. In particolare, il suo contorno è luogo dei centri delle rette che riescono tangenti alla figura, senza intersecarla.

Iniziamo con l'osservare che la figura presenta un asse, y , di simmetria ortogonale. Perciò, basta tracciare solo metà del contorno del nocciolo per definirlo completamente.

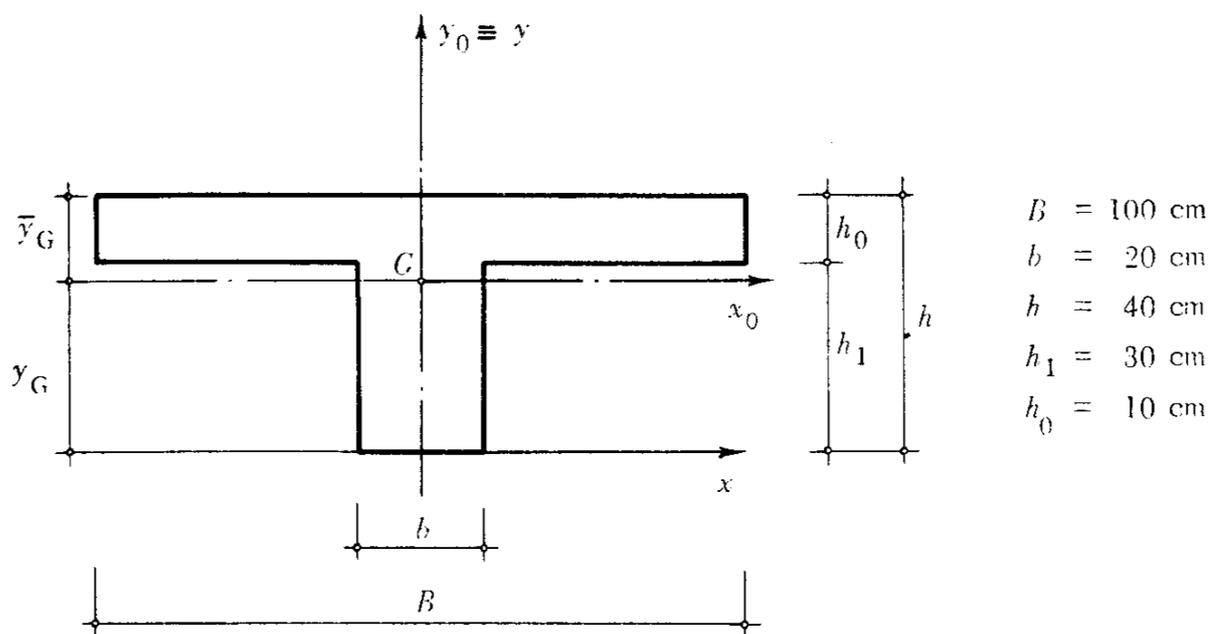


Fig. 36.1

Alle tangenti a , d , c , x corrispondono i rispettivi centri A , D , C , X (fig. 36.2).

Al fascio di tangenti che ha per centro l'intersezione di a e d corrisponde la punteggiata distesa sul segmento AD . Lo stesso dicasi per le intersezioni delle altre coppie di tangenti. Il nocciolo riuscirà, pertanto, un esagono.

Per poter definire la posizione dei vari centri relativi, è necessario procurarsi i valori delle principali caratteristiche geometriche della sezione.

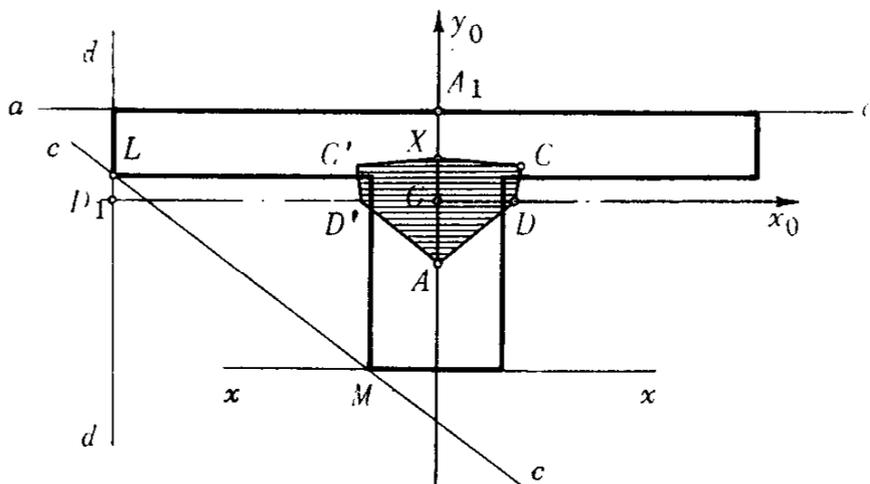


Fig. 36.2

POSIZIONE DEL BARICENTRO. - Si trova sull'asse y , alla distanza dalla retta x :

$$y_G = \frac{S_x}{A}$$

$$S_x = \frac{Bh^2}{2} - \frac{(B-b)}{2} h_1^2 = 44 \times 10^3 \text{ cm}^3$$

$$A = 1600 \text{ cm}^2$$

$$y_G = \frac{44 \times 10^3}{1,6 \times 10^3} = 27,5 \text{ cm}$$

$$\bar{y}_G = h - y_G = 12,5 \text{ cm.}$$

MOMENTI PRINCIPALI D'INERZIA. - Per ovvie ragioni di simmetria, gli assi principali d'inerzia sono quelli verticale e orizzontale per il baricentro.

$$J_{y_0} = \frac{h_0 B^3 + h_1 b^3}{12} = 85,33 \times 10^4 \text{ cm}^4; \quad \rho_{y_0}^2 = \frac{J_{y_0}}{A} = 533 \text{ cm}^2$$

Inoltre:

$$J_x = \frac{Bh^3 - (B-b)h_1^3}{3} = 141,33 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

e quindi, usando le formule di traslazione:

$$J_{x_0} = J_x - A \cdot y_G^2 = 20,33 \times 10^4 \text{ cm}^4; \quad \rho_{x_0}^2 = \frac{J_{x_0}}{A} = 127 \text{ cm}^2.$$

Ovviamente, $J_{x_0 y_0} = 0$.

DETERMINAZIONE DEI CENTRI RELATIVI.

Tangente a. - È parallela all'asse x_0 , perciò il suo centro relativo A si trova sull'altro asse principale y_0 , all'ordinata:

$$y_{0A} = - \frac{\rho_{x_0}^2}{\overline{GA}_1}$$

$$\rho_{x_0}^2 = 127 \text{ cm}^2; \quad \overline{GA}_1 = \bar{y}_G = 12,5 \text{ cm}$$

$$y_{0A} = -10,16 \text{ cm.}$$

Tangente d. - Si ha subito:

$$x_{0D} = - \frac{\rho_{y_0}^2}{\overline{D}_1G}$$

$$\rho_{y_0}^2 = 533 \text{ cm}^2; \quad \overline{D}_1G = -\frac{B}{2} = -50 \text{ cm}$$

$$x_{0D} = +10,66 \text{ cm.}$$

Oppure, si può usare la nota costruzione grafica, ricordando che ρ_{y_0} è medio proporzionale tra \overline{GD} e \overline{GD}_1 . Basta condurre, dal baricentro, un segmento normale all'asse x_0 e lungo ρ_{y_0} ; congiungere D_1 col suo estremo K , e da questo tracciare la normale a D_1K . Si identifica così, sull'asse x_0 , l'antipolo D (fig. 36.3).

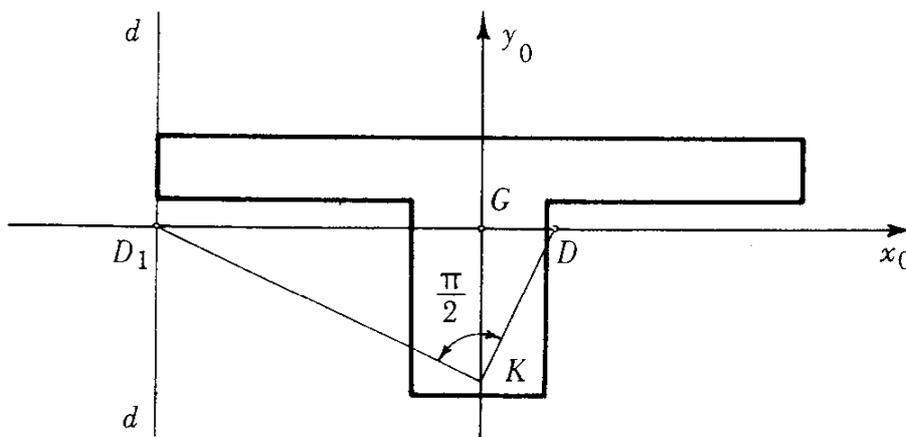


Fig. 36.3

Tangente c . - Tocca la sezione nei due punti:

$$L (-50; +2,5) \quad \text{e} \quad M (-10; -27,5)$$

pertanto, nel riferimento principale, ha equazione:

$$-\frac{x_0}{46,5} - \frac{y_0}{35} = 1.$$

Le sue intercette sugli assi sono, rispettivamente:

$$l = -46,5 \text{ cm}$$

$$m = -35 \text{ cm}$$

perciò le coordinate del suo centro relativo valgono:

$$x_{0C} = -\frac{\rho_{y_0}^2}{l} = +11,48 \text{ cm}$$

$$y_{0C} = -\frac{\rho_{x_0}^2}{m} = +3,57 \text{ cm.}$$

Tutto ciò equivale, anche, a determinare C in base a considerazioni di reciprocità.

La tangente c interseca gli assi principali d'inerzia nei punti N , P (fig. 36.4). Il punto N ha retta coniugata n parallela all'asse y_0 , e di equazione:

$$x_0 = -\frac{\rho_{y_0}^2}{GN} = \frac{533}{46,5} = 11,48 \text{ cm.}$$

Invece, P ha retta coniugata p d'equazione:

$$y_0 = -\frac{\rho_{x_0}^2}{GP} = \frac{127}{35} = 3,57 \text{ cm.}$$

La retta c contiene N e P ; dunque, il suo punto coniugato C si trova all'intersezione delle due antipolari n e p .

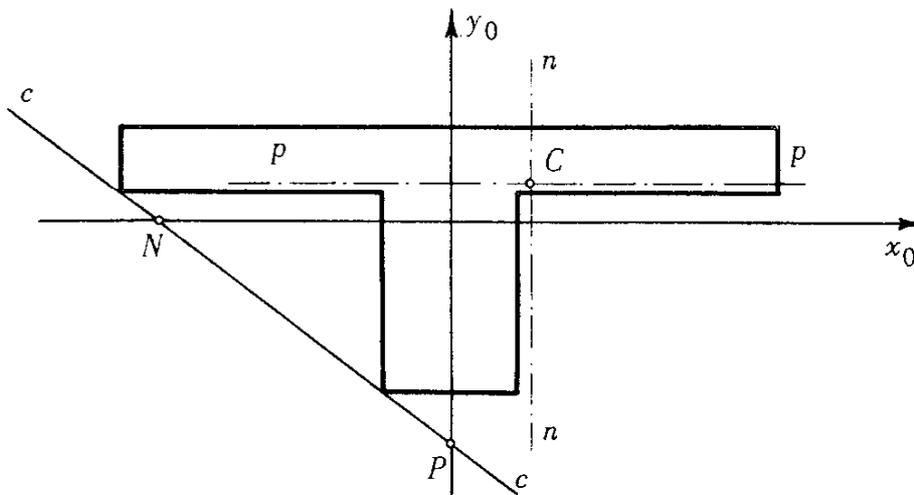


Fig. 36.4

Tangente x . - X si trova sull'asse y_0 , all'ordinata

$$y_X = \frac{J_x}{S_x} = \frac{141,33 \times 10^4}{44 \times 10^3} = 32,12 \text{ cm.}$$

37. - Determinare l'ellisse ed il nocciolo centrale d'inerzia della sezione costituita da due profilati a L $100 \times 100 \times 10$ (fig. 37.1).

ELLISSE CENTRALE D'INERZIA. - Le caratteristiche geometriche dei profili unificati sono elencate nelle apposite tabelle.

Riportiamo qui di seguito le più interessanti.

Per un singolo profilo ⁽¹⁾ delle dimensioni assegnate:

$$\begin{aligned} A_1 &= 19,2 \text{ cm}^2 \\ J_{x_1} &= J_{y_1} = 177 \text{ cm}^4 \\ J_{\epsilon_1} &= 280 \text{ cm}^4 \\ J_{\eta_1} &= 73,3 \text{ cm}^4. \end{aligned}$$

⁽¹⁾ UNI 821-823.

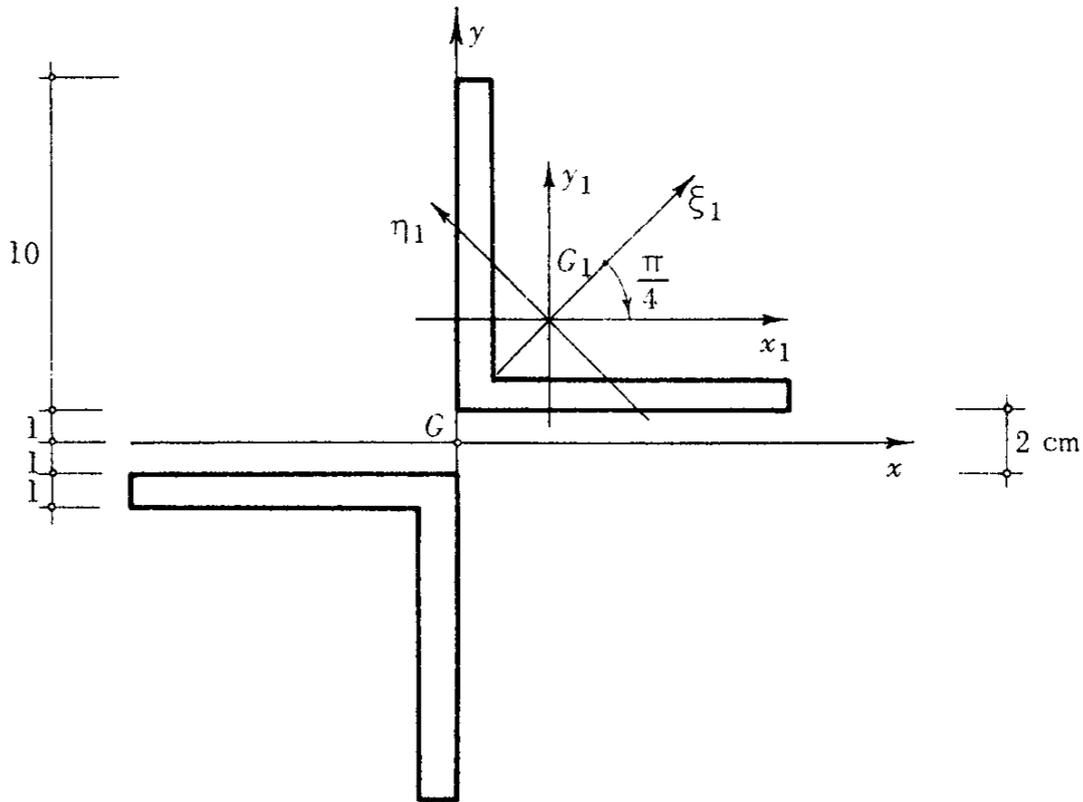


Fig. 37.1

Con l'ausilio delle formule di rotazione è possibile procurarsi il momento centrifugo rispetto agli assi x_1, y_1 a partire dai momenti principali J_{ξ_1}, J_{η_1} . Poiché gli assi principali sono caratterizzati dalla proprietà $J_{\xi_1 \eta_1} = 0$ si ottiene:

$$J_{x_1 y_1} = \frac{J_{\xi_1} - J_{\eta_1}}{2} \operatorname{sen} 2\alpha.$$

In questo caso, $\alpha = -\frac{\pi}{4}$; $\operatorname{sen} 2\alpha = -1$

$$J_{x_1 y_1} = -\frac{J_{\xi_1} - J_{\eta_1}}{2} = -103,3 \text{ cm}^4.$$

Le formule di traslazione permettono il calcolo dei momenti del secondo ordine rispetto alla coppia (x, y) . Le tabelle forniscono anche la posizione del baricentro G_1 . Rispetto alla suddetta coppia (x, y) si ha:

$$x_{G_1} = 2,82 \text{ cm}$$

$$y_{G_1} = 3,82 \text{ cm.}$$

Di conseguenza:

$$\begin{aligned} J_x &= 2(J_{x_1} + A_1 \cdot y_{G_1}^2) = \\ &= 2(177 + 19,2 \times \overline{3,82^2}) = 914 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_y &= 2(J_{y_1} + A_1 \cdot x_{G_1}^2) = \\ &= 2(177 + 19,2 \times \overline{2,82^2}) = 659 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{xy} &= 2(J_{x_1 y_1} + A_1 \cdot x_{G_1} \cdot y_{G_1}) = \\ &= 2(-103,3 + 19,2 \times 3,82 \times 2,82) = 207 \text{ cm}^4. \end{aligned}$$

Gli assi e momenti principali d'inerzia si ottengono rapidamente dal circolo di MOHR.

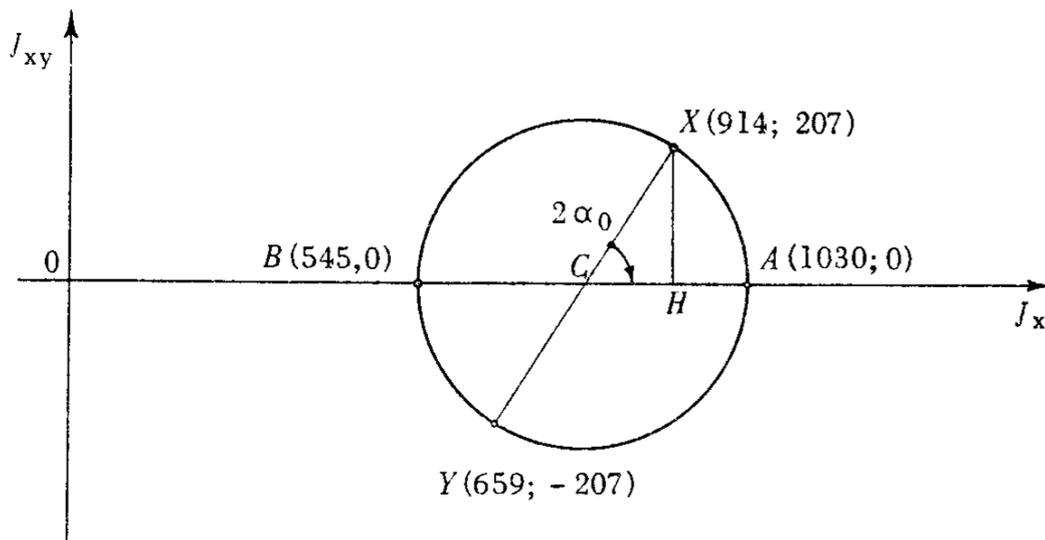


Fig. 37.2

Agli assi x , y corrispondono i punti X , Y .

L'asse ξ di massimo momento d'inerzia si ottiene da x ruotando in senso orario (negativo) di α_0 .

Dal circolo si ottiene subito:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{\overline{XH}}{\overline{CH}}$$

ove:

$$\overline{XH} = J_{xy} = 207 \text{ cm}^4$$

$$\overline{CH} = \frac{J_x - J_y}{2} = 126,5 \text{ cm}^4$$

$$2\alpha_0 = 58^\circ 31',$$

L'asse ξ è allora identificato dall'angolo negativo

$$\alpha_0 = 29^\circ 16',$$

I momenti principali d'inerzia valgono rispettivamente:

$$J_\xi = \overline{OC} + \overline{CX}$$

$$J_\eta = \overline{OC} - \overline{CX}$$

ove:

$$\overline{OC} = \frac{J_x + J_y}{2} = 787,5 \text{ cm}^4$$

$$\overline{CH} = \frac{\overline{XH}}{\operatorname{sen} 2\alpha_0} = \frac{207}{0,8536} = 242,5 \text{ cm}^4$$

$$J_\xi = 787,5 + 242,5 = 1030 \text{ cm}^4$$

$$J_\eta = 787,5 - 242,5 = 545 \text{ cm}^4$$

I raggi dell'ellisse valgono allora:

$$\rho_\xi = \sqrt{\frac{J_\xi}{A}} = \sqrt{\frac{1030}{38,4}} = 5,31 \text{ cm}$$

$$\rho_\eta = \sqrt{\frac{J_\eta}{A}} = \sqrt{\frac{545}{38,4}} = 3,77 \text{ cm.}$$

NOCCILO CENTRALE D'INERZIA. - I profilati normali non hanno le facce parallele. Tuttavia, senza commettere errore sensibile, si può schematizzare il profilo come mostra la figura.

Tracciamo le tangenti fondamentali, che sono in numero di otto. Il nocciolo, di conseguenza, sarà un ottagono (convesso).

Poiché la sezione complessiva gode di simmetria polare rispetto al baricentro, anche il nocciolo risulterà **simmetrico**. Basterà allora determinarne quattro vertici, che sono i centri **relativi** di quattro tangenti consecutive.

La determinazione analitica dei centri relativi può farsi comodamente nel riferimento principale.

Determineremo le equazioni delle tangenti nel riferimento centrale (x, y) ; poi le trasformeremo nel sistema principale (ξ, η) mediante una rotazione d'assi.

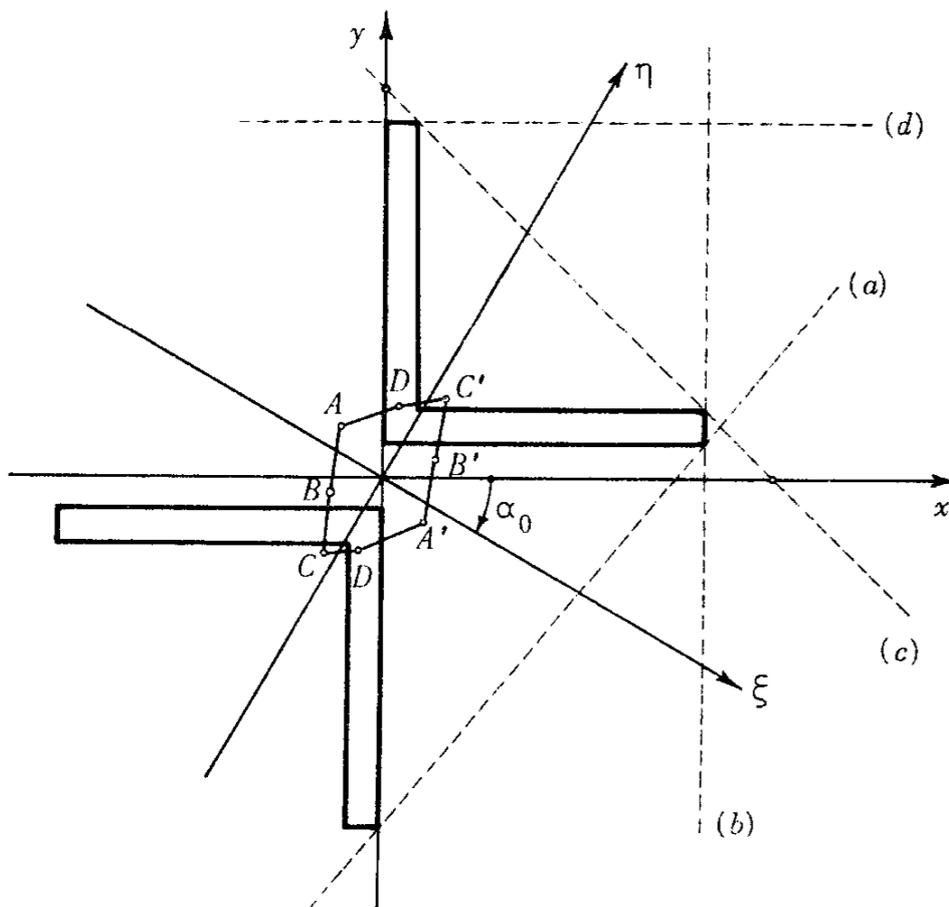


Fig. 37.3

Le formule di trasformazione risultano:

$$x = \xi \cos \alpha_0 + \eta \operatorname{sen} \alpha_0$$

$$y = \eta \cos \alpha_0 - \xi \operatorname{sen} \alpha_0$$

Poiché $\alpha_0 = 29^\circ 16'$ si ha:

$$\operatorname{sen} \alpha_0 = 0,489 \quad \cos \alpha_0 = 0,872$$

e pertanto le formule di trasformazione divengono:

$$x = 0,872 \xi + 0,489 \eta$$

$$y = -0,489 \xi + 0,872 \eta$$

Le equazioni nel riferimento (x, y) sono dedotte con procedimenti elementari, in base ai punti della sezione che le tangenti contengono.

Le trasformate, nel riferimento (ξ, η) sono riportate mediante l'equazione contenente le intercette sugli assi.

RETТА	EQUAZIONE IN (x, y)	EQUAZIONE IN (ξ, η)
(a)	$-0,109 x + 0,091 y + 1 = 0$	$\frac{\xi}{7,17} + \frac{\eta}{-39,53} = 1$
(b)	$x = 10$	$\frac{\xi}{11,47} + \frac{\eta}{20,45} = 1$
(c)	$-0,0833 (x + y) + 1 = 0$	$\frac{\xi}{31,35} + \frac{\eta}{8,82} = 1$
(d)	$y = 11$	$\frac{\xi}{-22,49} + \frac{\eta}{12,61} = 1$

È ora facile calcolare le coordinate del centro relativo di ciascuna retta. Se quella generica ha equazione:

$$\frac{\xi}{l} + \frac{\eta}{m} = 1$$

le coordinate del suo centro relativo risultano:

$$\bar{\xi} = -\frac{\rho_{\eta}^2}{l}$$

$$\bar{\eta} = -\frac{\rho_{\xi}^2}{m}$$

Qui si ha:

$$\rho_{\xi}^2 = 26,82 \text{ cm}^2$$

$$\rho_{\eta}^2 = 14,19 \text{ cm}^2.$$

Le coordinate degli antipoli, cioè dei vertici del nocciolo, sono riportate nella tabella seguente (l'unità di misura è il cm).

RETTA	INTERCETTE SUGLI ASSI		COORDINATE DEL CENTRO RELATIVO	
	l	m	$\bar{\xi}$	$\bar{\eta}$
(a)	+ 7,17	- 39,53	- 1,98	+ 0,68
(b)	+ 11,47	+ 20,45	- 1,28	- 1,31
(c)	+ 31,35	+ 8,82	- 0,45	- 3,04
(d)	- 22,49	+ 12,61	+ 0,63	- 2,12

I quattro centri relativi, denominati rispettivamente A , B , C , D sono riportati nella fig. 37.3; il nocciolo è poi completato, facendo ricorso alla simmetria polare, mediante i vertici A' , B' , C' , D' e gli otto lati che formano il contorno.