

C) **EFFETTI TOTALI.** - Si ottengono le reazioni definitive sommando vettorialmente quelle conseguenti alle due singole condizioni di carico (fig. 16.5).

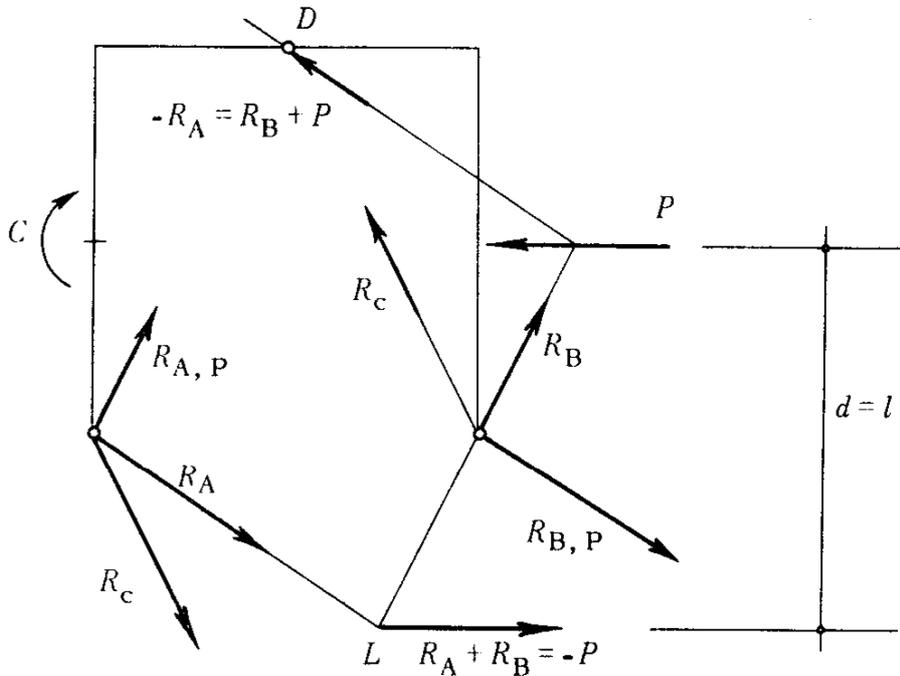


Fig. 16.5

Si noti che le reazioni R_A e R_B si intersecano in un punto L , che dista di $d = l$ dalla retta di P . Infatti, la risultante di R_A e R_B deve equilibrare quella dei carichi esterni, che è appunto una forza P traslata verso il basso di

$$\delta = \frac{C}{P} = l.$$

In definitiva, la curva delle pressioni è costituita:

- dalla retta d'azione di R_A per il semipiedritto inferiore sinistro;
- dalla retta d'azione di R_B per il semipiedritto inferiore destro;
- dalla retta di $R_B + P$ (oppure risultante di R_A e C , passante per la cerniera D) per il resto del portale.

SOLUZIONE ANALITICA.

CALCOLO DELLE REAZIONI. - Le reazioni verticali formano una coppia, che equilibra il momento dei carichi e delle spinte:

$$V \cdot l = C - P \frac{l}{2} = P \frac{l}{2}$$

$$V = \frac{P}{2}.$$

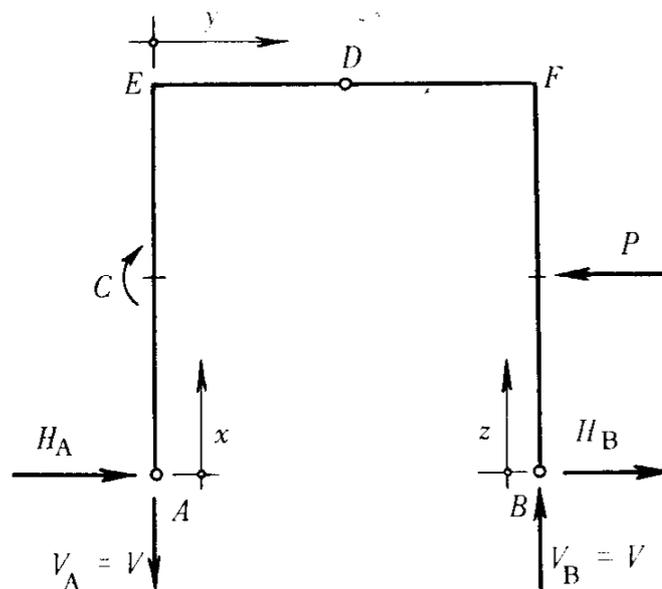


Fig. 16.6

La reazione H_A si calcola annullando il momento flettente in D (forze alla sinistra):

$$V \frac{l}{2} + H_A \cdot l - C = 0$$

$$H_A = \frac{3}{4} P.$$

Dall'equilibrio alla traslazione orizzontale:

$$H_B = P - H_A = \frac{1}{4} P.$$

CALCOLO DELLE AZIONI INTERNE. - Ci limitiamo a riportare le leggi di variazione nonché i relativi diagrammi (fig. 16.7).

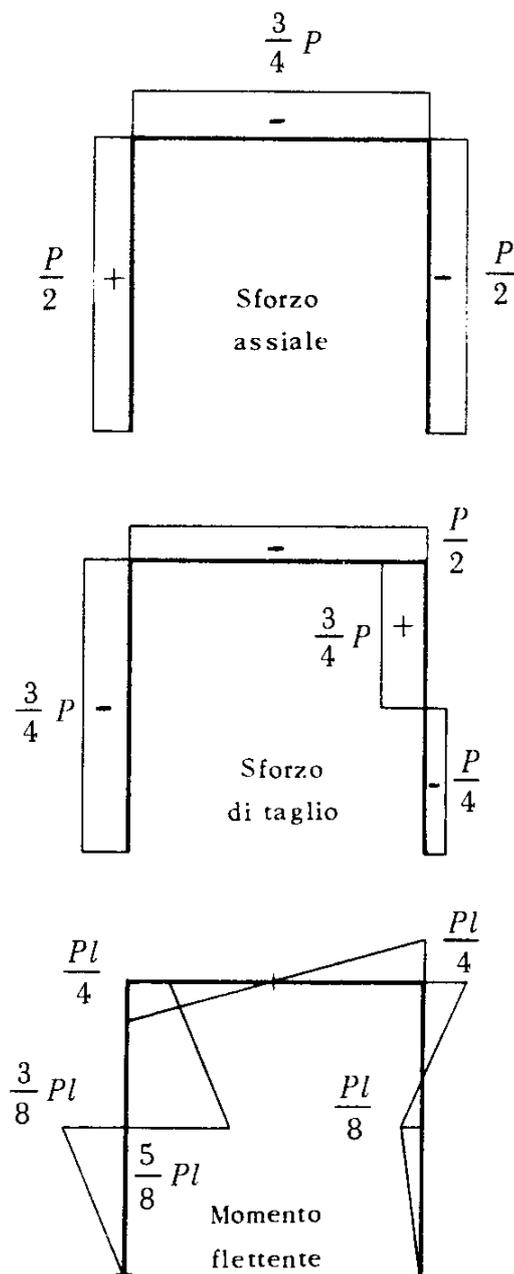


Fig. 16.7

Sforzo assiale.

1. *Tratto AE:* $N(x) = +V = +\frac{P}{2}$
2. *Tratto EF:* $N(y) = -H_A = -\frac{3}{4}P$

$$3. \text{ Tratto } BF: \quad N(z) = -V = -\frac{P}{2}$$

Sforzo di taglio.

$$1. \text{ Tratto } AE: \quad T(x) = -H_A = -\frac{3}{4}P$$

$$2. \text{ Tratto } EF: \quad T(y) = -V = -\frac{P}{2}$$

$$3. \text{ Tratto } BF: \quad T(z) = -H_B = -\frac{1}{4}P \quad 0 \leq z < \frac{l}{2}$$

$$T(z) = +H_A = \frac{3}{4}P \quad \frac{l}{2} < z < l$$

Momento flettente.

1. *Tratto AE:*

$$M(x) = H_A \cdot x = \frac{3}{4}P \cdot x \quad 0 \leq x < \frac{l}{2}$$

(tende le fibre esterne);

$$M(x) = \frac{3}{4}Px - C = P\left(\frac{3}{4}x - l\right) \quad \frac{l}{2} < x \leq l$$

(tende le fibre interne);

2. *Tratto EF:*

$$M(y) = H_A \cdot l - C - V \cdot y = \frac{P}{2} \left(y - \frac{l}{2} \right)$$

(tende le fibre interne quando $y < \frac{l}{2}$);

3. *Tratto BF:*

$$M(z) = H_B \cdot z = \frac{P}{4}z \quad 0 \leq z \leq \frac{l}{2}$$

(tende le fibre interne);

$$M(z) = H_B z - P\left(z - \frac{l}{2}\right) = \frac{P}{4}(2l - 3z) \quad \frac{l}{2} \leq z \leq l$$

(tende le fibre interne quando $z \leq \frac{2}{3}l$).

17. - Risolvere la struttura chiusa della fig. 17.1.

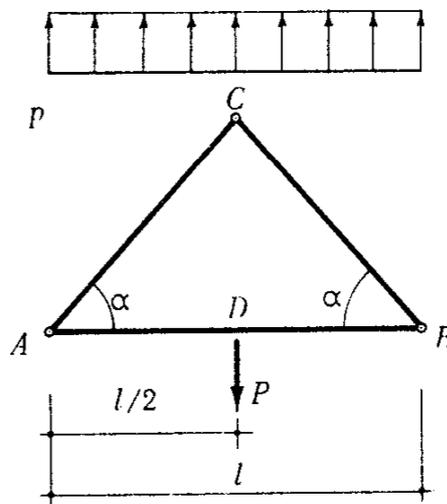


Fig. 17.1

La struttura è priva di vincoli esterni: essa può restare in quiete solo se caricata da un sistema di forze in equilibrio.

Affinché possa verificarsi tale circostanza, deve risultare:

$$P = pl.$$

Notiamo, adesso, che la struttura è internamente isostatica. Infatti, le tre cerniere interne tolgono alle aste sei libertà di movimento relativo. Al complesso restano quindi tre gradi di libertà, corrispondenti alla possibilità di moto, nel piano, come unico corpo rigido, di tutta la struttura.

Oppure, ricordando che la struttura priva di cerniere è tre volte iperstatica, si nota che ogni cerniera introduce una sconnessione semplice. In complesso, le tre sconnessioni rendono isostatica la struttura.

Nelle strutture chiuse, la determinazione delle azioni interne presuppone la conoscenza di quelle relative ad una qualsiasi sezione.

Si dovrà, quindi, eseguire un sezionamento completo e determinare le azioni interne della sezione di sconnessione mediante opportune condizioni di equilibrio. Successivamente si passerà al calcolo delle sollecitazioni, considerando come iniziale la sezione suddetta.

SOLUZIONE ANALITICA.

La simmetria della struttura e del carico, rispetto alla verticale per C , fa riconoscere a priori che l'azione interna in C è orizzontale. Conviene allora sciogliere la solidarietà tra le aste inclinate in corrispondenza della cerniera che le collega. Si mette così in evidenza, come incognita, l'azione mutua H .

Essa è determinata dall'equazione ausiliaria che esprime l'annullarsi del momento flettente in A (o, indifferentemente, in B).

$$H \frac{l}{2} \operatorname{tg} \alpha - \frac{P}{2} \frac{l}{4} = 0$$

$$H = \frac{Pl}{4} \operatorname{cotg} \alpha.$$

La conoscenza di H permette ora di determinare le leggi di variazione delle azioni interne.

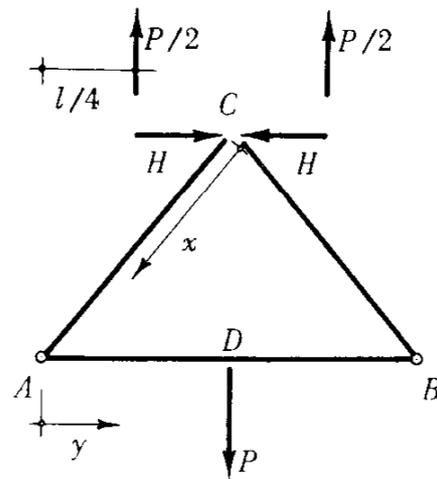


Fig. 17.2

Sforzo assiale.

1. Tratto CA:

$$N(x) = +H \cos \alpha + (px \cos \alpha) \sin \alpha = p \cos \alpha \left(x \sin \alpha + \frac{l}{4} \operatorname{cotg} \alpha \right).$$

2. Tratto AD:

$$N(y) = -H = -\frac{pl}{4} \operatorname{cotg} \alpha$$

Sforzo di taglio.1. *Tratto CA:*

$$T(x) = +H \operatorname{sen} \alpha - (px \cos \alpha) \cos \alpha = p \cos \alpha \left(\frac{l}{4} - x \cos \alpha \right).$$

2. *Tratto AD:*

$$T(y) = +p \frac{l}{2}.$$

Momento flettente.1. *Tratto CA:*

$$M(x) = H \cdot x \operatorname{sen} \alpha - \frac{p}{2} (x \cos \alpha)^2 = \frac{p \cos \alpha}{2} x \left(\frac{l}{2} - x \cos \alpha \right)$$

Poiché $x \leq \frac{l}{2 \cos \alpha}$, prevale il primo termine; le fibre tese risultano quelle esterne.

2. *Tratto AD:*

$$M(y) = p \frac{l}{2} y.$$

Le fibre tese sono quelle all'esterno (inferiori).

DIAGRAMMI DELLE AZIONI INTERNE. - Il tracciamento dei diagrammi può essere eseguito sinteticamente, anche senza aver prima ricavato le leggi di variazione.

Sforzo assiale. - Nel traverso AB è costante, di compressione e vale $H = p \frac{l}{4} \cotg \alpha$.

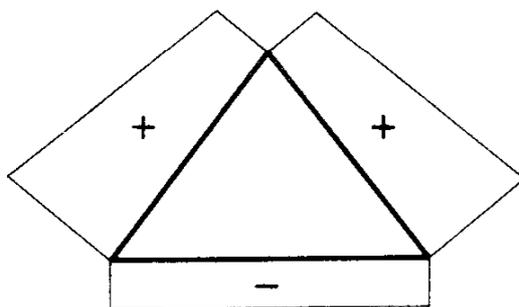


Fig. 17.3

Nei tratti inclinati il carico assiale $p \operatorname{sen} \alpha$ è costante, pertanto lo sforzo assiale varia linearmente. In sommità è:

$$N = H \cos \alpha \quad (\text{trazione})$$

In A si aggiunge l'effetto del carico; allora:

$$N_A = H \cos \alpha + \frac{P}{2} \operatorname{sen} \alpha$$

Sforzo di taglio. - Il carico normale all'asse applicato a ciascuna delle travi ha andamento simmetrico. Ne segue che ogni trave ha il taglio variabile come nella trave appoggiata di ugual luce e carichi.

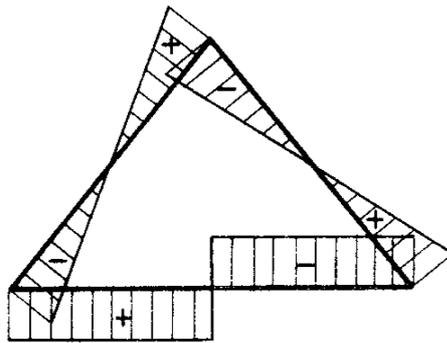


Fig. 17.4

Momento flettente. - Valgono le stesse considerazioni fatte per lo sforzo di taglio.

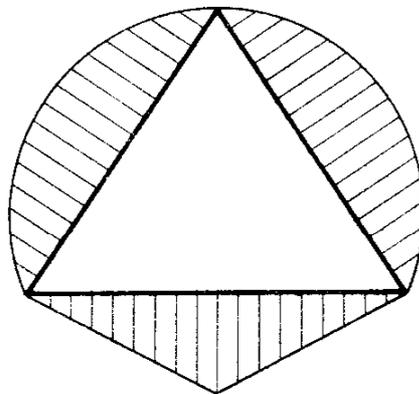


Fig. 17.5

LA CURVA DELLE PRESSIONI.

Svincoliamo la struttura, separando completamente la trave AB dalla parte restante.

La parte superiore è in equilibrio sotto l'azione del carico distribuito e delle reazioni applicate, attraverso le cerniere A e B , dalla trave orizzontale. Graficamente, la curva delle pressioni fornisce le azioni interne di ogni sezione. Poiché il carico è uniforme, detta curva coincide con la parabola che passa per A , C , B . Le tangenti ad essa in A e B sono le rette d'azione delle reazioni mutue R fra la trave inferiore e la parte superiore.

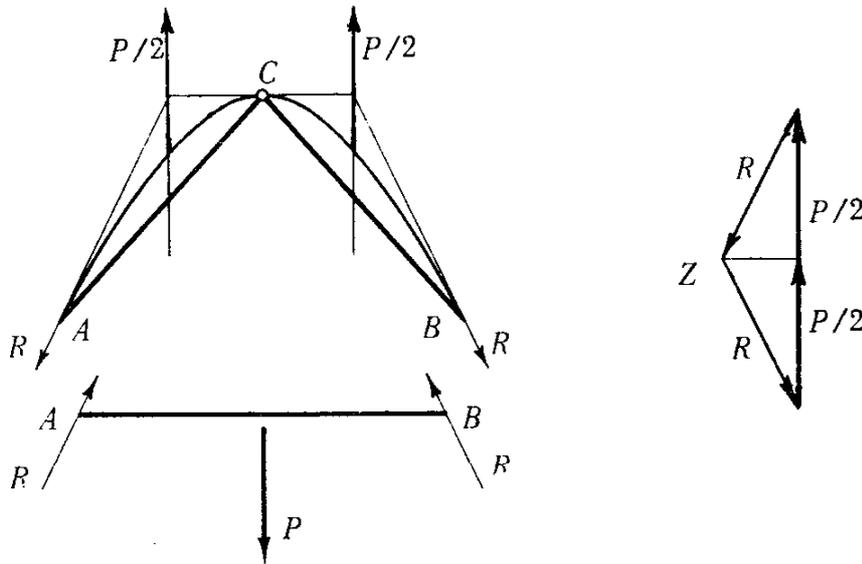


Fig. 17.6

Il triangolo d'equilibrio della parte superiore fornisce subito le reazioni R ; le loro rette d'azione formano la curva delle pressioni per la trave AB .

18. - Risolvere la struttura chiusa della fig. 18.1.

La coppia M_0 si intende applicata nella sezione all'estremo superiore del ritto AC .

La struttura è a vincoli misti: alcuni fissano la struttura all'esterno, altri collegano mutuamente le travi che la compongono.

La risoluzione può essere perseguita studiando separatamente il problema interno e quello esterno. I vincoli in A e B , invero, sono stret-

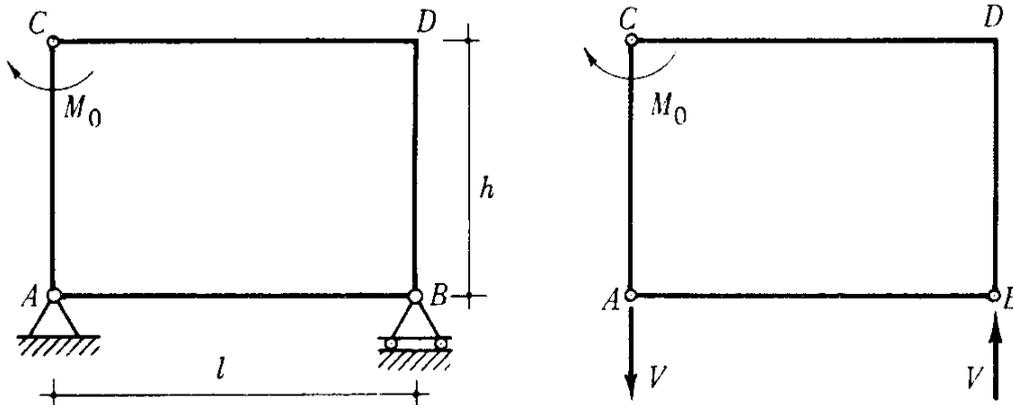


Fig. 18.1

tamente sufficienti a fissare il telaio nel piano. Semplici considerazioni di equilibrio permettono allora il calcolo delle reazioni esterne.

Inoltre, la struttura, privata del vincolamento esterno, rimane internamente isostatica, per la presenza delle tre cerniere che tolgono alle travi ogni libertà di moto relativo.

CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI. - Le reazioni di A e B devono formare una coppia che equilibra il momento di M_0 . La presenza in B dell'appoggio fa sì che la loro direzione comune sia verticale.

Con i versi della fig. 18.1 si ottiene:

$$V = \frac{M_0}{l}.$$

CALCOLO DELLE AZIONI INTERNE. - Svincoliamo internamente in C , mettendo in evidenza le azioni mutue N_0 e T_0 .

Per determinarle, basta annullare il momento flettente nelle due cerniere interne residue A e B .

Momento nullo in A. - Calcolando con le forze che provengono da C:

$$M_0 - T_0 h = 0 \quad \text{cioè} \quad T_0 = \frac{M_0}{h}.$$

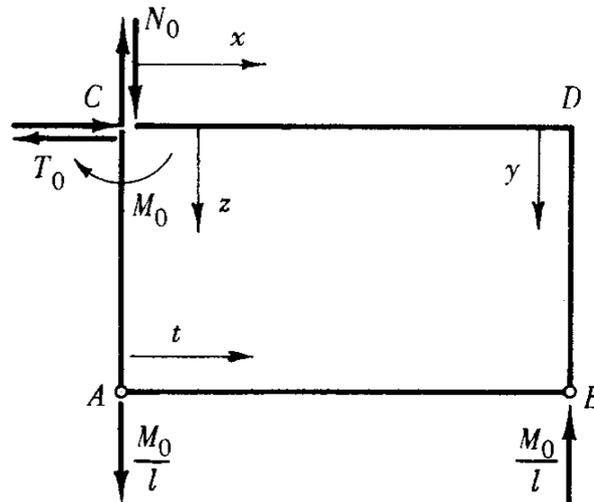


Fig. 18.2

Momento nullo in B. - Calcolando con le forze che provengono da C:

$$T_0 h - N_0 l = 0 \quad \text{cioè} \quad N_0 = T_0 \frac{h}{l} = \frac{M_0}{l}.$$

A questo punto è possibile calcolare le leggi di variazione delle azioni interne, assumendo le sezioni C come iniziali.

Sforzo assiale.

$$1. \text{ Tratto } CD: \quad N(x) = -T_0 = -\frac{M_0}{h}$$

$$2. \text{ Tratto } DB: \quad N(y) = -N_0 = -\frac{M_0}{l}$$

$$3. \text{ Tratto } AB: \quad N(t) = T_0 = \frac{M_0}{h}$$

$$4. \text{ Tratto } CA: \quad N(z) = N_0 = \frac{M_0}{l}$$

Sforzo di taglio.

1. *Tratto CD:* $T(x) = -N_0 = -\frac{M_0}{l}$
2. *Tratto DB:* $T(y) = T_0 = \frac{M_0}{h}$
3. *Tratto AB:* $T(t) = N_0 - \frac{M_0}{l} = 0$
4. *Tratto AC:* $T(z) = -T_0 = -\frac{M_0}{h}$

Momento flettente.

1. *Tratto CD:* $M(x) = N_0 \cdot x = M_0 \frac{x}{l}$
2. *Tratto DB:* $M(y) = N_0 l - T_0 \cdot y = M_0 \left(1 - \frac{y}{h}\right)$
3. *Tratto AB:* $M(t) = 0$
4. *Tratto AC:* $M(z) = T_0 \cdot z - M_0 = M_0 \left(\frac{z}{h} - 1\right)$

DIAGRAMMI DELLE AZIONI INTERNE. - Notiamo, innanzi tutto, che il ritto *AC*, svincolato dal resto della struttura, è in equilibrio sotto l'effetto di M_0 e dei tagli di estremità T_0 .

Tuttavia, l'equilibrio a rotazione del tratto *CDB* comporta la presenza, in *C*, della componente $N_0 = \frac{M_0}{l}$.

Per azione e reazione essa è applicata, col verso opposto, alla sezione *C* del tratto *CA*. L'equilibrio di quest'ultimo comporta la presenza di N_0 anche al suo estremo inferiore, e quindi, per reazione, al tratto *AB*.

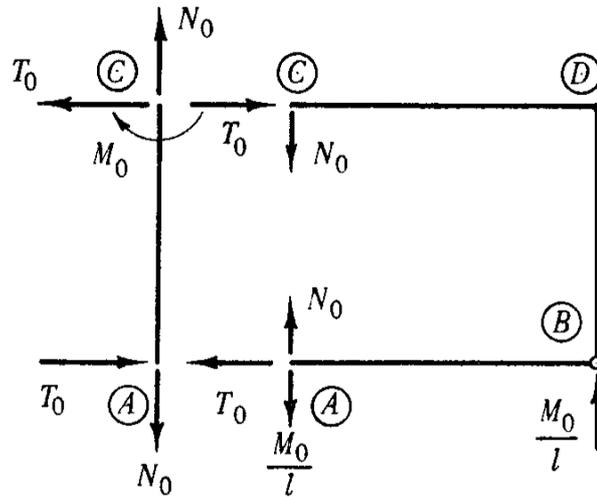


Fig. 18.3

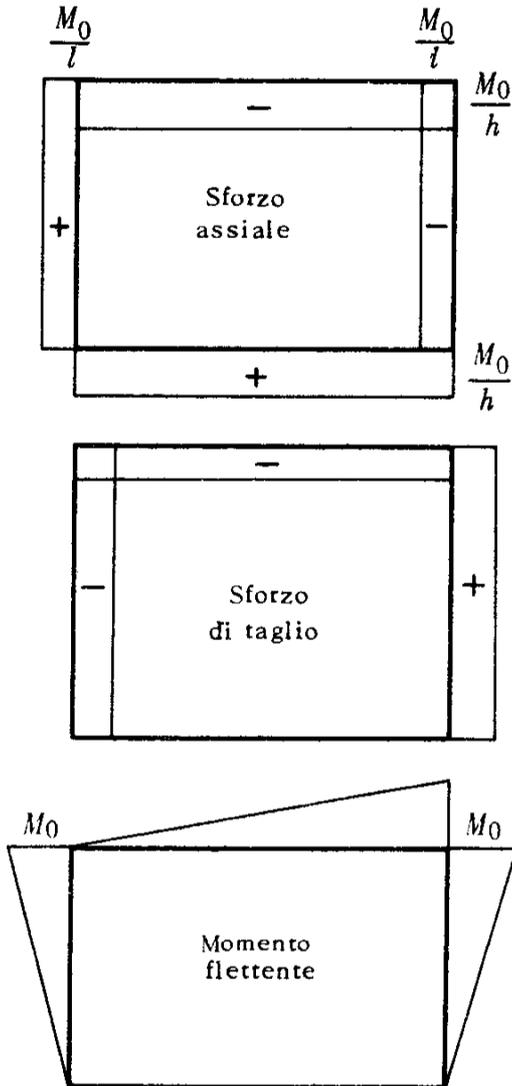


Fig. 18.4

Si noti che $N_0 = \frac{M_0}{l}$, quindi lo sforzo di taglio nel traverso AB è nullo.

Ciò è in accordo col fatto che esso è scarico, e pertanto funziona come una biella.

In conclusione, sforzo di taglio ed assiale sono costanti per ogni tratto della struttura.

I valori numerici si deducono subito da un semplice esame della fig. 18.3.

Il momento flettente, invece, è nullo nella biella AB , e varia linearmente negli altri tratti.

È nullo nelle cerniere interne, tranne che all'estremità superiore del ritto AC ove vale M_0 per la presenza della coppia esterna. Nel nodo D vale M_0 .

LA CURVA DELLE PRESSIONI. - La soluzione è immediata: basta riferirsi alla fig. 18.3. Ad ogni modo, anche qui si può ragionare sinteticamente, ottenendo la soluzione completa del problema.

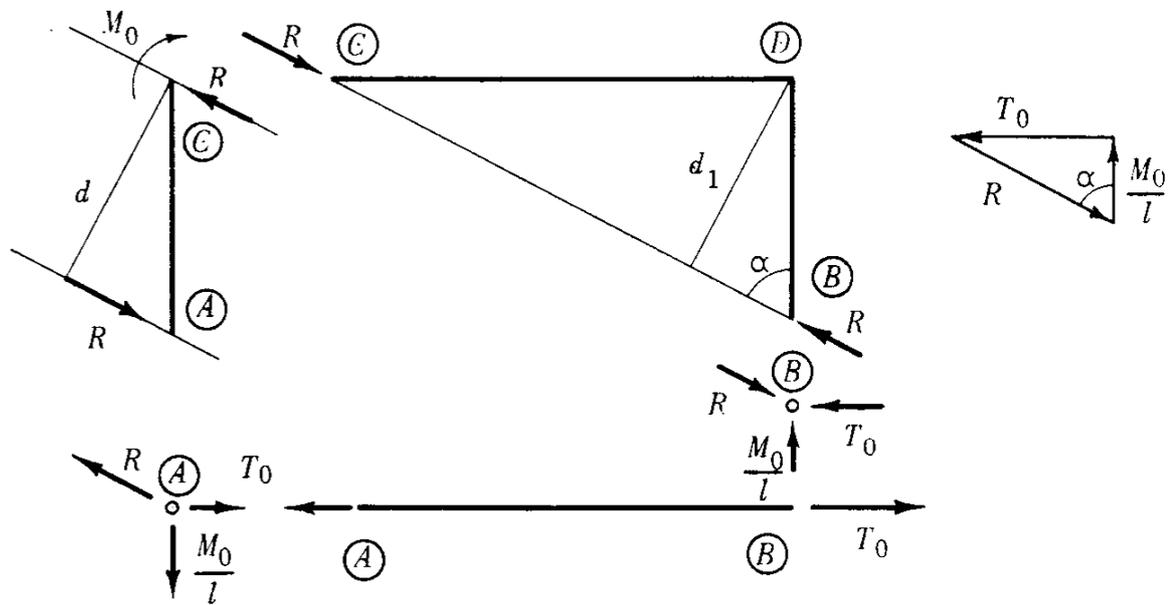


Fig. 18.5

Il tratto CDB è scarico; le reazioni di estremità, per farsi equilibrio, devono avere la medesima retta d'azione e modula uguale R .

L'azione, in C , sul ritto CA è allora ancora R ; lo stesso modulo, e verso ancora opposto, ha la reazione su AC in A .

L'equilibrio, poi, del tratto AC porge:

$$R = \frac{M_0}{d}.$$

Infine, la biella AB è soggetta alla trazione T_0 .

L'equilibrio del nodo A , oppure, indifferentemente, di B , fornisce i valori delle incognite.

$$T_0 = \frac{M_0}{l} \operatorname{tg} \alpha = \frac{M_0}{l} \frac{l}{h} = \frac{M_0}{h}$$

$$R = \frac{M_0}{l \cos \alpha} = M_0 \sqrt{\frac{1}{h^2} + \frac{1}{l^2}}.$$

Per quanto riguarda le azioni interne, si può dire quanto segue.

Nel tratto AB , la curva delle pressioni coincide con l'asse: le azioni interne si riducono al solo sforzo assiale T_0 .

Nel tratto AC , la forza R passante per A è l'azione interna corrente. In particolare, il momento flettente in C vale:

$$M_0 = R \cdot d,$$

da cui

$$d = \frac{M_0}{R}.$$

Nel tratto CDB , la curva coincide con la congiungente CB . In particolare, nel nodo D il momento flettente è:

$$M_D = R \cdot d_1.$$

Poiché $d_1 = d$, si ha infine:

$$M_D = R \frac{M_0}{R} = M_0.$$

OSSERVAZIONE. - Può presentare interesse riconoscere la stretta analogia tra il comportamento della struttura assegnata e quello del portale a tre cerniere che da essa si ottiene bloccando la cerniera B ed eliminando la biella AB .

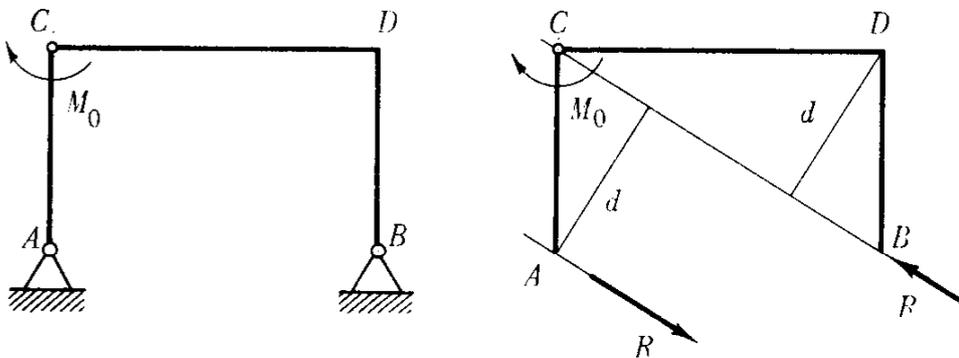


Fig. 18.6

Il lettore può agevolmente riconoscere che le azioni interne hanno lo stesso andamento.

La spinta orizzontale, prima fornita dal tirante AB , viene ora assorbita dalle cerniere terminali.

19. - Risolvere graficamente la struttura della fig. 19.1.

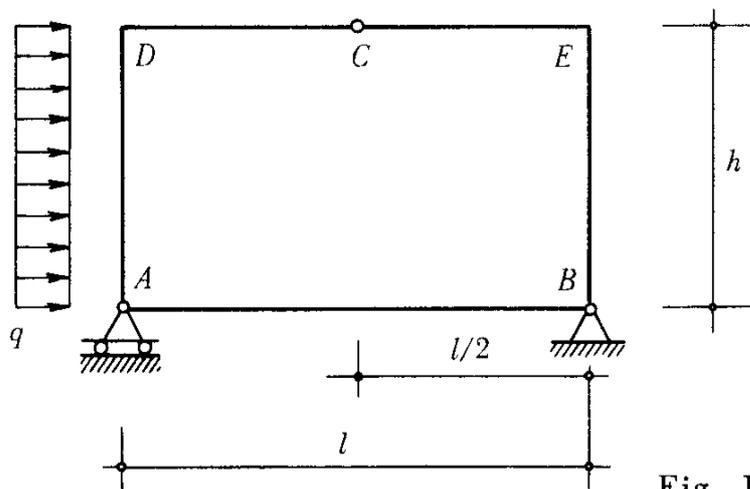


Fig. 19.1

LE REAZIONI VINCOLARI. - La struttura è esternamente isostatica, e può trattarsi come corpo rigido appoggiato in A e B .

La decomposizione del carico, di risultante $Q = q h$, fornisce subito le reazioni (fig. 19.2).

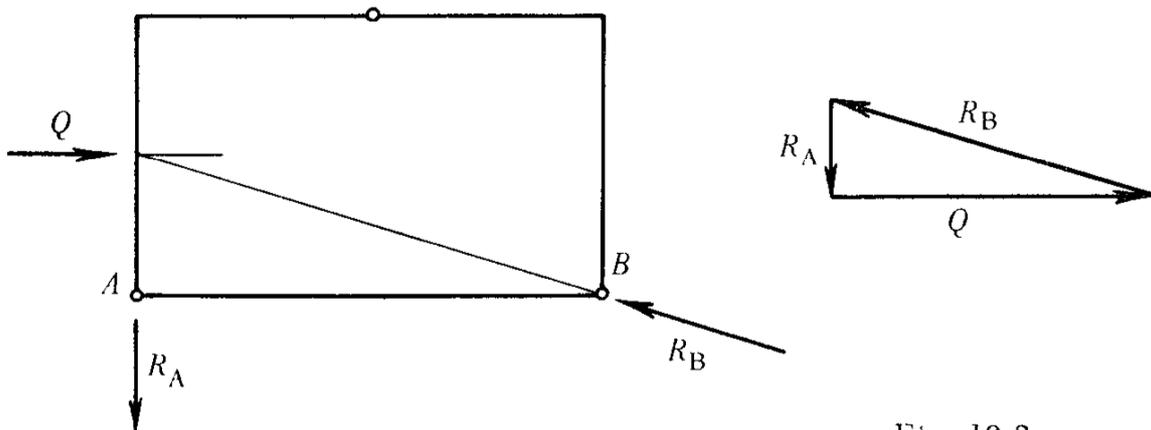


Fig. 19.2

LA CURVA DELLE PRESSIONI. - È necessario determinare l'andamento delle azioni interne, valendosi del passaggio della curva delle pressioni per le cerniere interne (ciò equivale a porre le equazioni ausiliarie, esprimenti l'annullarsi, nelle cerniere, del momento flettente).

Il tratto *CB* è scarico: ad ogni sua sezione compete la medesima azione interna. La sua retta d'azione passa per *B* e *C*, ne è, perciò, la congiungente.

Analogamente, l'azione interna della travata *AB* ha per retta d'azione il suo asse geometrico. Dette azioni interne si possono trovare, in modulo e verso, imponendo l'equilibrio del nodo *B*, e cioè scomponendo la reazione R_B secondo le direzioni *CB* e *BA*. A sua volta, la risultante dell'azione interna R_C in *C*, e del carico *Q*, deve passare per *A*. La scomposizione del carico secondo *CK* e *KA* fornisce, oltre alla R_C già nota, anche l'azione F_A che la cerniera *A* applica alla sezione di base del ritto *AD*.

L'equilibramento completo della struttura, separata nelle sue varie parti, è indicato nella fig. 19.3.

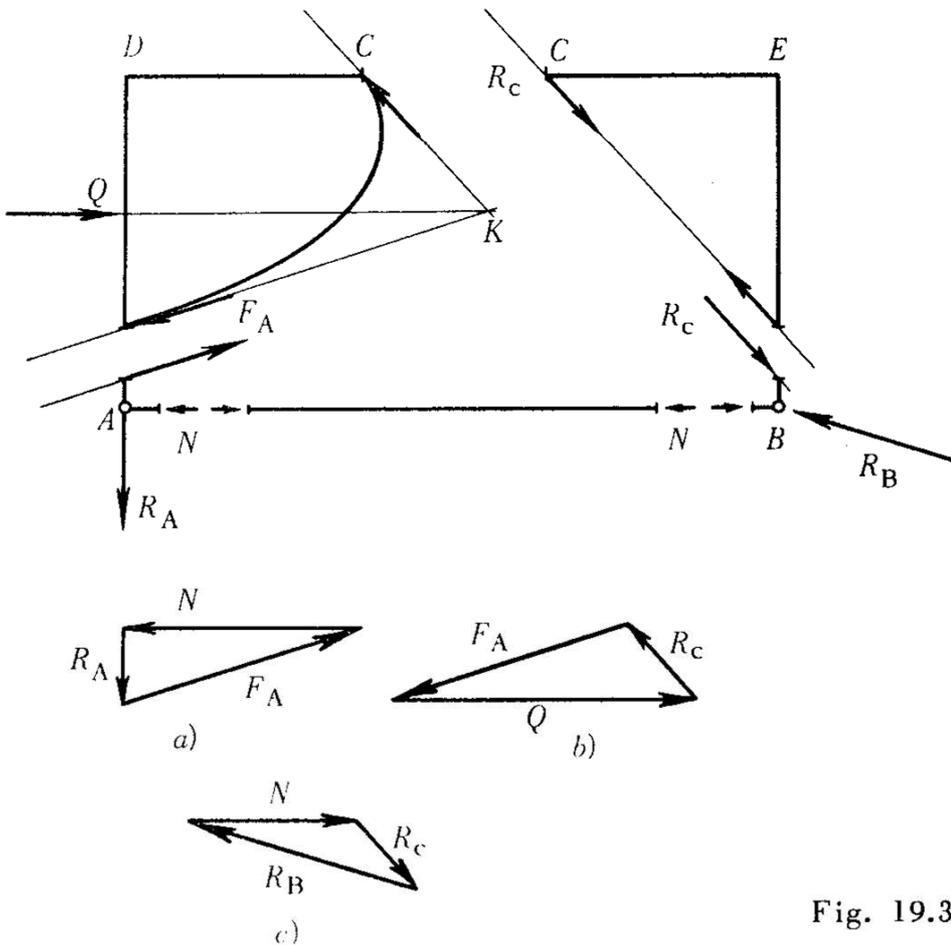


Fig. 19.3

Il triangolo *a*) esprime l'equilibrio del nodo *A*; il triangolo *b*), l'equilibrio del tratto *ADC*; infine, il *c*) esprime la quiete del nodo *B*.

Si deduce, infine:

1) la curva delle pressioni, per la trave *AB*, coincide col suo asse;

2) per il tratto *DCEB*, è la retta *CB*;

3) per il tratto *AD*, l'azione R_C (oppure la F_A) va composta col carico ripartito: si ottiene un arco di parabola, tangente in *A* e *C* alle rispettive azioni interne.

20. - Calcolare le sollecitazioni in un serbatoio cilindrico, appoggiato su un piano orizzontale, e pieno per metà d'acqua. Lo schema statico è indicato nella fig. 20.1.

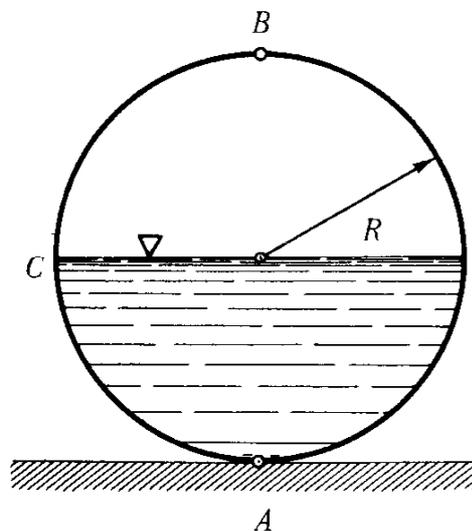


Fig. 20.1

Come in altri problemi di tipo analogo (vedi, ad esempio, gli esercizi 3 e 4), ci si può limitare allo studio di una trave ad anello, ottenuta sezionando il tubo con due piani normali al suo asse e posti alla distanza mutua unitaria.

La struttura così ottenuta è esternamente labile, ma staticamente determinata, poiché il piano d'appoggio fornisce una reazione (verticale) uguale e opposta al peso dell'acqua.

Internamente, la presenza delle due cerniere fa sì che la struttura sia una volta iperstatica.

Vedremo però, subito, che la simmetria rispetto al diametro verticale rende il problema staticamente determinato.

Tagliamo la struttura in due parti secondo il piano di simmetria.

Il carico idrostatico, che sollecita il semianello di sinistra, equivale ad una forza radiale, di cui si considerano la componente verticale e l'orizzontale.

La prima è uguale al peso Q dell'acqua posta alla sinistra del piano di simmetria:

$$Q = \gamma \cdot \frac{\pi R^2}{4} \quad (\text{in questa formula, } \gamma \text{ è il peso specifico dell'acqua}).$$

La seconda è la spinta H_0 che si esercita nell'acqua attraverso il piano di simmetria:

$$H_0 = \frac{1}{2} \gamma R^2.$$

La Q contiene il baricentro del quarto di cerchio pieno d'acqua; la H_0 passa a distanza $\frac{R}{3}$ da A .

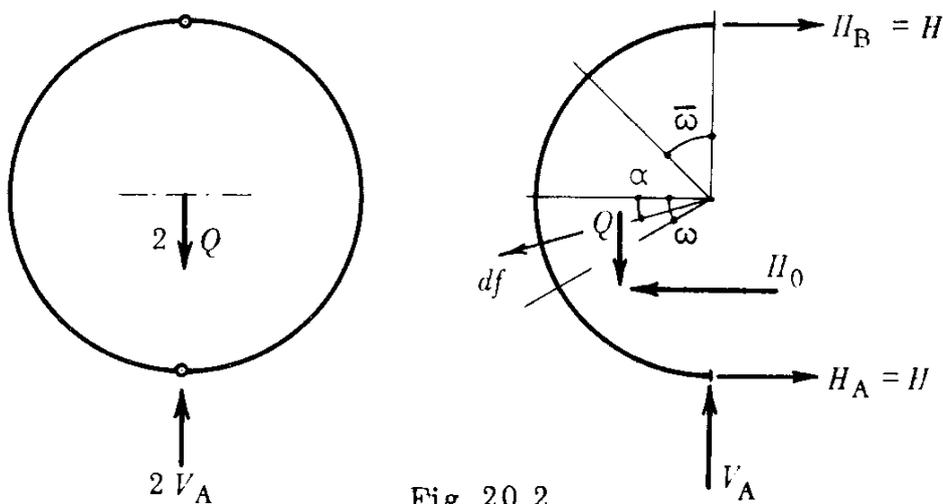


Fig. 20.2

Le reazioni mutue, che la parte destra trasmette alla sinistra attraverso le cerniere, sono orizzontali per simmetria.

Inoltre, alla sezione A è applicata anche metà della reazione esterna del piano d'appoggio.

Come si vede, le incognite si riducono a tre: H_A , H_B , V_A (fig. 20.2). Le tre equazioni cardinali della statica sono sufficienti a determinarle.

SOLUZIONE ANALITICA.

CALCOLO DELLE REAZIONI.

Equilibrio alla traslazione verticale:

$$V_A = -Q = \gamma \pi \frac{R^2}{4}.$$

Equilibrio alla rotazione intorno al centro. - I carichi distribuiti sono radiali; il loro contributo è nullo:

$$H_B \cdot R - H_A \cdot R = 0$$

$$H_A = H_B = H.$$

Equilibrio alla traslazione orizzontale:

$$2H - H_0 = 0$$

$$H = \frac{H_0}{2} = \frac{1}{4} \gamma R^2.$$

CALCOLO DELLE AZIONI INTERNE. - Si usano i riferimenti della fig. 20.2.

Sforzo assiale.

1. *Tratto BC:*

$$N(\bar{\omega}) = +H \cos \bar{\omega} = +\frac{1}{4} \gamma R^2 \cos \bar{\omega}$$

2. *Tratto CA:*

$$N(\omega) = +H \cos\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) + \int_0^{\omega} df \operatorname{sen}(\omega - \alpha).$$

Ora, $df = \gamma R \operatorname{sen} \alpha R d\alpha$ quindi: :

$$N(\omega) = -H \operatorname{sen} \omega + \int_0^{\omega} \gamma R^2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(\omega - \alpha) d\alpha$$

Sforzo di taglio.

1. *Tratto BC:*

$$T(\bar{\omega}) = +H \operatorname{sen} \bar{\omega} = +\frac{1}{4} \gamma R^2 \operatorname{sen} \bar{\omega}.$$

2. *Tratto CA:*

$$\begin{aligned} T(\omega) &= H \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) - \int_0^{\omega} df \cos(\omega - \alpha) = \\ &= H \cos \omega - \int_0^{\omega} \gamma R^2 \operatorname{sen} \alpha \cos(\omega - \alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

Momento flettente.

1. *Tratto BC:*

$$M(\bar{\omega}) = HR(1 - \cos \bar{\omega}) = \frac{1}{4} \gamma R^3 (1 - \cos \bar{\omega}).$$

Le fibre esterne sono tese.

2. *Tratto CA:*

$$\begin{aligned} M(\omega) &= HR \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) \right] - \int_0^{\omega} df R \operatorname{sen}(\omega - \alpha) = \\ &= HR(1 + \operatorname{sen} \omega) - \int_0^{\omega} \gamma R^3 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(\omega - \alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

LA CURVA DELLE PRESSIONI. - Sia R (fig. 20.3) la risultante di H_0 e Q , cioè del carico idrostatico applicato al semianello.

Per ragioni di simmetria, è nota la direzione (orizzontale) della reazione H_B della cerniera B .

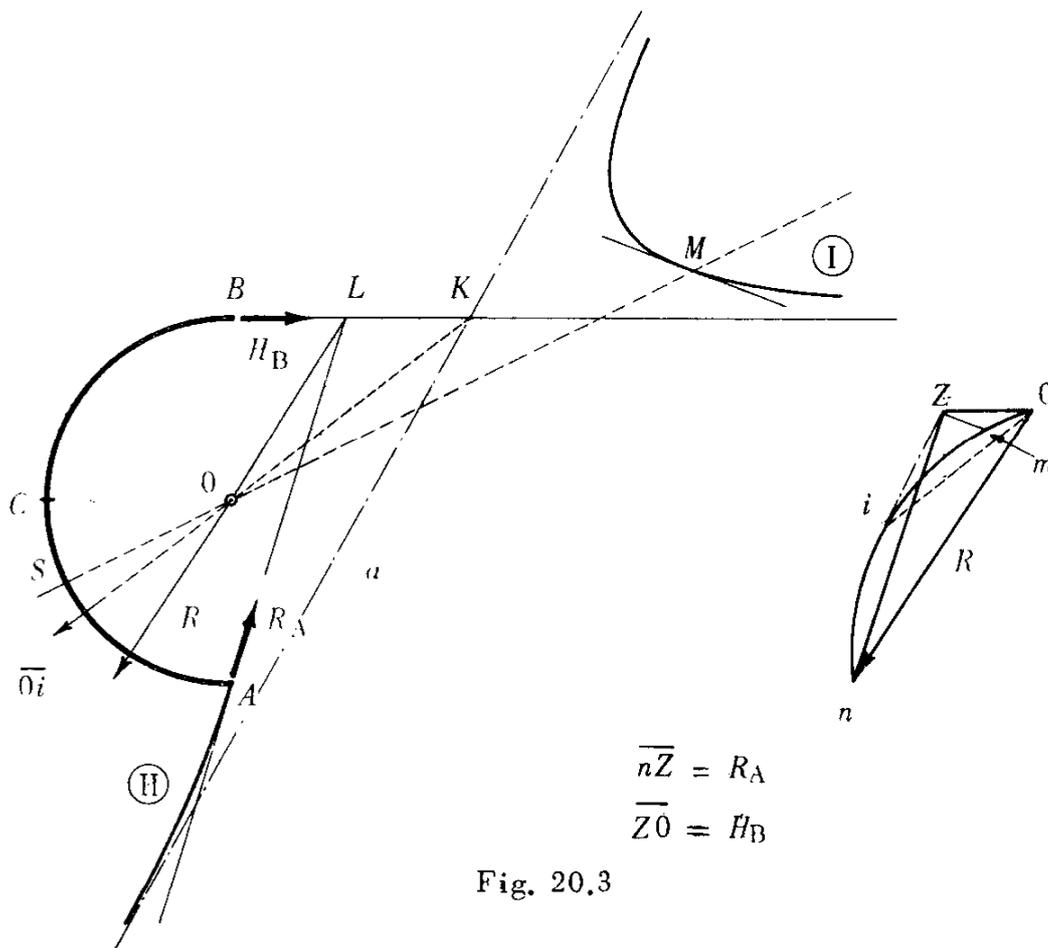


Fig. 20.3

Per il punto di intersezione L di H_B e R deve passare anche la reazione totale R_A di A .

Nella poligonale delle forze, il polo Z è l'intersezione delle parallele, per 0 e n , alle direzioni (ora note) di H_B e R_A . Il triangolo di equilibrio fornisce anche versi e moduli delle reazioni:

$$\begin{aligned} \overline{Z0} &= H_B \\ \overline{nZ} &= R_A. \end{aligned}$$

È ora possibile tracciare la curva delle pressioni, come poligono funicolare che collega i carichi, passa per A e B e trae origine dal polo Z .

Ciascuna sezione del tratto BC è preceduta dalla sola forza H_B , che ne è l'azione interna. Allora, per quel tratto la curva delle pressioni è costituita dall'orizzontale per B .

Al di sotto della sezione C è necessario prendere in considerazione anche il carico distribuito. Il primo carico elementare, nell'intorno di C , è orizzontale; la curva delle pressioni è allora asintotica alla retta d'azione di H_B .

L'andamento della curva è desumibile dall'esame delle successive proiettanti. Se si percorre la poligonale delle forze dal punto iniziale O verso quello finale n , si nota come le proiettanti vadano inclinandosi sempre più rispetto all'orizzontale. Corrispondentemente, la curva delle pressioni assume l'aspetto rappresentato dal ramo $\textcircled{\text{I}}$.

Sulla poligonale delle forze, sia i il punto di contatto della tangente, ad essa, condotta per il polo Z . Nella curva delle pressioni, il lato corrispondente si ottiene notando che la forza Zi è risultante di \overline{ZO} e $\overline{O_i}$, cioè di H_B e del carico precedente i .

L'intersezione di queste due forze è K ; il lato suddetto è la parallela, per K , a \overline{Zi} .

Il ramo $\textcircled{\text{I}}$ è tangente, all'infinito, al lato per K (a tratto e punto nel disegno).

Se si parte, invece, dall'estremo inferiore A , il primo lato è la retta di R_A .

Dal punto A parte un ramo di curva $\textcircled{\text{II}}$, tangente a R_A , i cui lati successivi sono paralleli alle proiettanti comprese tra $\overline{O_n}$ e $\overline{O_i}$.

I due rami $\textcircled{\text{I}}$ e $\textcircled{\text{II}}$ si raccordano all'infinito, attraverso il loro comune asintoto a .

La curva delle pressioni, che si è così ottenuta, ha un aspetto piuttosto inconsueto. Ciò non ne rende in alcun modo più complesso l'uso.

Così, per determinare l'azione interna nella sezione S basta tracciare il raggio che la contiene (direzione locale del carico) fino ad inter-

secare in M il ramo ① della curva.

La sua tangente in M è la retta d'azione dell'azione interna di S .

Il modulo e il verso dell'azione della parte superiore ad S su quella inferiore sono dati dal vettore \overline{Zm} , orientato da Z verso m (risultante di H_B e del carico al di sopra di S), e ottenuto tracciando per Z la parallela alla tangente, in M , alla curva delle pressioni.

* * *

21. - Studiare l'arco parabolico della fig. 21.1, sottoposto ad una distribuzione uniforme di carico.

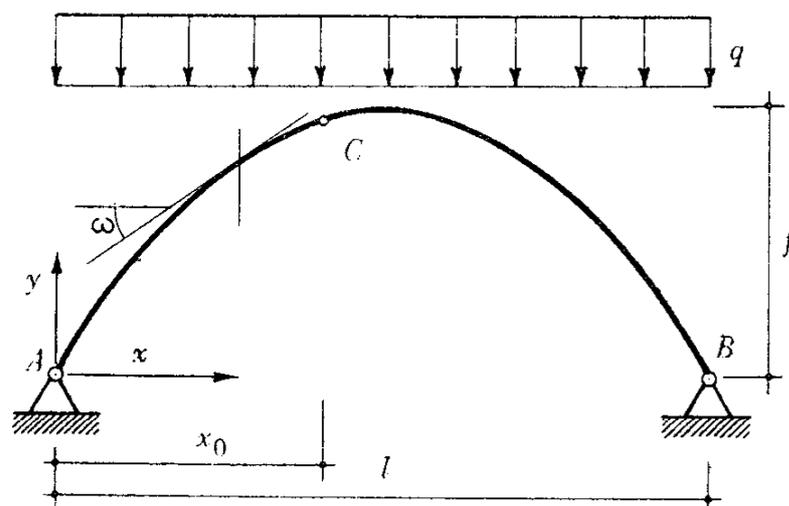


Fig. 21.1

EQUAZIONE DELL'ASSE DELL'ARCO.

L'equazione di ogni parabola, in un sistema di assi ortogonali (x, y) può porsi nella forma:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2).$$

In essa, x_1 e x_2 sono gli zeri della funzione y , cioè le ascisse dei

punti di intersezione della parabola con l'asse x .

Nel problema in esame, col riferimento indicato nella fig. 21.1, si ha:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = l$$

e pertanto:

$$y = ax(x-l).$$

La costante a si determina mediante l'ulteriore condizione:

$$y = f \quad \text{per} \quad x = \frac{l}{2}.$$

Si ottiene:

$$a = -\frac{4f}{l^2}$$

e quindi:

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x).$$

LA CURVA DELLE PRESSIONI.

Poiché il carico è parallelo, l'equazione della funicolare fornisce subito la forma di ogni poligono che lo collega. Trattandosi di una distribuzione uniforme, la curva delle pressioni è una parabola del 2° ordine. La sua posizione nel piano della struttura è invece definita dalle condizioni di vincolo.

La presenza delle tre cerniere fa sì che la curva passi per esse. Poiché i tre punti A , B , C definiscono un'unica parabola, la curva delle pressioni e l'asse della struttura non possono che coincidere.

In ogni sezione, l'azione interna ha come retta d'azione la tangente locale all'asse dell'arco. Questo è allora privo di taglio e di momento flettente, e soggetto soltanto a sforzo assiale. L'intensità di questo è

variabile, e si identifica, nella scala delle forze, con la lunghezza della generica proiettante nella poligonale delle forze. In particolare, le reazioni terminali hanno la direzione della tangente all'arco rispettivamente in A e in B .

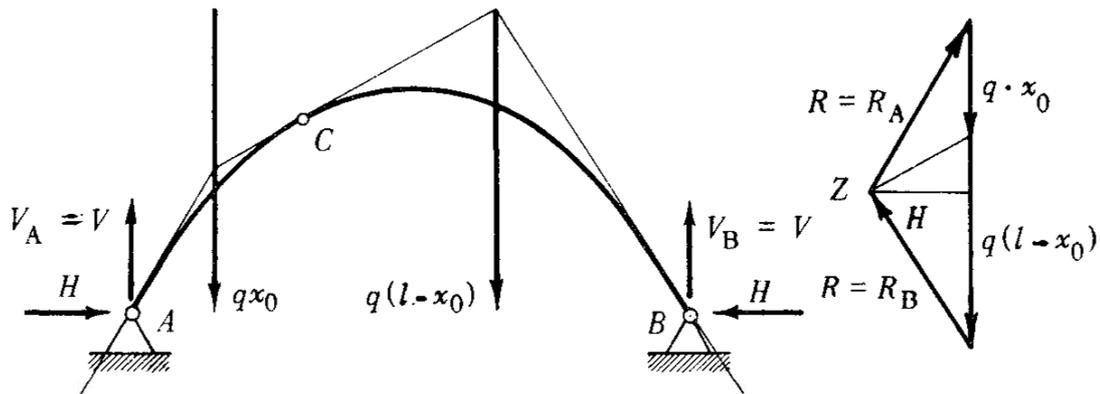


Fig. 21.2

OSSERVAZIONE. - Come si è detto, la forma della curva delle pressioni è legata unicamente al modo in cui è distribuito il carico esterno. Se questo è uniforme, essa è, in ogni caso, parabolica. Se ne deduce che solo una struttura avente l'asse di tal forma può avere la curva delle pressioni centrata. Il fatto che tale circostanza si verifichi, dipende poi dai vincoli: bisogna che essi abbiano natura e disposizione tali da rendere le reazioni esterne tangenti all'asse della struttura.

È proprio questa la circostanza che si verifica se la struttura è a tre cerniere. Per completezza, vediamo ciò che accade quando l'arco, pur se di forma parabolica, è diversamente vincolato.

1° caso. - Si esamini dapprima il caso in cui l'arco sia appoggiato. Si indichi con α l'inclinazione, rispetto all'orizzontale, della linea di scorrimento dell'appoggio B (fig. 21.3); con α_0 l'inclinazione, rispetto alla verticale, della tangente in B all'arco.

Se $\alpha = 0$, le reazioni sono entrambe verticali. La curva delle pressioni degenera in un fascio di rette verticali: le sollecitazioni flessionali dell'arco sono quelle della trave appoggiata di ugual luce.

Se $\alpha < \alpha_0$, la curva delle pressioni è parabolica, ma distinta dall'asse, ed ovunque al di sopra di esso.

Se $\alpha = \alpha_0$, sussiste di nuovo la coincidenza tra curva ed asse.

Se $\alpha > \alpha_0$, infine, la curva è distinta dall'asse, ed ovunque al di sotto di esso.

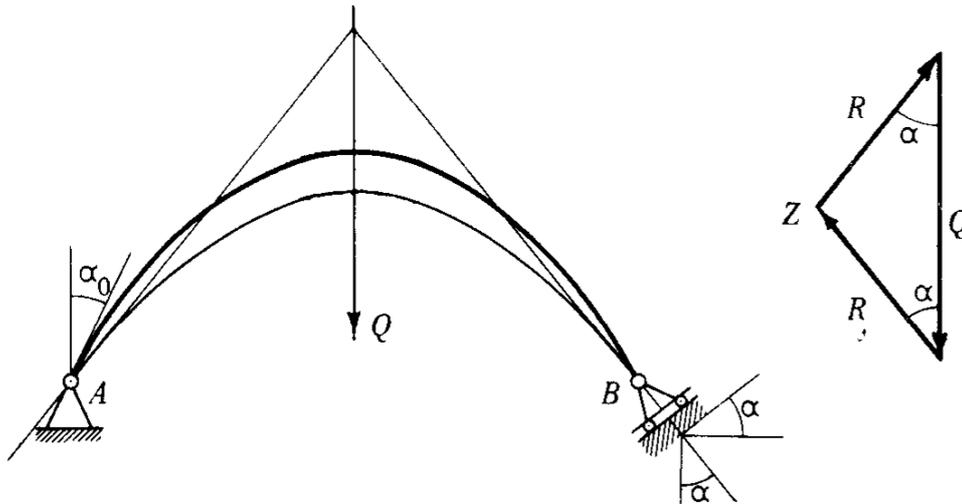


Fig. 21.3

2° caso. - L'arco sia con incastro, cerniera e appoggio. Il tracciamento della curva delle pressioni è immediato: la reazione in B è normale alla linea di scorrimento; la reazione di C passa anche per l'intersezione di R_B e della risultante del carico sul semiarco di destra (fig. 21.4).

Anche in questo caso, la coincidenza tra l'asse dell'arco e la curva delle pressioni si verifica solo se $\alpha = \alpha_0$, cioè se la reazione R_B è tangente, in B, all'asse dell'arco.

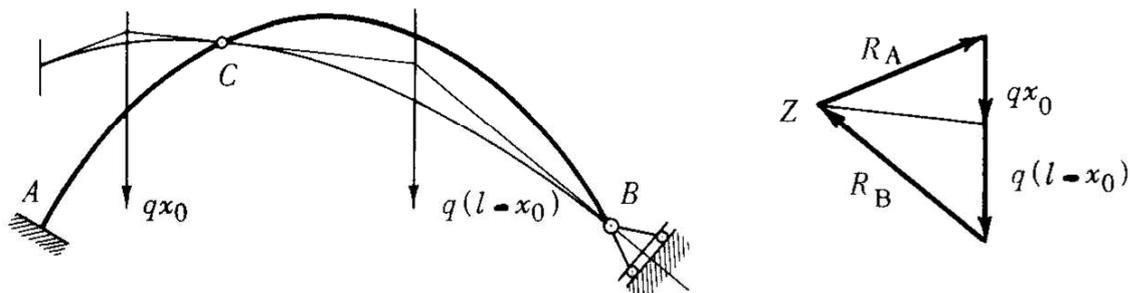


Fig. 21.4

SOLUZIONE ANALITICA.

CALCOLO DELLE REAZIONI. - Mediante considerazioni di equilibrio si trova subito che le reazioni verticali sono volte, in *A* e *B*, verso l'alto, e valgono:

$$V_A = V_B = V = q \frac{l}{2}.$$

Equazione ausiliaria: momento flettente nullo in *C*. - Con le forze a sinistra:

$$Vx_0 - Hy(x_0) - q \frac{x_0^2}{2} = 0,$$

ma

$$y(x_0) = \frac{4f}{l^2} x_0 (l - x_0)$$

da cui

$$H = \frac{ql^2}{8f}.$$

Il comportamento dell'arco non dipende dalla posizione della cerniera interna.

CALCOLO DELLE AZIONI INTERNE.

Momento flettente:

$$M(x) = Vx - q \frac{x^2}{2} - Hy = \frac{qx}{2} (l - x) - \frac{ql^2}{8f} \frac{4f}{l^2} x(l - x) = 0.$$

Lungo tutto l'arco, il momento (parabolico) dovuto insieme ai carichi e alle reazioni verticali, è esattamente compensato da quello (pure parabolico) della spinta.

Sforzo di taglio. - È ovunque nullo, per l'assenza di momento flettente.

Sforzo assiale:

$$N(x) = - \frac{H}{\cos \omega}$$

ove

$$\omega = \operatorname{arctg} y'(x) = \operatorname{arctg} \left[\frac{4f}{l^2} (l - 2x) \right].$$

22. - Studiare un arco circolare a tre cerniere, soggetto ad una distribuzione uniforme di carico radiale.

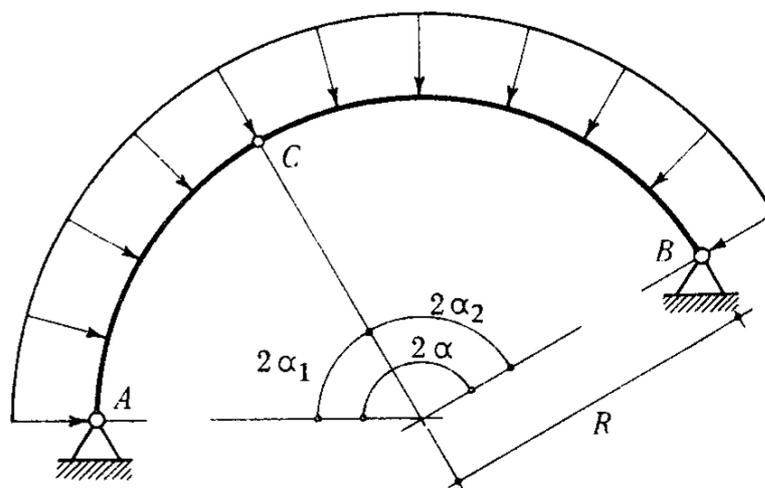


Fig. 22.1

SOLUZIONE ANALITICA.

CALCOLO DELLE REAZIONI (fig. 22.2).

La risultante totale Q del carico, per ragioni di simmetria, è diretta secondo la mediana dell'arco. Se si svincola esternamente quest'ultimo, esso deve restare in quiete sotto l'azione di Q e delle reazioni terminali. Esse si intersecano su Q , oltre a passare per le cerniere esterne. Sono quindi ugualmente inclinate ed hanno, ancora per simmetria, lo stesso modulo.

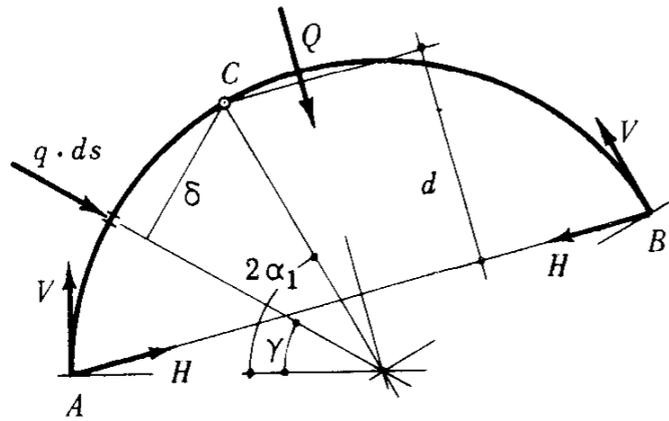


Fig. 22.2

Consideriamone le componenti:

- H secondo la corda;
- V secondo la tangente.

È noto (vedi, ad esempio, l'esercizio 3), che la risultante del carico ha il modulo:

$$Q = q \cdot \overline{AB} = 2qR \operatorname{sen} \alpha.$$

Di conseguenza, si ottengono i seguenti risultati.

Equilibrio alla traslazione secondo la direzione di Q :

$$2V \operatorname{sen} \alpha - Q = 0;$$

$$V = qR.$$

Equazione ausiliaria: momento flettente nullo in C. - Determiniamo separatamente i contributi dovuti al carico q ed alle componenti di reazione.

Al tronco elementare, lungo $ds = R d\gamma$, è applicata la forza radiale $q ds = q \cdot R d\gamma$.

La cerniera C ha, dalla sua retta d'azione, distanza

$$\delta = R \operatorname{sen}(2\alpha_1 - \gamma).$$

Il momento flettente in C , dovuto alla forza elementare, è:

$$dM(q) = q ds \cdot \delta = q R^2 \operatorname{sen}(2\alpha_1 - \gamma) d\gamma$$

e quello di tutto il carico agente tra A e C :

$$M(q) = \int_0^{2\alpha_1} q R^2 \operatorname{sen}(2\alpha_1 - \gamma) d\gamma = q R^2 (1 - \cos 2\alpha_1)$$

Il suo verso è antiorario.

Il contributo della V è:

$$M(V) = V \cdot R (1 - \cos 2\alpha_1) = q R^2 (1 - \cos 2\alpha_1) \quad (\text{orario})$$

e quello di H :

$$M(H) = \cdot Hd \quad (\text{antiorario})$$

In totale:

$$Hd + q R^2 (1 - \cos 2\alpha_1) - q R^2 (1 - \cos 2\alpha_1) = 0$$

da cui

$$H = 0.$$

CALCOLO DELLE AZIONI INTERNE. - Il metodo più rapido si vale dell'uso della risultante delle forze esterne che precedono la sezione corrente. Il suo modulo vale:

$$Q(\omega) = 2q \cdot R \operatorname{sen} \frac{\omega}{2}$$

ove $2R \operatorname{sen} \frac{\omega}{2}$ è la lunghezza della corda che congiunge il baricentro della sezione alla cerniera A .

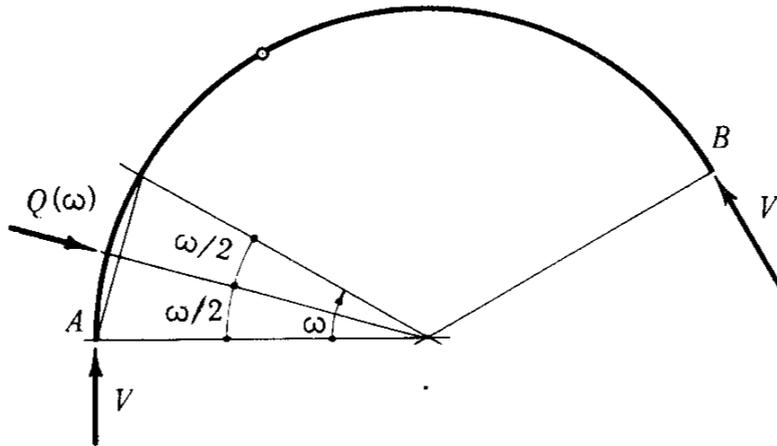


Fig. 22.3

Momento flettente:

$$\begin{aligned} M(\omega) &= VR(1 - \cos \omega) - Q(\omega)R \cdot \operatorname{sen} \frac{\omega}{2} = \\ &= qR^2(1 - \cos \omega) - 2qR^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\omega}{2} = 0. \end{aligned}$$

Sforzo di taglio. - È ovunque nullo insieme al momento flettente.

Sforzo assiale:

$$N(\omega) = -V \cos \omega - Q(\omega) \operatorname{sen} \frac{\omega}{2} = -qR.$$

La struttura è uniformemente compressa.

LA CURVA DELLE PRESSIONI.

Se ci si vale dei risultati della soluzione analitica, si conclude immediatamente che, per l'assenza del momento flettente, la curva delle pressioni coincide con l'asse dell'arco. Naturalmente, allo stesso risultato si giunge anche procedendo direttamente per via grafica.

Notiamo, innanzi tutto, che non si può prevedere a priori la forma della curva. Il carico non è parallelo, non è perciò valida l'equazione della funicolare nella consueta forma elementare.

Per note ragioni di equivalenza, le reazioni possono ottenersi caricando l'arco con le risultanti Q_1 e Q_2 delle stese di carico agenti ai lati della cerniera interna. Si tratta, in sostanza, di tracciare il poligono funicolare che passa per le tre cerniere e collega Q_1 e Q_2 .

Mediante l'uso del poligono di tentativo (non riportato in figura per maggior chiarezza) si trova che il poligono finale è costituito dall'insieme delle tre tangenti all'arco in A , C , B .

Le reazioni terminali risultano allora dirette simmetricamente rispetto alla risultante Q , quindi si intersecano sulla sua retta d'azione.

Inoltre, la reazione di A e l'azione interna in C si intersecano, per le stesse ragioni, sulla retta di Q_1 . Analogo risultato trovasi per il semiarco di destra.

Si conclude che sono soddisfatte le condizioni fondamentali d'equilibrio dell'arco e delle due parti che lo costituiscono. Ciò conferma, sinteticamente, il risultato ottenuto per via grafica.

L'effettiva curva delle pressioni è inscritta nella trilatera suddetta, e le è tangente in A , C , B .

La poligonale delle forze è un arco di circonferenza: la generica forza elementare $q ds$ è proporzionale in modulo all'elemento di arco ed ha direzione ad esso normale.

La direzione della reazioni di A e B è nota. Il loro modulo si ottiene tracciando, dagli estremi 0 e n della poligonale, le parallele alle tangenti all'arco in A e B .

Le due reazioni coincidono con i due raggi estremi della circonferenza delle forze, il cui centro è il polo Z .

È allora immediato riconoscere che la curva delle pressioni è l'arco di circonferenza tangente in A , B , C alla trilatera fondamentale, quindi coincide con l'asse dell'arco.

Ogni sua sezione è soggetta solo a sforzo assiale, che ha modulo costante ed uguale al raggio della circonferenza delle forze, cioè:

$$N = qR.$$

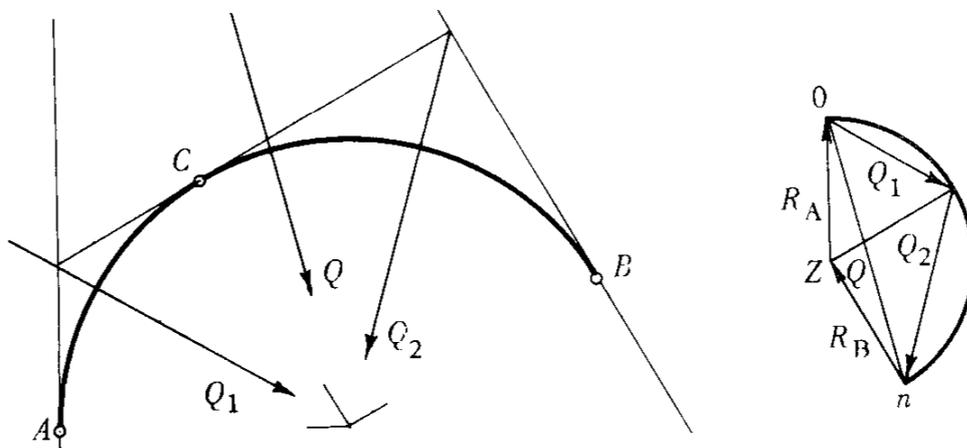


Fig. 22.4

OSSERVAZIONE. - Anche in questo problema, come nell'esercizio precedente, la coincidenza della curva delle pressioni con l'asse della struttura deriva direttamente dall'essere tangente ad esso almeno una (e di conseguenza l'altra) delle reazioni terminali.

La coincidenza si avrà anche per altre condizioni di vincolo, purché sia rispettata la circostanza suddetta.

Si veda, ad esempio, il caso illustrato nella fig. 22.5. L'arco è vincolato, in B , mediante un appoggio con linea di scorrimento diretta secondo il raggio.

La rispettiva reazione è tangente, quindi tale è anche l'azione interna in C . La curva delle pressioni è ancora centrata.

Se invece l'appoggio ha linea di scorrimento con direzione diversa

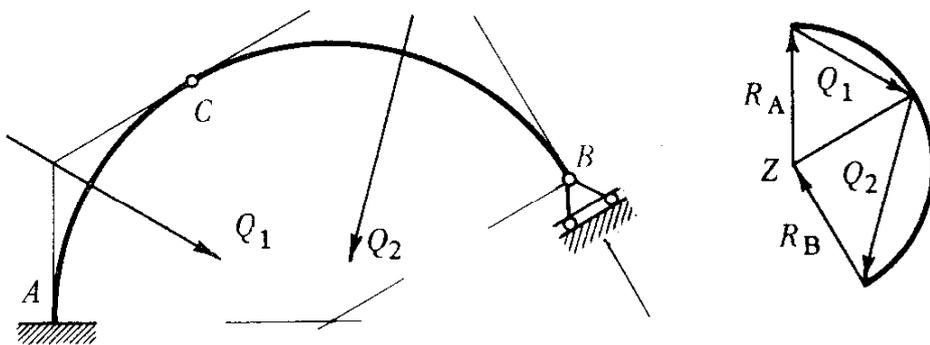


Fig. 22.5

dal raggio, la reazione non è tangente. Il polo Z, da cui trae origine la curva delle pressioni, non coincide più col centro della circonferenza delle forze. La curva delle pressioni non è più centrata, e potrà determinarsi solo per via grafica (fig. 22.6).

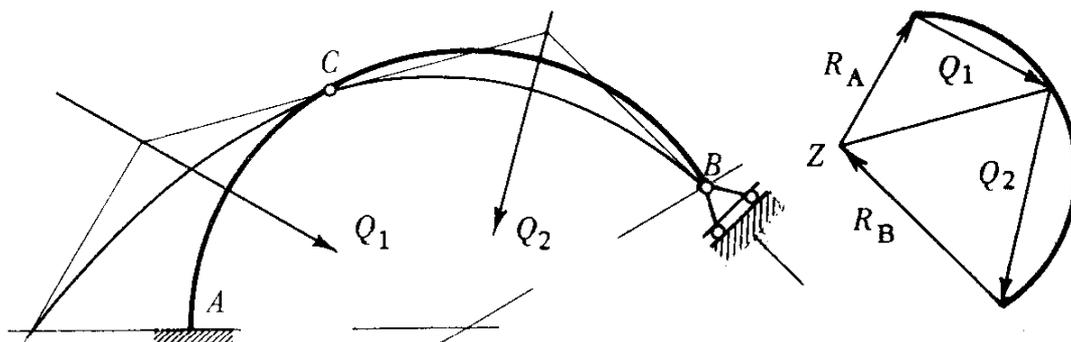


Fig. 22.6

23. - Determinare la curva d'equilibrio di una fune, di lunghezza l , sospesa a due punti fissi posti sulla medesima orizzontale e distanti tra loro di l . La fune sia caricata da una distribuzione triangolare di forze verticali.

Ogni fune è notoriamente una struttura priva di rigidità flessionale. Essa può pensarsi costituita di infinite cerniere, e come tale può reagire

unicamente a sforzo assiale.

Ne segue che, non avendo forma propria, essa si dispone in maniera da coincidere con la curva delle pressioni.

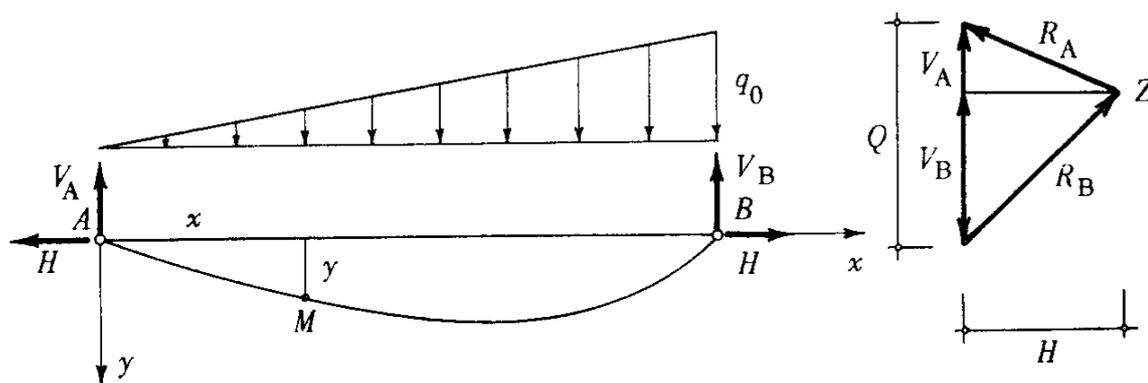


Fig. 23.1

Notiamo ancora che, per ragioni di stabilità dell'equilibrio di cui si parlerà più avanti, la fune non può sopportare sforzi di compressione. Essa si disporrà, allora, secondo una funicolare tesa del carico esterno.

Il comportamento di una fune è sostanzialmente analogo a quello di un arco a tre cerniere uniformemente compresso. La differenza più importante è che essa non ha forma propria, quindi si dispone secondo la curva delle pressioni, qualunque sia il carico che la sollecita.

La curva delle pressioni è una delle infinite funicolari che collegano i carichi; esse hanno equazione (nel riferimento di fig. 23.1):

$$y''(x) = -\frac{q(x)}{H}$$

essendo H la distanza polare.

Poiché $q(x) = q_0 \frac{x}{l}$, si ottiene:

$$y'' = -q_0 \frac{x}{lH}$$

Le condizioni ai limiti sono fornite dai vincoli. In essi è nullo il

momento flettente, quindi la funicolare curva delle pressioni deve passare per essi.

Com'è noto, esistono due metodi principali per determinare la curva d'equilibrio.

Il primo consiste nell'annullare il momento flettente nella sezione generica della fune; il secondo deriva dall'integrazione dell'equazione differenziale della funicolare.

METODO DIRETTO. - Svincoliamo la fune, mettendo in evidenza le componenti orizzontali e verticali di reazione. Lo sforzo assiale in A coincide con la risultante R_A di V_A ed H , ed è tangente, in A , alla fune. Analogamente in B . È immediato, allora, rendersi conto che la distanza polare, da cui trae origine la curva delle pressioni, coincide con la componente orizzontale H di R_A e R_B .

Essa coincide, anche, con lo sforzo assiale nella sezione a cui compete una tangente all'asse orizzontale. Di solito, viene chiamata *tensione* della fune.

Le reazioni V_A e V_B si determinano subito scrivendo l'equilibrio generale alla rotazione rispettivamente attorno a B e ad A . Si ottiene:

$$V_A = q_0 \frac{l}{6}$$

$$V_B = q_0 \frac{l}{3}.$$

Annuliamo ora il momento flettente nel generico punto $M(x, y)$, calcolando con le forze alla sinistra.

$$V_A \cdot x - Hy - q_0 \frac{x}{l} \frac{x^2}{6} = 0$$

$$y = \frac{q_0 x}{6 H l} (l^2 - x^2)$$

È questa l'equazione della curva delle pressioni, in cui rimane ancora incognita la tensione H .

METODO DIFFERENZIALE. - L'equazione

$$y'' = -q_0 \frac{x}{Hl}$$

dopo doppia integrazione porge:

$$y = -\frac{q_0 x^3}{6lH} + C_1 x + C_2.$$

Le condizioni ai limiti che determinano le due costanti sono:

$$\text{per } x = 0, \quad y = 0 \quad \text{e} \quad \text{per } x = l, \quad y = 0;$$

oppure:

$$\text{per } x = 0, \quad y = 0 \quad \text{e} \quad \text{per } x = 0, \quad y' = \frac{V_A}{H} = \frac{q_0 l}{6H}$$

A conti fatti si ottiene:

$$C_2 = 0 \quad C_1 = \frac{q_0 l}{6H}$$

e quindi

$$y = \frac{q_0 x}{6Hl} (l^2 - x^2).$$

CALCOLO DELLA TENSIONE H. - Un esame della fig. 23.1 fa subito vedere che, a parità di altre condizioni, la tensione H dipende essenzialmente dalla lunghezza della fune. Tra le infinite curve delle pressioni che soddisfano all'equazione sopra scritta, l'unica che risolve il problema è quella che ha come lunghezza proprio quella L della fune.

È anche palese che, all'aumentare di L la H diminuisce, e viceversa. Se, al limite, risultasse $L = l$, la tensione diverrebbe infinita.

Analiticamente, si deve porre:

$$L = \int ds$$

ove l'integrale al secondo membro è curvilineo, e va esteso a tutto l'arco di funicolare.

Ricordando che

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

si ha infine:

$$L = \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

La soluzione esplicita del problema può urtare contro difficoltà di carattere analitico. Se la fune è abbastanza tesa, si può sviluppare in

serie binomiale $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, trascurando tutti i termini che seguono $\frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$. Allora:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$L = l + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx.$$

Nel problema in esame si ha:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q_0}{2Hl} \left(\frac{l^2}{3} - x^2\right)$$

da cui:

$$H = \frac{q_0 l}{9,48} \sqrt{\frac{l}{L - l}}$$

* * *

24. - Determinare la configurazione d'equilibrio di una fune, fissata a due punti posti a diversi livelli e soggetta a una forza concentrata e ad una distribuzione parziale di carico uniforme.

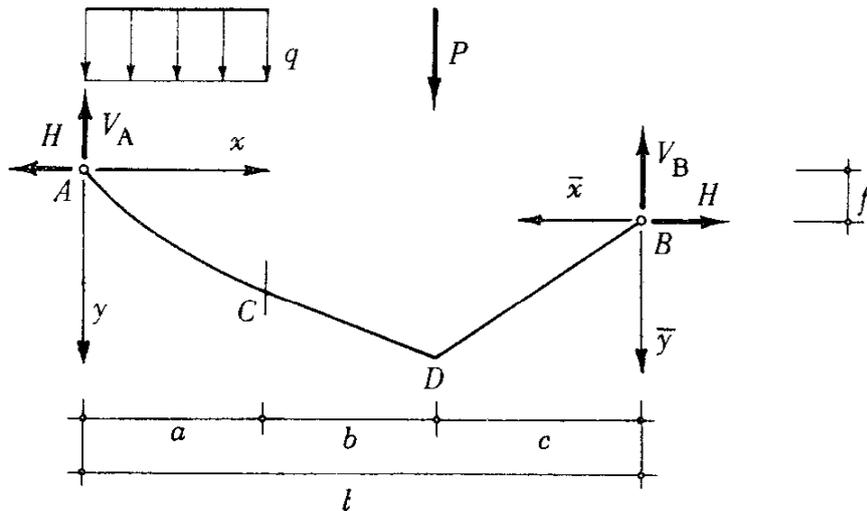


Fig. 24.1

Notiamo, innanzi tutto, che è necessario determinare tre diverse equazioni, una per ciascuno dei tratti AC , CD , DB .

Nel primo tratto, la presenza del carico uniformemente distribuito fa sì che la curva funicolare sia una parabola. Ad essa è tangente la retta che rappresenta il secondo tratto di funicolare. L'ultimo tratto è ancora rettilineo.

Per poter esprimere le equazioni con maggior comodità, è opportuno introdurre i due sistemi di riferimento (x, y) e (\bar{x}, \bar{y}) indicati nella fig. 24.1.

METODO DIRETTO. - Calcoliamo, innanzi tutto, le reazioni verticali della fune svincolata.

Equilibrio alla rotazione intorno a B:

$$V_A l - Hf - qa\left(l - \frac{a}{2}\right) - P \cdot c = 0$$

$$V_A = q\frac{a}{l}\left(l - \frac{a}{2}\right) + P\frac{c}{l} + H\frac{f}{l}$$

Equilibrio alla rotazione intorno ad A:

$$V_B l + Hf - q\frac{a^2}{2} - P(a+b) = 0$$

$$V_B = q\frac{a^2}{2l} + P\frac{a+b}{l} - H\frac{f}{l}$$

L'equazione della funicolare generica può ottenersi annullando il momento flettente in un punto corrente, appartenente successivamente ai tre tratti.

1. *Tratto AC:*

$$M(x, y) = V_A \cdot x - Hy - q\frac{x^2}{2} = 0.$$

Ne segue:

$$y = \left[\frac{qa}{Hl} \left(l - \frac{a}{2} \right) + \frac{Pc}{Hl} + \frac{f}{l} \right] x - q\frac{x^2}{2H}.$$

2. *Tratto CD:*

$$M(\bar{x}, \bar{y}) = V_B \cdot \bar{x} - H\bar{y} - P(\bar{x} - c) = 0.$$

$$\bar{y} = \frac{Pc}{H} + \left[\frac{qa^2}{2Hl} - \frac{Pc}{Hl} - \frac{f}{l} \right] \bar{x}$$

3. *Tratto DB:*

$$M(\bar{x}, \bar{y}) = V_B \cdot \bar{x} - H\bar{y} = 0$$

$$\bar{y} = \left[\frac{qa^2}{2Hl} + P \frac{a+b}{Hl} - \frac{f}{l} \right] \bar{x}.$$

Come è chiaro, l'uso del metodo diretto non comporta particolari difficoltà, qualunque sia la disposizione dei vincoli e dei carichi.

METODO DIFFERENZIALE. - È molto più complesso, specialmente per l'imposizione delle condizioni ai limiti.

Iniziamo con lo stabilire le equazioni delle tre funicolari.

1. *Tratto AC:*

$$y'' = -\frac{q(x)}{H}$$

$$y = -q \frac{x^2}{2H} + C_1 x + C_2$$

2. *Tratto CD:*

$$\bar{y}_1'' = 0$$

$$\bar{y}_1 = C_3 \bar{x} + C_4.$$

3. *Tratto DB:*

$$\bar{y}_2'' = 0$$

$$\bar{y}_2 = C_5 \bar{x} + C_6.$$

Le condizioni che determinano le costanti devono esprimere il rispetto dei vincoli esterni e la continuità materiale della fune in *C* e *D*.

Dovrà allora risultare:

$$|y|_{x=0} = 0$$

$$|y|_{x=a} = |\bar{y}_1|_{\bar{x}=b+c}$$

$$|y'|_{x=a} = -|\bar{y}_1'|_{\bar{x}=b+c}$$

$$\begin{aligned} \left. \bar{y}_1 \right|_{\bar{x} = c} &= \left. \bar{y}_2 \right|_{\bar{x} = c} \\ \left. \bar{y}'_1 \right|_{\bar{x} = c} - \left. \bar{y}'_2 \right|_{\bar{x} = c} &= \frac{P}{H} \\ \left. \bar{y}_2 \right|_{\bar{x} = 0} &= 0. \end{aligned}$$

La prima e la sesta condizione esprimono il passaggio della funicolare per le cerniere esterne.

La seconda indica l'eguaglianza di ordinata tra le due sezioni ai lati di C e ad essa infinitamente vicine; la terza, l'uguaglianza dell'inclinazione tra le suddette sezioni.

La quarta indica l'uguaglianza di ordinata tra le due sezioni ai lati di D e ad essa infinitamente vicine.

Infine, la quinta condizione esprime il fatto che la cuspide, in D , è provocata dalla forza finita P . La differenza tra le due inclinazioni si desume subito da una poligonale delle forze, e vale $\frac{P}{H}$.

Le relazioni di congruenza (compatibilità con i vincoli esterni ed interni) si scrivono in maniera esplicita:

$$\begin{aligned} C_2 &= 0 \\ -q \frac{a^2}{2H} + C_1 a + C_2 &= C_3 (b+c) + C_4 \\ -q \frac{a}{H} + C_1 &= -C_3 \\ C_3 c + C_4 &= C_5 c + C_6 \\ C_3 - C_5 &= \frac{P}{H} \\ C_6 &= 0. \end{aligned}$$

La soluzione del sistema porge i valori delle costanti che, introdotte nelle rispettive espressioni, forniscono le tre equazioni della funicolare. Esse coincidono, ovviamente, con quelle dedotte per via diretta.

Il metodo differenziale è legato alla soluzione di un sistema di quattro equazioni in quattro incognite (poiché C_2 e C_6 sono subito note), è quindi molto più faticoso.

CALCOLO DELLA TENSIONE H. - Si prescrive, ad esempio, che il punto D della fune venga a trovarsi, nella situazione di equilibrio, alla distanza verticale d della cerniera d'imposta B .

Questa condizione è sufficiente a determinare la tensione. Basta, invero, porre:

$$d = \left| \bar{y}_2 \right|_{\bar{x} = c} = \frac{qa^2 c}{2Hl} + P \frac{a+b}{Hl} c - \frac{f}{l} c.$$

Ne segue immediatamente:

$$H = \frac{\frac{qa^2}{2} c + P \frac{a+b}{l} c}{d + \frac{f}{l} c} = \frac{\frac{qa^2}{2} + P \frac{a+b}{l}}{\frac{d}{c} + \frac{f}{l}}$$

Come è naturale, la tensione potrebbe determinarsi anche assegnando condizioni diverse da quelle qui considerate. Ad ogni condizione corrisponde, di norma, una diversa tensione nella fune.