

CAPITOLO II

LE AZIONI INTERNE

L'azione interna, in una sezione retta di una qualsiasi struttura lineare, è, per definizione, la reazione che mutuamente si trasmettono le due parti di trave separate da detta sezione. Essa è della stessa natura delle reazioni vincolari, e si determina mediante considerazioni statiche del medesimo tipo.

Il luogo delle rette d'azione dell'azione interna è la curva delle pressioni. Il lato generico, relativo alla sezione corrente della struttura, ne rappresenta la retta d'azione della risultante delle forze che la precedono (o seguono). In ogni caso, è la poligonale delle successive risultanti dei carichi e reazioni che s'incontrano ordinatamente percorrendo la struttura.

Se questa è aperta, ad una campata, e vincolata all'esterno nelle sezioni terminali, essa coincide col poligono funicolare che, collegando i carichi applicati, ha per lati estremi le rette d'azione delle reazioni. Ciò permette di tracciarla proprio come poligono funicolare; le condizioni che la definiscono sono, ovviamente, fornite dai vincoli.

Così, ad esempio, nell'arco a tre cerniere, l'annullarsi in loro corrispondenza del momento flettente fa coincidere la curva delle pressioni con il poligono che passa per esse e collega le forze esterne.

Nei casi più complessi (strutture a più campate, chiuse, o addirittura iperstatiche) sarà necessario determinare preventivamente le reazioni vincolari, oppure le azioni interne in qualche sezione opportunamente scelta. La curva delle pressioni verrà poi determinata componendo det-

te reazioni (o azioni interne) con le forze applicate, via via che s'incontrano percorrendo l'asse della struttura.

Le componenti dell'azione interna (o di sollecitazione) sono i suoi parametri rispetto ad un particolare riferimento ortogonale. Esso è collegato alla sezione corrente, ha l'origine nel suo baricentro ed uno degli assi tangente alla linea d'asse della struttura.

Tra i vari metodi di calcolo delle sollecitazioni, useremo quasi costantemente quello diretto, che permette di rendersi conto più chiaramente del funzionamento statico della struttura.

Allo scopo, è indispensabile fissare le convenzioni, in base alle quali attribuire il segno alle varie componenti dell'azione interna. Ci riferiamo, in particolare, ai problemi piani (strutture aventi l'asse geometrico ed i carichi contenuti in uno stesso piano).

Lo sforzo assiale è assunto positivo quando tende il materiale nell'intorno della sezione corrente; negativo se lo comprime.

Lo sforzo di taglio è assunto positivo se è orientato verso l'alto, purché valutato con le forze che precedono la sezione.

Il momento flettente è positivo quando risulta orario, se calcolato mediante le forze precedenti. Tale convenzione merita però alcune precisazioni.

Se la struttura è ad asse rettilineo orizzontale, non vi è pericolo alcuno di ambiguità. Se invece si tratta di portale, o addirittura di struttura chiusa, le espressioni *sotto*, *sopra*, *destra*, *sinistra* divengono, per ogni sezione, del tutto arbitrarie.

Si può rimuovere la difficoltà ponendo mente al fatto che i segni delle azioni interne si fissano solo per definire il modo di deformarsi delle strutture. In particolare, il momento flettente ha l'effetto di incurvare le strutture lineari, in realtà composte di materiali deformabili. Le fibre poste dal lato della convessità risultano tese, quelle del lato della concavità, compresse.

Orbene, converremo fin d'ora di riportare il diagramma del momento flettente dal lato della convessità della deformata locale, ovvero dal lato in cui le fibre risultano tese; e ciò senza preoccuparsi del suo segno.

* * *

5. - Determinare le leggi di variazione ed i diagrammi delle azioni interne per una trave appoggiata con carico parallelo triangolare.

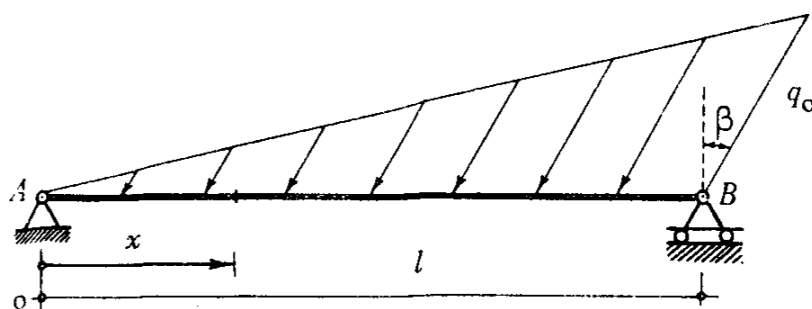


Fig. 5.1

Risolveremo questo problema usando il metodo diretto e quello differenziale. Della curva delle pressioni ci occuperemo più diffusamente in seguito.

METODO DIRETTO.

CALCOLO DELLE REAZIONI. - La distribuzione di carico può essere decomposta in due, pure triangolari, che rappresentano rispettivamente le componenti orizzontali e verticali del carico. Per ragioni di equilibrio alla traslazione orizzontale, la reazione orizzontale in A è uguale alla risultante del carico assiale $Q_a = \frac{q_0 l}{2} \operatorname{sen} \beta$:

$$H_A = \frac{q_0 l}{2} \operatorname{sen} \beta$$

ed è orientata da sinistra verso destra (fig. 5.2).

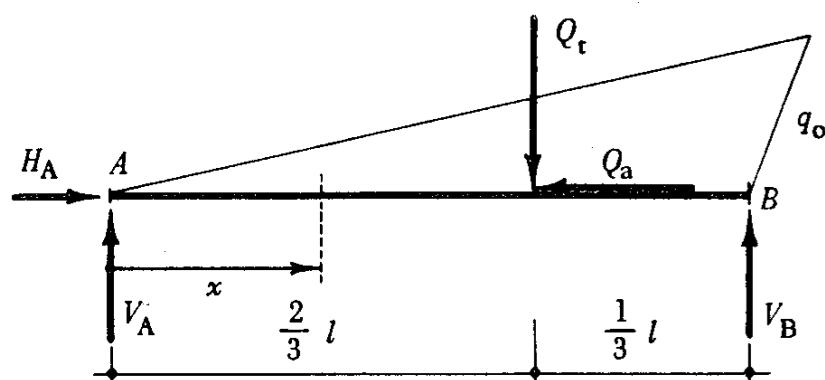


Fig. 5.2

Le due componenti verticali si ottengono dalla risultante del carico normale alla trave. Essa risultante ha il modulo

$$Q_t = \frac{q_0 l}{2} \cos \beta$$

e la sua retta d'azione dista $\frac{2}{3}l$ da A.

Imponendo l'equilibrio alla rotazione rispettivamente intorno alle cerniere B ed A si ottiene:

$$V_A = \frac{q_0 l}{3} \cos \beta$$

$$V_B = \frac{q_0 l}{6} \cos \beta$$

entrambe rivolte verso l'alto.

CALCOLO DELLE AZIONI INTERNE. - Fissiamo un riferimento cartesiano, con asse delle ascisse coincidente con quello della trave ed origine nel suo estremo sinistro.

Sforzo assiale. - La risultante delle forze assiali che precedono la sezione corrente è:

$$N(x) = -H_A + q_a(x) \cdot \frac{x}{2}.$$

Lo sforzo assiale così valutato rappresenta l'azione che la parte sinistra di trave applica alla destra attraverso la sezione di ascissa x .

Il primo termine indica una forza che entra nella parte destra, comprimendone il materiale; il secondo termine esprime una forza di trazione.

L'ordinata corrente di carico è:

$$q(x) = q_0 \frac{x}{l}$$

e quindi:

$$q_a(x) = q_0 \frac{x}{l} \sin \beta.$$

Ricordando poi il valore trovato per H_A si ottiene:

$$N(x) = -\frac{q_0}{2l} (l^2 - x^2) \sin \beta.$$

Lo sforzo assiale risulta di compressione lungo tutta la trave.

Si ritrova ovviamente lo stesso risultato operando con le forze alla destra:

$$N(x) = -\frac{q(x) + q_0}{2} (l - x) \sin \beta = -\frac{q_0}{2l} (l^2 - x^2) \sin \beta.$$

Sforzo di taglio. - Il carico che produce taglio (e momento flettente) è quello normale all'asse, di modulo corrente:

$$q_t(x) = q(x) \cos \beta = q_0 \frac{x}{l} \cos \beta.$$

Operando con le forze alla sinistra, si ottiene l'azione tagliente che la parte sinistra di trave applica alla parte destra. Con le note convenzioni sui segni si ottiene:

$$T(x) = +V_A - q_t(x) \cdot \frac{x}{2} = \frac{q_0}{2l} \left(\frac{l^2}{3} - x^2 \right) \cos \beta.$$

Uguale risultato si otterrebbe componendo le forze che seguono la sezione corrente.

Momento flettente. - Nella sezione generica, le forze alla sinistra provocano il momento:

$$M(x) = +V_A \cdot x - q_t(x) \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = \frac{q_0}{6l} x(l^2 - x^2) \cos \beta.$$

Esso è orario per ogni sezione; essendo l'azione sulla parte destra, ne tende le fibre inferiori. La trave si incurva con la convessità volta verso il basso.

Il momento flettente raggiunge un massimo (relativo ed assoluto) ove si annulla la sua derivata prima, cioè lo sforzo di taglio. Si ha:

$$T(\bar{x}) = 0 \quad \text{per} \quad \bar{x} = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

$$M_{\max} = M\left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right) \cong \frac{q_0 l^2}{15,6} \cos \beta = \frac{Q_t \cdot l}{7,80}.$$

METODO DIFFERENZIALE.

Sforzo assiale. - Usiamo l'equazione:

$$\frac{dN(x)}{dx} = -q_a(x)$$

valida se il verso del carico assiale è concorde con quello del riferimento.

Qui si deve porre:

$$q_a(x) = -q_0 \frac{x}{l} \sin \beta.$$

Ne segue:

$$\frac{dN(x)}{dx} = q_0 \frac{x}{l} \sin \beta$$

$$N(x) = \int q_0 \frac{x}{l} \sin \beta \, dx + C_1 = \frac{q_0}{2l} x^2 \sin \beta + C_1.$$

La costante d'integrazione C_1 è determinabile osservando che lo sforzo assiale è nullo nella sezione d'imposta B , priva di componente orizzontale di reazione. Analiticamente ciò si traduce nella condizione:

$$N(l) = 0$$

da cui

$$\frac{q_0}{2l} l^2 \operatorname{sen} \beta + C_1 = 0$$

$$C_1 = -\frac{q_0 l}{2} \operatorname{sen} \beta$$

$$N(x) = -\frac{q_0}{2l} (l^2 - x^2) \operatorname{sen} \beta.$$

In particolare, all'estremo A :

$$N(0) = -\frac{q_0 l}{2} \operatorname{sen} \beta.$$

Tale risultato ci mostra che la reazione orizzontale in A vale proprio

$$|\dot{N}_A| = \frac{q_0 l}{2} \operatorname{sen} \beta.$$

Il segno negativo sta ad indicare che essa comprime il tratto iniziale della trave, perciò è orientata da sinistra verso destra.

Momento flettente. - Sussiste la relazione:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q_t(x) = -q_0 \frac{x}{l} \cos \beta.$$

Integrando:

$$M(x) = -\frac{q_0 x^3}{6l} \cos \beta + C_2 x + C_3.$$

Le condizioni ai limiti che determinano le costanti C_2 e C_3 derivano dall'annullarsi del momento sugli appoggi. Cioè:

$$M(0) = M(l) = 0$$

da cui

$$\begin{cases} C_3 = 0 \\ -\frac{q_0 l^2}{6} \cos \beta + C_2 l = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} C_3 = 0 \\ C_2 = \frac{q_0 l}{6} \cos \beta. \end{cases}$$

Infine:

$$M(x) = \frac{q_0}{6l} x(l^2 - x^2) \cos \beta.$$

Sforzo di taglio. - Si può scrivere:

$$\frac{dT(x)}{dx} = -q_t(x) = -q_0 \frac{x}{l} \cos \beta$$

da cui, integrando:

$$T(x) = -\frac{q_0}{2l} x^2 \cos \beta + C_2$$

ove la costante C_2 è quella già determinata per il momento flettente.

Più rapidamente, si può usare la relazione:

$$T(x) = \frac{dM(x)}{dx}$$

ottenendo subito:

$$T(x) = \frac{q_0}{2l} \left(\frac{l^2}{3} - x^2 \right) \cos \beta.$$

In particolare:

$$T(0) = \frac{q_0 l}{6} \cos \beta$$

$$T(l) = -\frac{q_0 l}{3} \cos \beta.$$

La prima di queste relazioni fornisce il valore di V_A , la seconda quello di V_B . Stante la convenzione usata per il segno del taglio, entrambe le componenti V_A e V_B risultano volte verso l'alto.

DIAGRAMMI DELLE AZIONI INTERNE.

I diagrammi delle azioni interne si ottengono rappresentando geometricamente le funzioni $N(x)$, $T(x)$, $M(x)$ in un riferimento qualsiasi, avente l'asse delle ascisse coincidente con quello della trave.

Vogliamo però mostrare come i suddetti diagrammi possano ottenersi, in via qualitativa, anche mediante ragionamenti sintetici.

Soccorrono, allo scopo, le seguenti considerazioni:

1) in corrispondenza dei vincoli terminali, le azioni interne coincidono con i parametri delle reazioni vincolari;

2) le relazioni differenziali che legano le azioni interne ai carichi permettono di determinare la forma dei diagrammi e le loro eventuali singolarità, conseguenti a particolari condizioni di carico.

Sforzo assiale. - Il carico assiale varia con legge lineare; lo sforzo assiale ne è l'integrale, è quindi parabolico. Esso è nullo in B , e vale, in A , la componente orizzontale di reazione $H_A = \frac{q_0 l}{2} \operatorname{sen} \beta$.

Il segno è ovunque negativo, perché la trave risulta compressa lungo tutto il suo asse.

L'inclinazione della tangente al diagramma è pari alla derivata dello sforzo $N(x)$, cioè al modulo del carico specifico assiale; essa cresce continuamente dalla sezione A , ove $q_a(0) = 0$, alla B , ove $q_a(l) = q_0 \operatorname{sen} \beta$.

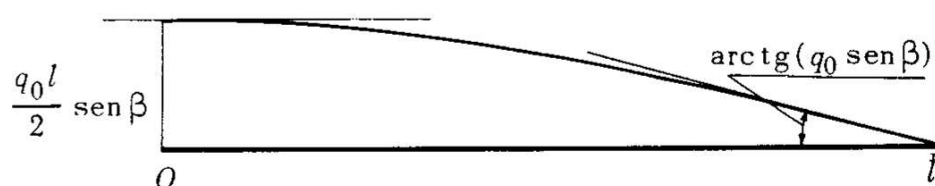


Fig. 5.3

Sforzo di taglio. - Il carico flettente è pure lineare, il taglio parabolico.

Alle imposte, il taglio eguaglia le rispettive reazioni verticali:

$$T(0) = +V_A = +\frac{q_0 l}{6} \cos \beta$$

$$T(l) = -V_B = -\frac{q_0 l}{3} \cos \beta$$

Esso è positivo nel tratto iniziale; cambia segno all'ascissa preceduta dal carico esterno che eguaglia il valore di V_A .

L'inclinazione della tangente al diagramma è pari al modulo del carico q_t ; va crescendo dalla sezione A , ove $q_t(0) = 0$, alla B , ove $q_t(l) = p_0 \cos \beta$.

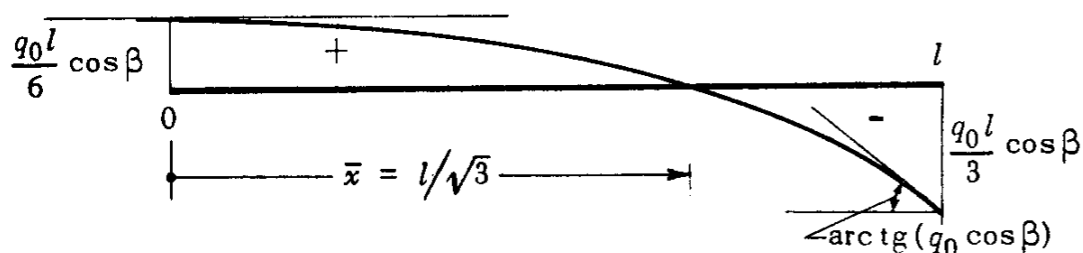


Fig. 5.4

Momento flettente. - Il carico normale all'asse della trave genera un momento flettente che ne è l'integrale secondo. La legge di variazione di questo è quindi cubica, con valore nullo in entrambe le imposte.

La tangente al diagramma ha inclinazione continuamente decre-

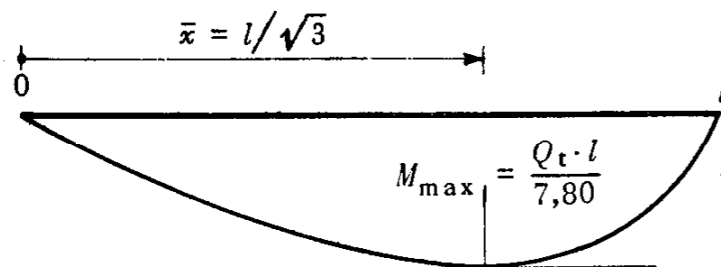


Fig. 5.5

scente da A verso B , perché essa uguaglia lo sforzo di taglio. Ove questo si annulla la tangente è orizzontale, e caratterizza così il massimo nel diagramma del momento flettente.

CASO NUMERICO. - Si ponga:

$$l = 4,000 \text{ m}; \quad \beta = 30^\circ; \quad q_0 = 4,000 \text{ t/m.}$$

Carico totale assiale:

$$Q_a = \frac{q_0 l}{2} \operatorname{sen} \beta = 4,000 \text{ t.}$$

Carico totale flettente:

$$Q_t = \frac{q_0 l}{2} \cos \beta = 6,928 \text{ t.}$$

Reazioni vincolari:

$$H_A = Q_a = 4,000 \text{ t}$$

$$V_A = \frac{1}{3} Q_t = 2,309 \text{ t}$$

$$V_B = \frac{2}{3} Q_t = 4,619 \text{ t.}$$

Sforzo assiale

$$N(x) = -\frac{q_0}{2l} \operatorname{sen} \beta (l^2 - x^2) = -4,000 + 0,250 x^2 \text{ t.}$$

Sforzo di taglio

$$T(x) = \frac{q_0}{2l} \cos \beta \left(\frac{l^2}{3} - x^2 \right) = 2,309 - 0,433 x^2 \text{ t.}$$

$$\bar{x} = \frac{4}{\sqrt{3}} = 2,309 \text{ m.}$$

Momento flettente

$$M(x) = \frac{q_0 \cos \beta}{6l} x(l^2 - x^2) = 2,309 x - 0,144 x^3 \text{ tm}$$

$$M_{\max} = M(2,309) = 3,559 \text{ tm.}$$

I diagrammi delle azioni interne sono rappresentati in fig. 5.6.

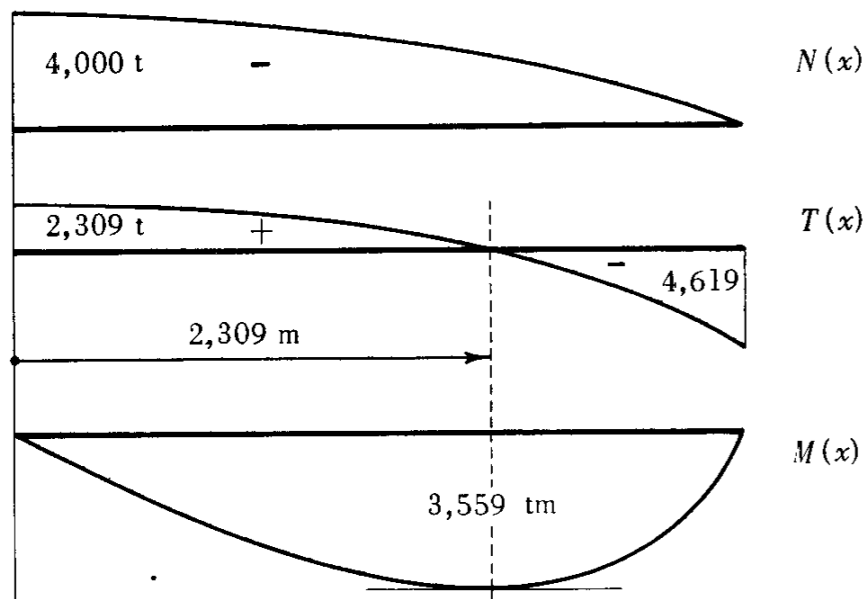


Fig. 5.6

6. - Determinare le leggi di variazione delle azioni interne nella trave appoggiata indicata in fig. 6.1.

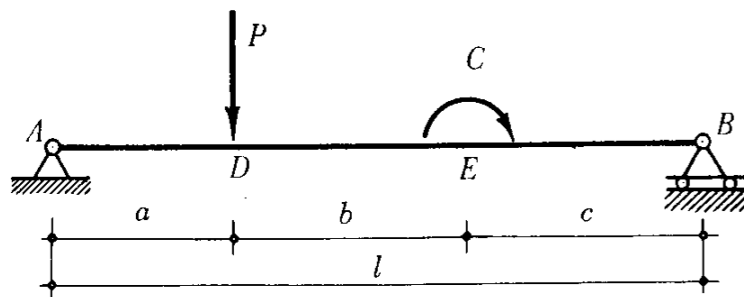


Fig. 6.1

La determinazione delle leggi di variazione delle azioni interne può essere condotta per due vie:

I) sovrapponendo gli effetti dovuti all'azione della forza P e della coppia C , pensate agenti singolarmente sulla trave;

II) direttamente, tenendo conto sin dall'inizio del loro effetto contemporaneo.

In questa sede ci limiteremo ad impiegare, per tali calcoli, il metodo diretto. Di quello differenziale riterremo solo le relazioni generali, utili per render ragione degli andamenti qualitativi dei diagrammi.

METODO PER SOVRAPPOSIZIONE DI EFFETTI.

A) EFFETTO DELLA FORZA P .

REAZIONI VINCOLARI. - Le reazioni sono soltanto verticali, e si calcolano subito imponendo l'equilibrio a rotazione rispettivamente intorno a B e A .

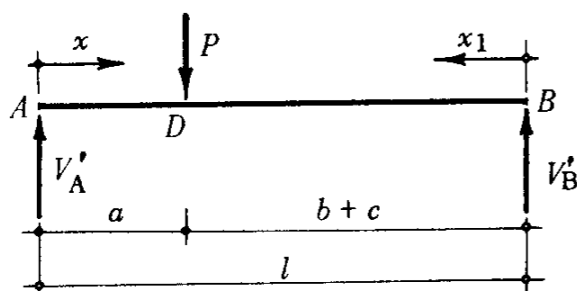


Fig. 6.2

Con i versi prefissati nella fig. 6.2 si ottiene facilmente:

$$V'_A = P \frac{b+c}{l}$$

$$V'_B = P \frac{a}{l};$$

AZIONI INTERNE.

Sforzo assiale. - È nullo in tutta la trave per l'assenza di forze esterne orizzontali.

Sforzo di taglio. - In ciascuno dei due tratti AD e DB è costante, per l'assenza di forze ripartite, ed uguaglia, alle imposte, le rispettive reazioni verticali.

Presenta una discontinuità nella sezione a cui è applicata la forza P . Per rendersene ragione per via diretta, basta tagliare la trave con due sezioni poste ai lati della D , e ad essa infinitamente vicine (fig. 6.3).

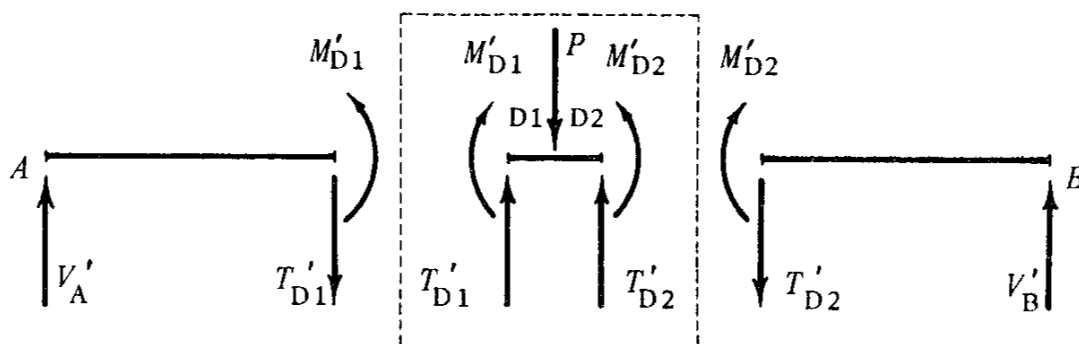


Fig. 6.3

L'equilibrio alla traslazione verticale del tronco $D1-D2$ porge:

$$|T'_{D1}| + |T'_{D2}| - P = 0.$$

La forza esterna P si suddivide in due parti che sollecitano, ciascuna, i due tratti AD e DB di trave.

Avuto riguardo alla convenzione usata per lo sforzo di taglio, si ottiene:

$$T'_{D1} - T'_{D2} = P.$$

Si può pertanto concludere che, ogni volta che in una sezione di una struttura è applicata una forza normale all'asse, la differenza algebrica degli sforzi di taglio, immediatamente a sinistra e a destra di detta

sezione, uguaglia il modulo della forza esterna.

Le leggi di variazione, coi riferimenti di fig. 6.2 risultano:

$$T'(x) = V_A' = P \frac{b+c}{l} \quad (0 \leq x < a)$$

$$T'(x_1) = -V_B' = -P \frac{a}{l} \quad (0 \leq x_1 < b+c)$$

Momento flettente. - In ciascuno dei due tratti di trave è lineare, per l'assenza di forze ripartite.

Si annulla sugli appoggi ed è privo di discontinuità, non essendo applicate alla trave coppie esterne di momento finito.

Il suo diagramma ha una cuspide all'ascissa di P , perché ivi è discontinua la sua derivata prima, cioè lo sforzo di taglio.

Con i riferimenti prima fissati, risulta:

$$M'(x) = V_A' \cdot x = P \frac{b+c}{l} x \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$M'(x_1) = V_B' \cdot x_1 = P \frac{a}{l} x_1 \quad (0 \leq x_1 \leq b+c)$$

Lungo tutta la trave risultano tese le fibre inferiori.

Il massimo valore del momento flettente è quello che compete alla sezione D :

$$M'(a) = P \frac{b+c}{l} a.$$

DIAGRAMMI DELLE AZIONI INTERNE. - Tenuto conto di quanto detto finora, si sono tracciati, nella fig. 6.4, i diagrammi delle azioni interne.

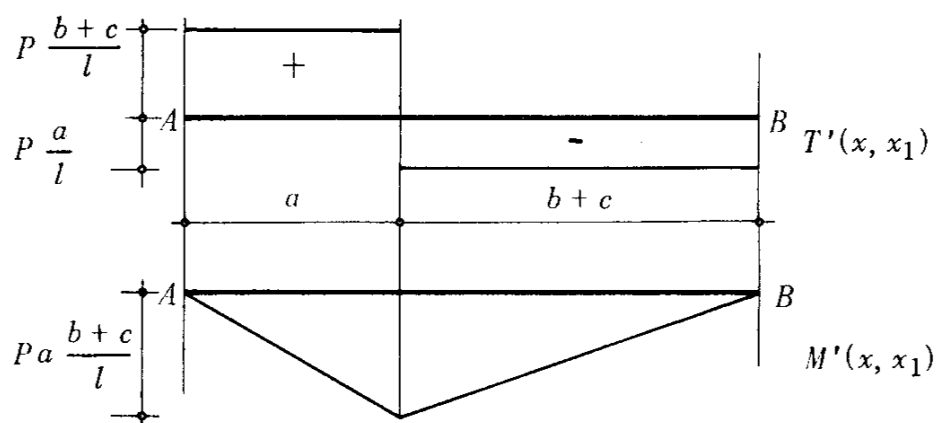


Fig. 6.4

B) EFFETTO DELLA COPPIA C .

REAZIONI VINCOLARI. - Per ragioni di equilibrio alla traslazione verticale, le due reazioni sono uguali ed opposte.

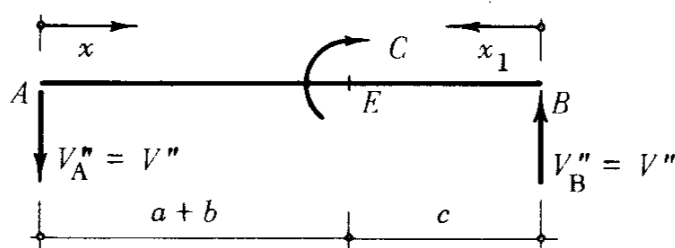


Fig. 6.5

Equilibrando alla rotazione intorno ad A (oppure B) si ottiene:

$$V'' l - C = 0$$

$$V'' = C/l.$$

Più rapidamente, le V'' devono formare coppia di momento uguale e opposto a quello di C .

AZIONI INTERNE.

Sforzo assiale. - È ovunque nullo.

Sforzo di taglio. - È costante lungo tutta la trave per l'assenza di carichi.

$$T''(x) = -V''' = -C/l \quad (0 \leq x \leq l)$$

Momento flettente. - È lineare in ciascuno dei due tratti di trave, per l'assenza di carichi. Si annulla sugli appoggi, e subisce una discontinuità nella sezione in cui è applicata la coppia.

Anche qui, si può avere una giustificazione di questo fatto per via d'equilibrio.

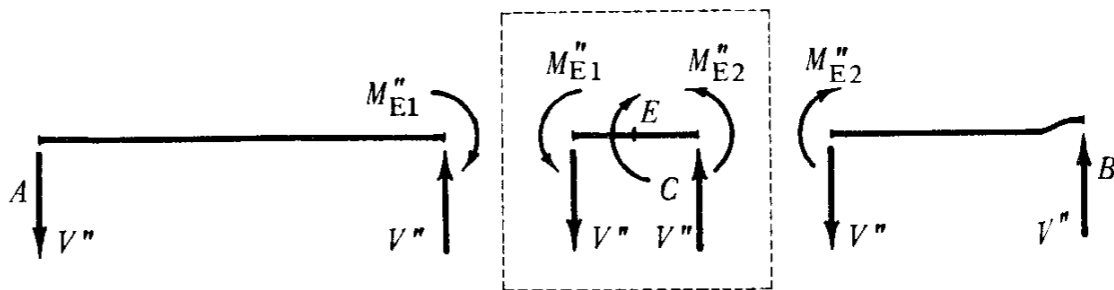


Fig. 6.6

Isoliamo un tronco materiale nell'intorno di E mediante due sezioni rette $E1$ ed $E2$, poste ai suoi lati ed infinitamente vicine.

Il tronco deve essere equilibrato a rotazione.

La coppia formata dai tagli V'' non dà contributo, perché ha braccio infinitesimo: il suo momento è trascurabile rispetto a quello, finito, delle coppie C , M''_{E1} , M''_{E2} .

Si ottiene:

$$|M''_{E1}| + |M''_{E2}| - C = 0$$

e tenuto conto del segno del momento flettente:

$$M''_{E1} - M''_{E2} = C.$$

Le leggi di variazione risultano, infine:

$$M''(x) = -V''x = -\frac{C}{l}x \quad (0 \leq x < a+b)$$

$$M''(x_1) = +V''x_1 = +\frac{C}{l}x_1 \quad (0 \leq x_1 < c)$$

Ove il momento è positivo, risultano tese le fibre inferiori.

DIAGRAMMI DELLE AZIONI INTERNE. - Sono riportati nella figura 6.7.

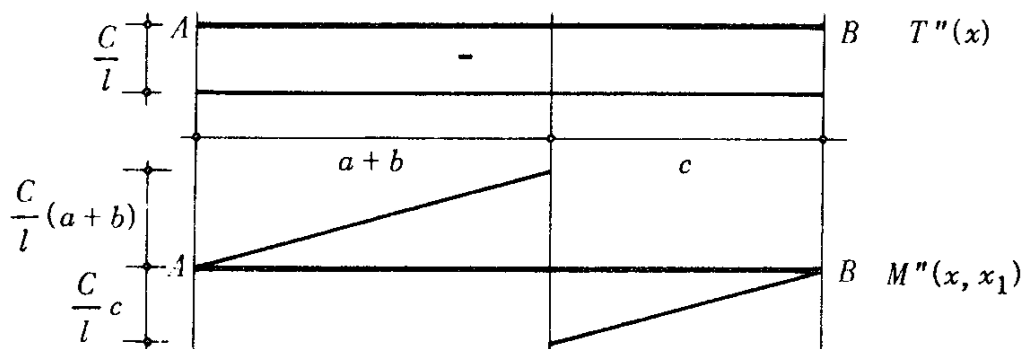


Fig. 6.7

C) EFFETTI COMPLESSIVI. - I diagrammi complessivi possono ottenersi sommando algebricamente, ordinata per ordinata, quelli ricavati nei due casi semplici.

Sforzo di taglio. - Il metodo più rapido per eseguire la somma è il seguente.

Si riporta, rispetto all'asse della trave AB scelto come riferimento, il diagramma del taglio prodotto dalla coppia (fig. 6.7). La retta MN che lo delimita è assunta come riferimento per il secondo diagramma, quello (della fig. 6.4) dovuto alla sola forza P.

Il diagramma definitivo è dato dal contorno del secondo, riferito direttamente alla retta iniziale AB.

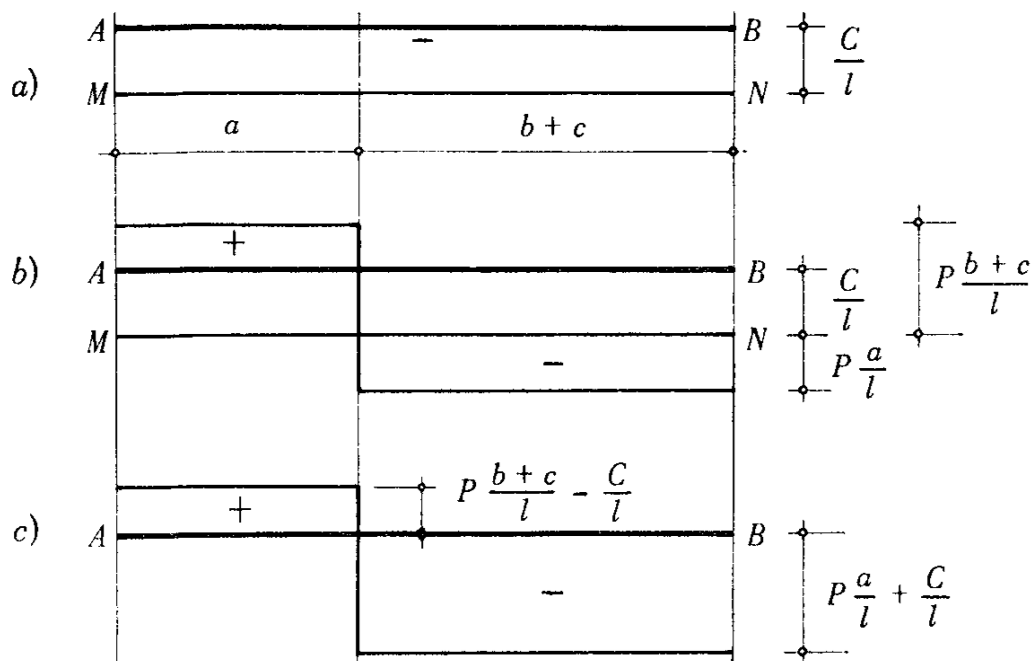


Fig. 6.8

Nella fig. 6.8 si sono riportati:

- in a), il diagramma dovuto alla C ;
- in b), il diagramma dovuto a P , sovrapposto al primo;
- in c), il diagramma finale, riferito all'asse AB della trave.

Momento flettente. - Il procedimento seguito è lo stesso già visto per il diagramma del taglio.

I risultati sono riassunti nella fig. 6.9, in cui appaiono:

- in a), il diagramma ASB del momento flettente, prodotto dalla forza concentrata, riferito all'asse AB della trave;
- in b), il diagramma $ATUVB$ del momento flettente, prodotto dalla coppia, riferito alla spezzata ASB ;
- in c), il diagramma finale, riferito all'orizzontale AB .

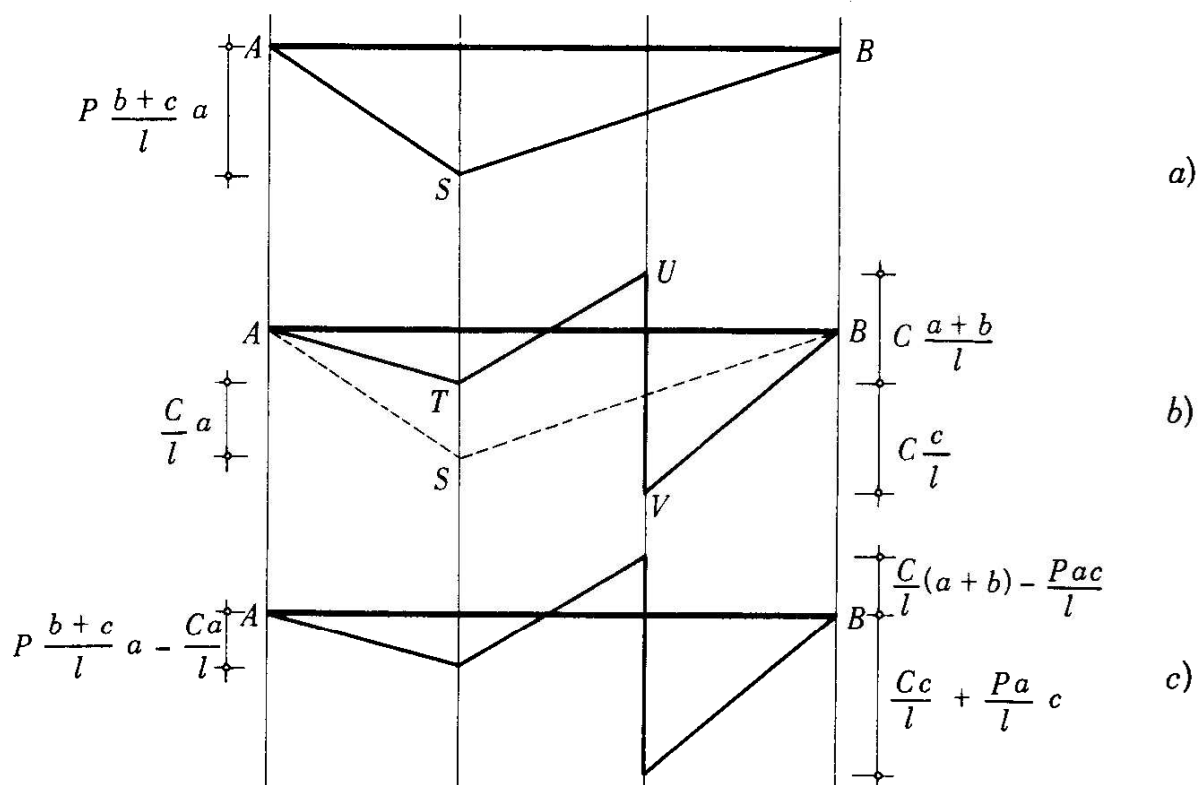


Fig. 6.9

METODO GLOBALE.

REAZIONI VINCOLARI. - Le reazioni vincolari complessive si ottengono, nella maniera più semplice, sommando algebricamente quelle prodotte separatamente della forza P e della coppia C .

Supponendole orientate verso l'alto, esse risultano:

$$V_A = P \frac{b+c}{l} - \frac{C}{l} = \frac{1}{l} [P(b+c) - C]$$

$$V_B = P \frac{a}{l} + \frac{C}{l} = \frac{1}{l} [P \cdot a + C].$$

AZIONI INTERNE.

Sforzo di taglio. - Non è definito nella sezione di ascissa $x = a$, ($x_1 = b + c$) a causa della discontinuità introdotta dalla forza concentrata P .

$$T(x) = +\frac{1}{l} [P(b+c) - C] \quad (0 \leq x < a)$$

$$T(x_1) = -\frac{1}{l} [Pa + C] \quad (0 \leq x_1 < b + c)$$

Momento flettente. - Non è definito in $x_1 = c$, causa la discontinuità dovuta alla coppia C .

$$M(x) = [P(b+c) - C] \frac{x}{l} \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$M(x_1) = (Pa + C) \frac{x_1}{l} - C \quad (c < x_1 \leq b + c)$$

$$M(x_1) = (Pa + C) \frac{x_1}{l} \quad (0 \leq x_1 < c)$$

DIAGRAMMI DELLE AZIONI INTERNE. - Si ottengono semplicemente rappresentando le espressioni sopra riportate: si ritrovano, ovviamente, quelli delle figg. 6.8-c e 6.9-c.

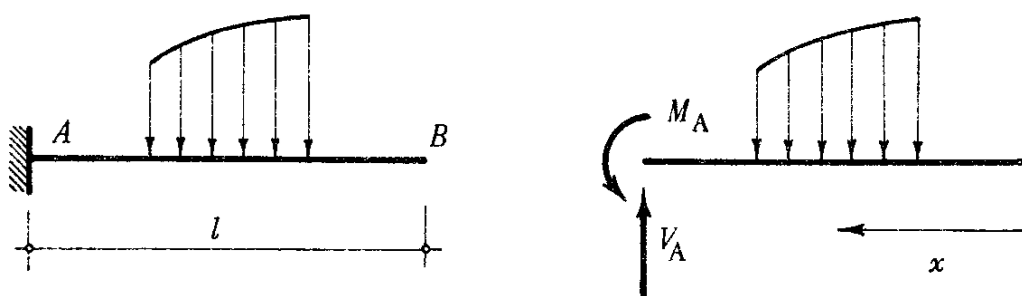
RISULTATI NOTEVOLI

Mediante i procedimenti finora illustrati è possibile risolvere qualunque trave ad una campata.

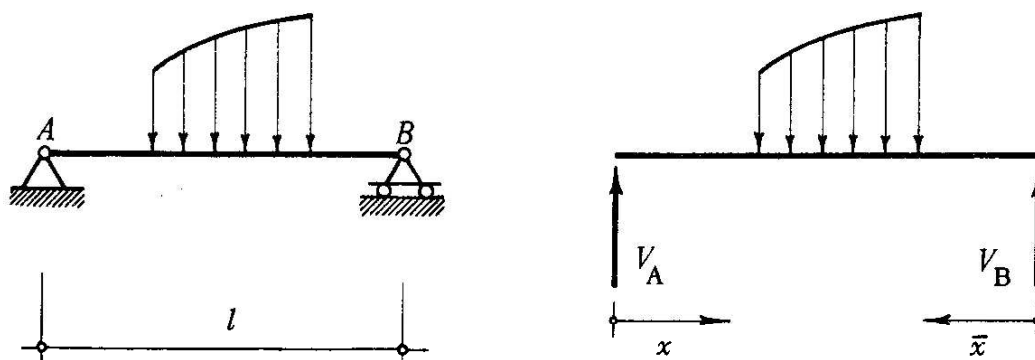
Per questo tipo di struttura riportiamo, qui di seguito, le reazioni vincolari e le azioni interne derivanti dalle più comuni condizioni di carico.

Indichiamo le notazioni e le convenzioni usate nelle tabelle riassuntive. Le reazioni si intendono positive se hanno i versi indicati in figura.

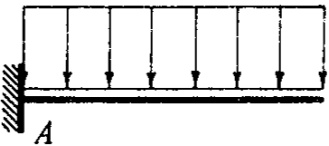
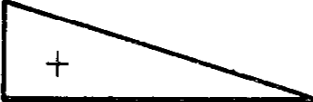
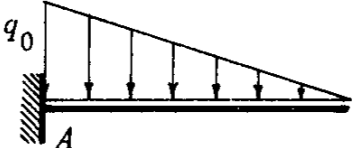
Travi a mensola.

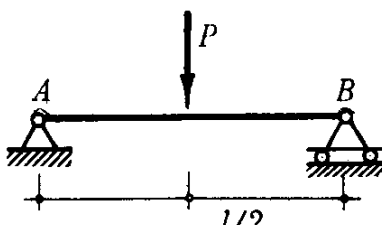
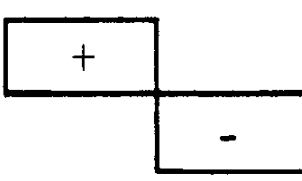
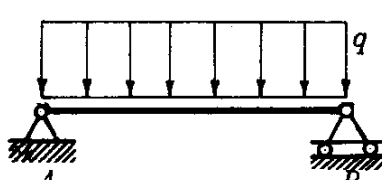
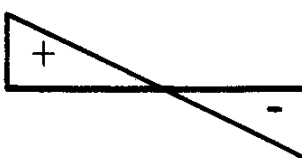
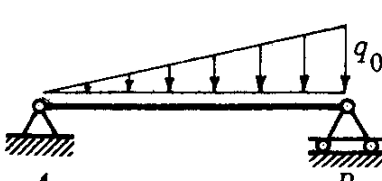
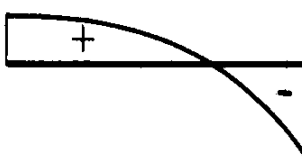
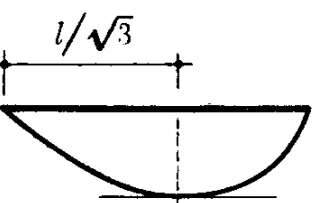
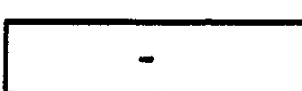


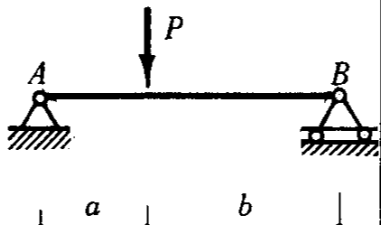
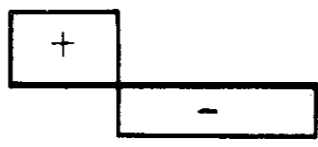
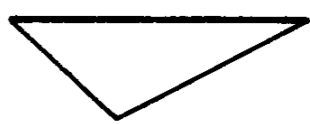
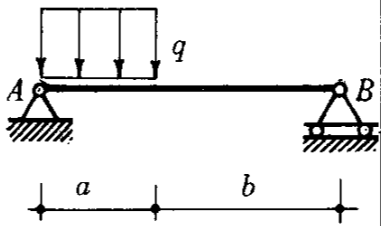
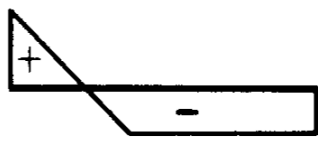
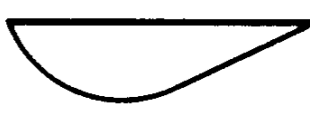
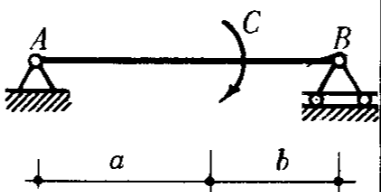
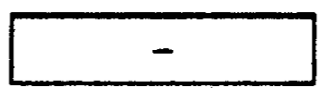
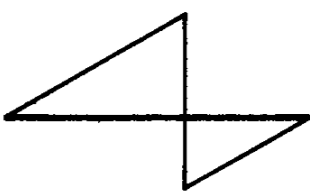
Travi appoggiate.



Per quanto riguarda i segni delle azioni interne, si intendono valide le convenzioni stabilite all'inizio di questo capitolo.

SCHEMA DI CARICO	SFORZO DI TAGLIO	MOMENTO FLETTENTE
Travi a mensola		
 $V_A = P$ $M_A = P \cdot l$	 $T(x) = +P$	 $M(x) = P \cdot x$ $M_{\max} = P \cdot l$
 $V_A = q \cdot l$ $M_A = q \cdot \frac{l^2}{2}$	 $T(x) = +q \cdot x$ $T_{\max} = q \cdot l$	 $M(x) = q \cdot \frac{x^2}{2}$ $M_{\max} = q \cdot \frac{l^2}{2}$
 $V_A = \frac{q_0 l}{2}$ $M_A = q_0 \frac{l^2}{6}$	 $T(x) = q_0 \frac{x^2}{2l}$ $T_{\max} = q_0 \frac{l}{2}$	 $M(x) = q_0 \frac{x^3}{6l}$ $M_{\max} = q_0 \frac{l^2}{6}$
 $V_A = 0$ $M_A = C$	 $T(x) = 0$	 $M(x) = C$

SCHEMA DI CARICO	SFORZO DI TAGLIO	MOMENTO FLETTENTE
Travi a due appoggi		
 $V_A = V_B = \frac{P}{2}$	 $T(x) = +\frac{P}{2} \quad \left(x < \frac{l}{2}\right)$ $T(x) = -\frac{P}{2} \quad \left(x > \frac{l}{2}\right)$	 $M(x) = \frac{P}{2} x \quad \left(x < \frac{l}{2}\right)$ $M_{\max} = \frac{Pl}{4}$
 $V_A = V_B = \frac{ql}{2}$	 $T(x) = q\left(\frac{l}{2} - x\right)$ $T_{\max} = \frac{ql}{2}$	 $M(x) = \frac{qx}{2}(l-x)$ $M_{\max} = q\frac{l^2}{8}$
 $V_A = \frac{q_0 l}{6}$ $V_B = q_0 \frac{l}{3}$	 $T(x) = \frac{q_0}{2l} \left(\frac{l^2}{3} - x^2\right)$	 $M(x) = \frac{q_0 x}{6l} (l^2 - x^2)$ $M_{\max} = q_0 \frac{l^2}{15,6}$
 $V_A = -\frac{C}{l}$ $V_B = +\frac{C}{l}$	 $T(x) = -\frac{C}{l}$	 $M(x) = \frac{C}{l} x$

SCHEMA DI CARICO	SFORZO DI TAGLIO	MOMENTO FLETTENTE
 $V_A = P \frac{b}{l}$ $V_B = P \frac{a}{l}$	 $T(x) = +P \frac{b}{l}$ $T(\bar{x}) = -P \frac{a}{l}$	 $M(x) = P \frac{b}{l} x$ $M(\bar{x}) = P \frac{a}{l} \bar{x}$ $M_{\max} = P \frac{ab}{l}$
 $V_A = \frac{qa}{2l} (2b+a)$ $V_B = q \frac{a^2}{2l}$	 $T(x) = q \left(a \frac{2b+a}{2l} - x \right)$ $T(\bar{x}) = -q \frac{a^2}{2l}$	 $M(x) = q \frac{x}{2} \left(a \frac{2b+a}{2} - x \right)$ $M(\bar{x}) = q \frac{a^2}{2l} \bar{x}$
 $V_A = -\frac{C}{l}$ $V_B = +\frac{C}{l}$	 $T(x) = -\frac{C}{l}$	 $M(x) = \frac{C}{l} x$ $M(\bar{x}) = \frac{C}{l} \bar{x}$

7. - Determinare le reazioni vincolari e le azioni interne della trave Gerber della fig. 7.1.

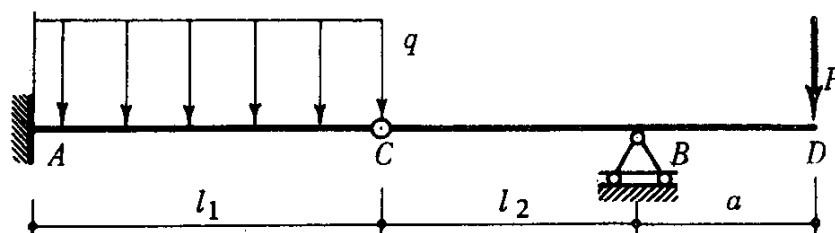


Fig. 7.1

Le travi Gerber sono caratterizzate dalla presenza di cerniere interne, in corrispondenza delle quali è nullo il momento flettente.

Nel problema in esame, la struttura è fissata, all'esterno, mediante quattro gradi di vincolo; la sconnessione semplice, introdotta dalla cerniera C , rende il problema isostatico.

Le tre equazioni cardinali dell'equilibrio rigido, insieme alla condizione (ausiliaria) derivante dall'annullarsi del momento flettente in C , sono sufficienti al calcolo delle reazioni esterne ed interne.

SOLUZIONE ANALITICA.

CALCOLO DELLE REAZIONI. - Non è necessario calcolare a priori tutti i parametri di reazione: ove sia nota la reazione del carrello B , è possibile procedere direttamente al calcolo delle azioni interne, operando con le forze alla destra.

Svincolando in B , si mette in evidenza la reazione V_B . Essa si determina subito, annullando in C il momento flettente.

Si ottiene facilmente (con le forze che seguono):

$$V_B \cdot l_2 - P(a + l_2) = 0$$

$$V_B = P \frac{l_2 + a}{l_2}.$$

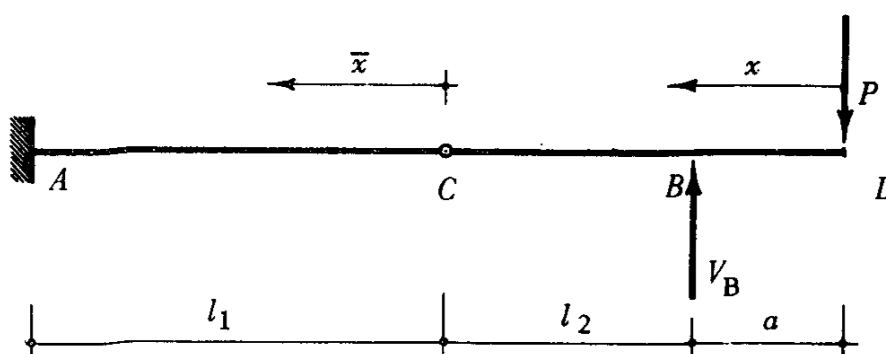


Fig. 7.2

Le reazioni in A coincideranno, poi, con i valori che le azioni interne assumono nella sezione di ascissa $\bar{x} = l_1$.

Si noti pure che la verticalità dei carichi e della reazione V_B comporta l'assenza di componenti orizzontali nella reazione dell'incastro.

CALCOLO DELLE AZIONI INTERNE.

Sforzo assiale. - È nullo lungo tutta la travata.

Sforzo di taglio.

1. *Tratto DB.* - Ogni sezione dello sbalzo è seguita solo dalla forza P .

$$T(x) = +P \quad (0 \leq x < a)$$

2. *Tratto BC.* - Le forze alla destra della sezione corrente, cioè P e V_B , forniscono direttamente il taglio

$$T(x) = +P - V_B = -P \frac{a}{l_2} \quad (a < x \leq l_2 + a)$$

Il taglio non è definito in $x = a$, causa la discontinuità prodotta dalla V_B .

3. *Tratto AC.* - Calcolando sempre con le forze alla destra:

$$T(\bar{x}) = +P - V_B + q \cdot \bar{x} = -P \frac{a}{l_2} + q \cdot \bar{x} \quad (0 \leq \bar{x} \leq l_1)$$

In particolare:

$$T(l_1) = -\frac{Pa}{l_2} + q \cdot l_1$$

è la reazione verticale dell'incastro; quando risulta positiva, è volta verso l'alto.

Lo sforzo di taglio si annulla nella sezione di ascissa $\bar{x}_0$, ottenuta dalla relazione:

$$T(\bar{x}_0) = -\frac{Pa}{l_2} + q\bar{x}_0 = 0$$

da cui

$$\bar{x}_0 = \frac{P}{q} \frac{a}{l_2}.$$

La soluzione ha significato solo se $\bar{x}_0 \leq l_1$.

Momento flettente.

1. *Tratto DB.*

$$M(x) = P \cdot x. \quad (0 \leq x \leq a)$$

Le fibre tese sono quelle superiori.

2. *Tratto BC.*

$$M(x) = P \cdot x - V_B (x - a) = P \frac{a}{l_2} (a + l_2 - x). \quad (a \leq x \leq a + l_2)$$

Il momento flettente presenta, nel suo diagramma, una cuspidè in

B. Essa è dovuta alla reazione finita del carrello.

Sono tese le fibre superiori.

3. *Tratto CA.* - Per calcolare il momento flettente in *CA*, si possono trasportare in *C* le forze *P* e *V_B*: il loro momento di trasporto coincide col momento flettente in *C*, è quindi nullo.

Ciò equivale a sezionare in *C*, applicando alla parte sinistra lo sforzo di taglio trasmesso dalla parte destra. Tale sforzo è diretto verso l'alto, ed ha il modulo:

$$T_C = V_B - P = P \frac{a}{l_2}.$$

Infine:

$$M(\bar{x}) = P \frac{a}{l_2} \bar{x} - \frac{q}{2} \bar{x}^2 \quad (0 \leq \bar{x} \leq l_1)$$

In particolare, il momento d'incastro vale:

$$M(l_1) = l_1 \left(P \frac{a}{l_2} - \frac{ql_1}{2} \right).$$

Nelle zone in cui il momento flettente è positivo risultano tese le fibre inferiori. Di conseguenza, se $M(l_1)$ è positivo, la coppia che l'incastro applica alla trave ha verso orario.

Il momento flettente ha un massimo relativo ove si annulla lo sforzo di taglio.

$$M_{\max} = M(\bar{x}_0) = \frac{P^2}{2q} \frac{a^2}{l_2^2}.$$

OSSERVAZIONE. - L'influenza della reazione dell'appoggio *B* sulle leggi di variazione delle azioni interne può rendersi ben evidente isolando, dal resto della travata, un elemento materiale nell'intorno dell'appoggio, mediante due sezioni ai suoi lati ed infinitamente vicine. La quiete di detto elemento impone che siano equilibrate le azioni (esterne ed interne) che lo sollecitano (fig. 7.3).

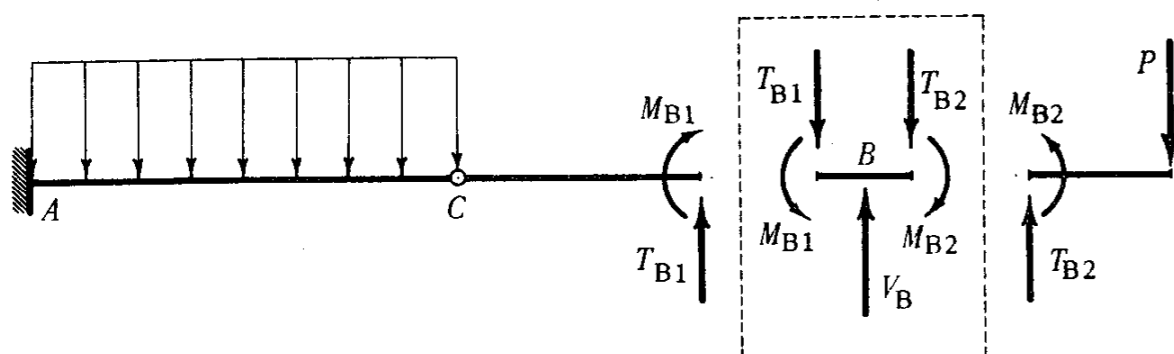


Fig. 7.3

Equilibrio alla traslazione verticale del nodo.

$$|T_{B1}| + |T_{B2}| - V_B = 0.$$

Lo sforzo di taglio, in corrispondenza dell'appoggio, subisce una discontinuità pari al modulo della reazione V_B . Avuto riguardo alla convenzione usata per il segno del taglio, si ha poi:

$$V_B = T_{B2} - T_{B1}.$$

Equilibrio alla rotazione del nodo. - Le forze verticali hanno bracci infinitesimi, danno pertanto contributo trascurabile all'equilibrio alla rotazione.

$$|M_{B1}| - |M_{B2}| = 0$$

$$|M_{B1}| = |M_{B2}|.$$

Com'è agevole constatare, l'uguaglianza dei momenti flettenti vale anche in segno: entrambi i momenti tendono le fibre superiori.

DIAGRAMMI DELLE AZIONI INTERNE.

Sforzo di taglio. - È costante in ciascuno dei tratti DB e BC , privi di carichi ripartiti. In CA la presenza del carico uniforme fa sì che

il diagramma risulti lineare. La reazione V_B introduce una discontinuità pari al suo modulo; in C vi è una cuspidè, perché il carico (uguale alla derivata del taglio) vi è discontinuo.

Si ottengono, qualitativamente, gli stessi risultati che si hanno riportando in diagramma le leggi di variazione trovate più sopra.

Momento flettente. - È nullo nell'estremo libero D e nella cerniera interna C . Varia linearmente, attesa la costanza del taglio, nei tratti DB e BC . In B ha una cuspidè, derivante dalla presenza della reazione concentrata V_B .

In CA è parabolico, per la presenza del carico uniforme. Deriva dalla sovrapposizione di due diagrammi:

- *lineare*, dovuto al taglio della sezione C , applicato alla mensola AC ;
- *parabolico*, dovuto al carico uniforme sulla stessa mensola, priva di carichi in C .

La prima parte si ottiene semplicemente prolungando il diagramma del momento in CB .

Riferendo la parabola a questa retta (tratteggiata in figura), si ottiene il diagramma totale.

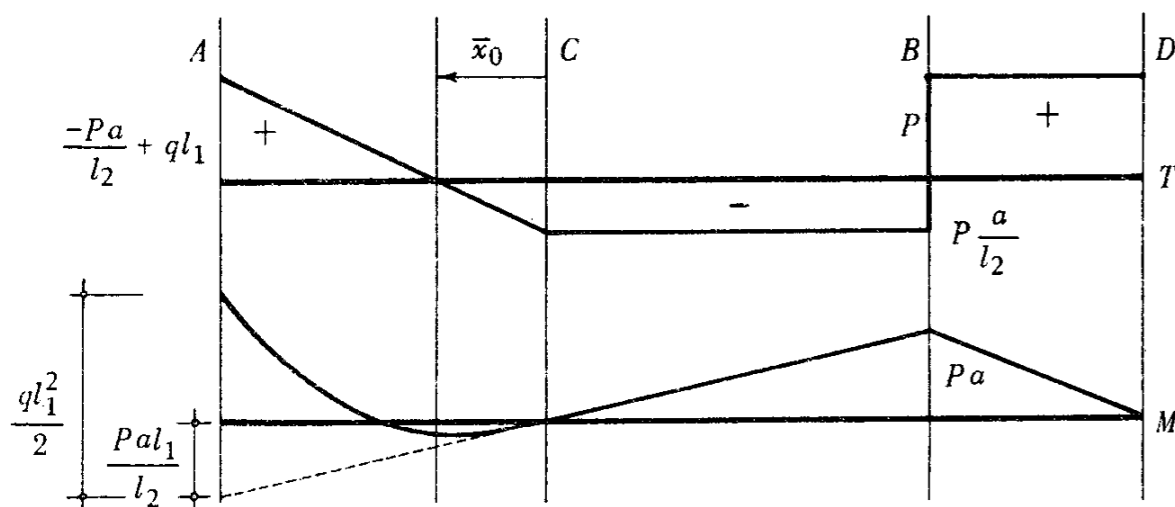


Fig. 7.4

SOLUZIONE GRAFICA.

La risoluzione grafica, mediante l'uso di un opportuno poligono funicolare, è atta a determinare insieme le reazioni vincolari esterne ed il diagramma del momento flettente. Dalla poligonale delle forze si potrà poi ottenere subito il diagramma dello sforzo tagliante.

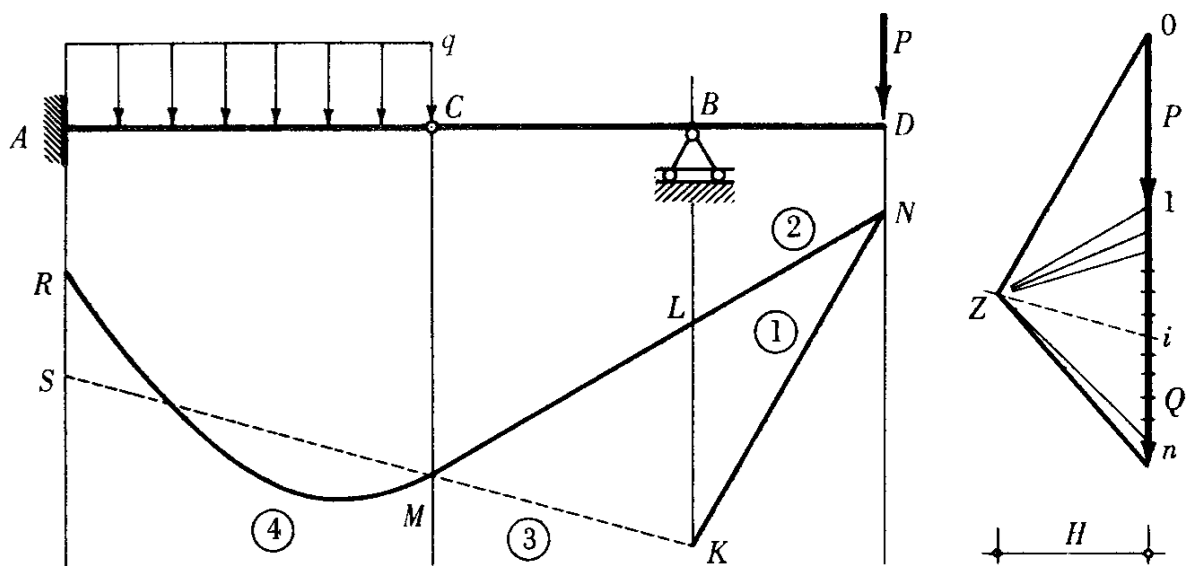


Fig. 7.5

Per eseguire la costruzione, si riportano i carichi, in prefissata scala, sulla retta delle forze. Risulta:

$$\overline{01} \equiv P$$

$$\overline{1n} \equiv Q = q \cdot l_1.$$

Si proiettano gli estremi delle forze da un polo arbitrario Z ; a partire da questo si traccia un poligono funicolare che colleghi detti carichi. Poiché tutte le forze applicate alla travata sono verticali, le ordinate verticali del poligono funicolare, lette in opportuno riferimento, danno il momento flettente in ciascuna sezione.

La forma del poligono dipende solo dai carichi applicati, e forni-

sce la legge di variazione del momento flettente. Mediante le condizioni ai limiti, derivanti dalla natura dei vincoli, si otterrà il riferimento, costituito, in generale, da una o più rette.

Il segmento LK , staccato sulla verticale di B dai primi due lati del poligono, fornisce, a meno della distanza polare H , il momento flettente immediatamente a destra dell'appoggio.

Per la continuità materiale della trave, LK rappresenta anche il momento flettente immediatamente a sinistra di B . Ne segue che la retta di riferimento deve contenere il punto K . Inoltre, l'annullarsi del momento flettente in C fa sì che sulla sua verticale si intersechino tale retta ed il poligono funicolare.

In conclusione, la retta di riferimento (tratteggiata nella fig. 7.5) è la congiungente MK .

Si noti, ancora, che le rette ①, ②, ③ formano il poligono funicolare (chiuso) che collega i carichi e le reazioni della trave CBD , che si comporta come appoggiata in C e B . Se dal polo Z si traccia la parallela alla retta MK , si identifica, sulla retta delle forze, il vertice i che fornisce le reazioni vincolari.

La reazione dell'appoggio è

$$V_B \equiv \vec{i0}.$$

L'azione, attraverso la cerniera C , della parte sinistra sulla destra è:

$$T_C = \vec{1i}.$$

Inversamente, $T_C = \vec{i1}$ è l'azione della parte destra sulla sinistra.

La reazione verticale dell'incastro è:

$$V_A = \vec{n\bar{i}} = \vec{n1} - \vec{1\bar{i}} \quad (\text{volta verso l'alto}).$$

Il momento d'incastro è infine:

$$M_A = H \cdot \overline{RS}.$$

Come si è già detto, il poligono funicolare, riferito alla spezzata SKN , è il diagramma, con ordinate verticali, del momento flettente.

8. - Risolvere la trave Gerber della fig. 8.1. Determinare la posizione della cerniera interna che rende uguali, in valore assoluto, il momento massimo e quello minimo della campata di destra.

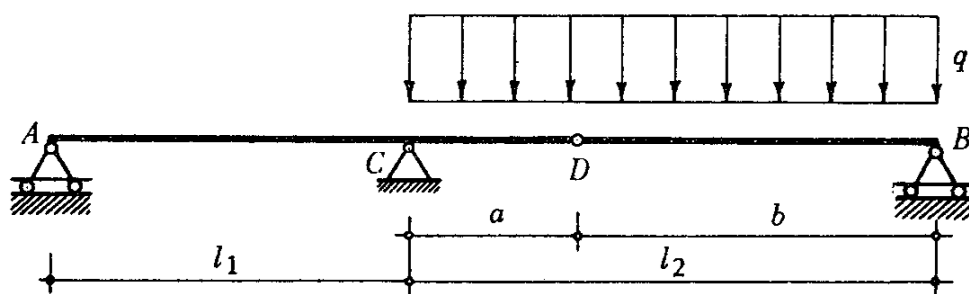


Fig. 8.1

CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI. - La reazione in B è verticale, volta verso l'alto, ed il suo modulo è uguale alla metà del carico applicato alla trave DB .

$$V_B = q \frac{b}{2}.$$

La reazione in A può invece ottenersi scrivendo l'equilibrio generale alla rotazione intorno alla cerniera C .

$$V_B \cdot l_2 - q \frac{l_2^2}{2} + V_A \cdot l_1 = 0$$

$$V_A = q \frac{a}{2} \frac{l_2}{l_1}.$$

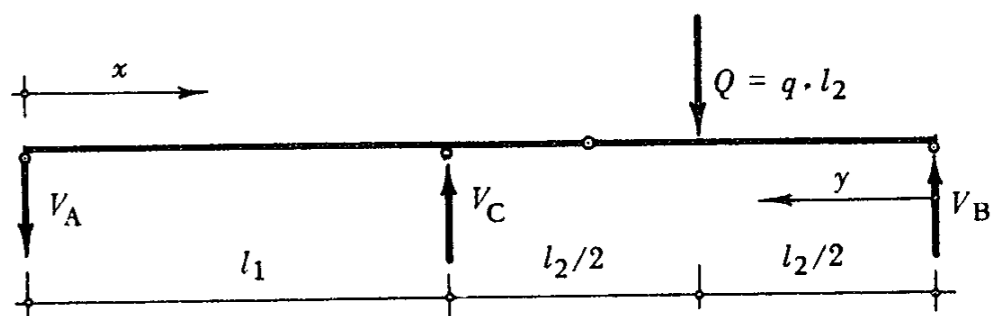


Fig. 8.2

Infine, l'equilibrio alla traslazione verticale fornisce subito il valore della reazione di C, anch'essa verticale.

$$V_C - Q + V_B - V_A = 0$$

$$V_C = \frac{q}{2l_1} \left[l_1 l_2 + a(l_1 + l_2) \right].$$

CALCOLO DELLE AZIONI INTERNE.

Sforzo di taglio.

1. Tratto AC:

$$T(x) = -V_A = -q \frac{a}{2} \frac{l_2}{l_1} \quad (0 \leq x < l_1)$$

2. Tratto BC:

$$T(y) = -V_B + qy = q \left(y - \frac{l_2}{2} \right) \quad (0 \leq y < l_2)$$

Momento flettente.

1. Tratto AC:

$$M(x) = V_A x = q \frac{a}{2} \frac{l_2}{l_1} x \quad (\text{tende le fibre superiori})$$

2. *Tratto BC:*

$$M(y) = V_B \cdot y - q \frac{y^2}{2} = q \frac{y}{2} (b - y).$$

Nel tratto BD le fibre tese sono quelle inferiori. Oltre la cerniera D (in cui si annulla il momento flettente) le fibre tese risultano quelle superiori.

In particolare, il momento flettente sull'appoggio C vale:

$$M_C = \left| M \right|_{x=l_1} = q \frac{a}{2} l_2.$$

Si noti che questo valore è indipendente dalla lunghezza della campata AC .

Il massimo momento positivo (cioè, che tende le fibre inferiori) si verifica invece nella sezione E di mezzaria del tratto DB . Esso vale:

$$M_E = \left| M \right|_{y=\frac{b}{2}} = q \frac{b^2}{8}.$$

DIAGRAMMI DELLE AZIONI INTERNE.

Momento flettente. - Si tracci il diagramma parabolico di momento, conseguente alla distribuzione uniforme di carico sulla campata BC .

L'ordinata in corrispondenza della cerniera interna vale:

$$M_0 = q \frac{l_2}{2} a - q \frac{a^2}{2} = q \frac{ab}{2}.$$

Il vero diagramma del momento flettente, oltre ad essere parabolico, deve avere i punti di ordinata nulla sulle verticali di B e D .

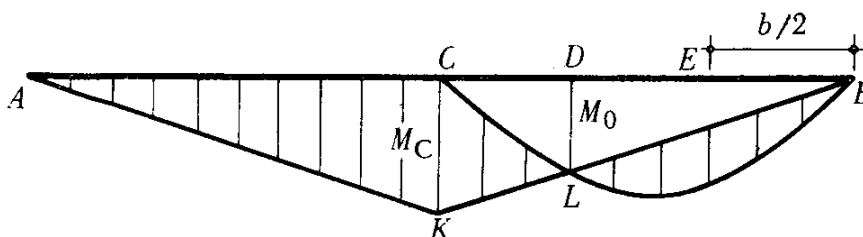


Fig. 8.3

Se L è l'intersezione della parabola con la verticale per D , la congiungente BL è il riferimento vero della parabola per il tratto CB .

Per la continuità del momento flettente sull'appoggio intermedio, $M_C = \overline{CK}$ è anche il valore del momento flettente all'estremo destro della campata AC . Quest'ultima è scarica; il diagramma che le compete è allora la congiungente AK .

L'ordinata M_C si trova subito per semplice similitudine:

$$M_C = M_0 \frac{l_2}{b} = q \frac{a}{2} l_2.$$

Sforzo di taglio. - È costante in AC (assenza di carichi) e lineare in CB (carico uniforme). Si annulla ove è massimo il momento flettente, cioè a metà del tratto DB .

La discontinuità, in corrispondenza dell'appoggio intermedio, è uguale al modulo della rispettiva reazione.

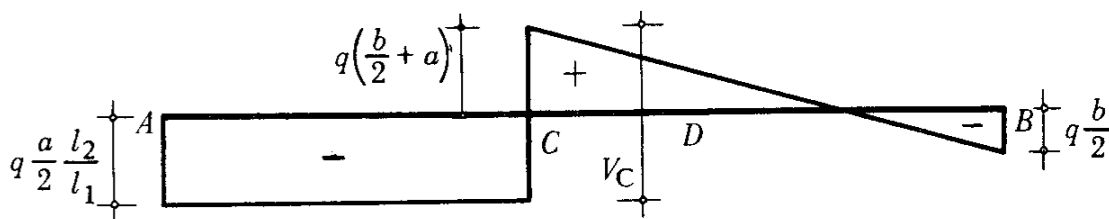


Fig. 8.4

POSIZIONE DELLA CERNIERA INTERNA. - La richiesta posizione della cerniera interna è determinata dalla relazione:

$$M_C = M_E$$

cioè

$$q \frac{a}{2} l_2 = q \frac{b^2}{8}$$

da cui

$$b = 2(\sqrt{2} - 1) l_2 \cong 0,828 l_2.$$

OSSERVAZIONE. - Il risultato ora ottenuto può presentare interesse concreto nella pratica tecnica.

Come vedremo più oltre, le dimensioni trasversali di una trave, quindi la quantità di materiale impiegato per costruirla, dipendono essenzialmente dai valori assunti dal momento flettente. Se la trave è prismatica, il suo proporzionamento è legato al massimo assoluto (in modulo) del momento. Poiché questo cambia segno procedendo lungo l'asse della trave, la condizione di massima economia si traduce proprio nell'uguaglianza tra massimo positivo e negativo.

Il progettista può ottenere questo risultato semplicemente regolando la posizione della cerniera interna.

* * *

9. - Determinare reazioni ed azioni interne in un arco semicircolare a tre cerniere caricato da una forza concentrata.

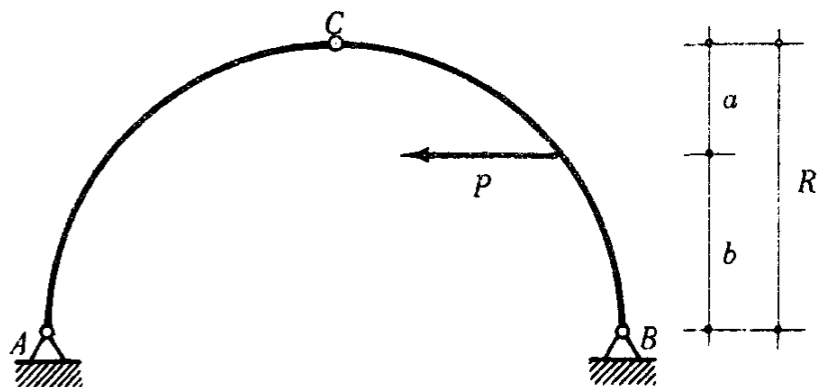


Fig. 9.1

SOLUZIONE GRAFICA: LA CURVA DELLE PRESSIONI.

LA DETERMINAZIONE: METODO DIRETTO. - Una semplice ispezione della fig. 9.2 fornisce subito la chiave della soluzione. La parte AC di struttura non è direttamente caricata: l'unica forza esterna

che la sollecita è la reazione d'imposta in A .

L'annullarsi del momento flettente in C e in A impone alla reazione R_A di A di avere come retta d'azione proprio la congiungente CA .

Nota la retta di R_A , la soluzione è ricondotta ad un elementare problema di decomposizione: la reazione della cerniera B contiene anche l'intersezione di P e di R_A . Un triangolo d'equilibrio individua subito versi ed intensità delle reazioni.

Ogni sezione del tratto ACD è preceduta solo dalla R_A , che ne è l'azione interna; ogni sezione del tratto BD ha per azione interna la R_B .

La bilatera formata dalle reazioni dei vincoli terminali è la curva delle pressioni.

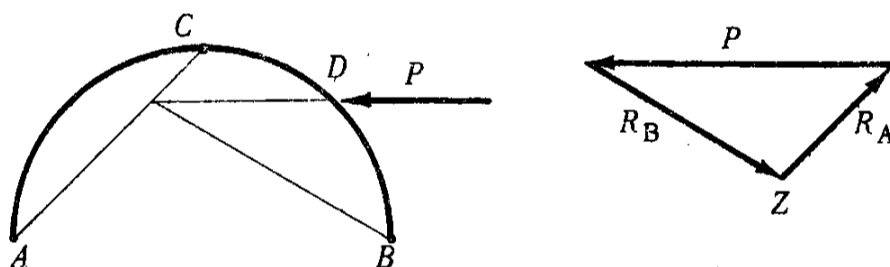


Fig. 9.2

LA DETERMINAZIONE: IL POLIGONO PER TRE PUNTI. - La curva delle pressioni è il poligono funicolare che, collegando i carichi esterni, passa per le tre cerniere A , C , B . Il suo lato generico è, infatti, sede della risultante delle forze che precedono (o seguono), cioè dell'azione interna corrente. L'annullarsi del momento in corrispondenza delle cerniere impone che per esse passi il suddetto poligono.

Questa proprietà fondamentale della curva delle pressioni, per l'arco a tre cerniere, ne permette il tracciamento, qualunque sia la condizione di carico, come poligono funicolare passante per tre punti assegnati.

Nel caso in esame, i carichi si riducono ad uno solo: il poligono è composto di due lati. Il primo, dovendo passare per le cerniere A e C , ne è la congiungente; il secondo è allora immediato.

Le reazioni (e quindi i moduli e i versi delle azioni interne) si ottengono dalla poligonale delle forze. Si noti che, per tracciare un poligo-

no funicolare, è necessario prendere le forze in un ordine ben definito. Se, qui, si parte dalla cerniera A , percorrendo la struttura si incontrano di seguito: la R_A , la P , la R_B .

Nella poligonale delle forze esse dovranno susseguirsi nel medesimo ordine. Perché ciò avvenga, basta tracciare la parallela ad R_A dal primo estremo di P , e dal suo secondo estremo la parallela a R_B . Il polo Z , da cui è originato il poligono funicolare *curva delle pressioni*, è l'intersezione delle reazioni.

La costruzione coincide ovviamente con quella diretta, riportata in fig. 9.2.

L'USO DELLA CURVA DELLE PRESSIONI. - Come si è già detto, per ogni sezione retta del tratto ACD , l'azione interna coincide con la reazione R_A .

In quanto risultante delle forze alla sinistra, essa deve intendersi applicata al tratto di destra nella sua sezione S_d iniziale. Sul tratto di sinistra, invece, agisce per reazione una forza opposta: essa può ottenersi come risultante delle forze che seguono, cioè P e R_B (v. fig. 9.3).

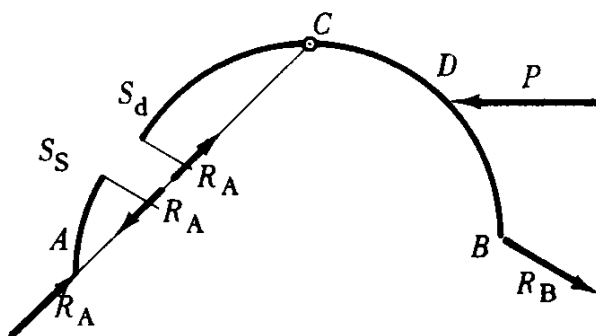


Fig. 9.3

Per ottenere le componenti dell'azione interna basta poi ridurre la R_A al baricentro della sezione. La coppia di trasporto è il momento flettente; le componenti secondo la tangente locale ed il piano della sezione sono rispettivamente sforzo assiale e taglio.

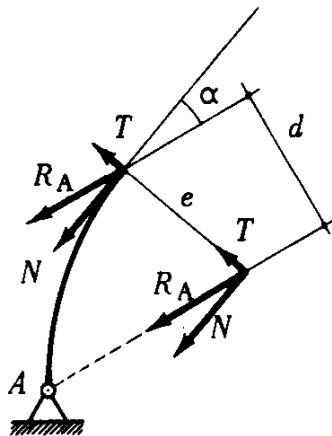


Fig. 9.4

Si ottiene, cioè:

$$M = R_A \cdot d$$

$$N = R_A \cdot \cos \alpha$$

$$T = R_A \cdot \sin \alpha.$$

Oppure, la decomposizione della R_A può eseguirsi nel *centro di pressione*, cioè la sua intersezione col piano della sezione.

Il taglio non dà momento rispetto al baricentro; si può allora porre:

$$M = N \cdot e = R_A \cdot d.$$

La distanza e tra il centro di pressione ed il baricentro prende il nome di *eccentricità*.

Analoghe considerazioni valgono per il tratto DB , la cui azione interna è R_B .

OSSERVAZIONE. - La sezione del tratto AC , in cui il momento flettente raggiunge il valore massimo è quella in cui la tangente all'asse è parallela alla R_A . In tale sezione, infatti, è nullo il taglio; lo sforzo assiale coincide con il modulo della reazione R_A . Inoltre, per essa risulta: $e = d$, ed il momento è massimo perché tale è la distanza $d_{\max}$ rispetto a tutte le altre sezioni. Notiamo, infine, che il diagramma del momento flettente coincide con quello delle distanze d ; e ciò a meno del modulo di R_A nel tratto ACD , e di R_B nel resto della struttura.

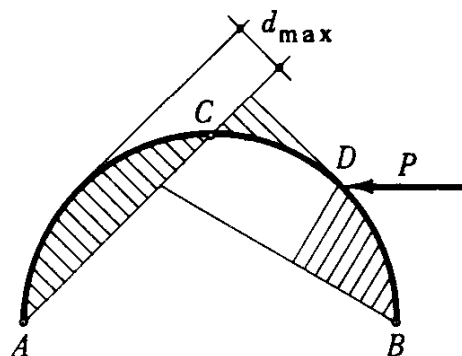


Fig. 9.5

SOLUZIONE ANALITICA.

CALCOLO DELLE REAZIONI. - Svincolando in corrispondenza delle cerniere esterne si mettono in evidenza quattro componenti di reazione.

Equilibrio alla traslazione verticale. - Le reazioni verticali devono essere eguali e opposte, non essendovi altre forze con tale direzione:

$$V_A = V_B = V.$$

Equilibrio alla traslazione orizzontale. - Le reazioni orizzontali (spinte) devono, in complesso, equilibrare il carico esterno:

$$H_A + H_B - P = 0.$$

Equilibrio alla rotazione intorno ad A (oppure B).

$$Pb - V \cdot 2R = 0$$

$$V = P \frac{b}{2R}.$$

Le reazioni verticali sono direttamente esprimibili in funzione del carico esterno.

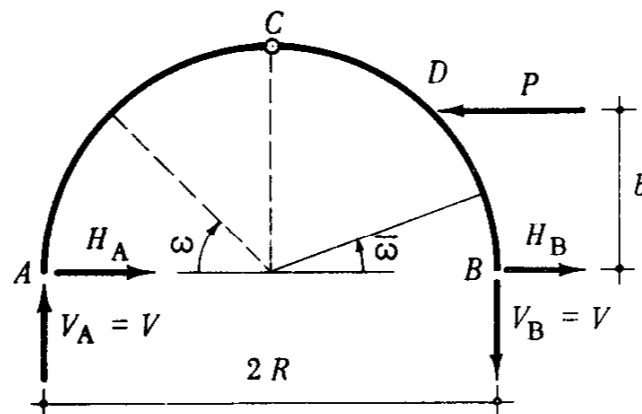


Fig. 9.6

Equazione ausiliaria: momento nullo in C. - Per calcolare le spinte è necessario ricorrere all'equazione ausiliaria, derivante dalla presenza della cerniera interna. In essa è nullo il momento flettente, che valuteremo con le forze alla sinistra:

$$H_A \cdot R - V \cdot R = 0$$

$$H_A = V = P \frac{b}{2R}.$$

Di conseguenza:

$$H_B = P - H_A = P \left(1 - \frac{b}{2R} \right) = P \frac{R + a}{2R}.$$

Si poteva ottenere il medesimo risultato calcolando il momento flettente con le forze di destra:

$$H_B \cdot R - Pa - VR = 0$$

$$H_B = P \frac{a}{R} + V = P \frac{R + a}{2R}.$$

CALCOLO DELLE AZIONI INTERNE. - Come si è già visto, l'azione interna totale risulta costante per ciascuno dei due tratti *AD* e *DB*. Tuttavia, ne variano le componenti poiché l'incurvamento dell'asse fa cambiare la posizione del riferimento solidale con la sezione corrente.

Le leggi di variazione sono diverse nei due tratti *ACD* e *DB* della struttura che, rispettivamente, precedono e seguono la sezione in cui è applicato il carico. Per semplicità, in ciascuno dei due tratti calcoleremo le sollecitazioni partendo dal rispettivo vincolo esterno.

Useremo allora due riferimenti polari, con i raggi vettori spiccati dal centro della circonferenza a cui appartiene l'asse dell'arco. Per la parte sinistra conteremo le anomalie ω a partire dall'orizzontale per *A*; quella per *B* sarà, invece, l'origine delle anomalie ω per la parte destra (vedi la fig. 9.6).

Sforzo assiale.1. *Tratto ACD.*

$$N(\omega) = -V \cos \omega - H_A \sin \omega = -\frac{Pb}{2R} (\cos \omega + \sin \omega).$$

2. *Tratto DB.*

$$N(\bar{\omega}) = V \cos \bar{\omega} + H_B \sin \bar{\omega} = P \left[\frac{b}{2R} \cos \bar{\omega} + \left(1 - \frac{b}{2R}\right) \sin \bar{\omega} \right].$$

Sforzo di taglio.1. *Tratto ACD.*

$$T(\omega) = V \sin \omega - H_A \cos \omega = \frac{Pb}{2R} (\sin \omega - \cos \omega)$$

2. *Tratto DB.*

$$T(\bar{\omega}) = V \sin \bar{\omega} - H_B \cos \bar{\omega} = P \left[\frac{b}{2R} \sin \bar{\omega} - \left(1 - \frac{b}{2R}\right) \cos \bar{\omega} \right].$$

Momento flettente.1. *Tratto ACD.*

$$M(\omega) = VR(1 - \cos \omega) - H_A R \sin \omega = \frac{Pb}{2} (1 - \sin \omega - \cos \omega).$$

2. *Tratto DB.*

$$M(\bar{\omega}) = H_B R \sin \bar{\omega} - VR(1 - \cos \bar{\omega}) = P \left[\left(R - \frac{b}{2}\right) \sin \bar{\omega} - \frac{b}{2} (1 - \cos \bar{\omega}) \right].$$

* * *

10. - Determinare le azioni interne del portale a tre cerniere della fig. 10.1, caricato uniformemente su metà del traverso.

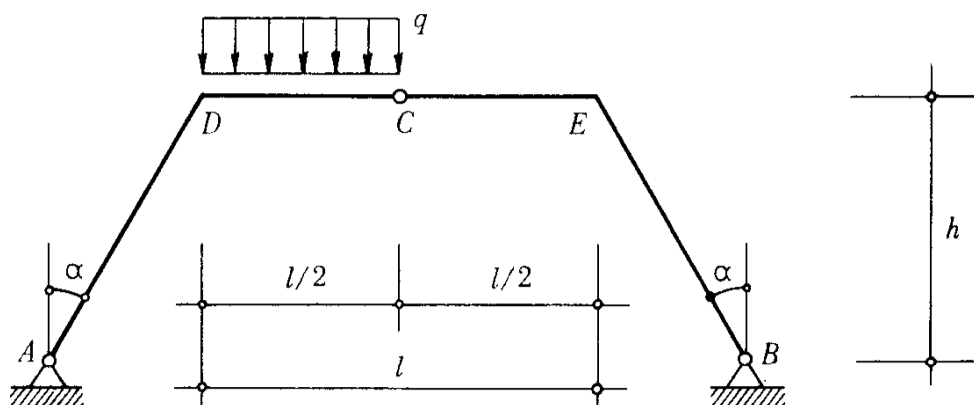


Fig. 10.1

SOLUZIONE GRAFICA: LA CURVA DELLE PRESSIONI.

Si possono determinare insieme reazioni vincolari ed azioni interne semplicemente costruendo la curva delle pressioni. A questo scopo, è sufficiente tracciare il poligono funicolare che collega i carichi esterni, passando per le tre cerniere A , C , B . Ricordiamo che è opportuno sostituire ai carichi parziali, posti ai lati della cerniera interna, le relative risultanti. Qui il carico è tutto a sinistra di C : la sua risultante Q può essere facilmente connessa col poligono $AKCB$ che ha, come secondo lato, la congiungente CB .

Nella poligonale delle forze, il polo Z si identifica tracciando rispettivamente dagli estremi O e n le parallele ai lati AK e CB . La reazione R_A della cerniera A agisce sul lato AK ; il suo modulo è (fig. 10.2):

$$R_A = \overline{ZO}.$$

Analogamente, la reazione di B agisce su CB , ed ha modulo:

$$R_B = \overline{nZ}.$$