

$$M_{\max} = M(\bar{x}) = \frac{9}{128} q l^2 = 5,272 \text{ tm}$$

$$\bar{W} = \frac{M_{\max}}{K} = 330 \text{ cm}^3$$

Si adotta un IPN 240, che ha:

$$W = 353 \text{ cm}^3; \quad J = 4239 \text{ cm}^4$$

$$EJ = 2,1 \times 10^6 \times 4239 = 8,902 \times 10^9 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2.$$

b) Calcolo dei movimenti.

$$\varphi_A = 0,767 \times 10^{-2} \text{ rad}$$

$$\varphi_B = -0,986 \times 10^{-2} \text{ rad}$$

$$\varphi_C = -0,110 \times 10^{-2} \text{ rad}$$

$$\eta_C = 2,74 \text{ cm.}$$

69. - Calcolare l'abbassamento della sezione, a cui è applicato il carico, nella trave indicata nella fig. 69.1.

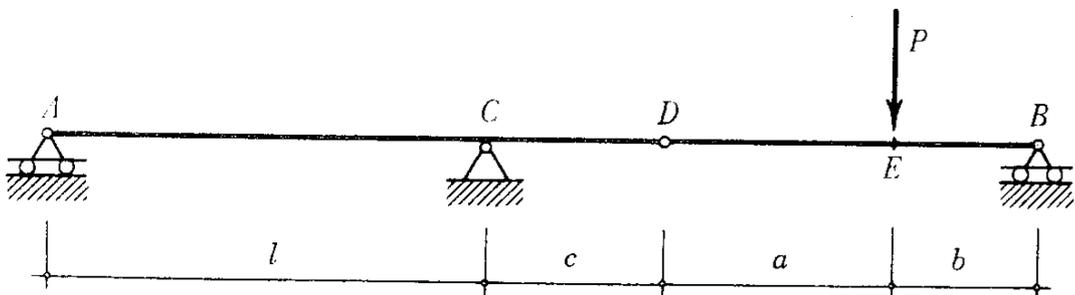


Fig. 69.1

È noto che il funzionamento di ogni trave GERBER può ridursi a quello di un opportuno insieme di travi appoggiate ed a mensola. Ciò va-

le per le azioni interne, ma anche, come vedremo, per le deformazioni.

In questo caso conviene sciogliere la solidarietà in corrispondenza della cerniera interna D , mettendo in evidenza la reazione mutua V .

Essa è determinata da semplici considerazioni d'equilibrio, e vale:

$$V = P \frac{b}{a + b}.$$

La trave DB si comporta come appoggiata agli estremi. L'appoggio D subisce un cedimento (dovuto all'elasticità del tratto ACD) il quale non altera lo stato tensionale della trave stessa, ma solo quello di moto.

La trave ACD , invece, risulta appoggiata in A e C , e caricata dalla forza V (azione della parte destra) all'estremità libera dello sbalzo CD .

Supponiamo che la travata abbia rigidità flessionale EJ costante.

Lo spostamento verticale η_E della sezione E può pensarsi derivante dalla sovrapposizione di due effetti:

- deformazione della trave DB appoggiata agli estremi;
- cedimento dell'appoggio D per effetto della deformabilità del tratto alla sua sinistra,

Nella fig. 69,2 è indicato l'andamento qualitativo della deformata, insieme al combinarsi dei vari effetti di moto.

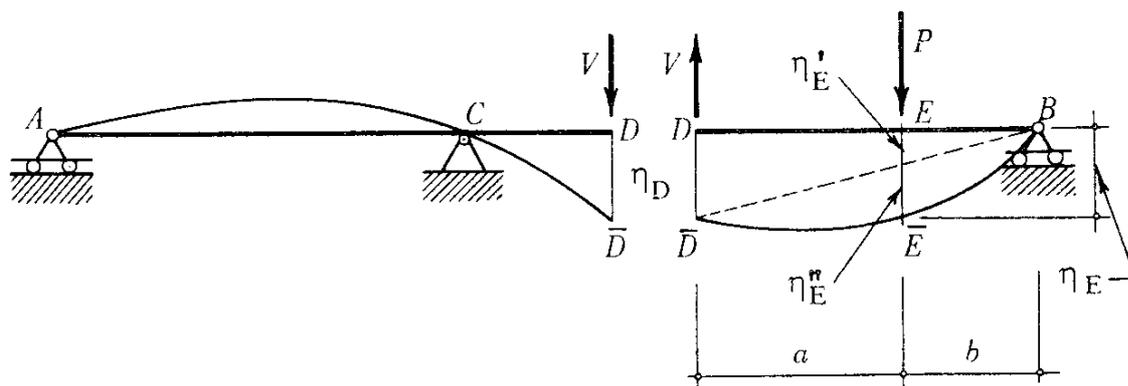


Fig. 69.2

Calcoliamo, ora, lo spostamento di E , attraverso la considerazione dei singoli contributi.

La freccia η_D di D produce in E un abbassamento:

$$\eta_E' = \eta_D \frac{b}{a+b}.$$

Invece, la forza P , applicata alla trave DB , la fa deformare, provocando in E una freccia η_E'' . In totale:

$$\eta_E = \eta_D \frac{b}{a+b} + \eta_E''.$$

a) **Calcolo di η_D .** - Svincoliamo lo sbalzo dalla trave a due appoggi AC . Il moto di D può esprimersi, con le note regole, in funzione di quello della sezione C :

$$\eta_D = \eta_{DC} + \eta_C + \varphi_C \cdot c.$$

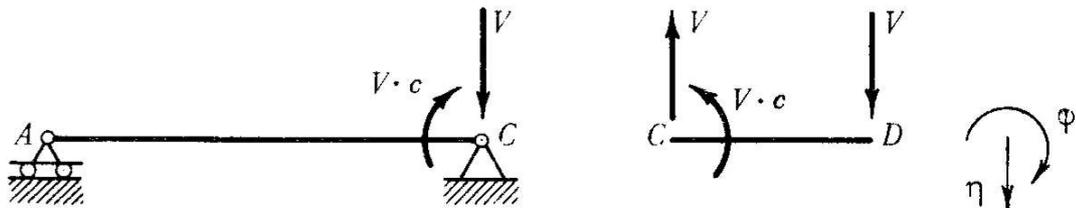


Fig. 69.3

Lo spostamento η_{DC} deriva dalla sola deformabilità flessionale dello sbalzo:

$$\eta_{DC} = \frac{Vc^3}{3EJ}.$$

I movimenti della sua sezione iniziale sono gli stessi, per ragioni di continuità materiale, della sezione sull'appoggio di destra della trave AC . Essa è caricata dalle azioni interne che le trasmette lo sbalzo; e, di esse, solo il momento Vc la deforma direttamente. Allora:

$$\eta_C = 0$$

$$\varphi_C = \frac{Vc \cdot l}{3EJ}$$

e perciò:

$$\eta_D = \frac{Vc^3}{3EJ} + \frac{Vc^2l}{3EJ} = \frac{Pbc^2}{3EJ} \frac{c+l}{a+b}.$$

Infine:

$$\eta'_D = \eta_D \frac{b}{a+b} = \frac{Pb^2c^2}{3EJ} \frac{c+l}{(a+b)^2}.$$

b) **Calcolo di η_E'' .** - Si tratta di una trave a due appoggi con carico concentrato. Se non si ricorda il relativo coefficiente elastico, si può procedere rapidamente per via cinematica.

Riferiamo tutti i movimenti alla sezione E caricata (fig. 69,4).

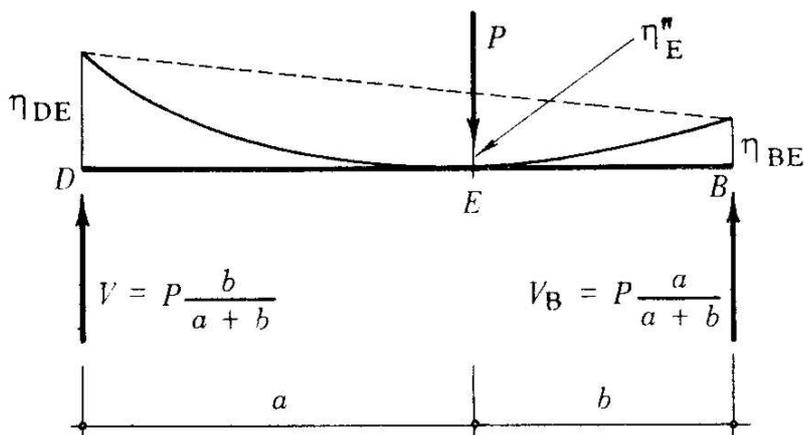


Fig. 69.4

$$\eta_D = \eta_{DE} + \eta_E'' - \varphi_E \cdot a$$

$$\eta_B = \eta_{BE} + \eta_E'' + \varphi_E \cdot b.$$

Condizioni di vincolo:

$$\eta_A = \eta_b = 0$$

da cui:

$$\eta_E'' = - \frac{b\eta_{DE} + a\eta_{BE}}{a+b}.$$

Ma:

$$\eta_{DE} = -V \frac{a^3}{3 EJ} = -P \frac{a^3 b}{3(a+b) EJ}$$

$$\eta_{BE} = -\frac{V_B \cdot b^3}{3 EJ} = -P \frac{ab^3}{3(a+b) EJ}$$

e perciò:

$$\eta_E'' = \frac{Pa^2 b^2}{3 EJ (a+b)}$$

Alla fine si ottiene:

$$\eta_E = \eta_E' + \eta_E'' = \frac{P b^2}{3 EJ (a+b)^2} \left[a^2 (a+b) + c^2 (c+l) \right].$$

* * *

70. - Calcolare i movimenti dell'estremo libero di una mensola di cemento armato a sezione variabile, caricata uniformemente.

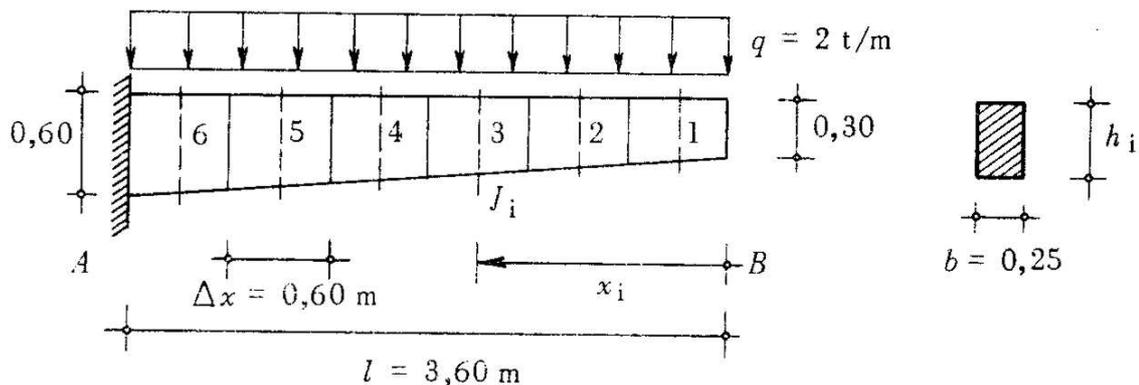


Fig. 70.1

Com'è noto, per il calcolo delle deformazioni, nelle strutture di cemento armato, non occorre conoscere la distribuzione delle armature. Basta procurarsi la legge di variazione del momento d'inerzia della sola sezione di calcestruzzo.

Si supponga la trave a sezione rettangolare, con larghezza costante, pari a $b = 25$ cm, ed altezza variabile linearmente da 30 a 60 cm. La maniera più semplice di procedere consiste nell'operare alle differenze finite, sostituendo, cioè, somme di termini finiti agli integrali.

Questo metodo si presta particolarmente bene quando la legge di variazione del momento d'inerzia, o quella del momento flettente, o entrambe, sono abbastanza complesse da rendere ardua, se non impossibile, l'esecuzione delle integrazioni.

È chiaro che i risultati saranno approssimati, con precisione tanto migliore quanto più fitta sarà la suddivisione.

Spezzata la trave in 6 tronchi lunghi $\Delta x = 0,60$ m, si indichino con x_i , M_i , J_i rispettivamente, per la sezione mediana di ciascuno di essi, la distanza dall'estremo libero, il momento flettente ed il momento d'inerzia.

Si ha:

$$\varphi_B \cong \sum_1^6 \frac{M_i}{EJ_i} \Delta x$$

$$\eta_B \cong \sum_1^6 \frac{M_i x_i}{EJ_i} \Delta x$$

Esprimiamo le forze in t , le lunghezze in dm, e calcoliamo tutti i dati necessari.

$$J_1 = \frac{2,5}{12} \overline{3,25^3} = 7,15 \text{ dm}^4$$

$$J_2 = \frac{2,5}{12} \overline{3,75^3} = 10,98 \text{ «}$$

$$J_3 = \frac{2,5}{12} \overline{4,25^3} = 16,00 \text{ «}$$

$$J_4 = \frac{2,5}{12} \overline{4,75^3} = 22,35 \text{ «}$$

$$J_5 = \frac{2,5}{12} \overline{5,25^3} = 30,15 \text{ «}$$

$$J_6 = \frac{2,5}{12} \overline{5,75^3} = 39,60 \text{ «}$$

$$M_1 = \frac{0,2}{2} \times 3^2 = 0,90 \text{ t dm}$$

$$M_2 = \frac{0,2}{2} \times 9^2 = 8,10 \text{ «}$$

$$M_3 = \frac{0,2}{2} \times 15^2 = 22,50 \text{ «}$$

$$M_4 = \frac{0,2}{2} \times 21^2 = 44,10 \text{ «}$$

$$M_5 = \frac{0,2}{2} \times 27^2 = 76,90 \text{ «}$$

$$M_6 = \frac{0,2}{2} \times 33^2 = 108,90 \text{ «}$$

Eseguiamo le operazioni con l'ausilio della seguente tabella.

Tronco	x_i	M_i	J_i	$\frac{M_i \Delta x}{J_i}$	$\frac{M_i x_i}{J_i} \Delta x$
	(dm)	(t dm)	(dm ⁴)	(t dm ⁻²)	(t dm ⁻¹)
1	3	0,90	7,15	0,755	2
2	9	8,10	10,98	4,430	40
3	15	22,50	16,00	8,440	126
4	21	44,10	22,35	11,850	249
5	27	76,90	30,15	15,310	413
6	33	108,90	39,60	16,675	550
Σ				57,460	1380

Come valore del modulo di elasticità del calcestruzzo può assumersi, in media:

$$E = 3 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2 = 3 \times 10^4 \text{ t/dm}^2$$

e perciò:

$$\varphi_B = \frac{57,46}{3 \times 10^4} = 1,91 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\eta_B = \frac{1380}{3 \times 10^4} = 4,60 \times 10^{-2} \text{ dm} = 4,60 \text{ mm}$$

PRIMA OSSERVAZIONE. - Per avere un'idea dell'ordine di approssimazione ottenibile, applichiamo il procedimento ad una trave a sezione costante, di ugual luce e carico, per cui sono noti i risultati esatti.

Si ottiene facilmente:

$$EJ\varphi_B = 1568 = \sum_1^6 M_i \cdot \Delta x$$

$$EJ\eta_B = 42092 = \sum_1^6 M_i \cdot x_i \cdot \Delta x$$

I risultati esatti sono:

$$EJ\varphi_B = \frac{ql^3}{6} = \frac{0,2 \times 46,8 \times 10^3}{6} = 1560$$

$$EJ\eta_B = \frac{ql^4}{8} = \frac{0,2 \times 169 \times 10^4}{8} = 42200.$$

Gli errori sono, rispettivamente, 5 ‰ per la rotazione e 2,6 ‰ per lo spostamento.

Come si vede, l'approssimazione è ottima, pur avendo eseguito i calcoli col regolo calcolatore.

SECONDA OSSERVAZIONE. - Paragoniamo i moti della trave a sezione variabile con quelli di una trave di opportuna sezione costante.

Scegliendo, come momento d'inerzia medio, quello del tronco n. 5:

$$J_5 = 30,15 \text{ dm}^4$$

si ottiene:

$$\varphi_B \cong \frac{ql^3}{EJ_5} = \frac{1560}{3 \times 10^4 \times 30,15} = 1,72 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\eta_B \cong \frac{ql^4}{EJ_5} = \frac{42200}{3 \times 10^4 \times 30,15} = 4,67 \text{ mm}$$

Non deve meravigliare che si ottengano risultati quasi esatti scegliendo, come momento d'inerzia medio, quello del tronco 5. È facile, infatti, rendersi conto (ad esempio, attraverso un esame della tabella) che la prima metà della trave (tronchi 4-6) contribuisce a produrre l'88 % dello spostamento ed il 76 % della rotazione all'estremo libero. In prima, larga, approssimazione si potrebbero, perciò, eseguire i calcoli computando solo gli effetti dei tronchi 4-6, di cui proprio il 5 è quello medio.

* * *

71. - Determinare gli spostamenti e le rotazioni delle sezioni terminali di un arco circolare, caricato uniformemente, nei seguenti casi:

- a) un estremo è incastrato, l'altro libero;
- b) un estremo è incernierato, l'altro vincolato ad una molla.

Volendo risolvere il problema per via diretta, è opportuno estendere, alle strutture ad asse curvilineo, i ragionamenti generali già introdotti per le travi.

Sia assegnata una trave ad asse piano, e per il resto di forma arbitraria, e fissiamo l'attenzione su due sue sezioni *A* e *B*.

Pensando, in un primo momento, l'arco irrigidito si determinano le componenti di moto della sezione *B* in funzione di quelle della *A*. Col riferimento indicato in fig. 71.1:

$$\begin{aligned}\varphi'_B &= \varphi_A \\ \xi'_B &= \xi_A - \varphi_A \cdot y_{BA} \\ \eta'_B &= \eta_A + \varphi_A \cdot x_{BA} \cdot\end{aligned}$$

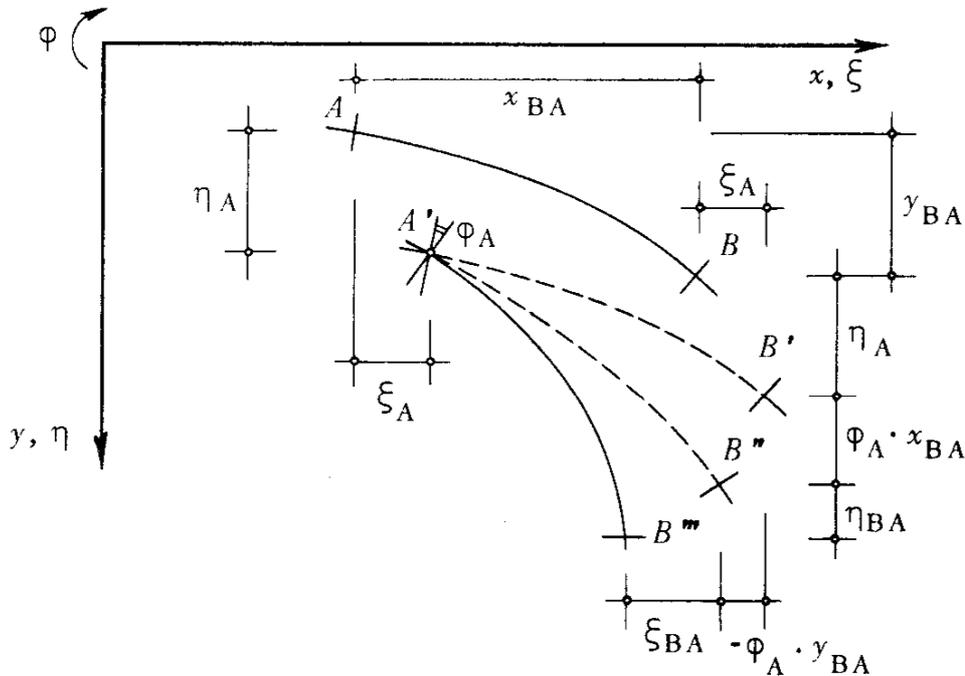


Fig. 71.1

Ritenendo, successivamente, l'arco deformabile, nascono moti relativi tra A e B , moti che, come al solito, indicheremo col doppio indice.

In totale:

$$\begin{aligned}\varphi_B &= \varphi_A + \varphi_{BA} \\ \xi_B &= \xi_A - \varphi_A \cdot y_{BA} + \xi_{BA} \\ \eta_B &= \eta_A + \varphi_A \cdot x_{BA} + \eta_{BA} \cdot\end{aligned}$$

I movimenti assoluti potranno esprimersi, imponendo le condizioni di vincolo, in funzione di quelli relativi. Questi ultimi, a loro volta, saranno direttamente calcolabili a partire dalle singole componenti dell'azione interna. Valutiamone, separatamente, gli effetti deformanti.

1) **Sforzo assiale.** - Assumendo lo sforzo assiale positivo se di trazione, esso provoca un allungamento del tronco elementare pari a

$$dt = \frac{N(s)}{EA} ds.$$

Volendo calcolare il moto di B rispetto ad A , si può operare ritenendo il riferimento solidale con la sezione A . In tal caso, la deformazione del tronco dà origine ad una traslazione della parte destra di trave. L'estremo B subisce i movimenti:

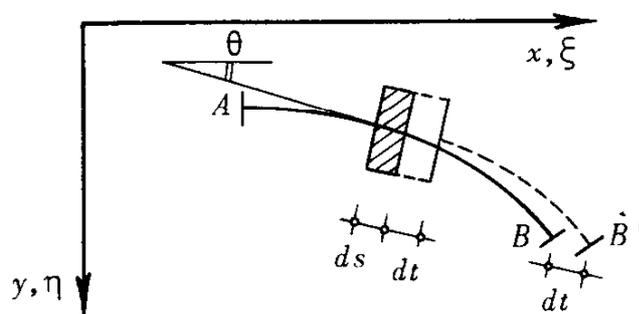


Fig. 71.2

$$d\varphi_{BA} = 0$$

$$d\xi_{BA} = +dt \cdot \cos \theta$$

$$d\eta_{BA} = +dt \cdot \sin \theta$$

2) **Sforzo di taglio.** - È positivo se volto verso il basso calcolato con le forze alla destra.

Lo slittamento della faccia destra del tronco è:

$$dn = \chi \frac{T(s)}{GA} ds$$

Esso provoca in B :

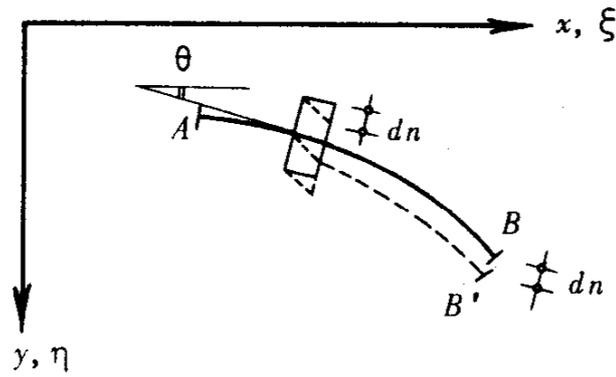


Fig. 71.3

$$d\varphi_{BA} = 0$$

$$d\xi_{BA} = -dn \cdot \text{sen } \theta$$

$$d\eta_{BA} = +dn \cdot \text{cos } \theta$$

3) **Momento flettente.** - È assunto positivo se antiorario con le forze alla destra.

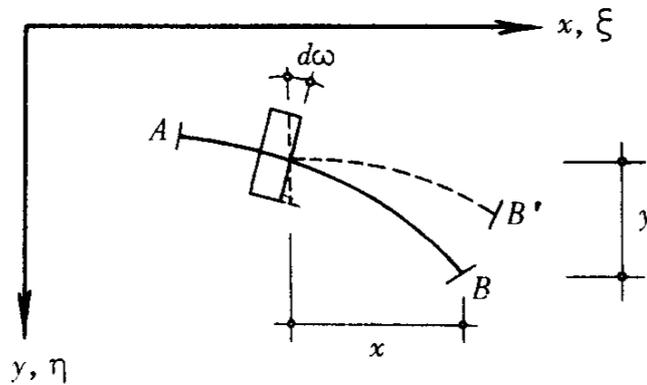


Fig. 71.4

La deformazione del tronco elementare dà origine ad una rotazione della sua sezione destra pari a:

$$d\omega = \frac{M(s)}{EJ} ds.$$

Nella sezione B:

$$d\varphi_{BA} = d\omega$$

$$d\xi_{BA} = +d\omega \cdot y$$

$$d\eta_{BA} = -d\omega \cdot x$$

4) **Effetti totali.** - Sovrapponendo gli effetti:

$$\varphi_{BA} = -\int_A^B d\omega$$

$$\xi_{BA} = \int_A^B (dt \cdot \cos \theta - dn \cdot \sin \theta + y \cdot d\omega)$$

$$\eta_{BA} = \int_A^B (dt \cdot \sin \theta + dn \cdot \cos \theta - x \cdot d\omega)$$

e perciò:

$$\varphi_{BA} = -\int_A^B \frac{M(s)}{EJ} ds$$

$$\xi_{BA} = \int_A^B \left[\frac{N(s)}{EA} \cos \theta - \chi \frac{T(s)}{GA} \sin \theta + \frac{M(s)}{EJ} y \right] ds$$

$$\eta_{BA} = \int_A^B \left[\frac{N(s)}{EA} \sin \theta + \chi \frac{T(s)}{GA} \cos \theta - \frac{M(s)}{EJ} x \right] ds$$

È noto dalla teoria che, nel caso usuale delle strutture snelle, può trascurarsi l'effetto deformante del taglio rispetto a quello flessionale. Se, inoltre, la curva delle pressioni è abbastanza discosta dall'asse della struttura, può trascurarsi anche l'effetto deformante dello sforzo assiale.

In tali ipotesi risulta:

$$\varphi_{BA} = -\int_A^B \frac{M(s)}{EJ} ds$$

$$\xi_{BA} = +\int_A^B \frac{M(s)}{EJ} y ds$$

$$\eta_{BA} = - \int_A^B \frac{M(s)}{EJ} x \cdot ds$$

A questo punto, possiamo passare alla risoluzione del problema proposto.

A) L'arco è incastrato in A, libero in B. -
Il vincolamento dà le condizioni:

$$\varphi_A = 0; \quad \xi_A = \eta_A = 0$$

e perciò:

$$\varphi_B = \varphi_{BA}$$

$$\xi_B = \xi_{BA}$$

$$\eta_B = \eta_{BA}$$

Le azioni interne risultano:

$$N(\theta) = -qR \cdot \text{sen}^2 \theta$$

$$T(\theta) = +qR \cdot \text{sen} \theta \cos \theta$$

$$M(\theta) = -q \frac{R^2}{2} \cdot \text{sen}^2 \theta$$

Inoltre:

$$ds = R \cdot d\theta$$

$$x = +R \cdot \text{sen} \theta$$

$$y = -R(1 - \cos \theta)$$

La curva delle pressioni degenera in un fascio di rette verticali, perciò è ben distinta dall'asse dell'arco.

L'unica sollecitazione, il cui effetto deformante metta conto valutare, è il momento flettente.

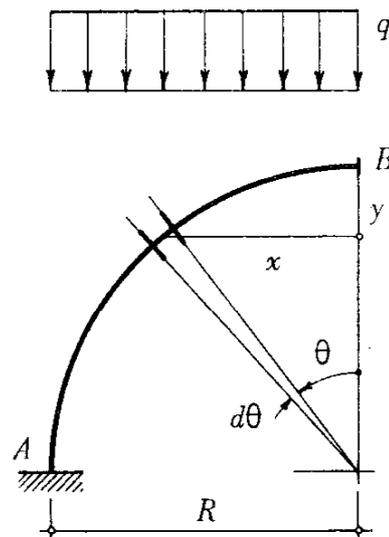


Fig. 71.5

$$\varphi_B = \varphi_{BA} = \int_0^{\pi/2} \frac{qR^3}{2EJ} \operatorname{sen}^2 \theta \, d\theta = \frac{\pi}{4} \frac{qR^3}{EJ} = 0,7854 \frac{qR^3}{EJ}$$

$$\xi_B = \xi_{BA} = \int_0^{\pi/2} \frac{qR^4}{2EJ} \operatorname{sen}^2 \theta (1 - \cos \theta) \, d\theta = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \right) \frac{qR^4}{EJ} = 0,2260 \frac{qR^4}{EJ}$$

$$\eta_B = \eta_{BA} = \int_0^{\pi/2} \frac{qR^4}{2EJ} \operatorname{sen}^3 \theta \, d\theta = \frac{1}{3} \frac{qR^4}{EJ} = 0,3333 \frac{qR^4}{EJ}$$

Tutte le componenti di movimento risultano positive. Ciò vuol dire che la rotazione è oraria; lo spostamento orizzontale avviene verso destra, quello verticale verso il basso. A questo proposito, si osservi che i segni potrebbero fissarsi anche, facilmente, osservando l'effetto deformante del momento flettente. Questo tende ovunque le fibre all'estradosso, perciò, nella deformazione del tronco elementare, la faccia destra ruota in senso orario rispetto a quella sinistra. Ne segue che, essendo la parte sinistra di trave immobile, la parte destra ruota rigidamente pure in senso orario, ed il suo estremo libero si sposta verso destra e verso il basso.

CASO NUMERICO. - Poniamo:

$$R = 4 \text{ m}; \quad q = 2 \text{ t/m}; \quad K = 1600 \text{ kg/cm}^2.$$

Il proporzionamento dell'arco va fatto nella sezione d'incastro, che è la più sollecitata.

$$M_A = M\left(\frac{\pi}{2}\right) = q \frac{R^2}{2} = 16 \text{ tm}$$

$$N_A = N\left(\frac{\pi}{2}\right) = qR = 8 \text{ t}$$

$$e = \frac{M_A}{N_A} = 2 \text{ m.}$$

Basta progettare a semplice momento flettente.

È necessario:

$$\bar{W} = \frac{M_A}{K} = 1000 \text{ cm}^3.$$

Si adotta l'IPN 360, a cui competono:

$$W = 1087 \text{ cm}^3; \quad J = 19\,580 \text{ cm}^4; \quad A = 97 \text{ cm}^2.$$

Verifica a pressoflessione:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{8000}{97} + \frac{16 \times 10^5}{1087} = 1553 < 1600 \text{ kg/cm}^2.$$

Calcolo delle deformazioni:

$$EJ = 2,1 \times 10^6 \times 19,580 \times 10^3 = 41,118 \times 10^9 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\xi_B = 0,2260 \frac{qR^4}{EJ} = 2,81 \text{ cm}$$

$$\eta_B = 0,3333 \frac{qR^4}{EJ} = 4,14 \text{ cm}$$

$$\varphi_B = 0,7854 \frac{qR^3}{EJ} = 2,45 \times 10^{-2} \text{ rad.}$$

OSSERVAZIONE. - Può essere di qualche utilità calcolare anche il contributo che lo sforzo assiale reca, ad esempio, allo spostamento verticale. Ciò può aiutare a fissare gli ordini di grandezza in gioco.

Si ottiene subito, per effetto assiale:

$$\bar{\eta}_B = \bar{\eta}_{BA} = \int_0^{\pi/2} qR^2 \frac{\text{sen}^3 \theta}{EA} d\theta = \frac{2qR^2}{3EA}.$$

Risulta:

$$\frac{\eta_B}{\bar{\eta}_B} = \frac{R^2}{2} \frac{A}{J} = \frac{R^2}{2\rho^2}.$$

ove ρ è il raggio d'inerzia massimo della sezione, e vale:

$$\rho = \sqrt{2,02 \times 10^2}.$$

Allora:

$$\frac{R^2}{2\rho^2} = \frac{16 \times 10^4}{2 \times 2,02 \times 10^2} = 397$$

$$\bar{\eta}_B = 1,04 \times 10^{-2} \text{ cm.}$$

L'effetto assiale è veramente insignificante.

B) L'arco è incernierato in A e vincolato in B ad una molla orizzontale. - Sia K la deformabilità della molla, in modo che la sua reazione H_B sia legata allo schiacciamento δ della relazione:

$$\delta = KH_B.$$

La reazione risulta:

$$H_B = q \frac{R}{2},$$

e perciò:

$$\delta = Kq \frac{R}{2}.$$

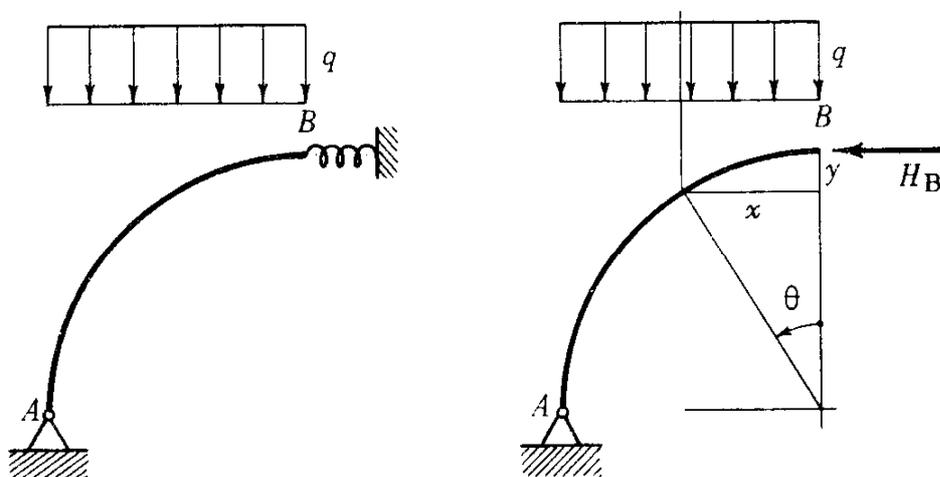


Fig. 71.6

Il momento flettente varia con la legge:

$$M(\theta) = H_B \cdot y - q \frac{x^2}{2} = q \frac{R^2}{2} (1 - \operatorname{sen}^2 \theta - \cos \theta).$$

Ne deriva:

$$\begin{aligned} \xi_{BA} &= - \int_0^{\pi/2} \frac{q R^4}{2} (1 - \cos \theta) (1 - \operatorname{sen}^2 \theta - \cos \theta) \frac{d\theta}{EJ} = +0,0480 \frac{q R^4}{EJ} \\ \eta_{BA} &= - \int_0^{\pi/2} \frac{q R^4}{2} \operatorname{sen} \theta (1 - \operatorname{sen}^2 \theta - \cos \theta) \frac{d\theta}{EJ} = +0,0833 \frac{q R^4}{EJ} \\ \varphi_{BA} &= - \int_0^{\pi/2} \frac{q R^3}{2} (1 - \operatorname{sen}^2 \theta - \cos \theta) \frac{d\theta}{EJ} = +0,1073 \frac{q R^3}{EJ}. \end{aligned}$$

Le condizioni geometriche derivanti dal particolare vincolamento sono:

$$\xi_A = \eta_A = 0; \quad \xi_B = \delta = Kq \frac{R}{2}.$$

Allora:

$$\begin{cases} Kq \frac{R}{2} = \xi_{BA} + \varphi_A \cdot R \\ \eta_B = \eta_{BA} + \varphi_A \cdot R \\ \varphi_B = \varphi_{BA} + \varphi_A. \end{cases}$$

Dalla prima equazione:

$$\varphi_A = \frac{Kq}{2} - \frac{\xi_{BA}}{R} = q \left(0,5000 K - 0,0480 \frac{R^3}{EJ} \right).$$

Di conseguenza:

$$\eta_B = \eta_{BA} + Kq \frac{R}{2} - \xi_{BA} = qR \left(0,5000 K + 0,0353 \frac{R^3}{EJ} \right)$$

$$\varphi_B = \varphi_{BA} + \frac{Kq}{2} - \frac{\xi_{BA}}{R} = q \left(0,5000 K + 0,0593 \frac{R^3}{EJ} \right).$$

72. - Calcolare i movimenti dei nodi del portale illustrato nella fig. 72.1.

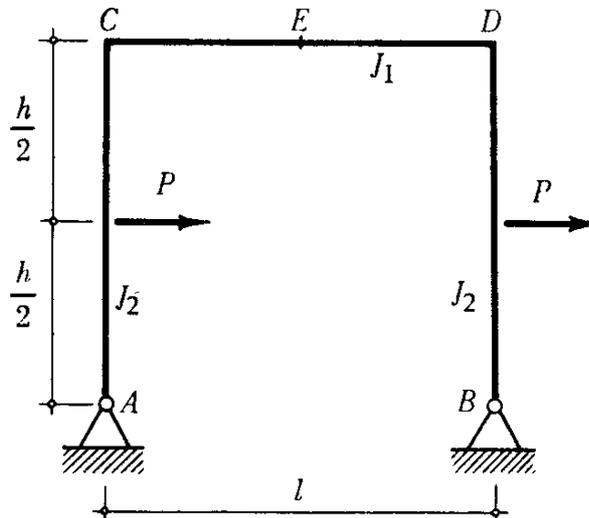


Fig. 72.1

Il portale è simmetrico per geometria, vincoli, distribuzione delle rigidità flessionali. Il carico, invece, è emisimmetrico. Identico carattere dovranno allora conservare le azioni interne e gli spostamenti.

In particolare, la sezione E sull'asse di simmetria è priva di momento flettente. Il portale si comporta come fosse a tre cerniere: esso è staticamente determinato, pur se iperstatico.

Inoltre, nella sezione E si realizzano solo lo spostamento orizzontale e la rotazione.

Si può concludere che ciascuna metà del portale funziona come se fosse indipendente dall'altra, e vincolata in E con un appoggio scorrevole orizzontalmente.

Indichiamo questa situazione nella fig. 72.2, insieme alle reazioni vincolari ed al diagramma del momento flettente.

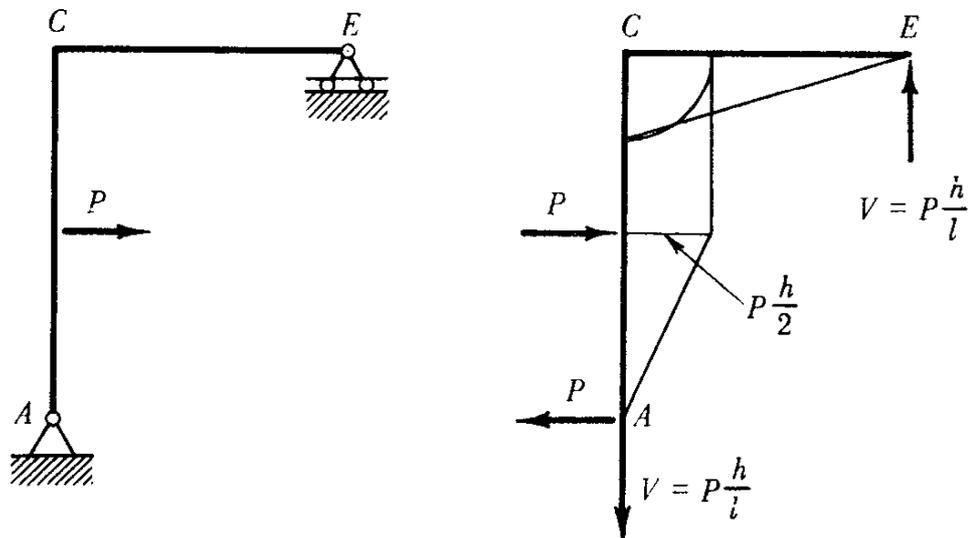


Fig. 72.2

Nel calcolo degli spostamenti si può trarre profitto dall'assenza di moti verticali del nodo C.

Invero, ogni suo moto verticale sarebbe incompatibile con la supposta indeformabilità assiale del piedritto (la cui sezione di base non può, ovviamente, traslare). Sotto l'aspetto cinematico, tutto va come se il nodo C fosse vincolato ad un carrello scorrevole sull'orizzontale.

Può convenire lasciare svincolata la sezione A, riguardando la trave CE come appoggiata. Essa risulta sollecitata dalla sola coppia flettente trasmessale dal piedritto,

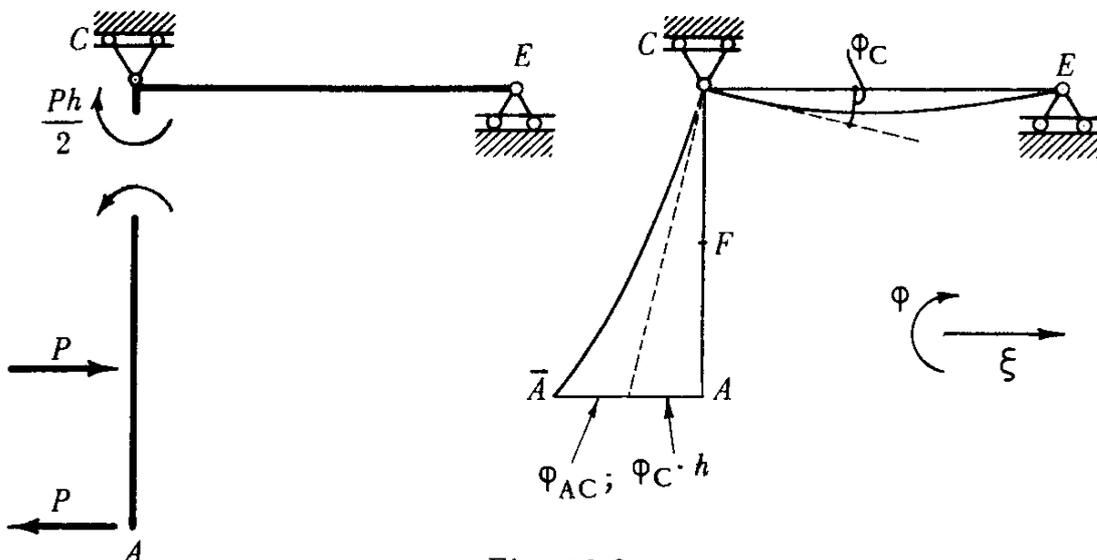


Fig. 72.3

Si ha:

$$\xi_A = \xi_{AC} - \varphi_C \cdot h$$

ove

$$\varphi_C = \frac{Ph}{2} \cdot \frac{l}{6EJ_1} = \frac{Phl}{12EJ_1}$$

$$\xi_{AC} = \xi_{AF} + \xi_{FC} - \varphi_{FC} \cdot \frac{h}{2}$$

$$\xi_{AF} = -\frac{P\left(\frac{h}{2}\right)^3}{3EJ_2} = -\frac{Ph^3}{24EJ_2}$$

$$\xi_{FC} = -\frac{P\frac{h}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2}{2EJ_2} = -\frac{Ph^3}{16EJ_2}$$

$$\varphi_{FC} = +\frac{P\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{2}}{EJ_2} = \frac{Ph^2}{4EJ_2}$$

e quindi:

$$\xi_{AC} = -\frac{Ph^3}{24EJ_2} - \frac{Ph^3}{16EJ_2} - \frac{Ph^3}{8EJ_2} = -\frac{11}{48} \frac{Ph^3}{EJ_2}$$

Infine:

$$\xi_A = -\frac{11}{48} \frac{Ph^3}{EJ_2} - \frac{Ph^2l}{12EJ_1} = -\frac{Ph^2}{6E} \left(\frac{11h}{8J_2} + \frac{l}{2J_1} \right)$$

Quello così calcolato è lo spostamento (verso sinistra) di A , supposto il traverso fisso.

In realtà, è la sezione A a restare ferma, ed il traverso (quindi i nodi C e E) trasla (verso destra) di:

$$\xi_C = \xi_E = -\xi_A = +\frac{Ph^2}{6E} \left(\frac{l}{J_2} + \frac{11h}{8J_2} \right)$$

La traslazione verso destra, che è stata necessaria per ripristinare il rispetto del vincolo esterno, non provoca alterazioni nelle rotazioni. Pertanto, la deformata del traverso è quella reale, ed il nodo C ruota di:

$$\varphi_C = + \frac{P h l}{6 E J_1}$$

73. - Calcolare le componenti di movimento delle estremità delle travi che costituiscono il portale della fig. 73.1.

La risultante del carico è:

$$Q = q(l + l_1).$$

La reazione d'appoggio vale quindi:

$$V_B = \frac{Q}{2} = q \frac{l + l_1}{2}.$$

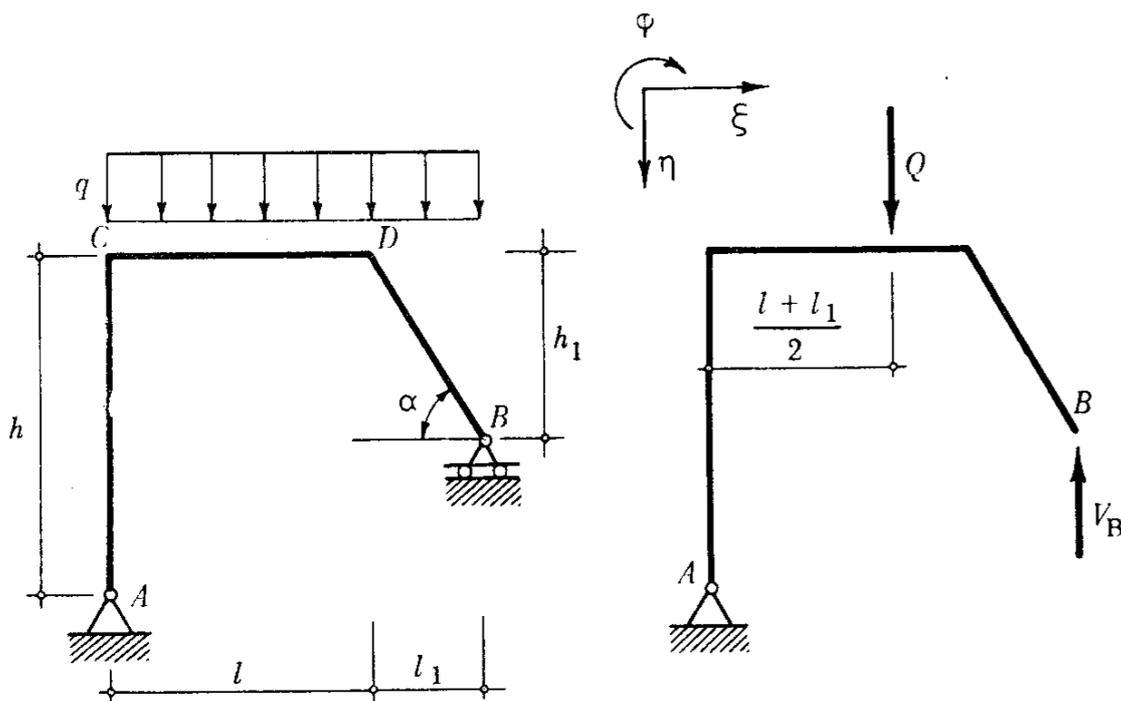


Fig. 73.1

SPOSTAMENTI DELLE SEZIONI TERMINALI. - Riferiamo tutti i movimenti a quelli della sezione *A*. Con le usuali notazioni otteniamo:

$$\xi_B = \xi_A + \varphi_A (h - h_1) + \xi_{BA}$$

$$\eta_B = \eta_A + \varphi_A (l + l_1) + \eta_{BA}$$

$$\varphi_B = \varphi_A + \varphi_{BA}.$$

Le condizioni geometriche di vincolo risultano:

$$\xi_A = \eta_A = \eta_B = 0$$

e perciò:

$$\varphi_A = -\frac{\eta_{BA}}{l + l_1}$$

$$\xi_B = \xi_{BA} - \eta_{BA} \frac{h - h_1}{l + l_1}$$

$$\varphi_B = \varphi_{BA} - \frac{\eta_{BA}}{l + l_1}.$$

Come al solito, tutti i movimenti sono direttamente esprimibili in funzione dei vari contributi di deformabilità flessionale. Il calcolo di questi ultimi è ulteriormente agevolato dalla forma della struttura, scomponibile in tre travi rettilinee. Per ciascuna di esse è possibile ricorrere all'ausilio dei coefficienti elastici.

a) Deformazioni del tratto *DB*. - Trascurando l'effetto della deformabilità assiale, è necessario calcolare tutti i carichi che inflettono la trave.

La reazione d'estremità V_B ha componente tagliante

$$T_B = V_B \cos \alpha = q \frac{l + l_1}{2} \cos \alpha.$$

Il carico totale esterno è verticale, di modulo:

$$Q_1 = ql_1.$$

La sua componente normale all'asse è:

$$\bar{Q}_1 = ql_1 \cos \alpha.$$

Poiché la trave ha lunghezza $\bar{l} = \frac{l_1}{\cos \alpha}$, il carico specifico flettente vale:

$$\bar{q} = \frac{\bar{Q}_1}{\bar{l}} = q \cos^2 \alpha.$$

Possiamo ora calcolare i movimenti dell'estremo libero B , supposta la parte ACD indeformabile.

La rotazione e la freccia della mensola BD risultano:

$$\varphi = T_B \cdot \frac{\bar{l}^2}{2 EJ} - \frac{\bar{q} \bar{l}^3}{6 EJ} = \frac{ql_1^2}{12 EJ \cos \alpha} (3l + l_1)$$

$$\delta = -\frac{\bar{q} \bar{l}^4}{8 EJ} + \frac{T_B \bar{l}^3}{3 EJ} = \frac{ql_1^3}{24 EJ \cos^2 \alpha} (4l + l_1)$$

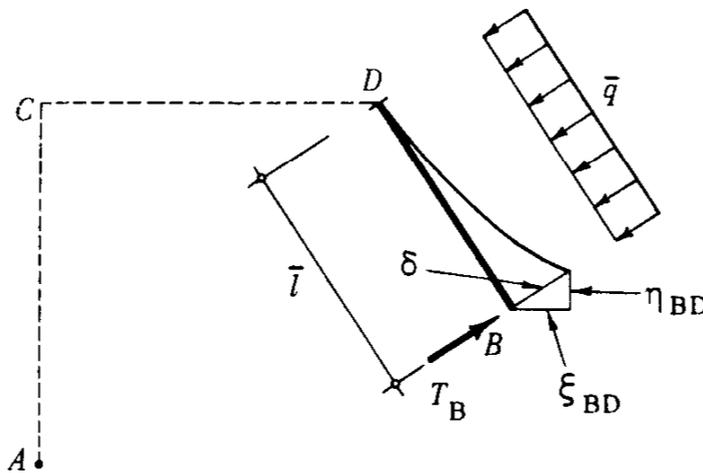


Fig. 73.2

e perciò si ottiene facilmente:

$$\xi'_{BA} = \xi_{BD} = \delta \sin \alpha = \frac{ql_1^3}{24 EJ} \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} (4l + l_1)$$

$$\eta'_{BA} = \eta_{BD} = -\delta \cos \alpha = -\frac{ql_1^3}{24 EJ \cos \alpha} (4l + l_1)$$

$$\varphi'_{BA} = \varphi_{BD} = -\varphi = -\frac{ql_1^2}{12 EJ \cos \alpha} (3l + l_1).$$

b) **Deformazioni del tratto CD.** - La sua sezione terminale D è caricata dalle azioni interne trasmesse dalla trave DB :

$$\bar{F} = V_B - ql_1 = q \frac{l - l_1}{2}$$

$$\bar{M} = V_B \cdot l_1 - q \frac{l_1^2}{2} = q \frac{ll_1}{2}.$$

Inoltre, esso è inflesso dal carico q distribuito sulla sua luce l .
I movimenti della sezione d'estremità risultano:

$$\eta_{DC} = \delta = \frac{ql^4}{8 EJ} - \bar{F} \frac{l^3}{3 EJ} - \bar{M} \frac{l^2}{2 EJ} = -\frac{ql^3}{24 EJ} (l + 2l_1)$$

$$\xi_{DC} = 0$$

$$\varphi_{DC} = \varphi = \frac{ql^3}{6 EJ} - \bar{F} \frac{l^2}{2 EJ} - \frac{\bar{M}l}{EJ} = -\frac{ql^2}{12 EJ} (l + 3l_1).$$

Essi trascinano il tratto DB con moto di corpo rigido, provocando in B i movimenti:

$$\xi''_{BA} = -\varphi_{DC} \cdot h_1 = +\frac{ql^2 h_1}{12 EJ} (l + 3l_1)$$

$$\eta''_{BA} = \eta_{DC} + \varphi_{DC} \cdot l_1 = -\frac{ql^2}{2 EJ} \left(\frac{l^2}{12} + \frac{ll_1}{3} + \frac{l_1^2}{2} \right)$$

$$\varphi''_{BA} = \varphi_{DC} = -\frac{ql^2}{12 EJ} (l + 3l_1).$$

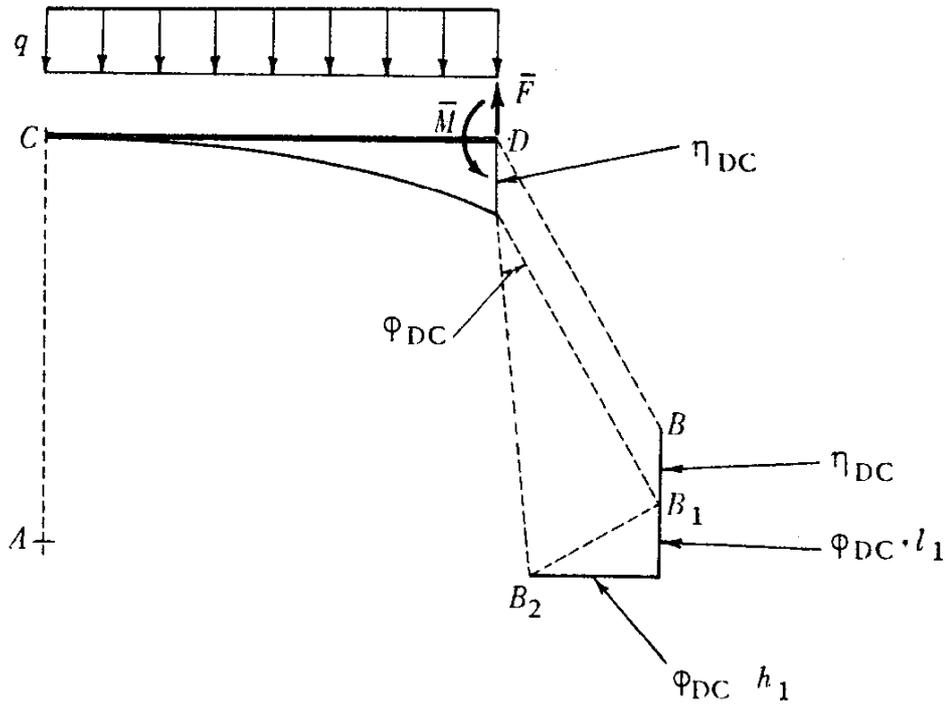


Fig. 73.3

c) **Deformazioni del tratto AC.** - Sono nulle, perché il piedritto è privo di momento flettente.

d) **Effetti totali della deformabilità:**

$$\xi_{BA} = \xi'_{BA} + \xi''_{BA} = \frac{q}{12 EJ} \left[\frac{l_1^3 \text{sen } \alpha}{2 \cos^2 \alpha} (4l + l_1) + l^2 h_1 (l + 3l_1) \right]$$

$$\eta_{BA} = \eta'_{BA} + \eta''_{BA} = - \frac{q}{2 EJ} \left[\frac{l_1^3}{12 \cos \alpha} (4l + l_1) + l^2 \left(\frac{l^2}{12} + \frac{ll_1}{3} + \frac{l_1^2}{2} \right) \right]$$

$$\varphi_{BA} = \varphi'_{BA} + \varphi''_{BA} = - \frac{q}{12 EJ} \left[\frac{l_1^2}{\cos \alpha} (3l + l_1) + l^2 (l + 3l_1) \right].$$

Sostituendo questi risultati nelle espressioni generali stabilite inizialmente, si ottengono i movimenti delle sezioni terminali.

SPOSTAMENTI DEI NODI INTERMEDI.

a) **Nodo C.** - Riferiamoci ancora alla sezione *A*. Poiché il piedritto *AC* è indeformato, i movimenti di *C* dipendono solo dalla rotazione di corpo rigido di *AC* intorno alla cerniera *A*.

$$\xi_C = +\varphi_A \cdot h = + \frac{qh}{2EJ(l+l_1)} \left[\frac{l_1^3}{12 \cos \alpha} (4l+l_1) + l^2 \left(\frac{l^2}{12} + \frac{ll_1}{3} + \frac{l_1^2}{2} \right) \right]$$

$$\eta_C = 0$$

$$\varphi_C = +\varphi_A = + \frac{q}{2EJ(l+l_1)} \left[\frac{l_1^3}{12 \cos \alpha} (4l+l_1) + l^2 \left(\frac{l^2}{12} + \frac{ll_1}{3} + \frac{l_1^2}{2} \right) \right].$$

b) **Nodo D.** - Esprimiamone i movimenti in funzione di quelli di *C*.

$$\xi_D = \xi_C$$

$$\eta_D = \varphi_C \cdot l + \eta_{DC}$$

$$\varphi_D = \varphi_C + \varphi_{DC}$$

Eseguendo le sostituzioni, si ottengono subito le espressioni esplicite dei movimenti.

CASO NUMERICO. - Poniamo:

$$q = 2 \text{ t/m}; \quad h = 3 \text{ m}; \quad l = 4 \text{ m}; \quad l_1 = 1,50 \text{ m}; \quad \alpha = 60^\circ.$$

Progetto della struttura. - Supposto di adottare la sezione costante, progettiamo per il massimo valore assoluto del momento flettente:

$$M_{\max} = q \frac{(l+l_1)^2}{8} = 7562 \text{ kg/m.}$$

Carico di sicurezza:

$$K = 1600 \text{ kg/cm}^2.$$

È necessario:

$$\bar{W} = \frac{M_{\max}}{K} = 473 \text{ cm}^3.$$

Si adotta un IPN 280, a cui compete:

$$J = 7575 \text{ cm}^4$$

e perciò:

$$EJ = 2,1 \times 10^6 \times 7,575 \times 10^3 = 1,591 \times 10^{10} \text{ kg} \cdot \text{cm}^2.$$

Innanzitutto, bisogna procurarsi il valore della rotazione della sezione A . Risulta:

$$\varphi_A = 0,941 \times 10^{-2} \text{ rad.}$$

Calcoliamo, ad esempio, lo spostamento verticale del nodo D e quello orizzontale dell'appoggio,

$$\eta_D = \varphi_A l - \frac{ql^3}{24 EJ} (l + 2l_1) = +1,42 \text{ cm}$$

$$\xi_B = \xi_{BA} - \eta_{BA} \frac{h - h_1}{l \cdot l_1} = +0,73 \text{ cm.}$$

74. - Calcolare i movimenti dell'estremo libero della mensola, indicata nella fig. 74.1, da realizzarsi con sezione tubolare di acciaio.

Il carico è applicato nella sezione terminale della struttura, e normalmente al suo piano.

CALCOLO DEGLI SPOSTAMENTI. - Si tratta di una struttura a mensola, e perciò i movimenti assoluti della sezione B coincidono con quelli relativi alla A .

Entrerà in conto, allora, il solo effetto deformante delle azioni interne,

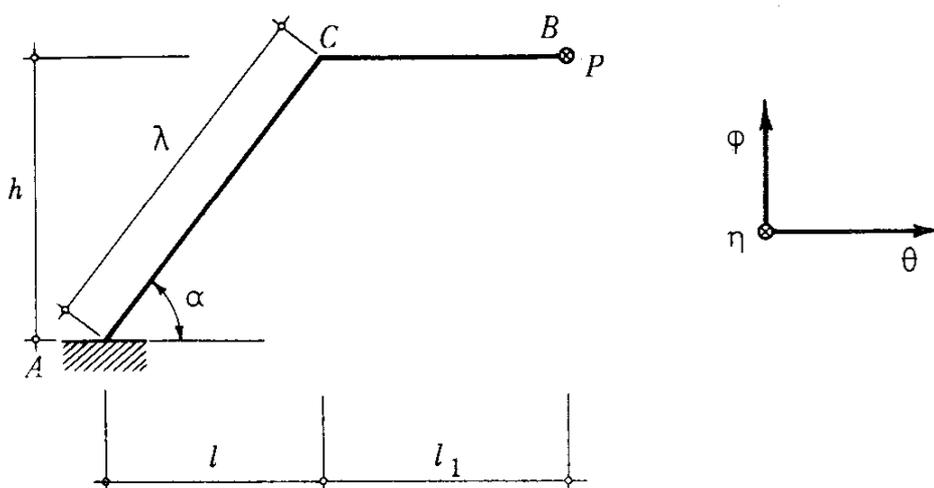


Fig. 74.1

Per maggior chiarezza, indichiamo le rotazioni ed i momenti con vettori, diretti secondo il loro asse, ed orientati con la regola della vite destra.

I vettori rotazione saranno contrassegnati da una freccia semplice, quelli momento con doppia freccia.

Per quanto riguarda forze e spostamenti, quelli orientati verso l'interno del foglio saranno indicati mediante un circoletto con la croce.

Basta comporre i movimenti delle due travi in cui può dividersi la mensola, tenendo conto della deformabilità flessionale e di quella torsionale.

a) Deformabilità del tratto CB. - Si tratta, in pratica, di una trave a mensola. Essa è priva di torsione, e perciò:

$$\eta'_B = \eta_{BC} = \frac{Pl_1^3}{3EJ}$$

$$\varphi''_B = \varphi_{BC} = \frac{Pl_1^2}{2EJ}$$

$$\theta'_B = \theta_{BC} = 0,$$

b) **Deformabilità del tratto AC.** - È sollecitato dalle azioni interne della sezione C. I movimenti di questa trascinano la parte CB con moto di corpo rigido.

Nella sezione C si ha:

- sforzo di taglio P ed un momento $P \cdot l_1$ che si scinde nelle due componenti:

- momento flettente $M_C = P l_1 \cos \alpha$ e

- momento torcente $\bar{M}_C = P l_1 \sin \alpha$.

Indichiamo, inoltre, con β e γ , rispettivamente, le rotazioni flessionale e torsionale dell'estremità C.

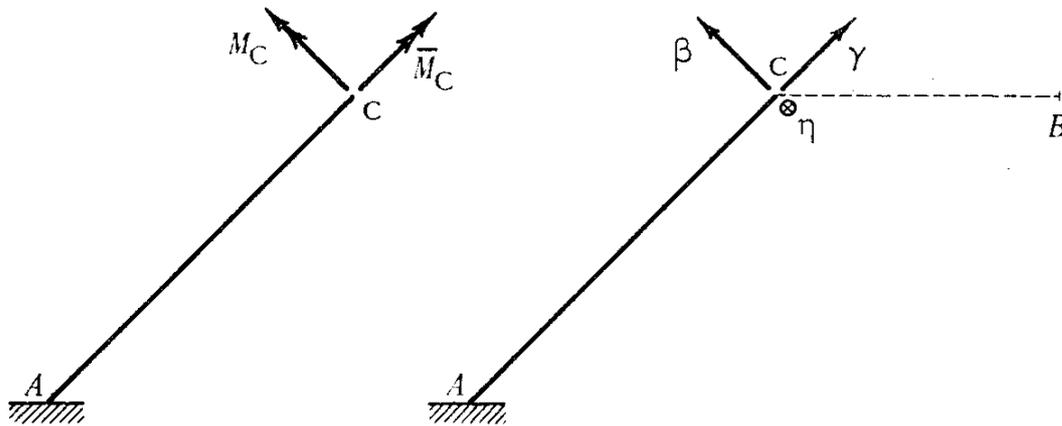


Fig. 74.2

Esse sono legate alle rotazioni del riferimento dalle relazioni:

$$\varphi = \gamma \sin \alpha + \beta \cos \alpha$$

$$\theta = \gamma \cos \alpha - \beta \sin \alpha.$$

Inoltre:

$$\eta_B^w = \eta_{CA} + \varphi_{CA} \cdot l_1.$$

Calcoliamo i vari contributi:

$$\eta_{CA} = \frac{P \lambda^3}{3 EJ} + \frac{M_C \cdot \lambda^2}{2 EJ} = \frac{P \lambda^2}{EJ} \left(\frac{\lambda}{3} + \frac{l_1 \cos \alpha}{2} \right)$$

$$\gamma_{CA} = \frac{\bar{M}_C \cdot \lambda}{GJ_p} = \frac{P\lambda l_1 \operatorname{sen} \alpha}{GJ_p}$$

$$\beta_{CA} = \frac{P\lambda^2}{2EJ} + \frac{M_C \lambda}{EJ} = \frac{P\lambda}{EJ} \left(\frac{\lambda}{2} + l_1 \cos \alpha \right)$$

e perciò:

$$\varphi_{CA} = \gamma_{CA} \operatorname{sen} \alpha + \beta_{CA} \cos \alpha = P\lambda \left[\frac{l_1 \operatorname{sen}^2 \alpha}{GJ_p} + \frac{\cos \alpha}{EJ} \left(\frac{\lambda}{2} + l_1 \cos \alpha \right) \right]$$

$$\theta_{CA} = \gamma_{CA} \cos \alpha - \beta_{CA} \operatorname{sen} \alpha = P\lambda \left[\frac{l_1 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{GJ_p} - \frac{\operatorname{sen} \alpha}{EJ} \left(\frac{\lambda}{2} + l_1 \cos \alpha \right) \right].$$

In definitiva:

$$\eta_B'' = \eta_{CA} + \varphi_{CA} \cdot l_1 = P\lambda \left[\frac{l_1^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{GJ_p} + \frac{\frac{\lambda^2}{3} + \lambda l_1 \cos \alpha + l_1^2 \cos^2 \alpha}{EJ} \right]$$

$$\varphi_B'' = \varphi_{CA} = P\lambda \left[\frac{l_1 \operatorname{sen}^2 \alpha}{GJ_p} + \frac{\cos \alpha}{EJ} \left(\frac{\lambda}{2} + l_1 \cos \alpha \right) \right]$$

$$\theta_B'' = \theta_{CA} = P\lambda \left[\frac{l_1 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{GJ_p} - \frac{\operatorname{sen} \alpha}{EJ} \left(\frac{\lambda}{2} + l_1 \cos \alpha \right) \right].$$

c) Effetti totali:

$$\eta_B = \eta_B' + \eta_B'' = P \left[\frac{\lambda l_1^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{GJ_p} + \frac{\frac{l_1^3}{3} + \frac{\lambda^3}{3} + \lambda^2 l_1 \cos \alpha + \lambda l_1^2 \cos^2 \alpha}{EJ} \right]$$

$$\varphi_B = \varphi_B' + \varphi_B'' = P \left[\frac{\lambda l_1 \operatorname{sen}^2 \alpha}{GJ_p} + \frac{\frac{l_1^2}{2} + \frac{\lambda^2}{2} \cos \alpha + \lambda l_1 \cos^2 \alpha}{EJ} \right]$$

$$\theta_B = \theta_B'' = P\lambda \left[\frac{l_1 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{GJ_p} - \frac{\operatorname{sen} \alpha}{EJ} \left(\frac{\lambda}{2} + l_1 \cos \alpha \right) \right].$$

PROPORZIONAMENTO DELLA STRUTTURA. - Poniamo:

$$l_1 = 2 \text{ m} \quad l = 1 \text{ m} \quad \alpha = 60^\circ$$

quindi:

$$h = 1,732 \text{ m} \quad \lambda = 2l = 2 \text{ m} \quad P = 1 \text{ t.}$$

Le massime sollecitazioni si hanno nella sezione d'incastro.

Taglio:

$$T = P = 1000 \text{ kg.}$$

Momento flettente:

$$M = P(l + l_1) \cos \alpha + Ph \sin \alpha = 3000 \text{ kg m.}$$

Momento torcente:

$$\bar{M} = P(l + l_1) \sin \alpha - Ph \cos \alpha = 1732 \text{ kg m.}$$

Adottiamo un tubo di diametro esterno di 200 mm e spessore di 8 mm.

Detti R e r i raggi massimo e minimo, è:

$$R = 10 \text{ cm}; \quad r = 9,2 \text{ cm.}$$

$$J_p = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4) = 4455 \text{ cm}^4$$

$$J = \frac{1}{2} J_p = 2227 \text{ cm}^4$$

$$W = \frac{J}{R} = 223 \text{ cm}^3$$

Sia h_0 il braccio della coppia interna, S il momento statico di metà sezione rispetto ad un diametro. Si ha:

$$h_0 = 2 \frac{J/2}{S} = \frac{J}{S}$$

$$S = \frac{\pi R^2}{2} \times 0,4244 R - \frac{\pi r^2}{2} \times 0,4244 r = 147 \text{ cm}^3$$

$$h_0 = 15,1 \text{ cm.}$$

Le tensioni massime risultano:

- per flessione, ai lembi più distanti dall'asse neutro:

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{3 \times 10^5}{223} = 1345 \text{ kg/cm}^2.$$

- per taglio, sull'asse neutro:

$$\tau = \frac{T}{bh_0} = \frac{T}{2(R-r)h_0} = 41 \text{ kg/cm}^2;$$

per torsione, alla periferia:

$$\bar{\tau} = \frac{\bar{M} \cdot R}{J_p} = 389 \text{ kg/cm}^2.$$

L'effetto del taglio è trascurabile.

Le massime tensioni ideali, ai lembi più distanti dall'asse di flessione, valgono (teoria della massima dilatazione):

$$\sigma_{id} = 0,35 \sigma + 0,65 \sqrt{\sigma^2 + 4 \bar{\tau}^2} = 1481 \text{ kg/cm}^2.$$

Se si costruisce il tubo con acciaio avente carico di sicurezza $K = 1600 \text{ kg/cm}^2$, la resistenza è assicurata.

CASO NUMERICO. - Per l'acciaio, risulta:

$$E = 2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

e, con $\nu = 0,3$:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 8 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2.$$

Allora:

$$EJ = 2,1 \times 10^6 \times 2,227 \times 10^3 = 4,677 \times 10^9 \text{ kg/cm}^2$$

$$GJ_p = 8 \times 10^5 \times 4,455 \times 10^3 = 3,564 \times 10^9 \text{ kg/cm}^2.$$

Con semplici calcoli si ottengono i valori numerici delle componenti di spostamento cercate:

$$\eta_B = +3,61 \text{ cm}$$

$$\varphi_B = +1,70 \times 10^{-2} \text{ rad.}$$

$$\theta_B = -0,26 \times 10^{-2} \text{ rad.}$$

75. - Determinare le componenti di moto dell'estremo libero di una mensola ad arco, soggetta ad una distribuzione uniforme di carico normale al proprio piano, che contiene uno degli assi principali d'inerzia di ciascuna sezione.

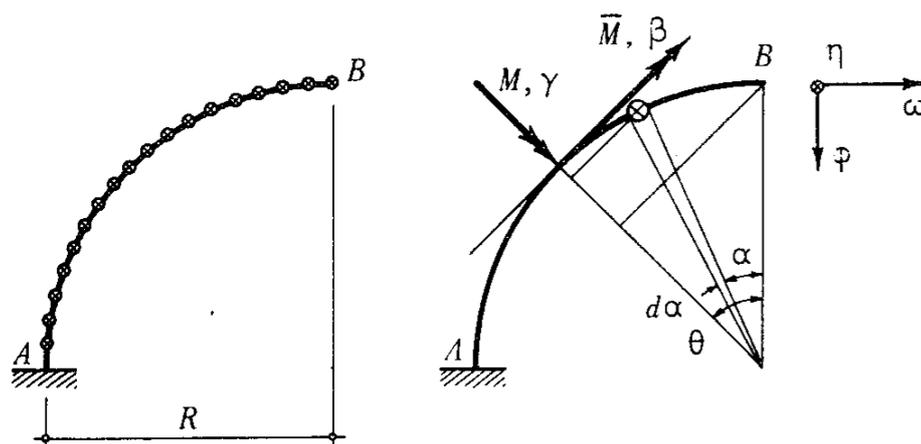


Fig. 75.1

Qui si può procedere ad una composizione di moti infinitesimi, partendo dalle deformazioni del tronco elementare prodotte dai momenti flettenti e torcenti.

Al tronco $ds = R d\alpha$, posto tra le ascisse angolari α e $\alpha + d\alpha$, è applicata la forza elementare verticale:

$$q \cdot ds = q R d\alpha.$$

Nella sezione corrente, di ascissa θ , tale forza provoca i momenti elementari:

- flettente:

$$dM = -q R d\alpha \cdot R \sin(\theta - \alpha)$$

- torcente:

$$d\bar{M} = q R d\alpha \cdot R [1 - \cos(\theta - \alpha)].$$

I segni dei momenti, nella sezione corrente, sono stati stabiliti in maniera arbitraria. Lo stesso segno viene attribuito alle rotazioni relative (della faccia destra del tronco rispetto alla sinistra) che essi provocano.

I momenti totali risultano:

$$M(\theta) = - \int_0^\theta q R^2 \sin(\theta - \alpha) d\alpha = -q R^2 (1 - \cos \theta)$$

$$\bar{M}(\theta) = + \int_0^\theta q R^2 [1 - \cos(\theta - \alpha)] d\alpha = q R^2 (\theta - \sin \theta).$$

Si ottiene facilmente, in base alla teoria delle sollecitazioni semplici:

$$d\gamma = \frac{M R d\theta}{EJ} \quad d\beta = p \frac{\bar{M} R d\theta}{GJ_p}$$

ove p è il fattore di torsione della sezione, supposta costante per tutto l'arco.

Quando si fa deformare il tronco elementare, in base al principio d'indipendenza dei movimenti, il resto della struttura è rigido.

Il tratto a sinistra, incastrato in A , resta immobile: i moti relativi

divengono assoluti per la sezione di destra del tronco.

La parte destra di arco si muove di moto rigido, e si ottiene facilmente:

$$d\eta_B = -d\gamma \cdot R \operatorname{sen} \theta + d\beta \cdot R(1 - \cos \theta)$$

$$d\omega_B = d\gamma \operatorname{sen} \theta + d\beta \cos \theta$$

$$d\varphi_B = d\gamma \cos \theta - d\beta \operatorname{sen} \theta.$$

I moti complessivi di B si ottengono sommando gli infiniti contributi elementari, cioè integrando l'effetto generico a tutta la lunghezza d'asse dell'arco.

$$\eta_B = \int_0^{\pi/2} \frac{qR^4}{EJ} (1 - \cos \theta) \operatorname{sen} \theta d\theta + \int_0^{\pi/2} p \frac{qR^4}{GJ_p} (\theta - \operatorname{sen} \theta) (1 - \cos \theta) d\theta =$$

$$= \frac{qR^4}{2} \left[\frac{3}{EJ} + \frac{p}{GJ_p} \left(\frac{\pi^2}{4} - \pi - 1 \right) \right]$$

$$\omega_B = - \int_0^{\pi/2} \frac{qR^3}{EJ} (1 - \cos \theta) \operatorname{sen} \theta d\theta + \int_0^{\pi/2} p \frac{qR^3}{GJ_p} (\theta - \operatorname{sen} \theta) \cos \theta d\theta =$$

$$= \frac{qR^3}{2} \left[\frac{3}{EJ} + p \frac{\pi + 3}{GJ_p} \right]$$

$$\varphi_B = - \int_0^{\pi/2} \frac{qR^3}{EJ} (1 - \cos \theta) \cos \theta d\theta - \int_0^{\pi/2} p \frac{qR^3}{GJ_p} (\theta - \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \theta d\theta =$$

$$= - \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) qR^3 \left(\frac{1}{EJ} + \frac{p}{GJ_p} \right).$$