

CAPITOLO XI

LE TRAVATURE ISOSTATICHE

La determinazione delle azioni interne, in una trave, è necessaria non soltanto per poter eseguire le verifiche di resistenza, ma anche per calcolarne i movimenti e le deformazioni.

Questo calcolo può avere diversi scopi, di cui ricordiamo i più frequenti:

a) nel collaudo statico, in cui, con appositi strumenti, si misurano alcuni movimenti, in una struttura, per confrontarli con quelli teorici, e trarne elementi di giudizio sulla stabilità dell'opera;

b) per il calcolo di reazioni ed azioni interne nelle strutture iperstatiche.

È noto che, nelle strutture piane, il momento flettente, pur essendo accompagnato da altre componenti dell'azione interna, ha, di regola, effetto deformante di gran lunga prevalente. Pertanto, lo studio delle deformazioni di una struttura piana si riduce, quasi sempre, a quello di una trave inflessa.

Nel presente capitolo, un primo gruppo di esercizi riguarda le travi ad asse rettilineo, studiate con il metodo della linea elastica e del teorema (e corollari) di MOHR.

Un secondo gruppo, invece, è dedicato alle strutture di forma qualsiasi, mediante il procedimento di composizione diretta delle

deformazioni con la cinematica dei moti infinitesimi. Ci si è limitati a casi abbastanza semplici, per evitare le notevoli complicazioni analitiche a cui il procedimento può condurre.

Si vedrà più avanti (nel II volume) che, nei casi complessi, la soluzione più semplice e diretta si ottiene per via energetica.

Infine, nell'ultimo gruppo si studiano alcune strutture spaziali, nelle quali interviene esplicitamente anche il contributo deformante del momento torcente.

* * *

64. - Determinare l'equazione della linea elastica di una trave soggetta, su metà della sua luce l , ad un carico q uniforme.

La rigidità flessionale della trave è costante.

Si considerino i seguenti casi di vincolo:

- I) trave a mensola;
- II) trave a due appoggi.

I) TRAVE A MENSOLA.

Sia EJ la rigidità flessionale della trave. Nel riferimento adottato l'equazione della linea elastica può scriversi in una delle due forme, tra loro equivalenti:

$$EJ \eta''(x) = -M(x)$$

$$EJ \eta^{IV}(x) = q(x)$$

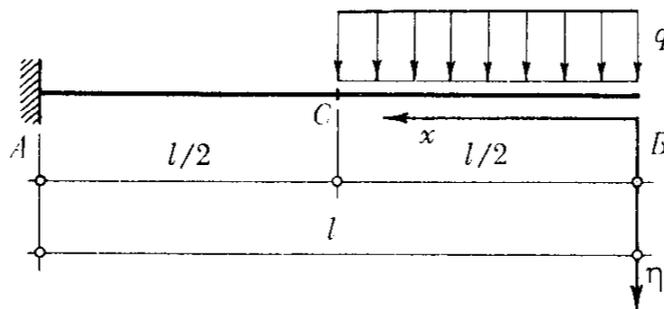


Fig. 64.1

La prima equazione è molto più comoda.

Il calcolo diretto del momento flettente $M(x)$, in questo caso immediato, equivale all'esecuzione delle due prime integrazioni.

Il momento flettente ha diverse leggi di variazione nelle due metà della trave: anche l'equazione della linea elastica andrà scritta separatamente per i due tratti. Le quattro costanti di integrazione dovranno determinarsi mediante le condizioni imposte dai vincoli esterni e quelli interni (continuità materiale nella sezione di mezzaria).

CALCOLO DELLE AZIONI INTERNE. - Come si è già supposto implicitamente, calcoleremo le deformazioni imputabili al solo momento flettente.

Esso, pertanto, è l'unica azione interna da determinare.

Tratto BC:

$$M_1(x) = -q \frac{x^2}{2} \quad \left(0 \leq x \leq \frac{l}{2} \right).$$

Tratto CA:

$$M_2(x) = -q \frac{l}{2} \left(x - \frac{l}{4} \right) \quad \left(\frac{l}{2} \leq x \leq l \right)$$

EQUAZIONE DELLA LINEA ELASTICA.

Tratto BC:

$$EJ \eta_1'' = +q \frac{x^2}{2} \quad \left(0 \leq x \leq \frac{l}{2} \right)$$

Tratto CA:

$$EJ \eta_2'' = +q \frac{l}{2} \left(x - \frac{l}{4} \right) \quad \left(\frac{l}{2} \leq x \leq l \right)$$

Integrando successivamente due volte, si ottengono le coppie di espressioni per le rotazioni e gli abbassamenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} EJ\eta_1' = q \frac{x^3}{6} + C_1 \\ EJ\eta_2' = ql \frac{x}{4} \left(x - \frac{l}{2}\right) + C_3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} EJ\eta_1 = q \frac{x^4}{24} + C_1 x + C_2 \\ EJ\eta_2 = q \frac{l}{4} x^2 \left(\frac{x}{3} - \frac{l}{4}\right) + C_3 x + C_4. \end{array} \right.$$

Come è già noto per via teorica, si ritrova che la forma della linea elastica dipende solo dalla legge di variazione del momento flettente (o, se si vuole, del carico), e non dal tipo di vincoli.

Nel tratto direttamente caricato si tratta di una quartica; nell'altro, di una cubica.

La posizione della deformata nel piano x, η è fissata dalle condizioni al contorno, che determinano le costanti d'integrazione.

Vincoli esterni. - La presenza dell'incastro in A impone:

$$\eta_2(l) = 0; \quad \eta_2'(l) = 0.$$

Vincoli interni. - La continuità materiale tra le due mezze travi impone l'uguaglianza di abbassamento e rotazione della sezione di mezzaria, pensata appartenente volta a volta ai due tratti:

$$\eta_1\left(\frac{l}{2}\right) = \eta_2\left(\frac{l}{2}\right)$$

$$\eta_1'\left(\frac{l}{2}\right) = \eta_2'\left(\frac{l}{2}\right)$$

Esplicitamente, le quattro condizioni diventano:

$$0 = \frac{ql^3}{4} \left(\frac{l}{3} - \frac{l}{4} \right) + C_3 l + C_4$$

$$0 = \frac{ql^2}{4} \left(l - \frac{l}{2} \right) + C_3$$

$$\frac{ql^4}{384} + C_1 \frac{l}{2} + C_2 = \frac{ql^3}{16} \left(\frac{l}{6} - \frac{l}{4} \right) + C_3 \frac{l}{2} + C_4$$

$$\frac{ql^3}{48} + C_1 = \frac{ql^2}{8} \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2} \right) + C_3.$$

La soluzione risulta:

$$C_1 = -\frac{7}{48} ql^3$$

$$C_2 = +\frac{41}{384} ql^4$$

$$C_3 = -\frac{ql^3}{8}$$

$$C_4 = +\frac{5}{48} ql^4$$

Le equazioni della linea elastica divengono:

$$\eta_1 = \frac{qx^4}{24 EJ} - \frac{7}{48} \frac{ql^3 x}{EJ} + \frac{41}{384} \frac{ql^4}{EJ}$$

$$\eta_2 = \frac{ql}{4} \frac{x^2}{EJ} \left(\frac{x}{3} - \frac{l}{4} \right) - \frac{ql^3 x}{8 EJ} + \frac{5}{48} \frac{ql^4}{EJ}$$

$$\eta_1' = \frac{qx^3}{6 EJ} - \frac{7}{48} \frac{ql^3}{EJ}$$

$$\eta_2' = \frac{qlx}{4 EJ} \left(x - \frac{l}{2} \right) - \frac{ql^3}{8 EJ}$$

CASI PARTICOLARI.

Calcoliamo, ad esempio, abbassamento e rotazione dell'estremo libero, Si ottiene:

$$f = \eta_1(0) = + \frac{41}{384} \frac{ql^4}{EJ}.$$

Il segno positivo indica trattarsi di abbassamento.

$$\varphi = \eta_1'(0) = - \frac{7}{48} \frac{ql^3}{EJ}.$$

Il segno negativo indica una rotazione oraria.

II) TRAVE A DUE APPOGGI.

CALCOLO DELLE AZIONI INTERNE.

Reazioni vincolari: $Q = q \frac{l}{2}$

$$V_A = \frac{Q}{4} = \frac{1}{8} ql$$

$$V_B = \frac{3Q}{4} = \frac{3}{8} ql$$

Momento flettente. - Questa volta conviene scegliere due diversi riferimenti, aventi origine all'estremità della trave (fig. 64.2).

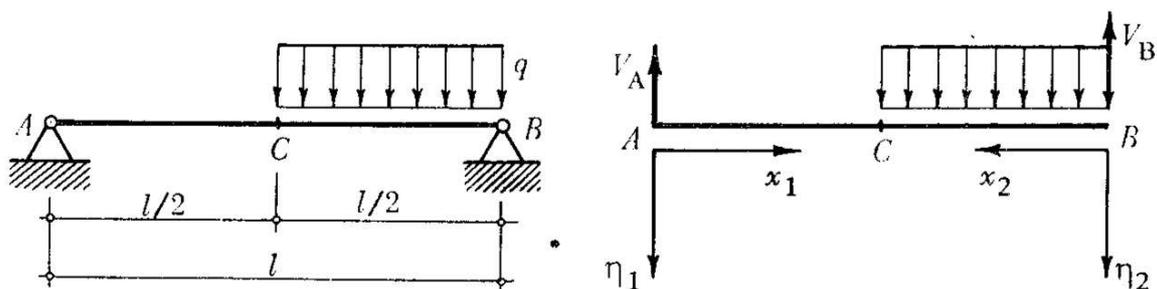


Fig. 64,2

$$M(x_1) = V_A x_1 = \frac{ql}{8} x_1 \quad \left(0 \leq x_1 \leq \frac{l}{2}\right)$$

$$M(x_2) = V_B x_2 - \frac{qx_2^2}{2} = \frac{qx_2}{2} \left(\frac{3}{4}l - x_2\right) \quad \left(0 \leq x_2 \leq \frac{l}{2}\right)$$

EQUAZIONI DELLA LINEA ELASTICA. - Sono ancora distinte per le due metà della trave.

$$EJ \eta_1'''' = -M(x_1)$$

$$EJ \eta_2'''' = -M(x_2)$$

ed esplicitamente:

$$EJ \eta_1'''' = -\frac{ql}{8} x_1$$

$$EJ \eta_2'''' = -q \frac{x_2}{2} \left(\frac{3}{4}l - x_2\right).$$

Mediante due successive integrazioni si trova:

$$\begin{cases} EJ \eta_1' = -\frac{ql}{16} x_1^2 + C_1 \\ EJ \eta_2' = -\frac{qx_2^2}{2} \left(\frac{3}{8}l - \frac{x_2}{3}\right) + C_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} EJ \eta_1 = -\frac{ql}{48} x_1^3 + C_1 x_1 + C_2 \\ EJ \eta_2 = -\frac{qx_2^3}{24} \left(\frac{3}{2}l - x_2\right) + C_3 x_2 + C_4 \end{cases}$$

CONDIZIONI AL CONTORNO.

Vincoli esterni. - In corrispondenza degli appoggi è nullo l'abbassamento; perciò:

$$\eta_1(0) = \eta_2(0) = 0.$$

Vincoli interni. - La continuità materiale in C impone l'uguaglianza di abbassamento e rotazione.

A proposito di quest'ultima, si noti che i due riferimenti hanno gli assi delle ascisse orientati in versi opposti.

La medesima rotazione, perciò, andrà espressa, nei due riferimenti, con diversi segni.

Si deve quindi imporre:

$$\begin{aligned}\eta_1\left(\frac{l}{2}\right) &= \eta_2\left(\frac{l}{2}\right) \\ \eta_1'\left(\frac{l}{2}\right) &= -\eta_2'\left(\frac{l}{2}\right).\end{aligned}$$

Esplicitando, si ottengono altre due equazioni nelle costanti C_1, C_2, C_3, C_4 . Si ha:

$$\begin{aligned}C_1 &= \frac{7}{384} ql^3 \\ C_2 &= C_4 = 0 \\ C_3 &= \frac{9}{384} ql^3.\end{aligned}$$

Le equazioni assumono allora la forma:

$$\begin{aligned}\eta_1 &= -\frac{1}{48} \frac{qlx_1^3}{EJ} + \frac{7}{384} \frac{ql^3x_1}{EJ} \\ \eta_2 &= -\frac{1}{24} \frac{qx_2^2}{EJ} \left(\frac{3}{2}l - x_2\right) + \frac{9}{384} \frac{ql^3x_2}{EJ} \\ \eta_1' &= -\frac{1}{16} \frac{qlx_1^2}{EJ} + \frac{7}{384} \frac{ql^3}{EJ} \\ \eta_2' &= -\frac{1}{2} \frac{qx_2^2}{EJ} \left(\frac{3}{8}l - \frac{x_2}{3}\right) + \frac{9}{384} \frac{ql^3}{EJ}.\end{aligned}$$

CASI PARTICOLARI.

Calcoliamo i movimenti delle sezioni agli appoggi e in mezzaria.

Rotazioni agli estremi. - In A :

$$\varphi_A = \eta_1'(0) = + \frac{7}{384} \frac{ql^3}{EJ}$$

La rotazione è positiva nel riferimento (x_1, η_1) quindi risulta oraria. In B :

$$\varphi_B = \eta_2'(0) = + \frac{9}{384} \frac{ql^3}{EJ}$$

Questa volta la rotazione è espressa nel riferimento (x_2, y_2) e perciò ha il verso antiorario.

Movimenti della sezione in mezzaria.

Spostamento:

$$\eta_C = \eta_1\left(\frac{l}{2}\right) = \eta_2\left(\frac{l}{2}\right) = + \frac{5}{768} \frac{ql^4}{EJ}$$

Come è naturale, si tratta di un abbassamento.

Rotazione:

$$\varphi_C = \eta_1'\left(\frac{l}{2}\right) = + \frac{1}{384} \frac{ql^3}{EJ}$$

oppure:

$$\varphi_C = \eta_2'\left(\frac{l}{2}\right) = - \frac{1}{384} \frac{ql^3}{EJ}$$

Ricordando ciò che si è detto a proposito dei segni delle rotazioni, la φ_C risulta oraria.

* * *

65. - Determinare la linea elastica della trave già studiata nell'esercizio 58.

Si vuole determinare la linea elastica di una trave a due appoggi, distanti 16 m, caricata in mezzaria da una forza verticale di 38 t. La sezione retta, nella zona centrale più sollecitata, è composta, mediante chiodatura, da un'anima verticale, quattro cantonali di collegamento e quattro piattabande (fig. 65.1). Poiché il momento flettente varia lungo l'asse della trave, è possibile diminuire la sezione resistente nelle zone meno sollecitate, cioè verso gli appoggi. Ciò può farsi, nel modo più semplice, riducendo il numero delle piattabande.

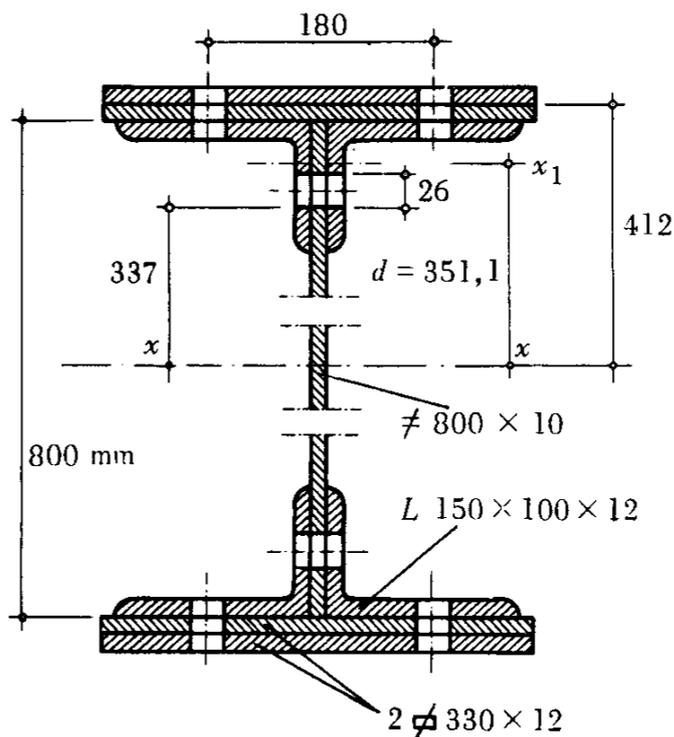


Fig. 65.1

Ricordiamo (esercizio 59) che la sezione con quattro piattabande ha il momento d'inerzia (detratti i fori dei chiodi):

$$J_2 = 394\,000 \text{ cm}^4$$

e l'altezza

$$H_2 = 84,8 \text{ cm},$$

pertanto il suo modulo di resistenza vale:

$$W_2 = 2 \frac{J_2}{H_2} = 9290 \text{ cm}^3.$$

Del momento complessivo J_2 , alle piattabande esterne è imputabile il contributo:

$$\bar{J}_2 = 2 \left(\frac{27,8}{12} \times \overline{1,2^3} + 27,8 \times 1,2 \times \overline{40,6^2} \right) = 116\,580 \text{ cm}^4.$$

Le zone di trave con due sole piattabande hanno la sezione retta con momento d'inerzia:

$$J_1 = J_2 - \bar{J}_2 = 277\,400 \text{ cm}^4$$

e modulo di resistenza:

$$W_1 = \frac{277\,400}{41,2} = 6\,730 \text{ cm}^3.$$

Se il carico di sicurezza dell'acciaio è $K = 1600 \text{ kg/cm}^2$, il tratto in cui si può eseguire la riduzione di sezione resistente è limitato all'ascissa \bar{x} , a cui compete il momento flettente:

$$\bar{M} = K W_1 = 6730 \times 1600 = 107,7 \times 10^5 \text{ kg cm} = 107,7 \text{ tm}.$$

Esso si verifica all'ascissa:

$$\bar{x} = \frac{2\bar{M}}{P} = 5,67 \text{ m}.$$

In pratica, si potrà mantenere la sezione piena nel tratto centrale di 5 m; nei due tratti laterali, di 5,50 m ciascuno, si adotterà invece la sezione composta con due sole piattabande.

Per il calcolo delle deformazioni, è lecito prescindere dall'indebolimento delle sezioni derivante dai fori per i chiodi.

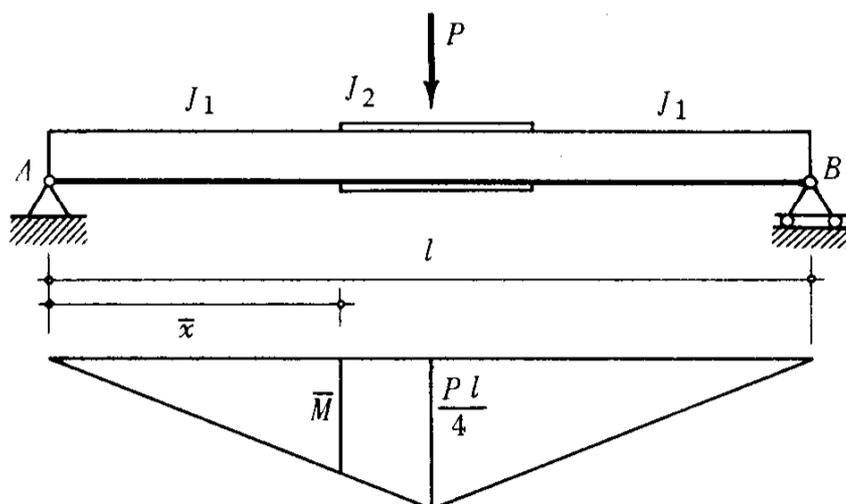


Fig. 65.2

Di esso si deve ovviamente tener conto nelle verifiche di resistenza, perché la presenza dei fori diminuisce il grado di sicurezza della sezione più sollecitata.

Invece le deformazioni dipendono dal comportamento globale della trave, che non può risentire che in maniera limitata degli indebolimenti locali.

I momenti d'inerzia delle zone laterali e centrale, senza la detrazione per i fori, valgono:

$$J_1 \cong 317\,350 \text{ cm}^4$$

$$J_2 \cong 456\,000 \text{ cm}^4.$$

Suddivisa la trave in tronchi di lunghezza $\Delta x = 0,50 \text{ m}$, calcoliamo, in corrispondenza dei loro baricentri, il momento flettente e la rotazione relativa $\frac{M \Delta x}{J}$ (a meno del modulo E). Per la nota analogia, costituente il teorema di MOHR, possiamo ottenere la linea elastica come poligono funicolare che collega le forze fittizie $\frac{M \Delta x}{J}$ (riportate nella seguente tabella).

TRONCO	ASCISSA DEL BARICENTRO	MOMENTO FLETTENTE	$\frac{M \Delta x}{J}$
	cm	kg cm	kg/cm ²
0-1	25	$0,475 \times 10^6$	75
1-2	75	$1,425 \times 10^6$	224
2-3	125	$2,375 \times 10^6$	374
3-4	175	$3,325 \times 10^6$	524
4-5	225	$4,275 \times 10^6$	673
5-6	275	$5,225 \times 10^6$	823
6-7	325	$6,175 \times 10^6$	973
7-8	375	$7,125 \times 10^6$	1123
8-9	425	$8,075 \times 10^6$	1272
9-10	475	$9,025 \times 10^6$	1422
10-11	525	$9,975 \times 10^6$	1566
11-12	575	$10,925 \times 10^6$	1198
12-13	625	$11,875 \times 10^6$	1302
13-14	675	$12,825 \times 10^6$	1406
14-15	725	$13,775 \times 10^6$	1510
15-16	775	$14,725 \times 10^6$	1614

La simmetria ha permesso di limitare i calcoli a metà trave.

Se si usa come distanza polare proprio il modulo di elasticità $E = 2,1 \times 10^6$ kg/cm² si ottengono le ordinate della linea elastica nella scala del disegno.

Se si desiderano le ordinate della linea elastica in vera grandezza, occorre dividere la distanza polare per la scala. In concreto, poiché si è rappresentata la trave in scala 1:100, la distanza polare deve risultare $E/100$.

Si ha una rappresentazione più evidente se si ottengono le ordinate al doppio del vero. Allo scopo, è necessario scegliere come distanza polare:

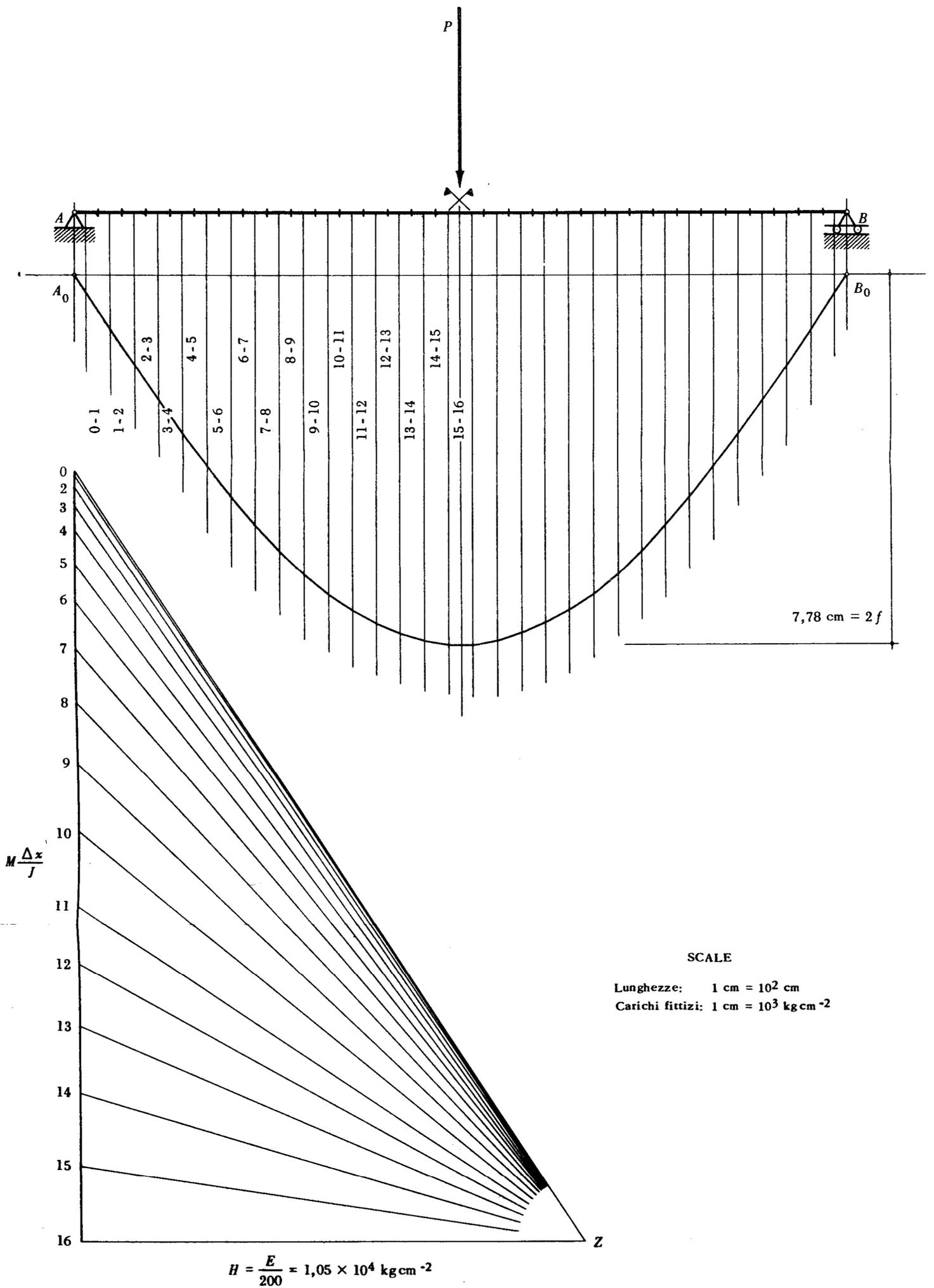


Fig. 65.3

$$H = \frac{E}{200} = 1,05 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$$

Essa andrà rappresentata nella stessa scala delle forze fittizie $\frac{M \Delta x}{J}$; in tal modo, le inclinazioni delle proiettanti (e quindi dei lati del poligono funicolare che approssima la deformata) riescono indipendenti da essa.

Il poligono dà la forma della linea elastica.

Il riferimento è fissato dalle condizioni di vincolo. Poiché alle imposte è nullo l'abbassamento, la retta di riferimento coincide con la congiungente i punti A_0 e B_0 intersezioni del poligono con le verticali d'estremità.

Scegliendo il polo sull'orizzontale per il punto medio della retta delle forze (fig. 65.3), detto riferimento risulta orizzontale.

In particolare, la freccia in mezzaria risulta:

$$f = \frac{7,78}{2} = 3,89 \text{ cm.}$$

CONFRONTO ANALITICO. - In questo caso la legge di variazione del momento d'inerzia è molto semplice, perciò si può dedurre anche analiticamente il risultato, per rendersi conto dell'ordine di grandezza dell'errore del procedimento grafico.

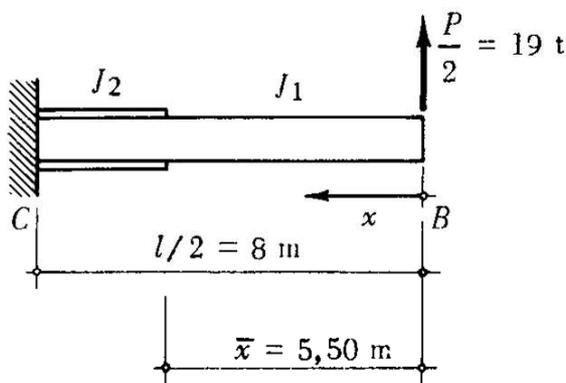


Fig. 65.4

Ci si può ridurre allo studio di metà trave, che, per ragioni di simmetria, si comporta come mensola incastrata in C.

La freccia cercata è uguale, in valore assoluto, all'innalzamento di B.

$$f = \int_0^{\bar{x}} \frac{P}{2} \frac{x^2}{EJ_1} dx + \int_{\bar{x}}^{l/2} \frac{P}{2} \frac{x^2}{EJ_2} dx =$$

$$= \frac{P}{2E} \left(\frac{\bar{x}^3}{3J_1} - \frac{\bar{x}^3}{3J_2} + \frac{l^3}{24J_2} \right) = 3,87 \text{ cm.}$$

66. - La trave Gerber della fig. 66.1 ha rigidità flessionale costante. Mediante l'impiego dei corollari del teorema di MOHR, calcolarne:

- l'abbassamento dell'estremo libero.
- la rotazione relativa delle sezioni adiacenti alla cerniera interna.

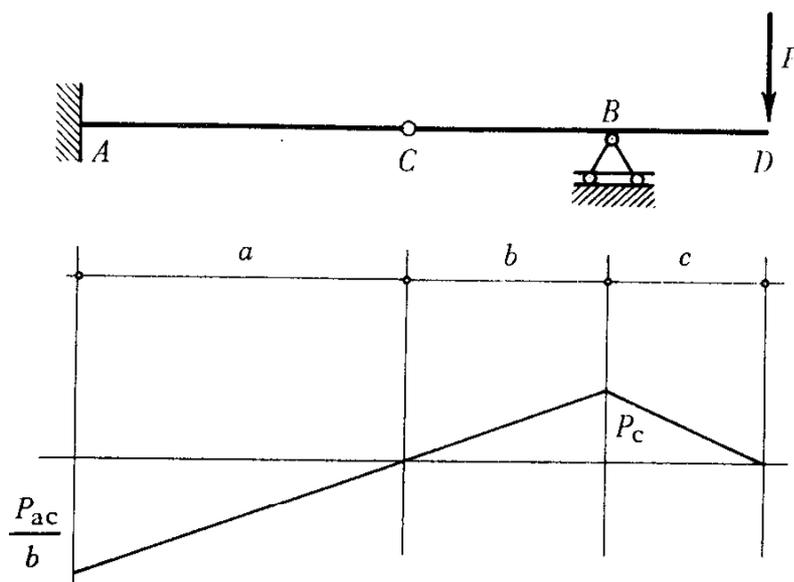


Fig. 66.1

CALCOLO DELLE SOLLECITAZIONI. - Basta determinare il diagramma del momento flettente, che diverrà il carico della trave ausiliaria.

Il momento è ovunque lineare. Si annulla all'estremo libero ed in corrispondenza della cerniera interna, e vale $P \cdot c$ sull'appoggio B .

DETERMINAZIONE DELLA TRAVE AUSILIARIA. - Le condizioni geometriche di vincolo della trave assegnata si traducono in condizioni statiche per quella ausiliaria.

Infatti, l'espressione generale dei corollari del teorema di MOHR, per travi di sezione costante, è:

$$\varphi = \frac{\bar{T}}{EJ}; \quad \eta = \frac{\bar{M}}{EJ}.$$

In queste formule, φ ed η sono rispettivamente rotazione ed abbassamento della sezione corrente della trave assegnata; \bar{T} e \bar{M} il taglio ed il momento flettente nella corrispondente sezione della trave ausiliaria. Il carico (fittizio) che provoca tali sollecitazioni è il momento flettente della trave iniziale.

Esaminiamo in dettaglio i vari vincoli.

Incastro A . - Nella trave assegnata:

$$\eta = \varphi = 0.$$

Nella trave ausiliaria deve risultare, di conseguenza:

$$\bar{T} = \bar{M} = 0.$$

Ciò può accadere, indipendentemente dalle condizioni di carico, solo se l'estremo A della trave ausiliaria è privo di vincoli.

Cerniera C . - Indichiamo rispettivamente con 1 e 2 le caratteristiche delle sezioni immediatamente a sinistra e a destra della cerniera.

Nella trave iniziale:

$$\eta_1 = \eta_2 \neq 0; \quad \varphi_1 \neq \varphi_2.$$

Nella trave ausiliaria deve risultare:

$$\bar{M}_1 = \bar{M}_2 \neq 0; \quad \bar{T}_1 \neq \bar{T}_2.$$

Il vincolo posto in C deve produrre discontinuità nel taglio, ma non nel momento: deve trattarsi di un appoggio.

Appoggio B . - Nella trave iniziale:

$$\eta_1 = \eta_2 = 0; \quad \varphi_1 = \varphi_2 \neq 0.$$

Nella trave ausiliaria deve aversi:

$$\bar{M}_1 = \bar{M}_2 = 0; \quad \bar{T}_1 = \bar{T}_2 \neq 0.$$

Simili sollecitazioni esistono se in B è posta una cerniera interna.

Estremo D . - Nella trave iniziale:

$$\eta \neq 0, \quad \varphi \neq 0.$$

Nella trave ausiliaria dovrà ottenersi:

$$\bar{M} \neq 0; \quad \bar{T} \neq 0.$$

L'estremo D è da considerarsi incastrato.

Nella fig. 66.2 è indicata la trave ausiliaria con il carico fittizio, insieme allo svincolamento necessario per il calcolo delle reazioni vincolari.

Sostituiamo, ai tre triangoli in cui può scomporsi il carico, le rispettive risultanti.

L'equilibrio alla rotazione intorno a C della parte sinistra, porge:

$$\bar{V} = \frac{P \cdot c}{3} \frac{a^3 + b^3}{b^2}.$$

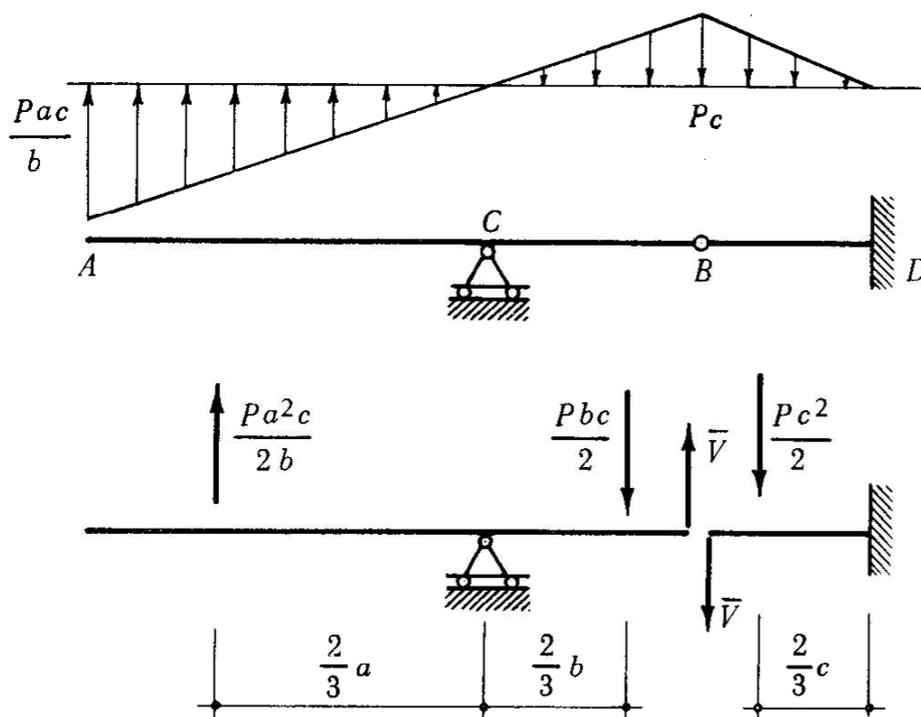


Fig. 66.2

CALCOLO DELL'ABBASSAMENTO DI D. - Risulta:

$$\eta_D = \frac{\bar{M}_D}{EJ}$$

$$\bar{M}_D = \bar{V} \cdot c + \frac{P \cdot c^2}{2} \cdot \frac{2}{3}c = \frac{P \cdot c^2}{3} \frac{a^3 + b^3 + b^2c}{b^2}$$

$$\eta_D = \frac{P \cdot c^2}{3EJ} \frac{a^3 + b^3 + b^2c}{b^2}.$$

CALCOLO DELLA ROTAZIONE RELATIVA IN C. - La rotazione relativa è proporzionale alla differenza tra gli sforzi di taglio delle sezioni adiacenti all'appoggio C, cioè alla sua reazione verticale \bar{V}_c :

$$\varphi_r = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\bar{T}_1 - \bar{T}_2}{EJ} = \frac{\bar{V}_c}{EJ}.$$

La reazione si ottiene dall'equilibrio alla traslazione verticale del ratto ACB :

$$\bar{V}_c = -\frac{Pcb}{2} + \frac{Pa^2c}{2b} + \bar{V} = \frac{P \cdot c}{6b^2} \left[2(a^3 + b^3) + 3b(a^2 - b^2) \right]$$

$$\varphi_r = \frac{P \cdot c}{6EJb^2} \left[2(a^3 + b^3) + 3b(a^2 - b^2) \right].$$

67. - Calcolare l'abbassamento e la rotazione dell'estremo libero della mensola già studiata nell'esercizio 64.

Ci si propone, qui, di risolvere il problema con l'ausilio dei corollari del teorema di MOHR.

Come prima operazione, conviene determinare l'andamento del momento flettente. Esso fungerà da carico per la trave ausiliaria, che risulta incastrata in B e libera in A (fig. 67.1).

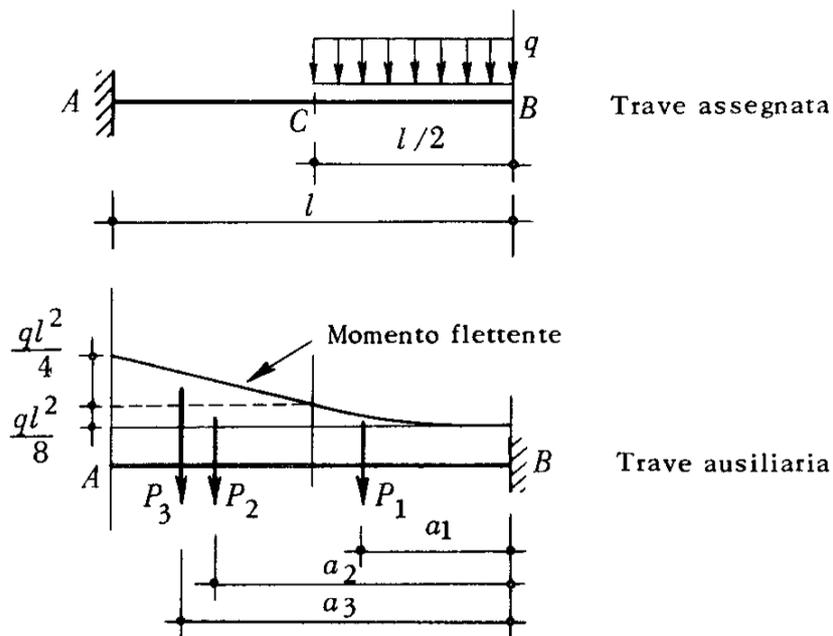


Fig. 67.1

Il momento flettente varia parabolicamente nel tratto caricato fino ad assumere, in mezzaria, il valore:

$$\frac{q}{2} \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{ql^2}{8}$$

Nella metà AC è lineare, e può calcolarsi come somma di due termini.

Il primo è costante, vale $q \frac{l^2}{8}$ ed esprime l'effetto del momento flettente nella sezione C .

Il secondo è lineare, deriva dal taglio $\frac{ql}{2}$ che, attraverso C , la parte destra applica alla sinistra, e varia da zero in C al valore d'incastro:

$$\frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{ql^2}{4}.$$

In totale, il momento d'incastro risulta:

$$M_A = \frac{ql^2}{8} + \frac{ql^2}{4} = \frac{3}{8}ql^2.$$

Calcoliamo, ora, le componenti di movimento cercate. È opportuno notare che il momento flettente ha, lungo la trave, segno costante, e ne tende tutte le fibre all'estradosso. Perciò, lo spostamento dell'estremo libero avverrà verso il basso, e la rotazione sarà oraria.

A) **Rotazione φ_B dell'estremo libero.** - È proporzionale al taglio fittizio nella sezione B della trave ausiliaria, cioè all'area totale del carico fittizio (diagramma del momento flettente). Per comodità di calcolo, può convenire scomporla come indicato nella fig. 67.1. Si ottiene subito:

$$P_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{l}{2} = \frac{ql^3}{48}$$

$$P_2 = \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{l}{2} = \frac{ql^3}{16}$$

$$P_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{4} \cdot \frac{l}{2} = \frac{ql^3}{16}$$

In totale:

$$T_B^* = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{7}{48} ql^3$$

La rotazione dell'estremo libero risulta, infine:

$$\varphi_B = \frac{T_B^*}{EJ} = \frac{7}{48} \frac{ql^3}{EJ}$$

B) Abbassamento η_B dell'estremo libero. - È proporzionale al momento M_B^* , in B , dovuto al carico fittizio (momento flettente).

Le forze P_1 , P_2 , P_3 passano per i baricentri dei rispettivi diagrammi di carico. Le loro distanze dalla verticale di B sono:

$$a_1 = \frac{3}{4} \frac{l}{2} = \frac{3}{8} l$$

$$a_2 = \frac{3}{4} l$$

$$a_3 = \frac{l}{2} + \frac{2}{3} \frac{l}{2} = \frac{5}{6} l$$

$$M_B^* = P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3 = \frac{41}{384} ql^4$$

$$\eta_B = \frac{M_B^*}{EJ} = \frac{41}{384} \frac{ql^4}{EJ}$$

È chiara la maggiore agilità di questo metodo rispetto all'integrazione dell'equazione della linea elastica. Per contro, la convenienza cessa se interessano i movimenti di parecchie sezioni.

RISULTATI NOTEVOLI

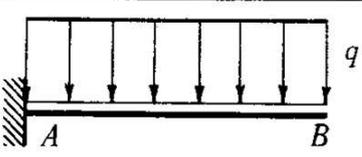
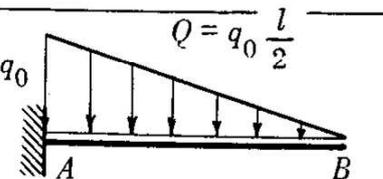
Mediante l'uso dell'equazione della linea elastica si possono calcolare le deformazioni di travi appoggiate ed a mensola, comunque caricate.

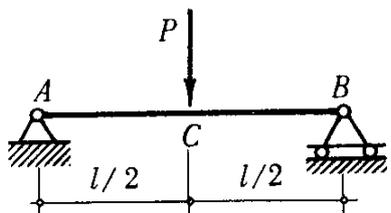
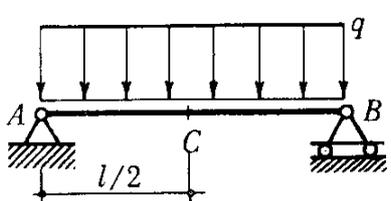
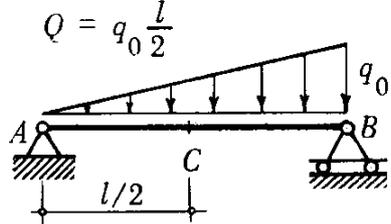
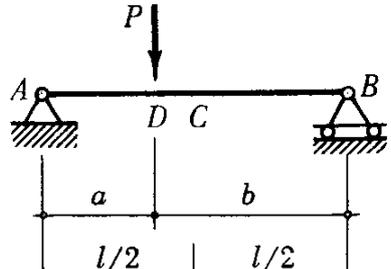
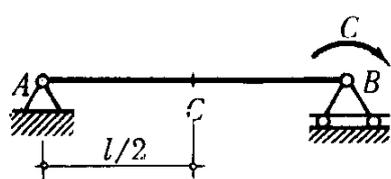
Di solito, ogni struttura ad asse rettilineo o spezzato può ridursi ad un opportuno insieme di tali travi semplici. Perciò, di queste ultime conviene ricordare i coefficienti elastici, cioè i movimenti di ben determinate sezioni sotto l'effetto di particolari condizioni di carico.

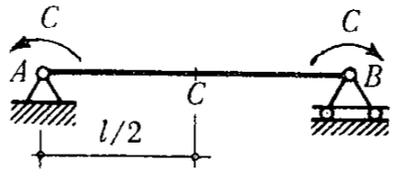
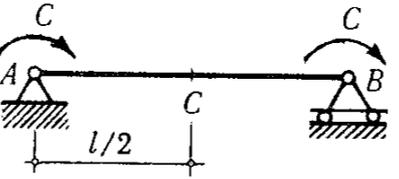
Per comodità del lettore, riportiamo una scelta di risultati di uso corrente nelle tabelle che seguono.

In esse, sono stati usati i seguenti segni:

- positivi gli abbassamenti;
- positive le rotazioni orarie.

SCHEMA DI CARICO	ROTAZIONI	ABBASSAMENTI
Travi a mensola		
	$\varphi_B = \frac{Pl^2}{2EJ}$	$\eta_B = \frac{Pl^3}{3EJ}$
	$\varphi_B = \frac{ql^3}{6EJ}$	$\eta_B = \frac{ql^4}{8EJ}$
	$\varphi_B = \frac{Ql^2}{12EJ}$	$\eta_B = \frac{Ql^3}{15EJ}$
	$\varphi_B = \frac{Cl}{EJ}$	$\eta_B = \frac{Cl^2}{2EJ}$

SCHEMA DI CARICO	ROTAZIONI	ABBASSAMENTI
Travi a due appoggi		
	$\varphi_A = \frac{Pl^2}{16 EJ}$ $\varphi_B = -\frac{Pl^2}{16 EJ}$	$\eta_C = \frac{Pl^3}{48 EJ}$
	$\varphi_A = \frac{ql^3}{24 EJ}$ $\varphi_B = -\frac{ql^3}{24 EJ}$	$\eta_C = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ}$
	$\varphi_A = \frac{7}{180} \frac{Ql^2}{EJ}$ $\varphi_B = -\frac{8}{180} \frac{Ql^2}{EJ}$	$\eta_C = \frac{5}{384} \frac{Ql^3}{EJ}$
	$\varphi_A = \frac{Pb(l^2 - b^2)}{6 EJl}$ $\varphi_B = -\frac{Pa(l^2 - a^2)}{6 EJl}$	$\eta_C = \frac{Pa(3l^2 - 4a^2)}{48 EJ}$ $\eta_D = \frac{Pa^2b^2}{3 EJl}$
	$\varphi_A = -\frac{Cl}{6 EJ}$ $\varphi_B = \frac{Cl}{3 EJ}$	$\eta_C = -\frac{Cl^2}{16 EJ}$

SCHEMA DI CARICO	ROTAZIONI	ABBASSAMENTI
	$\varphi_A = -\frac{Cl}{2EJ}$ $\varphi_B = \frac{Cl}{2EJ}$	$\eta_C = -\frac{Cl^2}{8EJ}$
	$\varphi_A = \frac{Cl}{6EJ}$ $\varphi_B = \frac{Cl}{6EJ}$	$\eta_C = 0$

* * *

68. - Risolvere, per via diretta, lo stesso problema dell'esercizio 64.

Non sarà inopportuno premettere alla soluzione un richiamo dei concetti fondamentali, nel caso particolare di travi rettilinee deformate solo dal momento flettente.

Scegliamo un riferimento cartesiano ortogonale, avente l'asse x coincidente con quello, supposto orizzontale, della trave, ed origine in un punto arbitrario.

Gli spostamenti η (puramente verticali, entro i noti limiti di approssimazione) siano positivi verso il basso; le rotazioni, se orarie.

Fissiamo l'attenzione su due sezioni A e B qualsiasi della trave (fig. 68.1).

Ricordando ciò che si è detto nell'esercizio 41 si può applicare, ai movimenti di carattere elastico, la cinematica dei moti infinitesimi.

I movimenti della sezione B possono ottenersi in funzione di quelli della A e dei moti relativi tra di esse.

Consideriamo, in un primo istante, l'effetto del moto di A su quello di B (trave temporaneamente irrigidita):

$$\begin{aligned}\varphi'_B &= \varphi_A \\ \eta'_B &= \eta_A + \varphi_A (x_B - x_A) = \eta_A + \varphi_A \cdot x_{BA}\end{aligned}$$

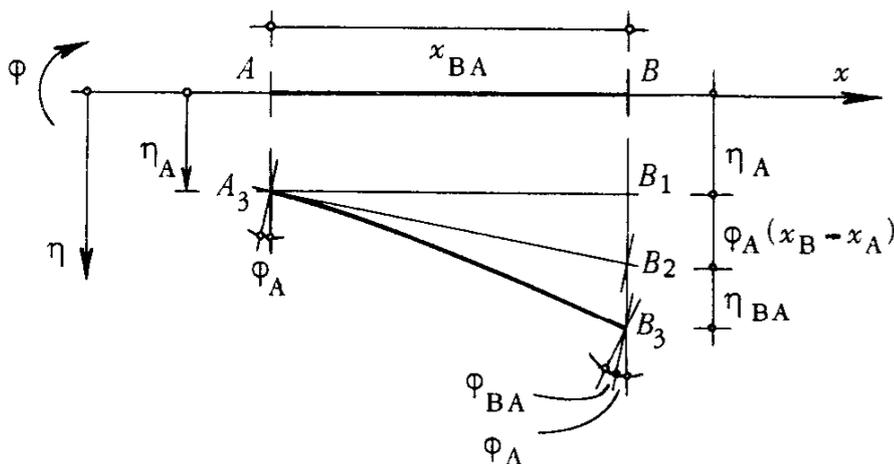


Fig. 68.1

Indichiamo con φ_{BA} e η_{BA} le componenti del movimento relativo tra A e B (o che è lo stesso, i movimenti di B rispetto ad un riferimento solidale con A). È chiaro che esse esistono solo se la trave è deformata. In totale:

$$\begin{aligned}\varphi_B &= \varphi_A + \varphi_{BA} \\ \eta_B &= \eta_A + \varphi_A x_{BA} + \eta_{BA}\end{aligned}$$

Come vedremo, i moti relativi φ_{BA} e η_{BA} potranno calcolarsi in funzione della deformazione flessionale. I moti assoluti φ_A , η_A , φ_B , η_B si determineranno in base alle condizioni geometriche imposte dal vincolamento.

I) TRAVE A MENSOLA.

Portiamo a coincidere le sezioni di riferimento con quelle estreme della trave.

L'incastro blocca completamente la sezione A , perciò:

Sommando i contributi degli infiniti tronchi in cui può scomporsi la trave:

$$\varphi_B = \varphi_{BA} = \int_l d\theta = \int_l \frac{M(\xi)}{EJ} d\xi$$

$$\eta_B = \eta_{BA} = \int_l d\theta \xi = \int_l \frac{M(\xi)}{EJ} \xi \cdot d\xi$$

Di fatto, il momento flettente ha diverse leggi di variazione nelle due metà della trave: l'intervallo d'integrazione va pure spezzato. Si ottiene facilmente (vedi l'esercizio 64):

$$M(\xi) = q \frac{\xi^2}{2} \quad (0 \leq \xi \leq \frac{l}{2})$$

$$M(\xi) = \frac{ql}{2} \left(\xi - \frac{l}{4} \right) \quad (\frac{l}{2} \leq \xi \leq l)$$

Per quanto riguarda i segni, interessa riconoscere direttamente l'effetto deformante. Sono ovunque tese le fibre superiori, e per ogni tronco la rotazione $d\theta$ è positiva. Pure positivo è lo spostamento elementare $d\eta_{BA}$. Per ottenere risultati corretti si dovrà introdurre $M(\xi)$, nelle equazioni risolventi, col segno positivo.

Infine:

$$\varphi_B = \int_0^{l/2} \frac{q}{EJ} \frac{\xi^2}{2} d\xi + \int_{l/2}^l \frac{ql}{2EJ} \left(\xi - \frac{l}{4} \right) d\xi =$$

$$= \frac{ql^3}{48EJ} + \frac{ql^3}{8EJ} = \frac{7}{48} \frac{ql^3}{EJ}$$

$$\eta_B = \int_0^{l/2} \frac{q}{EJ} \frac{\xi^3}{2} d\xi + \int_{l/2}^l \frac{ql}{2EJ} \left(\xi - \frac{l}{4} \right) \xi \cdot d\xi =$$

$$= \frac{1}{128} \cdot \frac{ql^4}{EJ} + \frac{38}{384} \cdot \frac{ql^4}{EJ} = \frac{41}{384} \cdot \frac{ql^4}{EJ}$$

SECONDA SOLUZIONE: COMPOSIZIONE DI TERMINI FINITI. - Sfruttando la conoscenza dei coefficienti elastici della mensola, si può spezzare la trave nelle due metà, considerando volta a volta l'una rigida e l'altra deformabile.

a) **Tratto BC deformabile.** - La prima metà della trave è supposta rigida: la sezione C risulta immobile. La metà destra funziona come mensola incastrata in C.

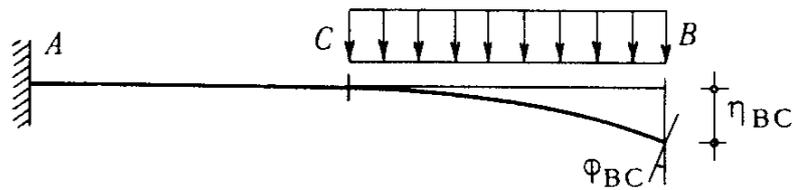


Fig. 68.3

Rispetto a quest'ultima, i movimenti della sezione all'estremo libero risultano:

$$\varphi'_B = \varphi_{BC} = \frac{q}{6 EJ} \left(\frac{l}{2} \right)^3 = \frac{ql^3}{48 EJ}$$

$$\eta'_B = \eta_{BC} = \frac{q}{8 EJ} \left(\frac{l}{2} \right)^4 = \frac{ql^4}{128 EJ}$$

b) **Tratto AC deformabile.** - Funziona come mensola incastrata in A e caricata, in C, dalle azioni interne T_0 e M_0 trasmesse dalla metà destra.

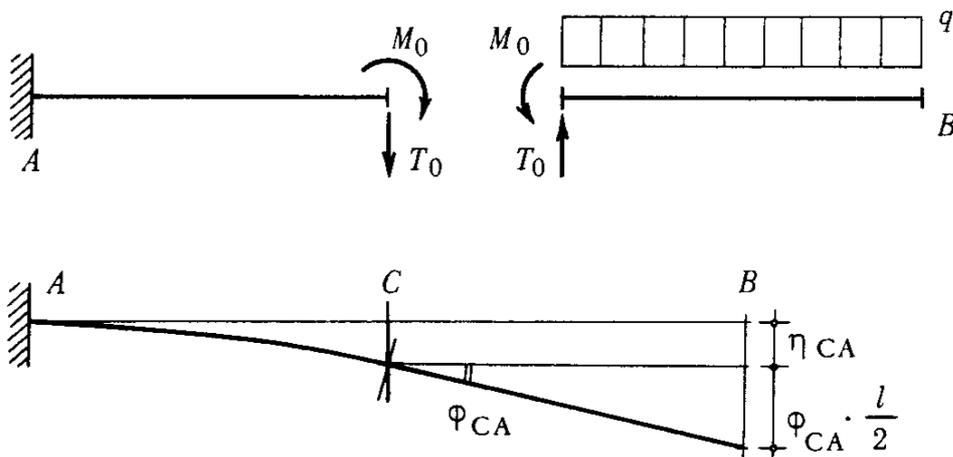


Fig. 68.4

Si ha subito:

$$T_0 = q \frac{l}{2} \quad M_0 = q \frac{l^2}{8}$$

$$\varphi_{CA} = \frac{T_0}{2 EJ} \left(\frac{l}{2} \right)^2 + \frac{M_0 \cdot l}{EJ \cdot 2} = \frac{ql^3}{8 EJ}$$

$$\eta_{CA} = \frac{T_0}{3 EJ} \left(\frac{l}{2} \right)^3 + \frac{M_0}{2 EJ} \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{7}{192} \cdot \frac{ql^3}{EJ}$$

Il braccio rigido CB trasmette i moti di C alla B , e si ha:

$$\varphi_B'' = \varphi_{CA} = \frac{ql^3}{8 EJ}$$

$$\eta_B'' = \eta_{CA} + \varphi_{CA} \cdot \frac{l}{2} = \frac{38}{384} \cdot \frac{ql^4}{EJ}$$

c) **Effetti totali**

$$\varphi_B = \varphi_B' + \varphi_B'' = \frac{7}{48} \cdot \frac{ql^3}{EJ}$$

$$\eta_B = \eta_B' + \eta_B'' = \frac{41}{384} \cdot \frac{ql^4}{EJ}.$$

II) TRAVE A DUE APPOGGI.

PRIMA SOLUZIONE. - Riferiamo tutti i movimenti a quelli della sezione d'imposta A .

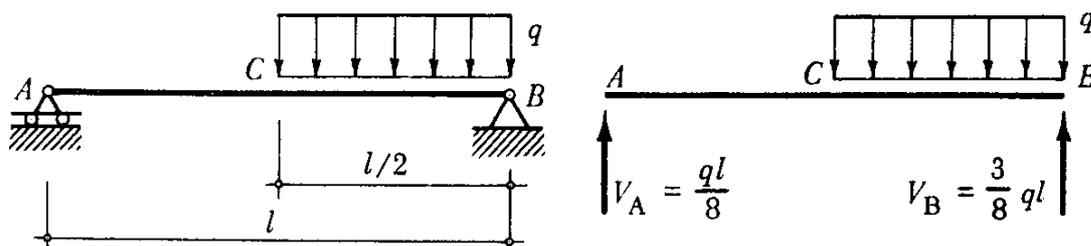


Fig. 68.5

Le condizioni imposte dai vincoli sono:

$$\eta_A = \eta_B = 0$$

e perciò:

$$0 = \varphi_A \cdot l + \eta_{BA}$$

$$\varphi_A = -\frac{1}{l} \eta_{BA}$$

$$\varphi_B = \varphi_A + \varphi_{BA} = \varphi_{BA} - \frac{1}{l} \eta_{BA}$$

Anche qui tutti i movimenti sono esprimibili in funzione dei soli effetti di deformabilità. Questi ultimi sono gli stessi della trave pensata incastrata in A e caricata dalla distribuzione q e dalla reazione V_B .

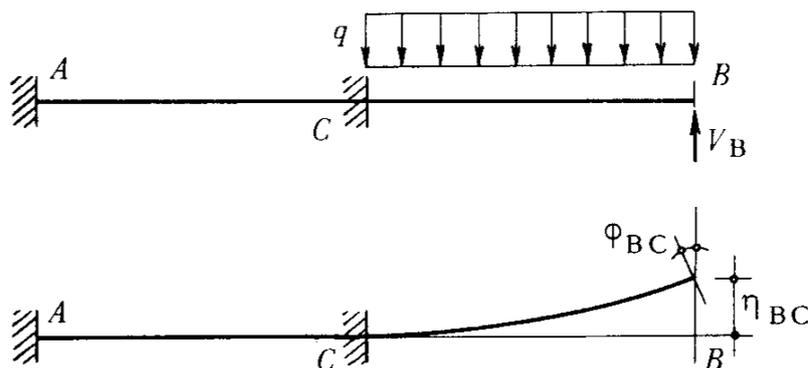


Fig. 68.6

In una prima fase teniamo conto della deformabilità di CB (fig. 68.6):

$$\eta'_{BA} = \eta_{BC} = -\frac{V_B}{3EJ} \left(\frac{l}{2}\right)^3 + \frac{q}{8EJ} \left(\frac{l}{2}\right)^4 = -\frac{3}{384} \cdot \frac{ql^4}{EJ}$$

$$\varphi'_{BA} = \varphi_{BC} = -\frac{V_B}{2EJ} \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{q}{6EJ} \left(\frac{l}{2}\right)^3 = -\frac{10}{384} \cdot \frac{ql^3}{EJ}$$

Per il tratto AC , sollecitato dalle azioni interne T_0 e M_0 trasmesse dalla parte destra, si ha (fig. 68.7):

$$T_0 = q \frac{l}{2} - \frac{3}{8} ql = \frac{ql}{8}$$

$$M_0 = -\frac{q}{2} \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{3}{8} ql \frac{l}{2} = \frac{ql^2}{16}$$

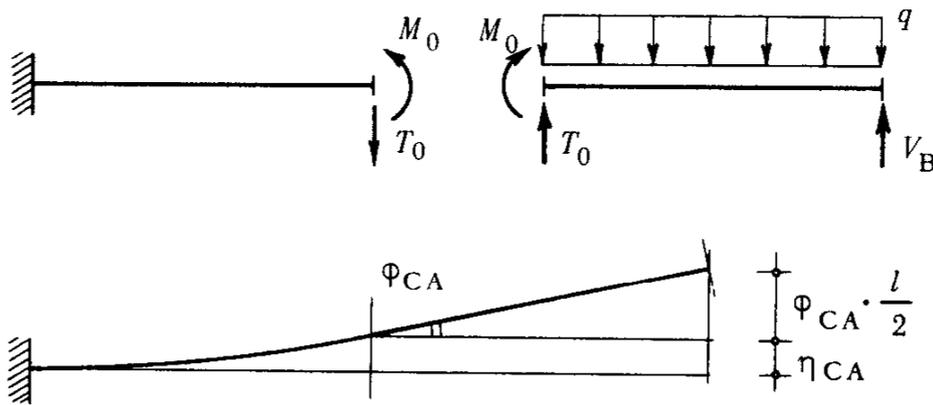


Fig. 68.7

$$\eta_{CA} = \frac{T_0}{3 EJ} \left(\frac{l}{2}\right)^3 - \frac{M_0}{2 EJ} \left(\frac{l}{2}\right)^2 = -\frac{1}{384} \cdot \frac{ql^4}{EJ}$$

$$\phi_{CA} = \frac{T_0}{2 EJ} \left(\frac{l}{2}\right)^2 - \frac{M_0}{EJ} \cdot \frac{l}{2} = -\frac{6}{384} \cdot \frac{ql^3}{EJ}$$

I movimenti di C trascinano rigidamente il tratto CB:

$$\eta_{BA}^* = \eta_{CA} + \phi_{CA} \frac{l}{2}$$

$$\phi_{BA}^* = \phi_{CA}$$

In definitiva:

$$\eta_{BA} = \eta_{BC} + \eta_{CA} + \phi_{CA} \frac{l}{2} = -\frac{7}{384} \cdot \frac{ql^4}{EJ}$$

$$\phi_{BA} = \phi_{BC} + \phi_{CA} = -\frac{16}{384} \cdot \frac{ql^3}{EJ}$$

e perciò:

$$\varphi_A = -\frac{1}{l} \eta_{BA} = +\frac{7}{384} \cdot \frac{ql^3}{EJ}$$

$$\varphi_B = \varphi_A + \varphi_{BA} = -\frac{9}{384} \cdot \frac{ql^3}{EJ}$$

I movimenti della sezione di mezzaria sono:

$$\varphi_C = \varphi_A + \varphi_{CA} = +\frac{1}{384} \cdot \frac{ql^3}{EJ}$$

$$\eta_C = \varphi_A \frac{l}{2} + \eta_{CA} = +\frac{5}{768} \cdot \frac{ql^4}{EJ}$$

OSSERVAZIONE. - Come appare anche dalla fig. 68.8, il procedimento usato equivale a svincolare in B , mettendo in evidenza la reazione V_B , bloccare provvisoriamente la sezione A e far deformare la trave come una mensola ivi incastrata. In un secondo tempo, si ripristina il rispetto dei vincoli imprimendo alla trave una rotazione, attorno ad A , capace di annullare lo spostamento che, nella prima fase, si era prodotto in corrispondenza dell'appoggio B .

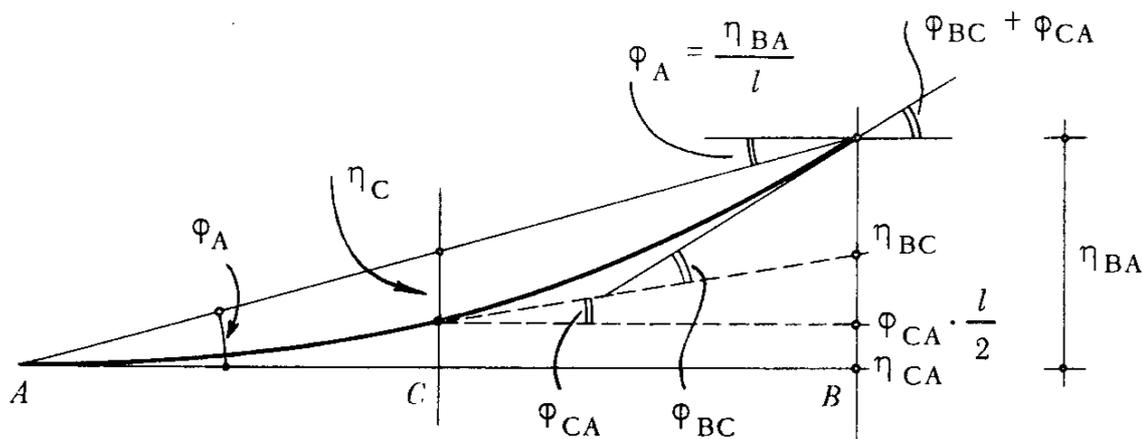


Fig. 68.8

SECONDA SOLUZIONE. - Si possono abbreviare i calcoli dei contributi di deformazione riferendo tutti i movimenti a quelli della sezione C .

Si ottiene:

$$\eta_A = \eta_C - \varphi_C \frac{l}{2} + \eta_{AC}$$

$$\eta_B = \eta_C + \varphi_C \frac{l}{2} + \eta_{BC}$$

$$\varphi_A = \varphi_C + \varphi_{AC}$$

$$\varphi_B = \varphi_C + \varphi_{BC}$$

Le condizioni di vincolo

$$\eta_A = \eta_B = 0$$

permettono di scrivere:

$$\eta_C = - \frac{\eta_{AC} + \eta_{BC}}{2}$$

$$\varphi_C = - \frac{2}{l} (\eta_{BC} + \eta_C) = \frac{2}{l} (\eta_{AC} + \eta_C) = \frac{\eta_{AC} - \eta_{BC}}{l}$$

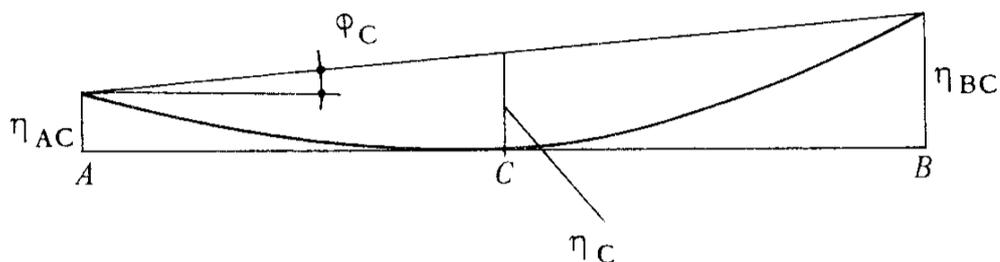


Fig. 68.9

Il lettore può completare la soluzione, ritrovando gli stessi risultati sopra ottenuti. Questo procedimento è conveniente se vi sono carichi ripartiti discontinui, oppure concentrati (vedi anche l'esercizio 69).

TERZA SOLUZIONE. - Si può approfittare della simmetria di struttura per decomporre la situazione di carico assegnata in due, di cui una simmetrica e l'altra emisimmetrica. A rigore, la simmetria è turbata dalla differente natura dei due vincoli d'estremità: se però la trave è solo inflessa, entrambi reagiscono verticalmente, ed esiste ancora simmetria statica.

a) Situazione simmetrica.

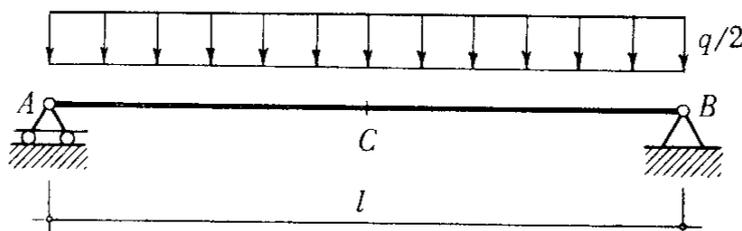


Fig. 68.10

$$\varphi_A = -\varphi_B = \frac{q}{2} \frac{l^3}{24 EJ} = \frac{8}{384} \frac{ql^3}{EJ}$$

$$\varphi_C = 0$$

$$\eta_C = \frac{5}{384} \frac{q}{2} \frac{l^4}{EJ} = \frac{5}{768} \frac{ql^4}{EJ}$$

b) Situazione emisimmetrica. - Per ragioni di emisimmetria, la sezione C non si sposta ed è priva di momento flettente. Le due mezze travi si deformano come se fossero indipendenti.

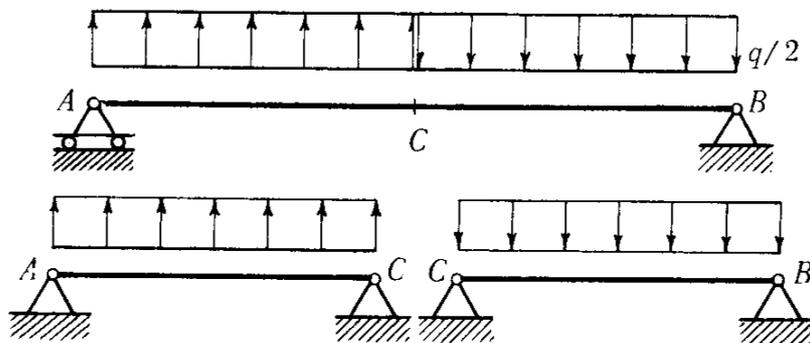


Fig. 68.11

$$\varphi_A = \varphi_B = -\varphi_C = -\frac{\frac{q}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^3}{24 EJ} = -\frac{1}{384} \frac{ql^3}{EJ}$$

$$\eta_C = 0.$$

c) **Effetti totali.**

$$\varphi_A = +\frac{7}{384} \frac{ql^3}{EJ} = 0,0182 \frac{ql^3}{EJ}$$

$$\varphi_B = -\frac{9}{384} \frac{ql^3}{EJ} = -0,0234 \frac{ql^3}{EJ}$$

$$\varphi_C = +\frac{1}{384} \frac{ql^3}{EJ} = +0,0026 \frac{ql^3}{EJ}$$

$$\eta_C = +\frac{5}{768} \frac{ql^4}{EJ} = +0,0130 \frac{ql^4}{EJ}.$$

CASO NUMERICO. - Poniamo:

$$l = 5 \text{ m}; \quad q = 3 \text{ t/m}; \quad K = 1600 \text{ kg/cm}^2.$$

a) **Proporzionamento.** - Posta l'origine delle ascisse x in B si ha:

$$M(x) = \frac{3}{8} qlx - \frac{qx^2}{2}$$

$$T(x) = \frac{3}{8} ql - qx.$$

Il taglio si annulla per

$$\bar{x} = \frac{3}{8} l.$$

Ivi è massimo il momento flettente: