Capitolo I

LE REAZIONI VINCOLARI

Nelle travature staticamente determinate, il calcolo delle reazioni vincolari e quello delle azioni interne sono intimamente legati, in quanto derivano dalla scrittura delle equazioni fondamentali della statica dei corpi rigidi. Tuttavia, in questo capitolo sono raggruppati alcuni semplici esercizi, in cui si esegue la ricerca delle sole reazioni.

Ciò col duplice scopo di prendere confidenza con i ragionamenti di carattere statico, ed insieme di applicare i procedimenti più importanti della statica grafica.

Ricordiamo che i metodi di risoluzione, basati esclusivamente sulla statica dei corpi rigidi, sono applicabili, in linea generale, solamente alle strutture isostatiche.

Le reazioni vincolari mantengono in quiete la struttura caricata e privata dei vincoli.

L'equilibrio del sistema formato dai carichi e dalle reazioni permette di scrivere le equazioni risolutive.

Le reazioni vincolari sono del tutto indipendenti dalla particolare forma della struttura. In quanto calcolate attraverso le condizioni dell'equilibrio rigido, esse sono legate soltanto alla natura dei vincoli ed alla posizione reciproca di questi e delle forze esterne.

È essenziale, invece, che la struttura possa considerarsi indeformabile: solo così, sotto l'azione delle forze che la sollecitano, restano invariate le rette d'azione delle forze stesse.

I procedimenti della statica saranno applicabili anche alle strutture deformabili, purché i cambiamenti di forma non ne alterino in modo sensibile le dimensioni geometriche.

* * *

1. - Determinare le reazioni vincolari di una trave appoggiata, caricata da una forza concentrata.

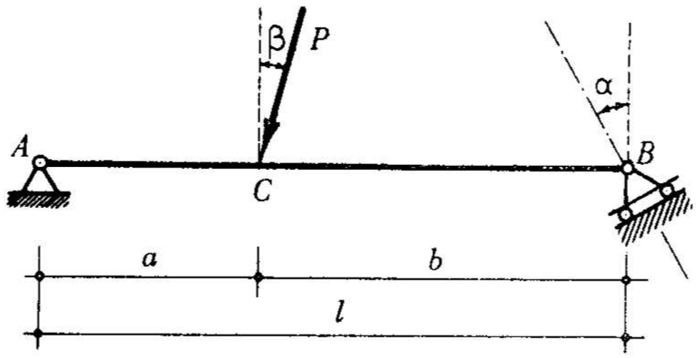

Fig. 1.1

Le dimensioni geometriche della struttura siano quelle indicate nella fig. 1.1.

È necessario, innanzi tutto, stabilire se la struttura è isostatica. La cerniera posta in A è vincolo doppio, in quanto concede la sola libertà di rotazione. L'appoggio in B è vincolo semplice, togliendo solo la libertà di traslazione normalmente alla sua linea di scorrimento.

Il complesso dei vincoli toglie quindi alla trave i suoi tre gradi di libertà, fissandola isostaticamente nel piano. Questo fatto ci assicura che i parametri di reazione incogniti possono calcolarsi ricorrendo solo alle equazioni cardinali della statica dei corpi rigidi.

La risoluzione può essere perseguita indifferentemente per via analitica o grafica.

PRIMA SOLUZIONE ANALITICA.

Il modo più naturale di impostare il problema è di svincolare completamente la trave, mettendone in evidenza le componenti, secondo un arbitrario riferimento, delle reazioni. Noi sceglieremo come direzioni di decomposizione, per evidenti ragioni di comodità, l'asse della trave e la sua normale.

La reazione R_A di A si scinde allora nelle componenti verticale V_A e orizzontale H_A; la R_B, in V_B e H_B. Converrà decomporre anche il carico nelle P_H e P_V, rispettivamente orizzontale e verticale (fig. 1.2).

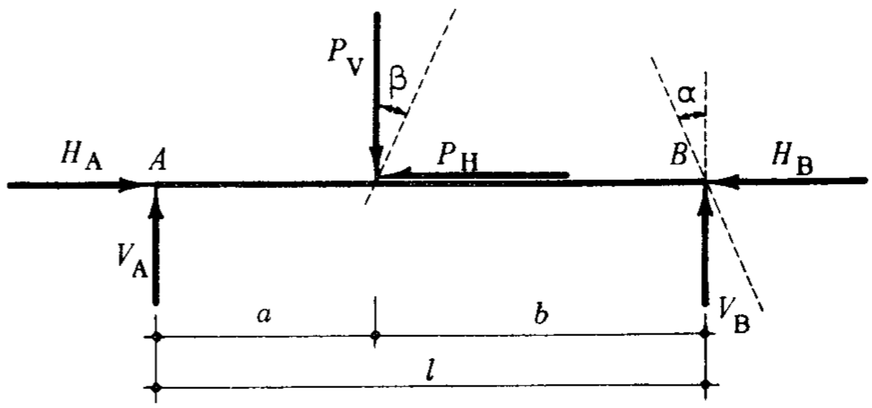

Fig. 1.2

Risulta subito:

$$P_H = P \operatorname{sen}\beta.$$

$$P_V = P \cos\beta.$$

Inoltre, le componenti della reazione R_B sono legate dalla relazione:

$$H_B = V_B \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

Essa deriva dal fatto che la loro risultante R_B è inclinata di α rispetto alla verticale.

I versi delle reazioni sono stati prefissati in modo completamente arbitrario, per poter materialmente scrivere le equazioni di equilibrio.

Equilibrio alla traslazione orizzontale

$$H_A - H_B - P_H = 0.$$

Equilibrio alla traslazione verticale

$$V_A + V_B - P_V = 0.$$

Equilibrio alla rotazione intorno a B

$$V_A \cdot l - P_V \cdot b = 0.$$

La scelta del polo è stata fatta in maniera da ridurre al minimo il numero dei termini: poteva però essere del tutto arbitraria.

La risoluzione fornisce:

$$V_A = P_V \frac{b}{l} = P \cos\beta \frac{b}{l}$$

$$V_B = P_V \frac{a}{l} = P \cos\beta \frac{a}{l}$$

$$H_B = V_B \operatorname{tg}\alpha = P \cos\beta \operatorname{tg}\alpha \frac{a}{l}$$

$$H_A = P_H + H_B = P\left(\operatorname{sen}\beta + \cos\beta \cdot \operatorname{tg}\alpha \frac{a}{l}\right).$$

Tutti i valori trovati hanno segno positivo. Ciò indica che i versi effettivi delle reazioni coincidono con quelli arbitrariamente prefissati.

SECONDA SOLUZIONE ANALITICA.

Permette di prevedere a priori il verso delle singole reazioni. Basta, allo scopo, svincolare parzialmente, mettendo in evidenza ciascuna volta un solo parametro di reazione. Dal punto di vista algebrico, ciò equivale a separare le incognite nel sistema risolvente, facilitandone la determinazione.

Calcolo di R_B. - Per ottenere direttamente la R_B, basta esplicitarla togliendo il carrello, e lasciar vincolato l'estremo A. Detta reazione risulta l'unica incognita; il suo verso è quello indicato nella fig. 1.3, perché solo così essa può compensare il momento di P rispetto alla cerniera A.

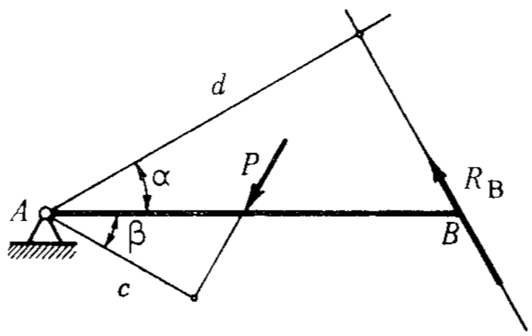

Fig. 1.3

Il suo modulo si ottiene equilibrando a rotazione intorno ad A

$$P \cdot c - R_B \cdot d = 0$$

$$R_B = P\frac{c}{d} = P\frac{a}{l}\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} .$$

Le sue componenti risultano:

$$H_B = R_B \cdot \operatorname{sen}\alpha = P\cos\beta \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{a}{l}$$

$$V_B = R_B \cdot \cos\alpha = P\cos\beta \cdot \frac{a}{l}$$

in perfetta armonia con i risultati precedentemente ottenuti.

Calcolo di V_A. - Può eseguirsi in maniera perfettamente analoga, svincolando in A ed equilibrando alla rotazione intorno alla cerniera B.

Calcolo di H_A. - È sufficiente svincolare parzialmente in A, sostituendo alla cerniera un appoggio con linea di scorrimento orizzontale. Si mette, in tal modo, in evidenza la sola H_A.

La struttura diviene una volta labile, e può compiere un atto di moto intorno al suo centro istantaneo di rotazione C. Questo coincide con l'intersezione delle normali, per A e B, alle linee di scorrimento dei due carrelli. La quiete della trave sussiste solo se la H_A equilibra, con il suo momento, quello della forza P attorno a C.

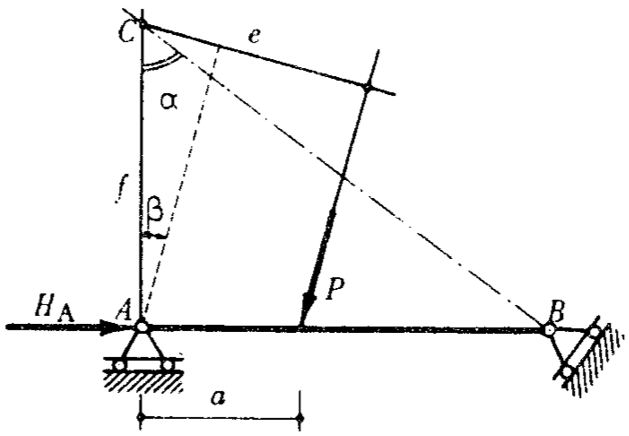

Fig. 1.4

Si ottiene:

$$P \cdot e - H_A \cdot f = 0.$$

Si ha però

$$f = \frac{l}{\operatorname{tg}\alpha}$$

$$e = a\cos\beta + f\operatorname{sen}\beta = a\cos\beta + l\,\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}$$

e perciò:

$$H_A = P\,\frac{e}{f} = P\left(\frac{a}{l}\cos\beta\,\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{sen}\beta\right).$$

PRIMA SOLUZIONE GRAFICA.

La trave è caricata da tre forze: la P e le reazioni. Per farsi equilibrio, esse devono necessariamente concorrere in un unico punto. Questo è subito determinato come intersezione delle rette, già note, di P e R_B. Per tale punto K, oltre che per A, passerà anche la reazione della cerniera.

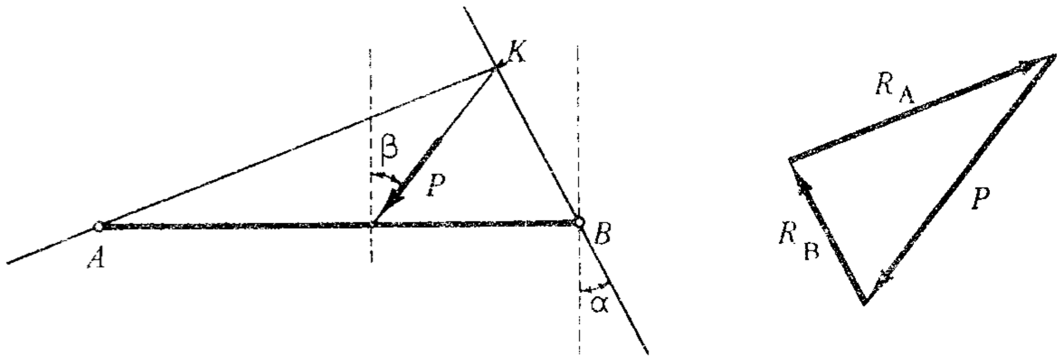

Fig. 1.5

Note le rette d'azione, e quindi le direzioni, delle reazioni, basta un triangolo di equilibrio per determinarne versi ed intensità. Ricordiamo che i versi si ottengono percorrendo il triangolo di equilibrio nel senso definito dalla forza P.

SECONDA SOLUZIONE GRAFICA.

Si può ottenere una seconda soluzione grafica mediante la costruzione di un opportuno poligono funicolare.

Basta proiettare, da un polo arbitrario Z, gli estremi del vettore rappresentativo del carico P. Si tracciano due lati del poligono funicolare, paralleli alle proiettanti, che si intersecano sulla retta di P.

Il primo lato contiene la cerniera A; il secondo interseca in L la retta di R_B. AL risulta il lato di chiusa, a cui è parallela la proiettante

Z 2. Il punto 2 si ottiene mandando da 1 la parallela alla R_B.

Le forze P, R_B, R_A si fanno equilibrio perché, in base alla costruzione, definiscono una poligonale chiusa, alla quale corrisponde il poligono funicolare di vertici A, M, L, pure chiuso.

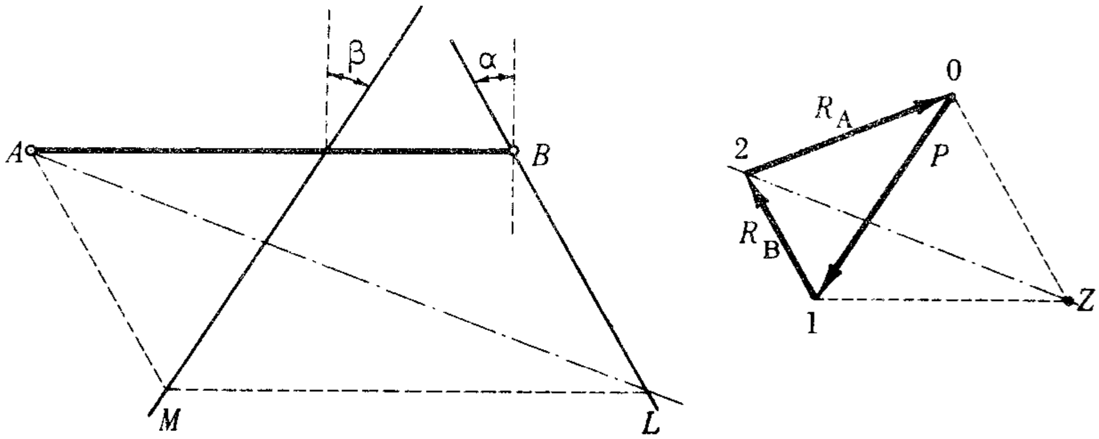

Fig. 1.6

* * *

2. - Calcolare le reazioni vincolari di un portale appoggiato, soggetto ad un carico ripartito, sul traverso, con legge lineare variabile da q_1 a q_2.

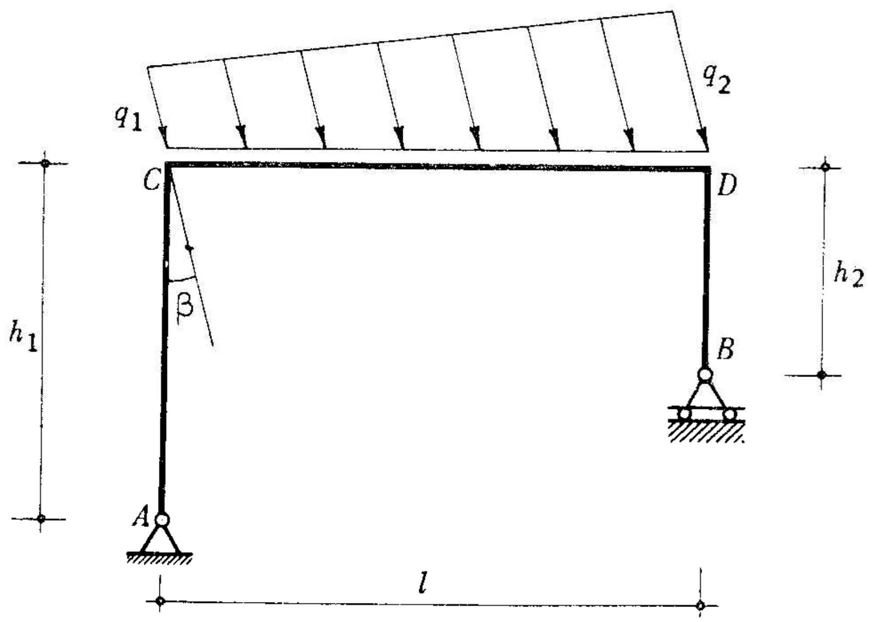

Fig. 2.1

La struttura è palesemente isostatica; si deve allora porre il problema del calcolo delle reazioni mediante le sole equazioni della statica dei corpi rigidi.

Allo scopo, è lecito sostituire, al carico esterno, la relativa risultante. La sua equivalenza al sistema di forze assegnato ci assicura che la sua introduzione non altera l'equilibrio complessivo.

PRIMA SOLUZIONE ANALITICA.

Per ragioni di comodità, scegliamo, come direzioni di decomposizione delle reazioni, la verticale e l'orizzontale. Calcoliamo poi la risultante dei carichi esterni, e le sue componenti secondo dette direzioni.

Le infinite forze elementari in cui si può scomporre il carico distribuito sono tra loro parallele; la loro somma diviene, dunque, semplicemente scalare.

Se $q(x)$ è l'intensità specifica del carico nell'intorno della sezione retta corrente del traverso, la forza elementare che esso sviluppa vale, in modulo, $q(x) \cdot dx$ ed ha la direzione ed il verso di $q(x)$.

Tenendo conto della relazione esprimente la legge di variazione del carico:

$$q(x) = q_1 + (q_2 - q_1)\frac{x}{l}$$

il modulo della risultante assume il valore:

$$Q = \int_0^l q(x) \cdot dx = \frac{q_1 + q_2}{2}\, l.$$

Se si riportano le intensità q del carico in un diagramma con ordinate normali alla linea di riferimento, il modulo della risultante è uguale all'area di detto diagramma.

La retta d'azione della risultante può trovarsi, mediante il teorema di VARIGNON, eguagliandone il momento rispetto al punto C a quello del sistema $q(x)$.

È chiaro che la scelta del polo di riduzione dei momenti è motivata solo da ragioni di comodità. Inoltre, il risultato non dipende dalla direzione secondo cui si computano le distanze: la sceglieremo allora coincidente con l'orizzontale.

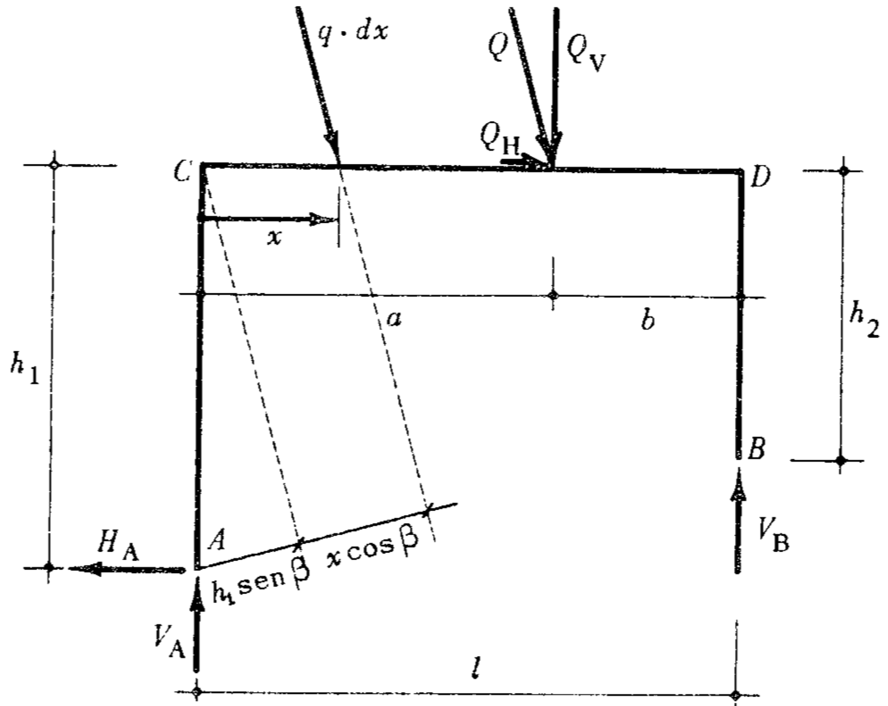

Fig. 2.2

Sia a l'ascissa del punto di applicazione, sul traverso, della risultante. Il suo momento vale:

$$M_C = Q \cdot a = \frac{q_1 + q_2}{2}\, l \cdot a.$$

Momento risultante del sistema:

$$M_C = \int_0^l q(x) \cdot dx \cdot x = \frac{q_1 + 2q_2}{6}\, l^2.$$

Uguagliando le due espressioni si ottiene:

$$a = \frac{q_1 + 2q_2}{q_1 + q_2} \frac{l}{3}.$$

Se β è l'inclinazione del carico, e quindi di Q, sulla verticale, le componenti della risultante sono:

$$Q_H = Q \operatorname{sen}\beta \qquad \text{orizzontale}$$

$$Q_V = Q \cos\beta \qquad \text{verticale}$$

Equilibrio alla traslazione orizzontale

$$H_A - Q_H = 0$$

$$H_A = Q_H = Q \operatorname{sen}\beta = \frac{q_1 + q_2}{2} \, l \operatorname{sen}\beta.$$

Equilibrio alla rotazione intorno ad A

$$V_B \cdot l - Q_V \cdot a - Q_H \cdot h_1 = 0$$

$$V_B = Q \frac{a \cos\beta + h_1 \operatorname{sen}\beta}{l} = \frac{q_1 + q_2}{2} (a \cos\beta + h_1 \operatorname{sen}\beta).$$

Equilibrio alla traslazione verticale

$$V_A + V_B - Q_V = 0$$

$$V_A = Q_V - V_B = \frac{q_1 + q_2}{2} (b \cos\beta - h_1 \operatorname{sen}\beta).$$

Le componenti H_A e V_B hanno sempre il verso indicato in fig. 2.2. La V_A, invece, ha il verso indicato solo se $b/h_1 > \operatorname{tg}\beta$.

SECONDA SOLUZIONE ANALITICA.

Il ricorso alla risultante dei carichi esterni può essere comodo, ma non indispensabile, per il calcolo delle reazioni vincolari.

Spesso può convenire operare a partire dall'effettiva distribuzione di carico.

Equilibrio alla traslazione orizzontale. - La forza orizzontale elementare, applicata all'elemento dx corrente del traverso, è:

$$q(x) \cdot dx \cdot \operatorname{sen}\beta.$$

Si può allora scrivere:

$$H_A - \int_0^l q(x) \operatorname{sen}\beta \cdot dx = 0$$

da cui:

$$H_A = \frac{q_1 + q_2}{2}\, l \operatorname{sen}\beta.$$

Equilibrio alla rotazione intorno ad A. - La cerniera A dista, dalla retta d'azione del carico elementare $q(x)\,dx$, del segmento:

$$h_1 \operatorname{sen}\beta + x\cos\beta.$$

Il momento della forza elementare, rispetto al polo A, risulta:

$$q(x)\,dx\,(h_1 \operatorname{sen}\beta + x\cos\beta) = \left[q_1 + \frac{q_2 - q_1}{l}\,x\right]\left[h_1 \operatorname{sen}\beta + x\cos\beta\right] dx.$$

Il momento risultante si ottiene sommando algebricamente tutti i contributi elementari; ciò equivale ad integrare l'espressione sopra scritta a tutta la lunghezza caricata (cioè, a tutto il traverso). Infine:

$$V_B \cdot l - \int_0^l \left[q_1 + \frac{q_2 - q_1}{l}\,x\right]\left[h_1 \operatorname{sen}\beta + x\cos\beta\right] dx = 0$$

da cui

$$V_B = \frac{q_1 + q_2}{2}\, h_1 \operatorname{sen}\beta + \frac{2q_2 + q_1}{6}\, l\cos\beta =$$

$$= \frac{q_1 + q_2}{2}\,(a\cos\beta + h_1 \operatorname{sen}\beta).$$

Equilibrio alla traslazione verticale. - La forza verticale elementare è $q\ dx\ \cos\beta$; allora:

$$V_A + V_B - \int_0^l q(x)\cos\beta\ dx = 0$$

$$V_A = \frac{2q_1 + q_2}{6}\, l\cos\beta - \frac{q_1 + q_2}{2}\, h_1 \operatorname{sen}\beta =$$

$$= \frac{q_1 + q_2}{2}\,(b\cos\beta - h_1 \operatorname{sen}\beta).$$

SOLUZIONE GRAFICA.

Si potrebbe ancora procedere come nell'esercizio 1, sostituendo al carico esterno la propria risultante e decomponendo quest'ultima in modo da rispettare le condizioni di vincolo.

La determinazione grafica della risultante rende però necessario l'impiego di un poligono funicolare: è allora più rapido valersene per la soluzione diretta del problema a partire dall'effettiva distribuzione delle forze applicate.

Decomposto il carico in un numero finito di forze concentrate, di modulo $q \cdot \Delta x$, è possibile tracciare la poligonale delle forze e proiettarne i vertici da un polo arbitrario Z.

Il poligono funicolare che ne segue, avente il primo lato che passa per la cerniera A, taglia la verticale per B, con il suo ultimo lato, in un punto K. La congiungente AK chiude il poligono funicolare che collega i carichi e le reazioni; la parallela alla AK, condotta per il polo Z, permette di chiudere la poligonale delle forze. Il vertice in cui concorrono le due reazioni è l'intersezione della suddetta parallela con la verticale (direzione di V_B) tracciata per l'ultimo estremo della poligonale delle forze.

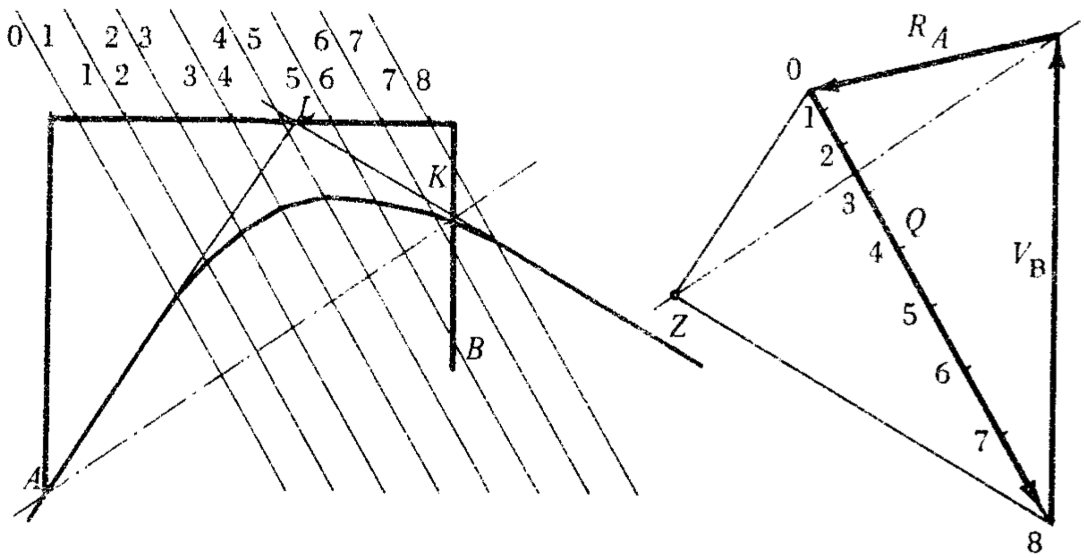

Fig. 2.3

È del pari evidente che l'intersezione L dei lati estremi del poligono che connette i carichi è un punto della risultante Q.

Se si risolve il problema supponendo che essa sia nota, usando lo stesso polo Z, il poligono funicolare risolvente è la bilatera formata da AL e LK. Le reazioni sono allora le medesime, come c'era da attendersi per ragioni di equivalenza tra la Q ed il carico ripartito.

* * *

3. - Calcolare le reazioni vincolari di un arco semicircolare, soggetto a carico radiale uniforme.

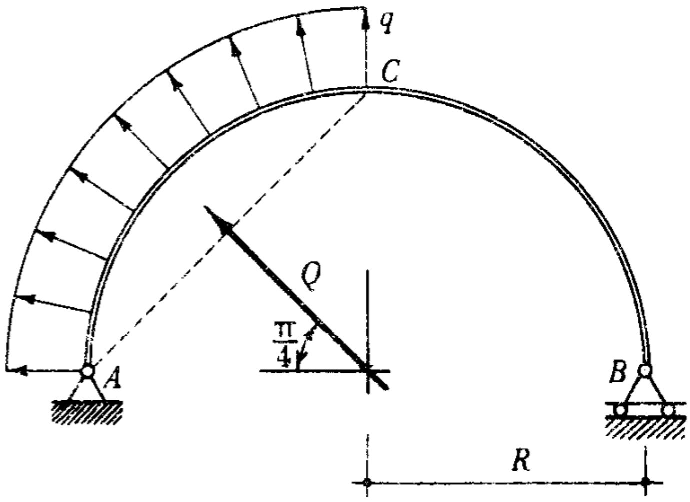

Fig. 3.1

Conviene risolvere il problema mediante l'uso della risultante dei carichi applicati: la sua determinazione risulta, in questo caso, molto agevole.

DETERMINAZIONE DELLA RISULTANTE. - Tutti i carichi passano per il centro della circonferenza: esso apparterrà, quindi, anche alla retta d'azione della risultante Q. Inoltre, semplici considerazioni di simmetria fanno riconoscere che la Q è diretta secondo l'asse della corda AC.

Introduciamo il riferimento polare della fig. 3.2, e prendiamo in esame due elementi di arco, lunghi $ds = R\,d\omega$, posti simmetricamente rispetto alla retta d'azione di Q. La forza applicata a ciascuno di essi è radiale, quindi ugualmente inclinata rispetto a Q, ed ha il modulo:

$$q\,ds = q\;R\,d\omega.$$

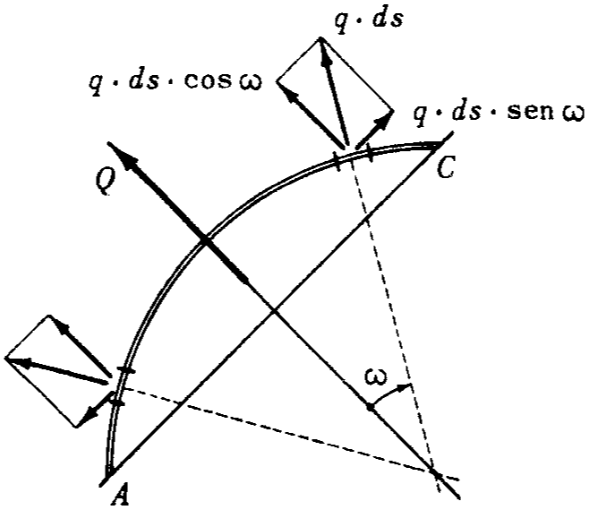

Fig. 3.2

Le componenti parallele ad AC delle suddette forze elementari sono uguali ed opposte, e si fanno equilibrio. Ne segue che la risultante Q equivale alla distribuzione delle componenti, parallele alla sua retta di azione, delle forze elementari.

La componente generica ha modulo:

$$q \cdot ds \cdot \cos \omega = qR \cdot \cos \omega \, d\omega;$$

la risultante Q si ottiene ora per composizione scalare del sistema di forze parallele sopraddette.

$$Q = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} qR \cos \omega \, d\omega = qR\sqrt{2}.$$

OSSERVAZIONE. - Il risultato ottenuto è indipendente dalla forma dell'arco, purché il carico sia ad esso localmente normale ed abbia modulo costante. Infatti, la forza che è applicata all'elemento di arco può sempre decomporsi in due componenti, rispettivamente parallela e normale alla corda. Quella parallela ha modulo:

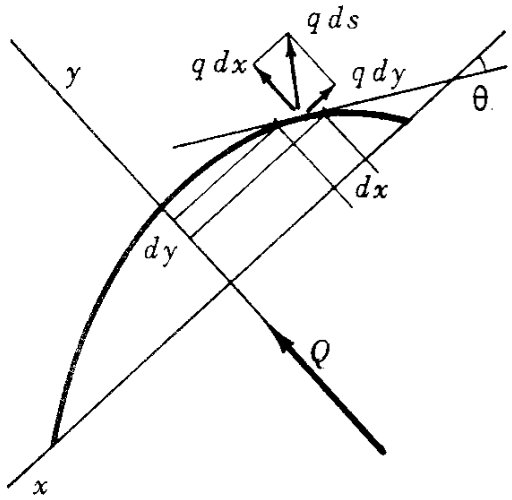

Fig. 3.3

$$q \cdot ds \cdot \operatorname{sen}\theta = q\,dy$$

e quella normale:

$$q \cdot ds \cdot \cos\theta = q\,dx.$$

La distribuzione di forze $q\,dy$ è autoequilibrata, pertanto la risultante Q equivale all'insieme delle $q\,dx$. Queste ultime costituiscono un carico uniformemente distribuito sulla corda; la loro risultante ha modulo uguale al prodotto del carico specifico per la lunghezza della corda stessa, e per retta d'azione il suo asse.

CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI. - La risultante Q ha componenti:

- verticale: $$Q_V = Q \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = q \cdot R$$

- orizzontale: $$Q_O = Q \cos\frac{\pi}{4} = q \cdot R.$$

Ciascuna di esse equivale al prodotto del carico specifico q per la lunghezza della proiezione del tratto caricato in direzione normale alla componente.

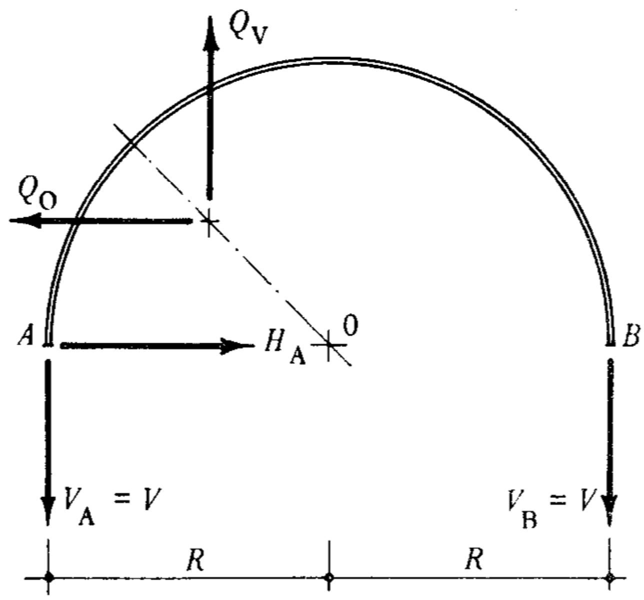

Fig. 3.4

Equilibrio alla traslazione orizzontale.

$$H_A - Q_O = 0$$
$$H_A = q'R.$$

Equilibrio alla rotazione intorno al centro O. - La risultante Q e la spinta H_A non dànno momento. Allora:

$$V_A \cdot R - V_B \cdot R = 0$$
$$V_A = V_B = V.$$

Equilibrio alla traslazione verticale.

$$2V - Q_V = 0$$
$$V = q\frac{R}{2}.$$

Il lettore può ritrovare gli stessi risultati per via grafica, operando come nell'esercizio 1.

* * *

4. - Calcolare le reazioni vincolari di un arco ad asse circolare, sottoposto a carico idrostatico. Determinare, inoltre, la risultante di quest'ultimo.

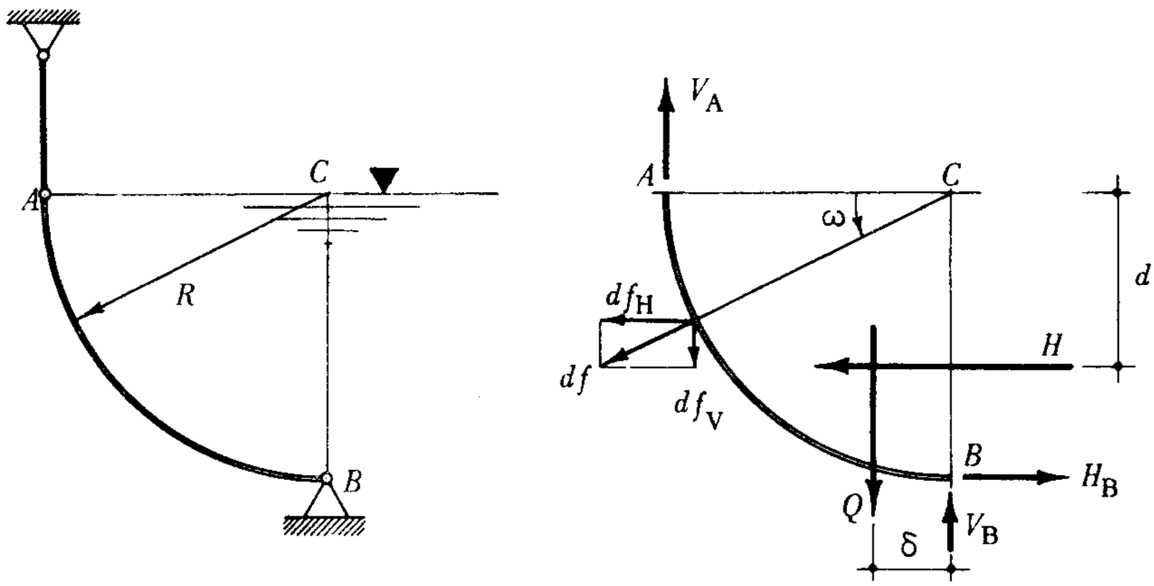

Fig. 4.1

Sia assegnata una struttura di lunghezza indefinita in direzione normale al piano del foglio, ed avente su questo sezione circolare. Stante la simmetria longitudinale della struttura e del carico, costituito dall'azione di un liquido avente pelo libero alla quota del centro C, tutte le strisce di struttura, ottenute sezionandola con piani paralleli a quello del foglio, hanno uguale comportamento. Si può allora studiare una striscia, ed il relativo liquido, compresi tra due piani posti a distanza mutua unitaria. Ci si riduce, così, ad un arco ad asse circolare, vincolato in A con una biella ed in B con una cerniera.

Il liquido esercita una pressione p, normale al generico elemento di superficie, e di intensità proporzionale alla profondità h sotto il pelo libero.

Se γ è il peso specifico del liquido, usando il riferimento indicato in fig. 4.1, si ottiene:

$$p = \gamma h = \gamma R \operatorname{sen} \omega.$$

Se si sceglie l'elemento di superficie con profondità unitaria, il carico specifico che sollecita l'arco ha il modulo:

$$p \cdot 1 = \gamma R \operatorname{sen} \omega$$

e la direzione radiale.

SOLUZIONE ANALITICA.

Di regola, la scrittura delle equazioni di equilibrio si semplifica notevolmente se ai carichi esterni si sostituisce la relativa risultante. La convenienza di questo modo di procedere sussiste, però, solo se la determinazione di detta risultante riesce agevole. In questo problema essa va determinata per via vettoriale, oppure procedendo per componenti, in quanto i carichi non sono paralleli. Conviene allora operare direttamente a partire dalla distribuzione di carico assegnata.

Sia $df = p(\omega)\, ds$ la forza applicata al generico elemento di arco. Le sue componenti, rispettivamente orizzontale e verticale, valgono:

$$df_{\mathrm{H}} = df \cos\omega = \gamma R^2 \operatorname{sen}\omega \cos\omega \, d\omega$$

$$df_{\mathrm{V}} = df \operatorname{sen}\omega = \gamma R^2 \operatorname{sen}^2\omega \, d\omega$$

(si ricordi che $ds = R\, d\omega$).

Equilibrio alla traslazione orizzontale. - Deve risultare nulla la somma algebrica dei moduli di tutte le forze orizzontali. Il carico dà origine a una distribuzione continua di forze orizzontali df_{H}; la loro composizione è semplicemente scalare, e si ottiene mediante integrazione:

$$H_B - \int_0^{\frac{\pi}{2}R} p \cdot ds \cdot \cos\omega = 0$$

da cui

$$H_B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \gamma R^2 \operatorname{sen}\omega \cos\omega \, d\omega = \frac{1}{2}\gamma R^2 .$$

Equilibrio alla rotazione intorno al centro dell'arco. - Il carico idrostatico è radiale: il suo momento risultante rispetto al centro è nullo.

Si ottiene allora:

$$V_A \; R - H_B \; R = 0$$

$$V_A = H_B = \frac{1}{2}\gamma R^2$$

Equilibrio alla traslazione verticale. - La forza verticale elementare, dovuta al carico idrostatico, ha il modulo:

$$df \cdot sen\,\omega.$$

L'equazione di equilibrio è:

$$V_A + V_B - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \gamma R^2 \operatorname{sen}^2\omega \, d\omega = 0$$

$$V_B = \frac{1}{2}\gamma R^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

DETERMINAZIONE DELLA RISULTANTE DEL CARICO.

Si è già detto che questo problema si semplifica se della risultante si determinano le componenti orizzontale e verticale.

La prima si ottiene componendo le forze elementari df_H.

Il suo modulo risulta:

$$H = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \gamma R^2 \operatorname{sen} \omega \cos \omega \, d\omega = \frac{1}{2} \gamma R^2$$

La sua retta d'azione si determina uguagliando il suo momento $H \cdot d$, rispetto al centro C, a quello risultante delle df_H.

$$H \cdot d = \int_0^{\frac{\pi}{2}} df_H \cdot R \operatorname{sen} \omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \gamma R^3 \operatorname{sen}^2 \omega \cos \omega \, d\omega.$$

$$d = \frac{2}{3} R.$$

La componente verticale, invece, ha il modulo:

$$Q = \int_0^{\frac{\pi}{2}} df_V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \gamma R^2 \operatorname{sen}^2 \omega \, d\omega = \gamma \frac{\pi R^2}{4}$$

La sua retta d'azione dista dal centro di una quantità δ, calcolabile ancora mediante il teorema di VARIGNON.

$$Q \delta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} df_V \cdot R \cos \omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \gamma R^3 \operatorname{sen}^2 \omega \cos \omega \, d\omega$$

$$\delta = \frac{4R}{3\pi}.$$

OSSERVAZIONE. - Alle conclusioni tratte qui sopra si può giungere ancora più rapidamente, sfruttando alcuni noti risultati dell'idrostatica.

La componente H è la spinta che mutuamente si trasmettono le due masse di liquido poste ai lati del piano verticale che contiene il centro della circonferenza; è applicata al baricentro del diagramma (triangolare) delle pressioni su detto piano, perciò la sua distanza dal centro della circonferenza è $\frac{2}{3}R$.

La Q, invece, è il peso del liquido sovrastante l'arco, ed è applicata al suo baricentro, cioè alla distanza orizzontale $\frac{4R}{3\pi}$ dal centro.

SOLUZIONE GRAFICA.

La presenza di forze non parallele non complica in alcun modo la risoluzione grafica. L'uso del poligono funicolare è affatto generale, comunque siano dirette le forze da collegare.

Suddiviso l'arco in tronchi, si calcolano le forze $p\ \Delta s$ ad essi applicate, riportandole poi in poligonale. Si proiettano i vertici di questa da un polo arbitrario Z, e si traccia il poligono funicolare col primo lato che passa per B.

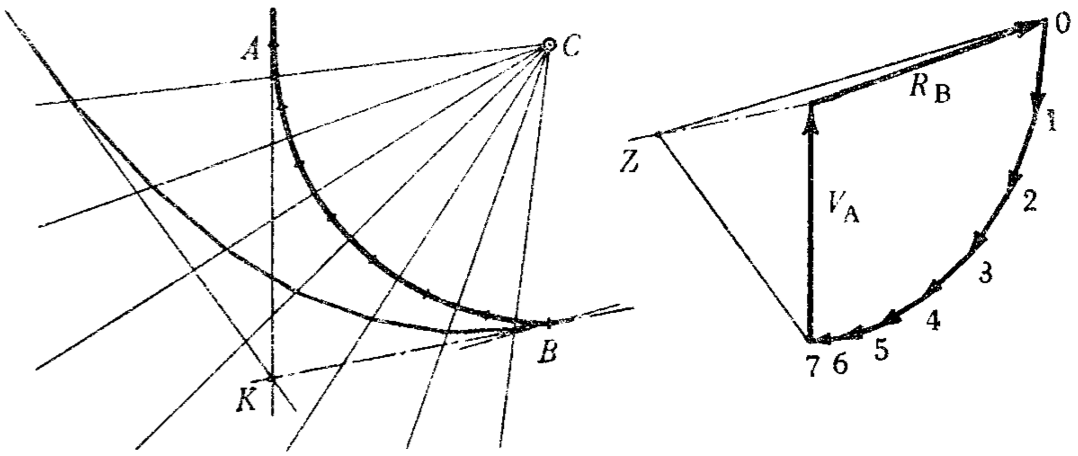

Fig. 4.2

L'intersezione K dell'ultimo lato con la retta di V_A determina, insieme a B, il lato di chiusa del poligono che collega i carichi e le reazioni. Queste ultime si ottengono poi chiudendo la poligonale delle forze, in maniera da rispettare le condizioni di vincolo (fig. 4.2).