CAPITOLO IV

STUDIO DELLE TRAVI CARICATE DI PUNTA E A DEFORMAZIONE NON TRASCURABILE

GENERALITÀ E RICHIAMI.

Il problema del carico di punta è già stato ripetutamente affrontato in esercizi dei Capp. I, II e III, allorché si è eseguito il calcolo di resistenza di aste snelle compresse. Queste sono state progettate mediante il metodo ω, procedimento di uso corrente, molto semplice, che consente di stabilire, in funzione del rapporto di snellezza $\lambda = \frac{l_0}{\rho_{min}}$, il valore del coefficiente maggiorativo ω da assegnare al carico P, realmente agente, o, inversamente, la riduzione da attribuire al carico di sicurezza k del materiale. Il metodo ω, a differenza di altri, offre il vantaggio di essere applicabile egualmente alle aste snelle e tozze, qualunque sia, cioè, il loro rapporto di snellezza, maggiore o minore del valore limite che pone i termini di validità del carico critico d'EULERO.

In questo capitolo sono illustrati alcuni problemi elementari per la determinazione del valore critico del carico in strutture molto semplici.

Il procedimento generale è noto. Si esplora un intorno della posizione iniziale indeformata della struttura per verificare se ammette altre configurazioni equilibrate. Si constata che ciò è possibile per un particolare valore del carico (carico critico = P_{cr}), ma la deformata che ne ri-

sulta è indeterminata e, conseguentemente, l'equilibrio della struttura è indifferente. Da ciò si deduce che l'equilibrio della struttura nella situazione iniziale è stabile per valori di $P < P_{cr}$, ed instabile per $P > P_{cr}$.

I successivi esempi chiariranno meglio questi concetti, per una più estesa trattazione dei quali si rimanda, naturalmente, ai testi specializzati.

* * *

82. - Determinare il valore del carico critico dell'asta rigida di fig. 82.1-*a*), vincolata in *A* con una cerniera elastica.

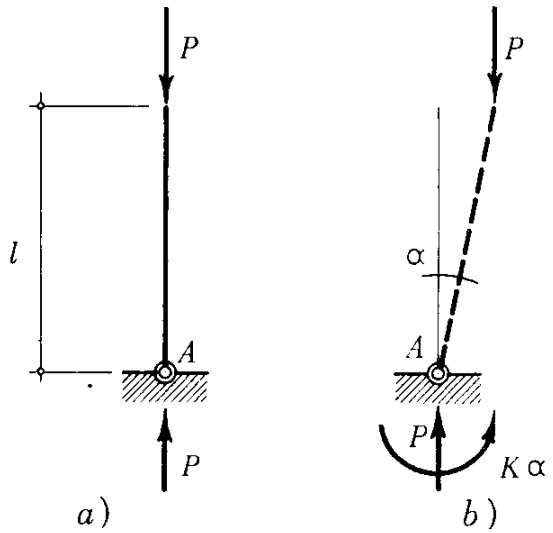


Fig. 82.1

L'asta indeformabile ha un solo grado di libertà; infatti la sua posizione nel piano è completamente definita da un solo parametro: la rotazione α che essa può compiere attorno alla cerniera *A*. Sia *K* la costante elastica di questa, il momento cioè con cui reagisce alla rotazione di valore unitario.

L'asta verticale è ovviamente equilibrata; esploriamone ora il comportamento nell'intorno immediato di questa posizione. Spostiamola cioè dalla configurazione originaria dell'angolo α molto piccolo, che non altera, a meno di infinitesimi, la posizione del carico esterno rispetto

all'asta stessa (fig. 82.1-*b*). La forza P, che rimane verticale per ipotesi, acquista rispetto alla cerniera il momento esterno

$$M_e = Pl \operatorname{tg} \alpha \cong Pl\alpha.$$

La cerniera reagisce con il momento interno

$$M_i = K\alpha.$$

L'equilibrio è possibile se è $M_e - M_i = 0$, ossia

$$(Pl - K)\alpha = 0.$$

Questa relazione oltre alla soluzione ovvia $\alpha = 0$, fornisce anche il particolare valore del carico $P = \dfrac{K}{l}$.

È questo il carico critico, P_{cr}, dell'asta. Se il carico che agisce sull'asta è P_{cr} questa si trova in condizione di equilibrio indifferente in un intorno infinitesimo, infatti l'equilibrio è soddisfatto qualunque sia il valore di α, purché piccolo, indipendentemente cioè dalla particolare posizione dell'asta rispetto alla verticale.

Se il carico esterno ha valore $P < P_{cr}$ l'asta è in condizioni di equilibrio stabile spostata dalla verticale, il momento interno, fornito dalla reazione della cerniera A, prevale sempre su quello esterno, instabilizzante, della forza, e l'asta tende comunque a ritornare alla propria configurazione iniziale.

Viceversa se è $P > P_{cr}$ l'asta è in condizioni d'equilibrio instabile e spontaneamente si allontana dalla posizione verticale.

Si può attribuire all'asta, con ottima approssimazione, la caratteristica limite di rigidezza perfetta, se la sua deformabilità è notevolmente inferiore a quella della cerniera elastica che la vincola. Naturalmente il P_{cr} che se ne deduce non dipende dalle caratteristiche della sezione, ma solo dalla lunghezza l e dalla costante K della cerniera.

* * *

83. - Determinare il valore critico del carico dell'asta rigida di fig. 83.1-*a*), vincolata superiormente con un carrello a piano di scorrimento verticale e alla base con una cerniera fissa. In un punto intermedio l'asta possiede la cerniera elastica C, di costante nota K.

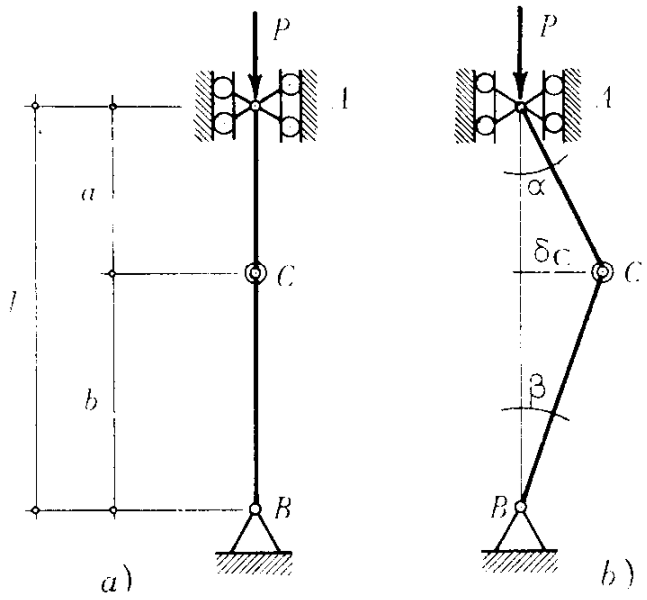


Fig. 83.1

Anche in questo caso il sistema ha un solo grado di libertà; la sua configurazione nel piano è infatti totalmente definita dal parametro η_A (abbassamento del carrello A) o, indifferentemente, da δ_C (spostamento orizzontale della cerniera C).

η_A e δ_C sono legati dalla relazione:

$$\eta_A = (a - a\cos\alpha) + (b - b\cos\beta) \cong \frac{\delta_C^2}{2} \cdot \frac{l}{ab} \qquad \text{(se } \alpha \text{ e } \beta \text{ sono infinitesimi).}$$

Al solito, spostiamo l'asta dalla posizione verticale, certamente equilibrata, per ricercare altre possibili configurazioni d'equilibrio (fig. 83.1-*b*). Facciamo ruotare le due aste AC e CB di angoli piccolissimi α e β, in modo che lo spostamento di C si possa considerare orizzontale. Gli angoli α e β sono legati allo spostamento δ_C della cerniera dalla relazione:

$$\delta_C = a\,\mathrm{tg}\,\alpha = b\,\mathrm{tg}\,\beta \cong a\alpha \cong b\beta.$$

Il momento esterno esercitato dalla forza P rispetto alla cerniera interna C è:

$$M_e = P \cdot \delta_C.$$

Il momento interno con cui reagisce la cerniera elastica è proporzionale alla rotazione relativa tra le aste a e b, e vale:

$$M_i = K(\alpha + \beta) = K\delta_C\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = K\delta_C \frac{l}{ab}.$$

L'equilibrio nella posizione spostata è possibile se $M_e - M_i = 0$ cioè:

$$\left(P - K\frac{l}{ab}\right)\delta_C = 0.$$

Anche in questo caso la relazione fornisce oltre alla soluzione ovvia $\delta_C = 0$, il valore critico del carico $P = K\frac{l}{ab}$, per il quale l'equilibrio dell'asta è indifferente.

Infatti P_{cr} è indipendente dal valore di δ_C, a patto che questo sia molto piccolo. Naturalmente per valori di $P < P_{cr}$ l'equilibrio dell'asta verticale è stabile; per valori $P > P_{cr}$ l'equilibrio diviene instabile, ed è possibile il cedimento laterale dell'asta stessa.

In particolare se $a = b = \frac{l}{2}$ è $P_{cr} = \frac{4K}{l}$ cioè quattro volte maggiore di quello dell'asta di un sol pezzo, avente la cerniera elastica alla base (esercizio 82).

* * *

84. - Determinare il valore critico del carico dell'asta rigida AB di fig. 84.1-*a*) vincolata all'estremità superiore con un carrello a piano di scorrimento verticale e a quella inferiore con una cerniera perfetta. L'a-

sta sia dotata nei punti intermedi C e D di due cerniere elastiche aventi costanti note K_1 e K_2.

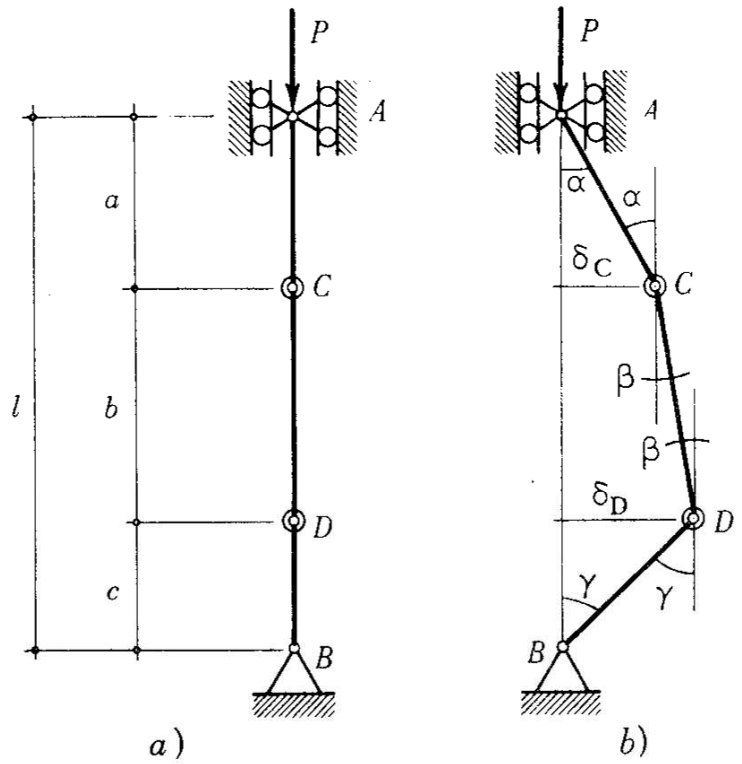


Fig. 84.1

In questo caso il sistema ha due gradi di libertà: infatti la posizione dell'asta nel piano è completamente definita dai due parametri δ_C e δ_D che esprimono lo spostamento orizzontale delle due cerniere interne.

Ricerchiamo se sono possibili per la struttura altre configurazioni di equilibrio, oltre alla verticale. Spostiamo pertanto dalla loro posizione iniziale le cerniere C e D delle quantità piccolissime δ_C e δ_D, cui conseguono per le aste le rotazioni, assolute, α, β e γ, due sole delle quali, naturalmente, sono indipendenti (fig. 84.1-*b*).

Risulta:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\delta_C}{a} \cong \alpha$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\delta_D - \delta_C}{b} \cong \beta$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\delta_D}{c} \cong \gamma$$

Le rotazioni relative compiute dalle aste valgono:

$$\text{aste } AC \text{ e } CD: \qquad \alpha + \beta = \frac{\delta_C}{a} - \frac{\delta_D - \delta_C}{b}$$

$$\text{aste } CD \text{ e } DB: \qquad \gamma + \beta = \frac{\delta_D - \delta_C}{b} + \frac{\delta_D}{c}.$$

In condizioni d'equilibrio il momento esterno della forza P rispetto ad entrambe le cerniere, deve essere eguagliato da quello interno con cui queste reagiscono:

$$\text{cerniera } C: \qquad M_e - M_i = P\delta_C - K_1\left(\frac{\delta_C}{a} - \frac{\delta_D - \delta_C}{b}\right) = 0$$

$$\text{cerniera } D: \qquad M_e - M_i = P\delta_D - K_2\left(\frac{\delta_D - \delta_C}{b} + \frac{\delta_D}{c}\right) = 0.$$

Si ottiene il sistema omogeneo in δ_C e δ_D:

$$\begin{cases} \left[P - K_1\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right]\delta_C + \frac{K_1}{b}\,\delta_D = 0 \\ \frac{K_2}{b}\,\delta_C + \left[P - K_2\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\right]\delta_D = 0. \end{cases}$$

Questo sistema ammette una soluzione diversa dalla ovvia ($\delta_C = 0$, $\delta_D = 0$) se è nullo il determinante Δ dei coefficienti delle incognite. Cioè:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \left[P - K_1\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right] & \frac{K_1}{b} \\ \frac{K_2}{b} & \left[P - K_2\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\right] \end{vmatrix} = 0.$$

Si ottiene l'equazione di 2° grado in P:

$$P^2 - P\left[K_1\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + K_2\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\right] + K_1K_2\frac{l}{abc} = 0$$

che fornisce due valori di P, indipendenti da δ_C e δ_D, per i quali, quindi, l'equilibrio della struttura è indifferente, in configurazioni qualunque, diverse dalla verticale, ma poco discoste da essa.

In particolare se è $K_1 = K_2 = K$ e $a = b = c = \frac{l}{3}$ risulta:

$$P^2 - 4\frac{K}{a}P + 3\left(\frac{K}{a}\right)^2 = 0 \qquad \text{le radici sono:} \quad \begin{cases} P'_{cr} = \dfrac{K}{a} = \dfrac{3K}{l} \\ P''_{cr} = \dfrac{3K}{a} = \dfrac{9K}{l}. \end{cases}$$

La prima radice sostituita nelle equazioni del sistema fornisce la soluzione $\delta_C = \delta_D$; la seconda $\delta_C = -\delta_D$.

Le configurazioni d'equilibrio indifferente che corrispondono ad esse sono indicate in fig. 84.2-*a*) e *b*).

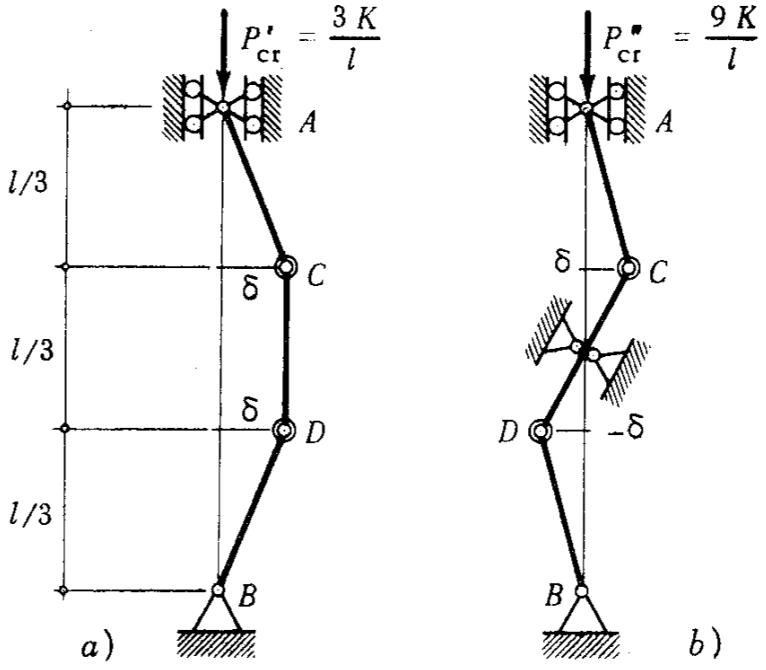


Fig. 84.2

Naturalmente l'eventuale cedimento laterale della struttura per carico di punta avviene secondo lo schema della fig. 84.2-*a*), cui compete il carico $P'_{cr} < P''_{cr}$. Perché la forza agente possa raggiungere il valore

P'_{cr} e, successivamente, provocare il cedimento della struttura secondo la configurazione *b*). il punto di mezzo dell'asta *CD* deve essere mantenuto fisso dall'esterno con l'introduzione, dunque, di un vincolo in più oltre a quelli assegnati inizialmente.

OSSERVAZIONI. - Più in generale, se la struttura ha n gradi di libertà la condizione d'equilibrio $M_e = M_i$ scritta per ciascun vincolo elastico interno, fornisce un sistema omogeneo di n equazioni in n incognite δ_i. Il sistema ammette soluzione se è nullo il determinante Δ dei coefficienti delle incognite e in tal caso, fornisce n valori critici distinti del carico esterno P, a ciascuno dei quali corrisponde una diversa configurazione d'equilibrio indifferente. Naturalmente il cedimento laterale della struttura avviene secondo la configurazione corrispondente al minore dei valori di P_{cr}, a meno che le aste non siano ulteriormente vincolate dall'esterno, cosa questa che ne varia, sostanzialmente, la costituzione iniziale.

* * *

85. - Determinare il valore del carico critico dell'asta di fig. 85.1-*a*), vincolata superiormente con la cerniera cilindrica *A* e inferiormente con la cerniera fissa *B*.

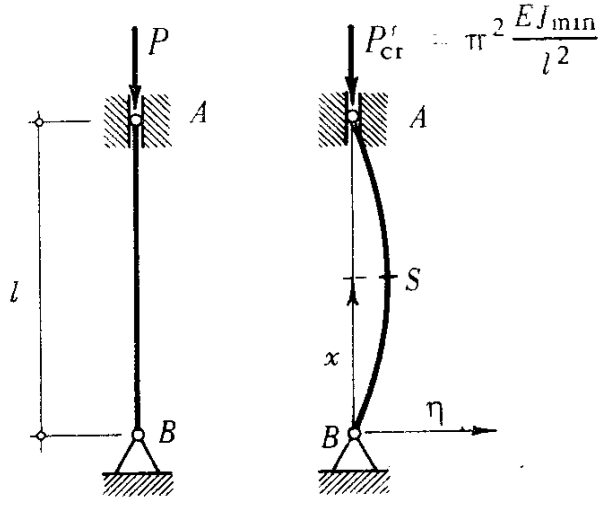


Fig. 85.1

L'asta deformabile ha infiniti gradi di libertà, poiché può assumere nel piano infinite configurazioni deformate, tutte egualmente compatibili con i vincoli esterni. Negli esercizi precedenti il numero limitato di gradi di libertà del sistema, e, conseguentemente, di incognite, conduceva alla stesura di un eguale numero di equazioni al finito. In questo caso è come se l'asta fosse spezzata in infinite cerniere elastiche e si ha un numero infinito di incognite. Occorre pertanto cogliere il fenomeno attraverso lo studio di un elemento generico e infinitesimo; l'integrazione dell'equazione differenziale che ne risulta consente poi di passare alla legge generale che lo governa.

Al solito, alteriamo la configurazione verticale, certamente equilibrata, attribuendo all'asta una deformata $\eta(x)$, al momento arbitraria ed incognita, le cui ordinate η siano, naturalmente, piccolissime (fig. 85.1-*b*). Se sussiste l'equilibrio, in una sezione qualunque il momento interno, che si genera nel materiale per effetto della deformazione ($M_i = -EJ_{min}\eta''$) deve eguagliare il momento esterno della forza P ($M_e = P\eta$).

Cioè:

$$P\eta = -EJ_{min}\,\eta''.$$

L'adozione di J_{min} indica che l'asta è stata deformata nel piano di minor rigidezza; infatti l'eventuale inflessione laterale per cedimento al carico di punta, avviene proprio in questo piano.

Ponendo $\dfrac{P}{EJ_{min}} = \alpha^2$ l'equazione differenziale diviene:

$$\eta'' + \alpha^2\eta = 0.$$

L'integrale generale di questa equazione è

$$\eta = C_1 \operatorname{sen}\alpha x + C_2 \cos\alpha x.$$

La determinazione delle costanti in base alle condizioni ai limiti fornisce:

per $x = 0$ $\eta = 0$ cioè $C_2 = 0$

per $x = l$ $\eta = 0$ cioè $C_1 \operatorname{sen}\alpha l = 0.$

Oltre alla soluzione ovvia $C_1 = 0$ che corrisponde alla configurazione rettilinea equilibrata dell'asta (in questo caso è infatti sempre $\eta = 0$ per qualunque valore di x), la relazione è soddisfatta anche dalla infinita serie di valori $\alpha l = n\pi$ (n numero intero maggiore di 1; $n = 0$ costituisce una soluzione impossibile perché è $\alpha l \neq 0$).

La seconda condizione ai limiti è stata quindi utilizzata per verificare l'esistenza di altre configurazioni equilibrate, oltre alla verticale. Questo accade per la deformata sinusoidale $\eta = C_1 \operatorname{sen} \alpha x$, la cui freccia C_1 rimane però indeterminata, in accordo con il fatto che si tratta di una condizione d'equilibrio indifferente.

A ciascuna radice $\alpha l = n\pi$ ottenuta con un diverso valore di n, corrisponde un valore critico del carico P ed una particolare configurazione deformata dell'asta in equilibrio indifferente. Naturalmente, come si è visto nell'esercizio 84, il P_{cr} dell'asta è il minore tra tutti; gli altri valori critici di P possono essere raggiunti se l'asta (oltre alle cerniere A e B) è vincolata dall'esterno in particolari punti.

Si ha:

$$n = 1 \qquad \alpha l = \pi \qquad P'_{cr} = \pi^2 \frac{EJ_{min}}{l^2}$$

$$n = 2 \qquad \alpha l = 2\pi \qquad P''_{cr} = 4\pi^2 \frac{EJ_{min}}{l^2}$$

$$n = 3 \qquad \alpha l = 3\pi \qquad P'''_{cr} = 9\pi^2 \frac{EJ_{min}}{l^2}$$

e così via.

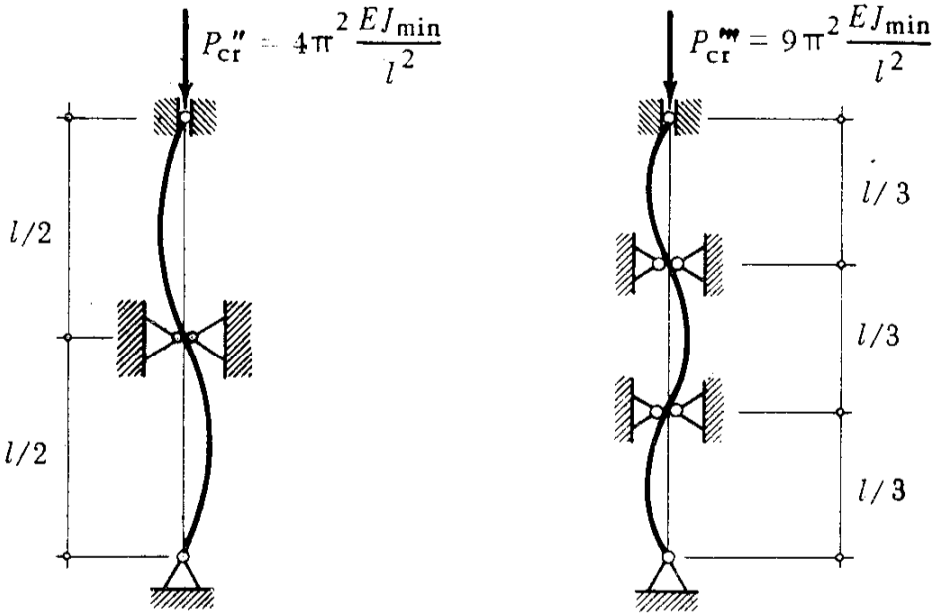
Il primo caso è quello rappresentato in fig. 85.1-*b*). La deformazione dell'asta è una semionda di sinusoide e la freccia massima C_1 si manifesta, ovviamente, nella sezione di mezzaria. Infatti:

$$\eta'(x) = C_1 \alpha \cos \alpha x \qquad \text{e per} \qquad x = \frac{l}{2} \qquad \text{è} \qquad \alpha x = \frac{\alpha l}{2} = \frac{\pi}{2}$$

e quindi

$$\eta'\left(\frac{l}{2}\right) = 0 \qquad \text{e} \qquad \eta\left(\frac{l}{2}\right) = C_1 .$$

Il secondo caso corrisponde a quello dell'asta il cui punto di mezzo sia mantenuto fisso. La deformata dell'asta è una sinusoide completa e la massima freccia C_1 si verifica ai quarti della luce (fig. 85.2-*a*). Analogamente il terzo caso si verifica se l'asta viene fissata ai terzi, e la sua deformata è costituita da tre semionde (fig. 85.2-*b*).



a) *b)*

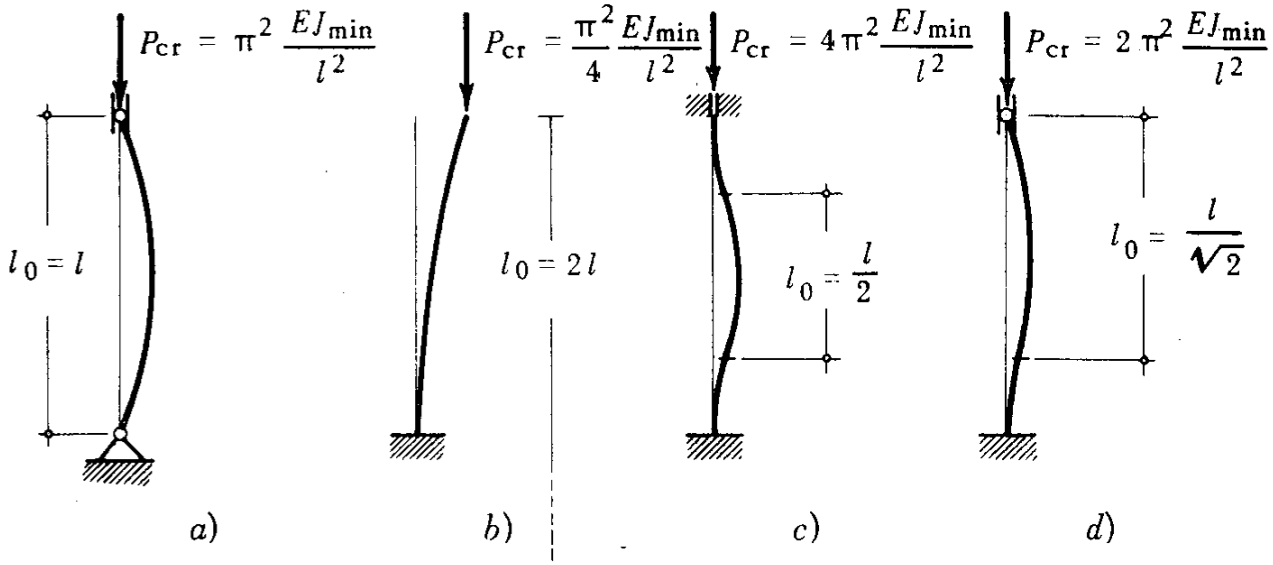
Fig. 85.2

Questi ultimi casi corrispondono all'instabilità del corrente compresso di una struttura reticolare o di una trave continua caricata di punta.

RIASSUNTO DI CASI SEMPLICI FONDAMENTALI.

Si riportano qui di seguito i casi fondamentali di instabilità di un'asta snella caricata di punta, diversamente vincolata agli estremi. Lo studio diretto dei casi *b*), *c*) e *d*) viene svolto in modo analogo a quello *a*), trattato nell'esercizio 85.

La deformata dell'asta è sempre un elemento di sinusoide: semionda in *a*), quarto di onda in *b*), onda completa in *c*) e un po' meno di un'onda e mezzo in *d*).



Indicando con il simbolo l_0 (lunghezza libera di flessione) la lunghezza della semionda, riferita a quella l dell'asta, si ha:

$a)$ $\quad l_0 = l$

$b)$ $\quad l_0 = 2l$

$c)$ $\quad l_0 = \frac{l}{2}$

$d)$ $\quad l_0 = \frac{l}{\sqrt{2}}$.

Di conseguenza il carico critico ha in ogni caso l'espressione:

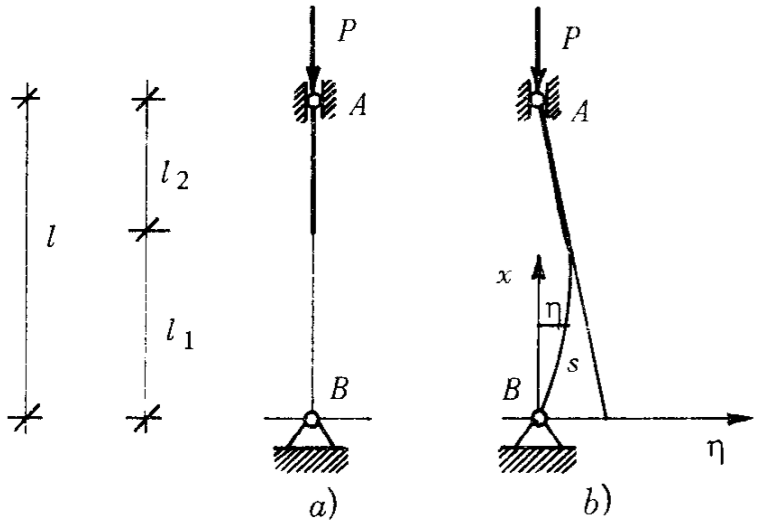
$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EJ_{min}}{l_0^2} .$$

Il calcolo di resistenza (progetto e verifica) di un'asta snella caricata di punta può essere condotto mediante il metodo ω già noto, oppure nei limiti di validità della formula di EULERO (cioè per $\lambda > \lambda_{lim}$) mediante l'adozione di un opportuno coefficiente di sicurezza s del carico P d'esercizio nei confronti del carico critico. Per le strutture metalliche è $\lambda_{lim} \simeq 80 \div 100$ (dipende dal carico di sicurezza del materiale) e, mediamente, si addotta $s = 2{,}5 \div 3$.

* * *

85-bis. - Determinare il valore del carico critico dell'asta di fig. 85-3-*a*) nell'ipotesi che sia costituita di due tronchi, uno deformabile ed uno rigido, di lunghezza, rispettivamente, l_1 ed l_2.

La soluzione del problema va affrontata in modo analogo al caso precedente di fig. 85-1; si altera la configurazione iniziale indeformata imponendo all'asta una configurazione compatibile con le sue caratteristiche elastiche ed i vincoli esistenti (fig. 85-3-*b*), andando poi a verificare le condizioni di equilibrio del tronco infinitesimo generico.



$$M_e = M_i, \qquad \text{cioè:} \qquad P_n = -EI_{min} \cdot \eta^4.$$

Naturalmente questa relazione è valida e va estesa al solo tratto deformabile l_1 dell'asta.

Ponendo, al solito, $\alpha^2 = \dfrac{P}{EI_{min}}$, si ottiene, analogamente a quanto già visto prima:

$$\eta'' + \alpha^2 \eta = 0 \qquad \text{e} \qquad \eta = C_1 \operatorname{sen} \alpha x + C_2 \cos \alpha x$$

Le condizioni ai limiti in questo caso sono:

$$\eta(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad \eta(l_1) = l_2 \, \eta'(l_1)$$

Si ottiene:

$$C_2 = 0 \quad \text{e} \quad C_1 \operatorname{sen} \alpha l_1 = C_1 \alpha l_2 \cos \alpha l_1$$

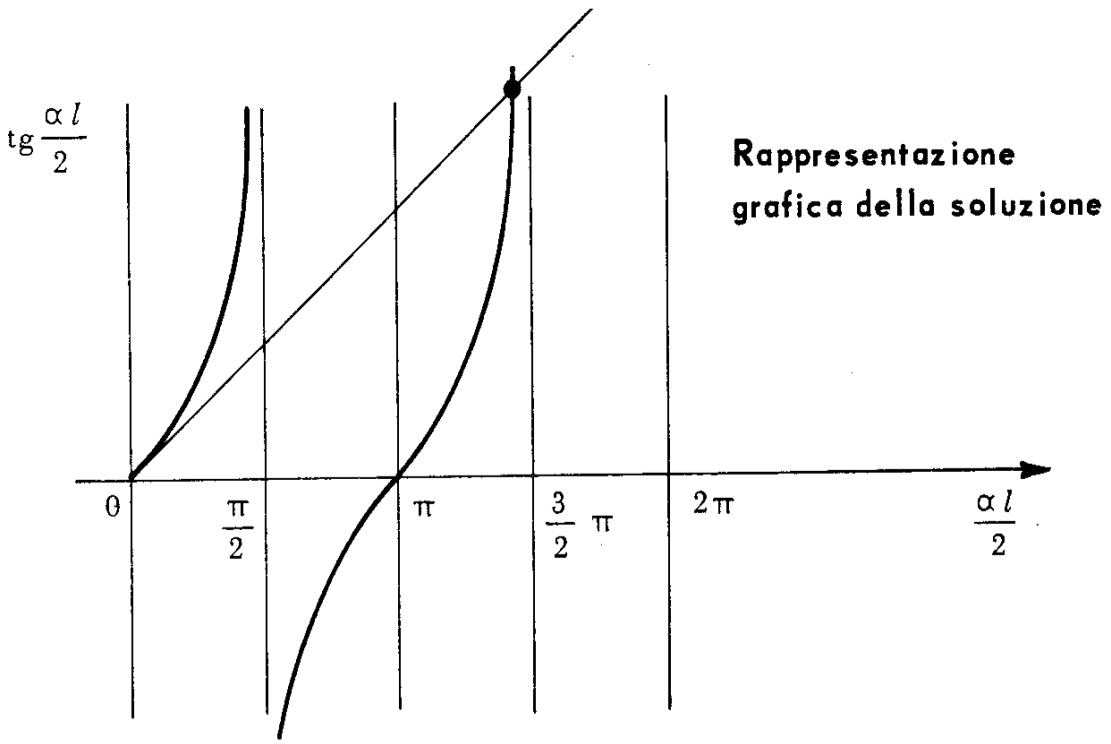
Da cui:

$$\operatorname{tg} \alpha l_1 = \alpha l_2$$

La più piccola radice di questa equazione fornisce il valore del carico critico.

Nel caso particolare di $l_1 = l_2 = \frac{l}{2}$ si ha $\operatorname{tg} \frac{\alpha l}{2} = \frac{\alpha l}{2}$, che è soddisfatta per $\frac{\alpha l}{2} = 4{,}4934$, da cui:

$$P_{cr} = 20{,}19 \frac{E I_{min}}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} = 80{,}76 \frac{E I_{min}}{l^2}$$



Ovviamente la presenza del tratto rigido fa aumentare moltissimo il valore del carico critico, rispetto al caso dell'asta totalmente deformabile.

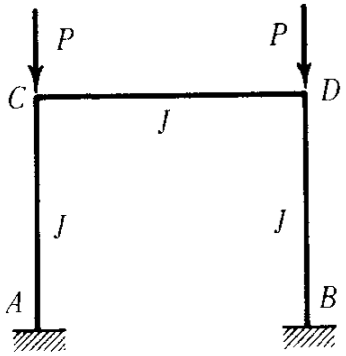
In modo analogo si procede alla determinazione del carico critico per aste diversamente vincolate e parzialmente rigide.

OSSERVAZIONI. - Si è visto che il cedimento di un'asta a carico di punta avviene nel piano di minor rigidezza flessionale.

Per questo motivo l'instabilità dell'equilibrio di una struttura tende solitamente a manifestarsi al di fuori del piano cui la struttura stessa appartiene.

Infatti i momenti d'inerzia delle sezioni rette in questo piano sono generalmente i massimi, ed inoltre, la deformazione di ciascuna asta è contrastata dalle adiacenti in virtù della loro rigidezza flessionale. Di conseguenza, al di fuori del piano della struttura, ciascuna asta ha una rigidezza flessionale minore e la sua deformazione è contrastata solamente dalla rigidezza torsionale (o, insieme, torsionale e flessionale) delle aste adiacenti, certamente inferiore alla precedente.

Ad esempio, nel caso del portale di figura, vincolato ovviamente con incastri spaziali, anche se le aste AC, CD e BD che lo compongono hanno sezione avente eguale momento d'inerzia J in tutte le direzioni, l'instabilità della struttura si manifesta spontaneamente nel piano normale a quello in cui essa è contenuta. Infatti in questo modo la trave CD ruota rigidamente attorno al proprio asse senza contrastare elasticamente l'inflessione dei piedritti. Questi si comportano come l'asta semplice del caso *b*), incastrata al piede e libera in sommità, cui corrisponde, tra i quattro casi fondamentali, il P_{cr} minore.



Pertanto lo studio dell'instabilità dell'equilibrio di una struttura nel proprio piano va inteso nel senso che essa non possa deformarsi al di fuori di esso, per vincoli o controventature esterne, o perché ne sia comunque impedita da un sistema spaziale di cui essa faccia parte.

*

86. - Determinare il valore critico del carico P del portale simmetrico incernierato di fig. 86.1 impedito di deformarsi fuori del proprio piano.

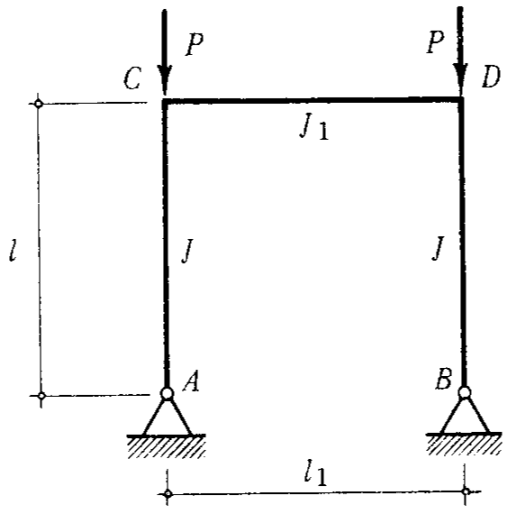


Fig. 86.1

La struttura ha un diverso comportamento a seconda che la travata CD sia impedita o no di spostarsi orizzontalmente.

Esaminiamo separatamente i due casi.

1° caso: telaio a nodi C e D fissi. - Ovviamente la configurazione deformata che assume l'intera struttura, se i piedritti si inflettono lateralmente per carico di punta, deve soddisfare la simmetria esistente. Essa però può essere indifferentemente quella di fig. 86.2-a) oppure b) perché, come è noto, il carico critico genera nella struttura uno stato di equilibrio indifferente e la linea elastica è, conseguentemente, indeterminata.

I piedritti si comportano come perfettamente incernierati alla base e incastrati elasticamente in sommità; la loro deformata deve presentare una inversione di curvatura per fare sì che la distanza tra le cerniere A e B rimanga invariata. Osserviamo inoltre che, essendo in questo caso la struttura iperstatica, dovremo associare la ricerca del valore critico

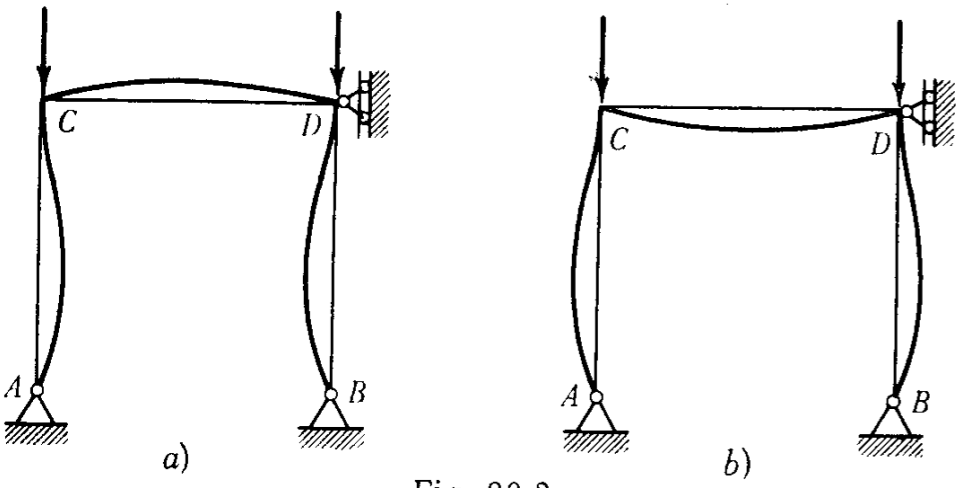


Fig. 80.2

del carico per i piedritti AC e BD, alla stesura di un'equazione di congruenza. Ad esempio, se la struttura principale è quella di fig. 86.3, si deve imporre la condizione $\varphi_{CA} = \varphi_{CD}$, che assicura il rispetto della solidarietà angolare nei nodi C e D.

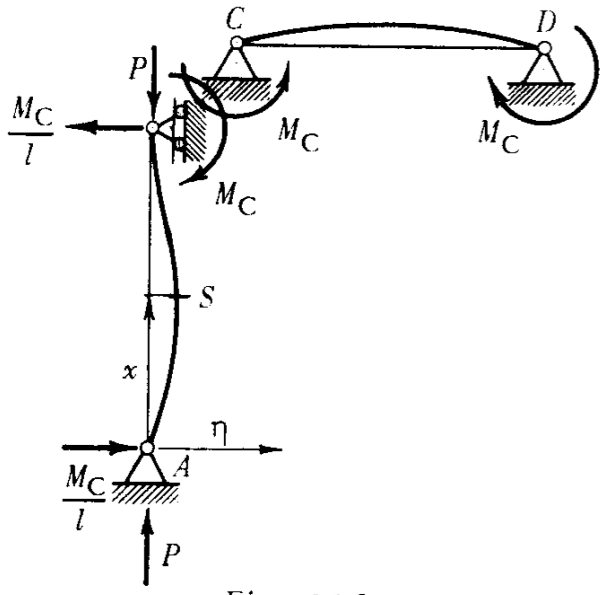


Fig. 86.3

Per la sezione generica S del piedritto è:

$$M_e = P\eta - \frac{M_C}{l}\, x$$

$$M_i = -EJ\eta''.$$

Eguagliando, per l'equilibrio:

$$P\eta - \frac{M_C}{l}x = -EJ\eta''$$

e ponendo, al solito:

$$\frac{P}{EJ} = \alpha^2$$

si ha:

$$\eta'' + \alpha^2\eta = \frac{M_C}{EJ\,l}x.$$

L'integrale generale di questa equazione differenziale è:

$$\eta = C_1 \operatorname{sen}\alpha x + C_2 \cos\alpha x + \frac{M_C}{EJ\,l\cdot\alpha^2}x$$

le costanti si determinano in base alle condizioni ai limiti:

per $x = 0$ è $\eta = 0$ cioè $C_2 = 0$

per $x = l$ è $\eta = 0$ cioè $C_1 = -\dfrac{M_C}{EJ\,\alpha^2 \operatorname{sen}\alpha l}$

inoltre la condizione di congruenza $\varphi_{CA} = \varphi_{CD}$ fornisce:

$$\eta'(l) = -\frac{M_C}{EJ\,\alpha^2 \operatorname{sen}\alpha l}\alpha\cos\alpha l + \frac{M_C}{EJ\,l\,\alpha^2} = \frac{M_C l_1}{2EJ_1}.$$

Da cui:

$$\frac{M_C}{EJ\,\alpha}\left(\frac{1}{\alpha l} - \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha l}\right) = \frac{M_C}{EJ\,\alpha}\cdot\frac{\alpha l}{2}\cdot\frac{EJ}{l}\cdot\frac{l_1}{EJ_1}.$$

Si ottiene infine:

$$\left(\frac{1}{\alpha l} - \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha l}\right) = \frac{\alpha l}{2}\cdot\left(\frac{EJ}{l}\right)\left(\frac{l_1}{EJ_1}\right).$$

Da questa relazione trascendente si deduce il valore del carico critico P_{cr}. In accordo con il fatto che si tratta d'equilibrio indifferente l'equazione di congruenza non porta alla determinazione di M_C; essa fornisce solo la conferma della possibilità di configurazioni equilibrate della struttura, distinte dall'iniziale indeformata.

L'equazione della linea elastica del piedritto è:

$$\eta = \frac{M_C}{EJ\,l\,\alpha^2}\left(x - \frac{\operatorname{sen}\alpha x}{\operatorname{sen}\alpha l}\,l\right).$$

Ovviamente P_{cr} dipende dalle rigidezze del piedritto e della trave. Nel caso particolare in cui sia:

$$\frac{EJ}{l} \qquad \frac{EJ_1}{l_1}$$

risulta:

$$\alpha l \simeq 3{,}593 \qquad \text{e} \qquad P_{cr} = 12{,}91\,\frac{EJ}{l^2}\,.$$

2° caso: la travata CD è libera di spostarsi orizzontalmente. - In questo caso se i piedritti AC e BD si inflettono lateralmente per cedimento al carico di punta, gli estremi C e D della trave si spostano orizzontalmente della stessa quantità δ e la deformata della struttura è antisimmetrica (fig. 86.1-*a*)). Con le stesse considerazioni svolte precedentemente, anche in questo caso si può facilmente comprendere che lo spostamento δ può indifferentemente avvenire verso sinistra o verso destra.

Per ragioni d'antisimmetria le reazioni delle cerniere esterne sono verticali e valgono P. Pertanto è noto M_C in funzione del carico e della freccia del piedritto: $M_C = P\,.\,\delta$.

Si ha:

$$M_e = P\eta - M_C = P(\eta - \delta) \qquad M_i = -EJ\eta''.$$

Eguagliando e ponendo, al solito, $\alpha^2 = \dfrac{P}{EJ}$, risulta:

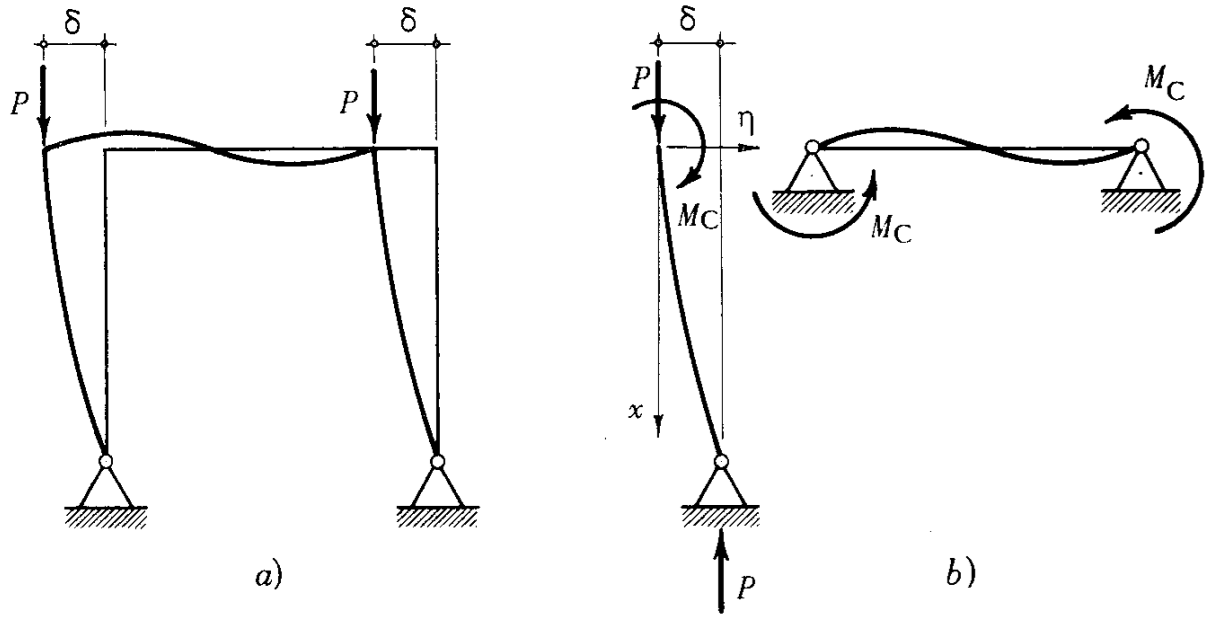


Fig. 86.4

$$\eta'' + \alpha^2\eta = \alpha^2\delta.$$

L'integrale generale di questa equazione è:

$$\eta = C_1 \operatorname{sen}\alpha x + C_2 \cos\alpha x + \delta.$$

Le condizioni ai limiti sono:

per $x = 0$ $\eta = 0$ da cui $C_2 = -\delta$

per $x = l$ $\eta = \delta$ da cui $C_1 = \dfrac{\delta}{\operatorname{tg}\alpha l}$

inoltre per $x = 0$ è $\eta' = \dfrac{M_C\, l_1}{6\, EJ_1}$.

È:

$$\eta'(0) = \frac{\alpha\delta}{\operatorname{tg}\alpha l} = \frac{(P\delta)\, l_1}{6\, EJ_1}.$$

Sviluppando si ottiene la relazione:

$$\alpha l \operatorname{tg}\alpha l = 6\left(\frac{EJ_1}{l_1}\right)\left(\frac{l}{EJ}\right)$$

che fornisce il valore critico del carico, naturalmente indipendente da δ

L'equazione della linea elastica del piedritto è:

$$\eta = \delta\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{\operatorname{tg}\alpha l} - \cos\alpha x + 1\right)$$

ed è indeterminata in δ.

Al solito il valore di P_{cr} dipende dalle rigidezze del piedritto e della trave.

Se si suppone, come nel 1° caso,

$$\frac{EJ}{l} = \frac{EJ_1}{l_1}$$

si ottiene ora

$$\alpha l = 1{,}350 \qquad \text{e} \qquad P_{cr} = 1{,}82\,\frac{EJ}{l^2}.$$

Si vede pertanto come lo spostamento orizzontale liberamente consentito della trave, riduce notevolmente il P_{cr}.

* * *

87. - Calcolare l'asta snella di fig. 87.1 soggetta al carico verticale Q e alla forza P assiale.

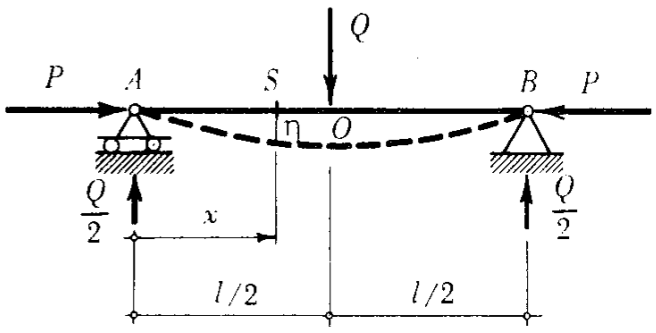


Fig. 87.1

CONSIDERAZIONI GENERALI.

Se la trave è notevolmente snella, l'inflessione provocata dal carico Q genera uno scostamento sensibile dell'asse geometrico dalla retta d'azione della forza P. Pertanto il contributo di questa al momento flettente non è trascurabile, e lo studio della trave deve procedere tenendo conto della sua effettiva deformazione, al contrario di quanto è stato fatto per le strutture dei precedenti capitoli. Queste infatti, sono sempre state considerate notevolmente rigide, tali, cioè, da dar luogo a deformazioni infinitesime, e la posizione delle forze ad esse applicate, è sempre stata lecitamente riferita alla loro configurazione iniziale indeformata.

Lo studio delle strutture particolarmente snelle, e quindi notevolmente deformabili, si esegue, in generale, in maniera analoga a quello delle travi caricate di punta, anche se muove da un concetto sostanzialmente diverso. Là si ricercano altre possibili configurazioni d'equilibrio, oltre a quella naturale indeformata, in un intorno infinitesimo di questa; qui la deformazione della trave può acquistare valori elevati, ed interviene come elemento fondamentale per la determinazione del suo stato finale.

PROCEDIMENTO DI CALCOLO.

Supponiamo che il carico Q agisca nella sezione di mezzaria della trave. Questa si deforma ed assume una configurazione certamente equilibrata per la quale si ha:

$$M_{\text{interno}} = M_{\text{esterno}}.$$

Ossia:

$$-EJ\,\eta'' = \left(P\,\eta + \frac{Q}{2}\,x\right).$$

Ponendo $\alpha^2 = \dfrac{P}{EJ}$ si ottiene l'equazione differenziale:

$$\eta'' + \alpha^2 \eta = -\alpha^2 \frac{Q}{2P} x$$

il cui integrale generale è:

$$\eta = C_1 \operatorname{sen} \alpha x + C_2 \cos \alpha x - \frac{Q}{2P} x$$

le costanti C_1 e C_2 si determinano in base alle condizioni ai limiti:

per $x = 0$ $\eta = 0$ da cui $C_2 = 0$

per $x = \frac{l}{2}$ $\eta' = 0$ da cui $C_1 = \frac{Q}{2P\alpha \cos \frac{\alpha l}{2}}$

(La condizione $\eta = 0$ per $x = l$ non è applicabile. Infatti l'equazione della linea elastica è stata dedotta dalla espressione del momento flettente, valida per ciascuna metà trave, dagli appoggi alla mezzaria. Naturalmente le deformate delle due parti AO e BO sono eguali per ragioni di simmetria).

Sostituendo, l'equazione della linea elastica risulta:

$$\eta = \frac{Q}{2P\alpha} \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha x}{\cos \frac{\alpha l}{2}} - \alpha x \right).$$

La freccia massima, nella sezione di mezzaria, vale:

$$\eta_0 = \frac{Q}{2P\alpha} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha l}{2} - \frac{\alpha l}{2} \right) = \frac{Q l^3}{48\, EJ} \cdot \frac{3 \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha l}{2} - \frac{\alpha l}{2} \right)}{\left(\frac{\alpha l}{2} \right)^3}$$

la seconda espressione pone in evidenza la freccia provocata dal carico Q, amplificata per un coefficiente che è sempre maggiore di 1, e tiene conto dell'influenza della forza P.

La sezione più affaticata è ovviamente quella di mezzaria in cui si ha:

$$N_0 = P$$

$$M_0 = \frac{Ql}{4} + P\left(\frac{Ql^3}{48\,EJ} \cdot \frac{3\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha l}{2} - \frac{\alpha l}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha l}{2}\right)^3}\right) = \frac{Ql}{4} \cdot \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha l}{2}}{\frac{\alpha l}{2}}.$$

CONSIDERAZIONI SUL CALCOLO DI RESISTENZA E RISOLUZIONE NUMERICA.

Dalle espressioni di η_0 ed M_0 si comprende che per la forza Q vale il principio di sovrapposizione degli effetti, se la forza P si mantiene costante.

Questo fatto è una conseguenza della approssimazione, d'altra parte lecita, introdotta implicitamente all'inizio. Infatti le η sono state dichiarate non trascurabili, ma le distanze relative orizzontali delle sezioni sono state considerate invariabili, e per la linea elastica è stata adottata l'equazione approssimata $EJ\,\eta'' = -M$.

La legge di proporzionalità non è invece rispettata dal carico P, al cui aumento, con Q costante, fa crescere più che proporzionalmente le ordinate η ed il momento M.

Pertanto, per il progetto della trave, non si possono limitare nel modo usuale le tensioni, fissandone i massimi valori ammissibili in funzione della tensione di snervamento, ridotta del coefficiente di sicurezza:

$$\sigma_{max} \leq k = \frac{\sigma_{snerv.}}{s}$$

Occorre invece trasferire il criterio di sicurezza al carico esterno, giacché questo cresce meno rapidamente delle tensioni, e limitarne il massimo valore d'esercizio in confronto a quello che provoca lo snervamento all'interno del materiale.

Nel nostro caso:

$$s\left(\frac{P}{A} + \frac{Ql}{4W} \cdot \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha l}{2}}{\frac{\alpha l}{2}}\right) \leq \sigma_{snerv.}$$

Questa relazione consente di eseguire il calcolo di resistenza dell'asta, soggetta al carico Q in mezzaria, determinando, per tentativi, la massima forza P assiale che essa può sopportare con sicurezza.

Si abbia ad esempio una trave di luce 4,50 m, di sezione rettangolare, avente le dimensioni di fig. 87.2 realizzata in acciaio Aq 60 ($\sigma_{snerv.} = 4000$ kg/cm^2; $s = 2{,}5$).

Sia assegnato $Q = 200$ kg.

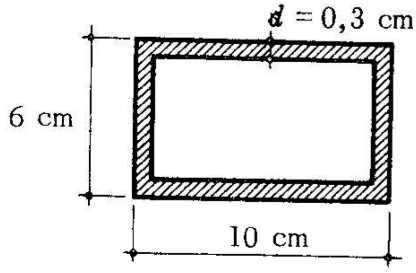


Fig. 87.2

Calcoliamo, per controllo iniziale, le tensioni e la freccia in mezzaria provocate dal carico Q e contrassegnamole con un apice per distinguerle da quelle totali.

La sezione ha caratteristiche:

$$A = 9{,}24 \text{ cm}^2$$
$$J = 56{,}7 \text{ cm}^4$$
$$W = 18{,}9 \text{ cm}^3.$$

È:

$$M_0' = \frac{Ql}{4} = 22\,500 \text{ kg cm} \qquad \sigma' = \frac{Ql}{4W} = 1190 \text{ kg/cm}^2$$

$$\eta_0' = \frac{Ql^3}{48\,EJ} = 3{,}17 \text{ cm}.$$

Fissiamo inizialmente $P = 500$ kg.

Risulta:

$$\frac{\alpha l}{2} = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{EJ}} = 0{,}462 \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha l}{2}\right) = 0{,}499$$

$$\sigma_{0\,max} = \left(\frac{500}{9{,}24} + 1190\,\frac{0{,}499}{0{,}462}\right) \cong 1340 \text{ kg/cm}^2.$$

Verifichiamo se per questi valori di P e Q è rispettato il coefficiente di sicurezza esterno $s = 2{,}5$.

Si ha:

$$\frac{\alpha l}{2} = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{2{,}5\,P}{EJ}} = 0{,}730 \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha l}{2} = 0{,}895$$

$$\sigma_{0\,max} = 2{,}5\left(\frac{500}{9{,}24} + 1190\,\frac{0{,}895}{0{,}730}\right) = 3770 < \sigma_{snerv.}\,(= 4000).$$

Se si pone $P = 600$ kg si ottiene:

$$\frac{\alpha l}{2} = 0{,}506 \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha l}{2} = 0{,}554$$

$$\sigma_{0\,max} = \left(\frac{600}{9{,}24} + 1190\,\frac{0{,}554}{0{,}506}\right) = 1375 \text{ kg/cm}^2$$

procedendo anche in questo caso al calcolo di verifica:

$$\frac{\alpha l}{2} = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{2{,}5\;600}{EJ}} = 0{,}805 \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha l}{2} = 1{,}045$$

$$\sigma_{0\,max} = 2{,}5\left(\frac{600}{9{,}24} + 1190\,\frac{1{,}045}{0{,}805}\right) \cong 4050 > \sigma_{snerv.}\,(= 4000).$$

È facile constatare che all'aumento dei carichi esterni P e Q di 2,5 volte, corrisponde nel primo caso un aumento delle tensioni di 2,82 volte, e nel secondo di 2,94.

Adottando come carichi massimi ammissibili d'esercizio la coppia di valori $Q = 200$ kg e $P = 600$ kg la freccia in mezzaria vale:

$$\eta_0 = 3{,}17 \frac{3(0{,}554 - 0{,}506)}{(0.506)^3} = 3{,}54 \text{ cm.}$$

CONSIDERAZIONI SUL CARICO CRITICO.

La freccia η_0 assume valore infinito se è $\frac{\alpha l}{2} = \frac{\pi}{2}$.

Questa condizione corrisponde al particolare valore del carico assiale:

$$P_E = \pi^2 \frac{EJ}{l^2} .$$

P_E è definito *carico critico* della trave (carico di Eulero); tuttavia anche se possiede la stessa denominazione del P_{cr} che caratterizza le aste caricate di punta (vedi esercizi precedenti) ha un significato ben diverso da questo.

Infatti un'asta rettilinea, caricata di punta, conserva la propria configurazione indeformata fino a che il carico esterno si mantiene inferiore al P_{cr}; questo costituisce quel particolare valore oltre il quale l'equilibrio diviene instabile e l'asta cede improvvisamente per inflessione laterale.

Un'asta snella, sollecitata da carichi normali e paralleli all'asse, si inflette sensibilmente, qualunque sia la forza assiale che la comprime, ed il carico critico è, in questo caso, il valore limite cui corrisponde uno scostamento infinito della struttura deformata dalla configurazione iniziale. Naturalmente in pratica il collasso della struttura avviene molto prima che si giunga a ciò, tuttavia anche da un punto di vista teorico la trattazione analitica precedente andrebbe opportunamente corretta per poter essere estesa al campo delle grandi deformazioni.

Si noti inoltre che il momento d'inerzia che compare nella formula precedente del carico critico d'Eulero, non è il minimo della sezione (come accade per il P_{cr} delle aste caricate di punta) ma è quello calcolato rispetto all'asse di flessione.

CASO DEL CARICO Q APPLICATO IN UNA SEZIONE GENERICA.

In questo caso la trave non è più soggetta ad una condizione simmetrica di carico e la risoluzione, pur non modificandosi concettualmente, diviene più laboriosa.

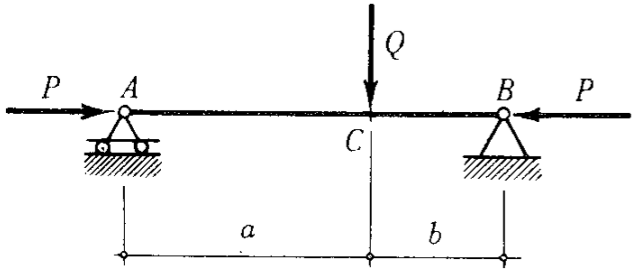


Fig. 87.3

È infatti necessario scrivere l'equazione differenziale della linea elastica per entrambi i tronchi AC e BC; le quattro costanti che risultano dall'integrazione si determinano in base alle condizioni ai limiti ($\eta_A = 0$; $\eta_B = 0$; $\eta'_{C\,sin.} = \eta'_{C\,des.}$; $\eta_{C\,sin.} = \eta_{C\,des.}$).

Il calcolo di verifica dell'asta va condotto, al solito, per tentativi, dopo avere determinato la sezione di momento massimo.

* * *

88. - Calcolare la trave snella di fig. 88.1 soggetta al carico P orizzontale, parallelo all'asse.

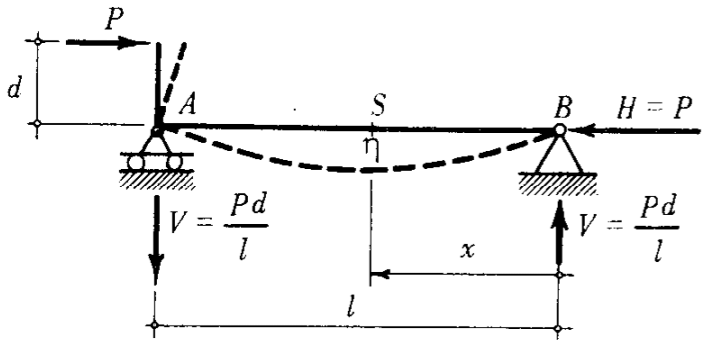


Fig. 88.1

Questo problema presenta le medesime caratteristiche dell'esercizio precedente: la trave snella si inflette sensibilmente e la sua deformazione influenza in maniera non trascurabile l'eccentricità del carico P dall'asse geometrico.

Esprimiamo pertanto la condizione d'equilibrio per la configurazione deformata della trave:

$$M_{\text{interno}} = M_{\text{esterno}}.$$

Cioè, impiegando per la linea elastica la nota relazione differenziale approssimata che trascura lo spostamento relativo orizzontale dei punti dell'asse geometrico AB:

$$EJ\eta'' = -\left(P\frac{d}{l}x + P\eta\right).$$

Ponendo, al solito, $\alpha^2 = \frac{P}{EJ}$, si ottiene l'equazione differenziale:

$$\eta'' + \alpha^2\eta = -\alpha^2\frac{d}{l}x$$

il cui integrale generale è:

$$\eta = C_1 \operatorname{sen}\alpha x + C_2 \cos\alpha x - \frac{d}{l}x$$

le condizioni ai limiti che consentono di determinare le costanti C_1 e C_2 sono:

$$\eta = 0 \quad \text{per} \quad x = 0 \quad \text{da cui} \quad C_2 = 0$$

$$\eta = 0 \quad \text{per} \quad x = l \quad \text{da cui} \quad C_1 = \frac{d}{\operatorname{sen}\alpha l}.$$

Sostituendo risulta:

$$\eta = d\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{\operatorname{sen}\alpha l} - \frac{x}{l}\right)$$

La sezione avente massima η si determina:

$$\eta' = d\left(\frac{\alpha \cos \alpha x}{\operatorname{sen} \alpha l} - \frac{1}{l}\right) = 0 \qquad \text{per} \qquad \cos \alpha \bar{x} = \frac{\operatorname{sen} \alpha l}{\alpha l}.$$

Anche in questo caso, in accordo con i risultati dell'esercizio precedente, le ordinate η della linea elastica assumono, teoricamente, valori infiniti se è $\alpha l = \pi$. Questo fatto si verifica per il medesimo valore critico del carico assiale:

$$P_E = \pi^2 \frac{EJ}{l^2}.$$

RISOLUZIONE NUMERICA E VERIFICA DI RESISTENZA.

La trave abbia la medesima sezione e caratteristiche di quella dell'esercizio precedente (*Aq* 60: $\sigma_{snerv.} = 4000$ kg/cm^2; $s = 2{,}5$). Siano inoltre assegnate le dimensioni: $l = 4{,}50$ m; $d = 0{,}40$ m.

Determiniamo il massimo carico ammissibile.

Fissiamo dapprima $P = 500$ kg.

Si ottiene:

$$\alpha \cong 0{,}00206; \qquad \alpha l \cong 0{,}925; \qquad \operatorname{sen} \alpha l \cong 0{,}799$$

$$\bar{x} = 2{,}55 \text{ m} \qquad \eta_{max} = 40\left(\frac{0{,}500}{0{,}799} - \frac{255}{450}\right) = 2{,}44 \text{ cm}$$

$$\sigma_{max} = \frac{500}{9{,}24} + \frac{500 \cdot 42{,}44}{18{,}9} \cong 1175 \text{ kg/cm}^2.$$

Verifichiamo il coefficiente di sicurezza: $s = 2{,}5$.

Risulta: $sP = 1250$ kg.

$$\alpha \cong 0{,}00325 \qquad \alpha l \cong 1{,}460 \qquad \operatorname{sen} \alpha l \cong 0{,}997$$

$$\bar{x} = 2{,}52 \text{ m} \qquad \eta_{max} = 40\left(\frac{0{,}731}{0{,}997} - \frac{252}{450}\right) = 6{,}92 \text{ cm}$$

$$\sigma_{max} = 2{,}5\left(\frac{500}{9{,}24} + \frac{500 \cdot 46{,}92}{18{,}9}\right) = 3235 < \sigma_{snerv.}$$

Proviamo con $P = 600$ kg come secondo tentativo.

$$\alpha \cong 0{,}00225 \qquad \alpha l \cong 1{,}012 \qquad \operatorname{sen} \alpha l \cong 0{,}848$$

$$\bar{x} = 2{,}54 \text{ m} \qquad \eta_{max} = 40\left(\frac{0{,}545}{0{,}848} - \frac{254}{450}\right) = 3{,}00 \text{ cm}$$

$$\sigma_{max} = \frac{600}{9{,}24} + \frac{600 \cdot 43}{18{,}9} = 1430 \text{ kg/cm}^2.$$

Verifichiamo il coefficiente di sicurezza: $sP = 1500$ kg.

$$\alpha \cong 0{,}00355 \qquad \alpha l \cong 1{,}600 \qquad \operatorname{sen} \alpha l \cong 1{,}000$$

$$\bar{x} = 2{,}50 \text{ m} \qquad \eta_{max} = 40\left(\frac{0{,}781}{1{,}000} - \frac{250}{450}\right) = 9{,}25 \text{ cm}$$

$$\sigma_{max} = 2{,}5\left(\frac{600}{9{,}24} + \frac{600 \cdot 49{,}25}{18{,}9}\right) = 4080 > \sigma_{snerv.}$$

Il valore ottenuto per la σ_{max} è di poco superiore alla $\sigma_{snerv.}$ ed il carico $P = 600$ kg si può accettare come massimo carico ammissibile.

Si noti inoltre che mentre il carico P aumenta secondo il rapporto 2,5 la σ_{max} aumenta, nel primo caso, di 2,75 volte, e, nel secondo, di 2,85 volte.

AVVERTENZA. - A conclusione di questi pochi esercizi del IV capitolo ricordiamo che l'instabilità dell'equilibrio elastico si può manifestare in numerose classi di strutture: tralicci reticolari, anelli e archi circolari compressi, travi a parete sottile inflesse (per effetto flessotorsionale), lastre piane soggette a forze nel loro piano medio, ecc..

Per lo studio di questi problemi particolari, che tuttavia rivestono una grande importanza, rimandiamo ai relativi testi.

Tabella dei coefficienti ω per acciaio con $K = 16$ kg/mm^2 (CNR - UNI 10011)

λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	ω									
20	1,15	1,16	1,16	1,17	1,18	1,19	1,19	1,20	1,21	1,22
30	1,22	1,23	1,24	1,25	1,25	1,26	1,27	1,28	1,28	1,29
40	1,30	1,30	1,31	1,33	1,33	1,34	1,35	1,36	1,36	1,37
50	1,38	1,39	1,41	1,41	1,42	1,43	1,44	1,45	1,46	1,47
60	1,49	1,50	1,51	1,52	1,53	1,54	1,55	1,57	1,59	1,60
70	1,61	1,62	1,65	1,66	1,67	1,69	1,70	1,71	1,74	1,75
80	1,77	1,78	1,81	1,82	1,84	1,85	1,87	1,90	1,92	1,93
90	1,95	1,98	1,99	2,01	2,03	2,06	2,08	2,10	2,13	2,15
100	2,17	2,19	2,22	2,24	2,26	2,29	2,31	2,34	2,37	2,39
110	2,41	2,45	2,47	2,49	2,53	2,55	2,59	2,64	2,69	2,73
120	2,78	2,82	2,87	2,91	2,97	3,02	3,06	3,11	3,17	3,21
130	3,26	3,31	3,36	3,42	3,46	3,52	3,57	3,62	3,68	3,73
140	3,78	3,84	3,90	3,94	4,00	4,06	4,11	4,17	4,23	4,29
150	4,34	4,40	4,46	4,51	4,57	4,64	4,70	4,75	4,82	4,88
160	4,94	5,01	5,06	5,13	5,19	5,26	5,31	5,38	5,45	5,51
170	5,58	5,65	5,71	5,77	5,84	5,91	5,98	6,05	6,12	6,18
180	6,25	6,32	6,39	6,47	6,54	6,61	6,68	6,76	6,82	6,89
190	6,97	7,04	7,12	7,19	7,27	7,34	7,42	7,49	7,57	7,65
200	7,72	7,80	7,88	7,96	8,04	8,12	8,20	8,28	8,36	8,44
210	8,52	8,60	8,68	8,76	8,84	8,93	9,01	9,09	9,18	9,26
220	9,34	9,43	9,51	9,60	9,68	9,77	9,86	9,94	10,04	10,13
230	10,21	10,30	10,39	10,48	10,57	10,66	10,76	10,85	10,94	11,03
240	11,12	11,21	11,30	11,40	11,49	11,59	11,68	11,77	11,88	11,97
250	12,06	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Unificazione UNI, riprodotta con l'autorizzazione dell'UNI, P. Diaz, 2 - Milano.

Si fa però presente che i calcoli numerici svolti in questo volume sono stati eseguiti valendosi di manuali di diversa provenienza, il che non esclude l'eventualità di qualche lieve differenza nel valore di tali coefficienti. Lo stesso dicasi per quanto riguarda le caratteristiche geometriche delle sezioni dei profilati normali, di volta in volta impiegati nella risoluzione dei singoli esercizi.