

CAPITOLO III

RISOLUZIONE DELLE STRUTTURE MEDIANTE I TEOREMI SUL LAVORO DI DEFORMAZIONE

GENERALITÀ E RICHIAMI.

In questo capitolo sono raccolte alcune applicazioni dei teoremi sul lavoro di deformazione: teorema di CLAPEYRON, di BETTI, di MAXWELL, di CASTIGLIANO e di MENABREA.

Per la loro semplicità concettuale e l'affinità procedurale che essi manifestano con il principio dei lavori virtuali, sul quale ci si è già sufficientemente soffermati, gli esercizi di questo capitolo sono stati limitati all'essenziale. D'altra parte una loro maggiore estensione avrebbe costituito solo una ripetizione di casi sostanzialmente analoghi a quelli già trattati.

In questa sede vale solo la pena di ricordare che i teoremi sul lavoro di deformazione non godono della estensione e generalità del principio dei lavori virtuali: la loro validità è limitata dalla legge di HOOKE e dal principio di sovrapposizione degli effetti, dal carattere conservativo del sistema cui si applicano, dalle caratteristiche dei vincoli, e così via.

* * *

70. - Determinare l'abbassamento dell'estremo libero D dello sbalzo DA , solidale con l'arco a tre cerniere di fig. 70.1, provocato dal carico P verticale.

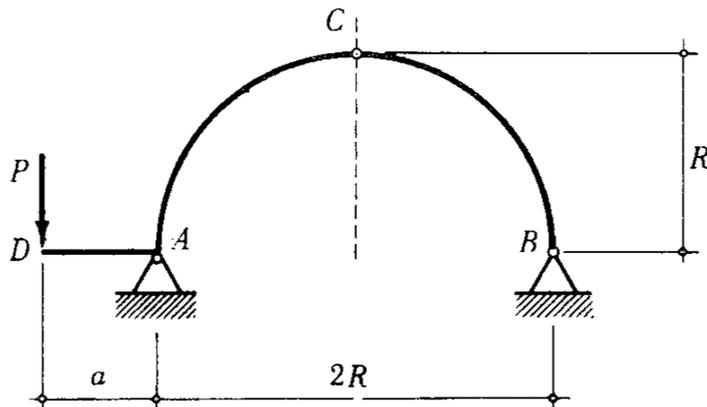


Fig. 70.1

Lo spostamento richiesto è proprio quello del punto d'applicazione dell'unica forza esterna agente sulla struttura, e nella direzione della forza stessa; inoltre la struttura è isostatica, ed è noto il regime statico generato in essa dal carico P . Pertanto la determinazione di η_D risulta particolarmente semplice se si eguagliano i lavori di deformazione interno ed esterno, adottando per quest'ultimo l'espressione generale fornita dal teorema di CLAPEYRON,

Calcoliamo anzitutto le reazioni dei vincoli; esse hanno il senso di fig. 70.2, in cui è indicata anche la loro determinazione grafica, e valgono:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0 & H_A &= H_B = H \\ \sum M_{(BC)_C} &= 0 & V_B &= H \\ \sum M_B &= 0 & V_A &= P \left(1 + \frac{a}{2R} \right) \\ \sum Y &= 0 & V_B &= P \frac{a}{2R}. \end{aligned}$$

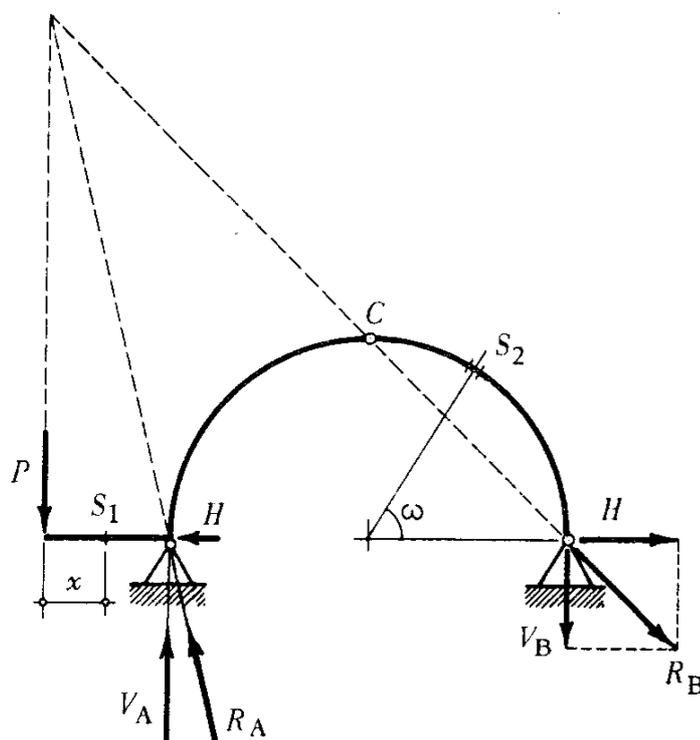


Fig. 70.2

Il momento flettente vale:

- sbalzo DA :

$$M_1 = -Px$$

- arco BCA :

$$M_2 = P \frac{a}{2R} [R \operatorname{sen} \omega - R(1 - \cos \omega)] = P \frac{a}{2} (\operatorname{sen} \omega + \cos \omega - 1).$$

Si ha:

$$L_e = \frac{1}{2} P \eta_D$$

$$L_i = \int_0^a \frac{M_1^2 dx}{2EJ_1} + \int_0^\pi \frac{M_2^2 (R d\omega)}{2EJ_2}$$

Sostituendo in questa seconda relazione l'espressione di M_1 ed M_2 ed eguagliando il lavoro esterno al lavoro interno:

$$\frac{1}{2} P \eta_D = \int_0^a \frac{P^2 x^2 dx}{2 EJ_1} + \int_0^\pi \frac{P^2 a^2 R}{8 EJ_2} (\sin \omega + \cos \omega - 1)^2 d\omega.$$

Eseguendo le integrazioni e risolvendo si ottiene:

$$\eta_D = \frac{Pa^3}{3 EJ_1} + \frac{Pa^2 R}{2 EJ_2} (\pi - 2).$$

Il primo termine è, ovviamente, la freccia della mensola DA , provocata dal carico P ; il secondo si può scrivere nella forma $\left[\frac{PaR}{2EJ_2} (\pi - 2) \right] a$ e rappresenta l'aliquota $\varphi_A \cdot a$ dell'abbassamento η_D , dovuto alla rotazione della sezione posta sulla cerniera A .

71. - Determinare lo spostamento del vertice D del portale di figura 71.1.

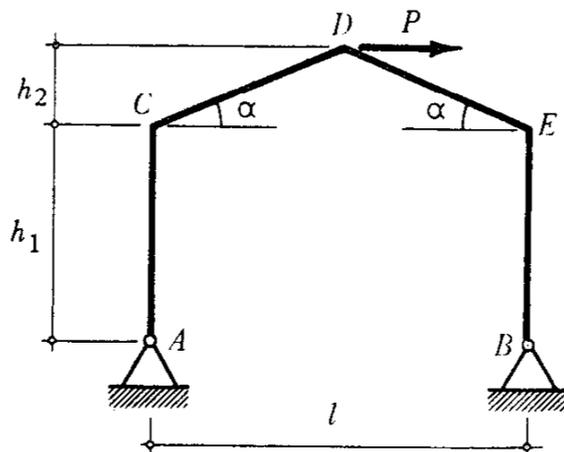


Fig. 71.1

La struttura, simmetrica e caricata antisimmetricamente, è staticamente determinata pur essendo una volta iperstatica. Lo spostamento del vertice D , punto d'applicazione dell'unica forza esterna agente, avviene proprio nella direzione orizzontale della forza stessa. Valgono per-

tanto le considerazioni svolte nell'esercizio precedente circa la semplicità del metodo risolutivo basato sull'eguaglianza dei lavori di deformazione interno ed esterno.

Le reazioni dei vincoli hanno il senso di fig. 71.2, in cui è indicata anche la risoluzione grafica della struttura, e valgono:

$$H_A = H_B = \frac{P}{2}$$

$$V_A = V_B = \frac{P(h_1 + h_2)}{l}$$

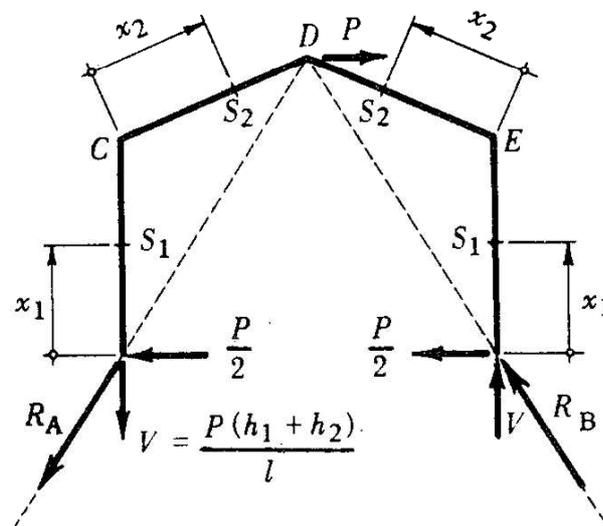


Fig. 71.2

Il momento flettente ha valori eguali e di segno opposto in sezioni simmetriche; tuttavia poiché il lavoro di deformazione è una funzione quadratica di M , è sufficiente prendere in considerazione solo metà struttura e moltiplicare per due:

- piedritti AC e BE :

$$M = \pm \frac{P}{2} x_1$$

- travi CD e ED :

$$M = \pm \left[\frac{P}{2} (h_1 + x_2 \operatorname{sen} \alpha) - \frac{P(h_1 + h_2)}{l} x_2 \cos \alpha \right].$$

Esprimendo ora la relazione $L_e = L_i$ si ottiene:

$$\frac{1}{2} P \xi_D = 2 \int_0^{h_1} \left(\frac{P}{2} x_1 \right)^2 \frac{dx_1}{2 EJ} + \\ + 2 \int_0^{\frac{l}{2 \cos \alpha}} \left[\frac{P}{2} (h_1 + x_2 \operatorname{sen} \alpha) - \frac{P (h_1 + h_2)}{l} x_2 \cos \alpha \right]^2 \frac{dx_2}{2 EJ}.$$

Eseguendo le integrazioni, semplificando e risolvendo, risulta:

$$\xi_D = \frac{P h_1^3}{6 EJ} + \frac{P l}{2 EJ \cos \alpha} \left(h_1^2 + \frac{l}{2} \operatorname{tg} \alpha + \frac{l^2}{12} \operatorname{tg}^2 \alpha \right) - \\ - \frac{P (h_1 + h_2) l}{3 EJ \cos \alpha} \left(h_1 - \frac{h_2}{2} + \frac{l}{2 \cos \alpha} \right).$$

OSSERVAZIONE. - Come si è visto questo procedimento è particolarmente semplice se si deve determinare la componente dello spostamento del punto d'applicazione di una forza nella direzione della forza stessa, nel caso in cui essa sia la sola agente esternamente sulla struttura e questa sia staticamente determinata. Naturalmente è possibile estenderlo a strutture staticamente indeterminate, soggette ad analoga condizione di carico, dopo aver provveduto alla risoluzione del problema iperstatico.

CONSIDERAZIONI SUI TEOREMI DI BETTI E DI MAXWELL.

I teoremi di BETTI e di MAXWELL sono raramente impiegati per la risoluzione di strutture o per il calcolo dello spostamento di punti di esse, provocati dal sistema di forze direttamente agente.

Essi sono basati sul concetto di lavoro mutuo e rendono possibile la determinazione degli effetti generati da un sistema di forze su una struttura, per confronto con quelli noti di un altro sistema.

Sia pure incidentalmente se ne sono già fatte alcune applicazioni in esercizi del Cap. I, e precisamente:

Esercizio 29: simmetria dei coefficienti rispetto ai termini della diagonale principale in un sistema risolutivo di n equazioni di congruenza in n incognite.

Esercizio 51: indeformabilità nel proprio piano di una struttura soggetta a forze normali ad esso.

Gli esercizi 72 e 73 che seguono forniscono un ulteriore esempio del teorema di BETTI.

* * *

72. - Determinare lo spostamento del vertice C del traliccio di fig. 72.1, soggetto al carico P , inclinato dell'angolo β rispetto all'orizzontale.

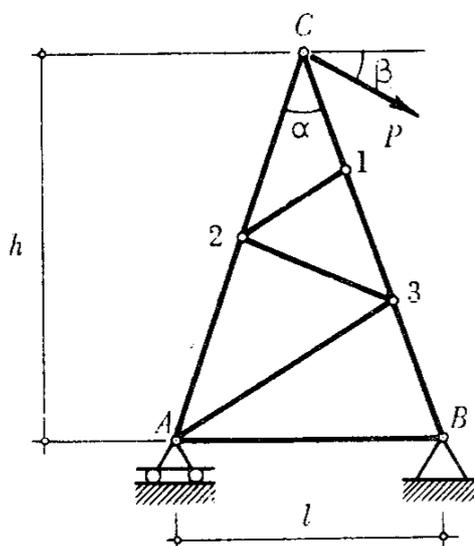


Fig. 72,1

Lo spostamento del nodo C non avviene nella direzione del carico ed il procedimento degli esercizi precedenti fornirebbe in questo caso la sola componente di δ_C nella direzione della forza. Per risolvere completamente il problema è più semplice decomporre il carico P nelle compo-

nenti orizzontale H e verticale V e valutare separatamente gli spostamenti di C in queste due direzioni.

In fig. 72.2-*a*) e *b*) è rappresentata la struttura soggetta separatamente alle due condizioni di carico:

$$H = P \cos \beta \quad \text{e} \quad V = P \sin \beta .$$

In ciascun caso sono indicate le reazioni dei vincoli esterni e gli sforzi nelle aste di contorno che, per ragioni d'equilibrio dei nodi 1, 2 e 3 sono le uniche sollecitate (si considerano positivi gli sforzi di trazione).

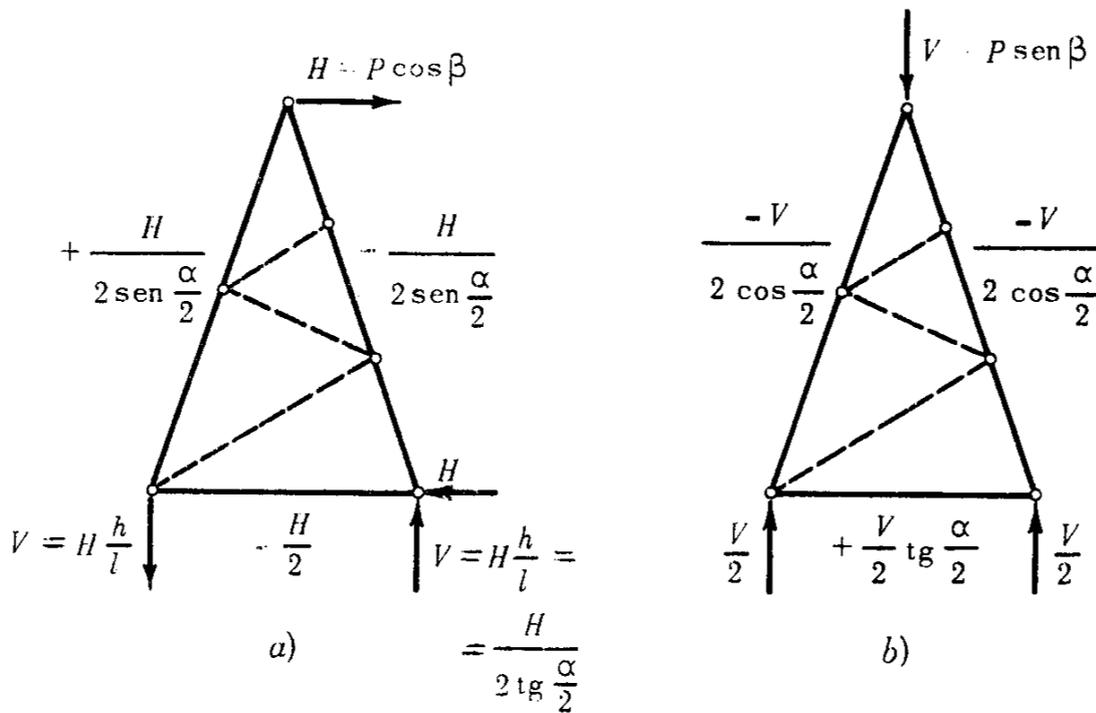


Fig. 72.2

Ciascuna condizione di carico fa spostare il nodo C in entrambe le direzioni, verticale ed orizzontale. Infatti l'unico punto fisso della struttura è la cerniera B e la deformazione dell'asta AB (accorciamento nel caso *a*) e allungamento nel caso *b*)) provoca uno spostamento di C sia verticale che orizzontale.

In simboli si ha:

$$\xi_C = \xi_{C,H} + \xi_{C,V}$$

$$\eta_C = \eta_{C,V} + \eta_{C,H}.$$

Ma per il teorema di BETTI è

$$H \cdot \xi_{C,V} = V \cdot \eta_{C,H};$$

pertanto è sufficiente calcolare uno solo di questi due contributi.

Possiamo calcolare $\xi_{C,H}$ ed $\eta_{C,V}$, ad esempio, con lo stesso procedimento degli esercizi 70 e 71 precedenti, esprimendo in entrambi i casi l'eguaglianza dei lavori di deformazione interno ed esterno, ed $\eta_{C,H}$ (oppure $\xi_{C,V}$) ricorrendo al principio dei lavori virtuali (o al teorema di CASTIGLIANO).

DETERMINAZIONE DI $\xi_{C,H}$.

$$\frac{1}{2} H \xi_{C,H} = 2 \left(\frac{H}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \right)^2 \frac{h}{2 EA \cos \frac{\alpha}{2}} + \left(\frac{H}{2} \right)^2 \frac{l}{2 EA}.$$

Si ottiene:

$$\xi_{C,H} = \frac{H}{2 EA} \left(\frac{h}{\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} + \frac{l}{2} \right).$$

DETERMINAZIONE DI $\eta_{C,V}$.

$$\frac{1}{2} V \eta_{C,V} = 2 \left(\frac{V}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} \right)^2 \frac{h}{2 EA \cos \frac{\alpha}{2}} + \left(\frac{V}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)^2 \frac{l}{2 EA}.$$

Si ottiene:

$$\eta_{C,V} = \frac{V}{EA} \left(\frac{h}{2 \cos^3 \frac{\alpha}{2}} + \frac{l}{4} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \right).$$

DETERMINAZIONE DI $\eta_{C,H}$.

Si assume il sistema fittizio costituito dalla forza $V = 1$.

Gli sforzi fittizi sono gli stessi del caso *b*), a meno di V , e lavorano sulle deformazioni reali del caso *a*). Il lavoro virtuale interno è dato dal contributo della sola asta AB ; quelli forniti dalle aste AC e BC si annullano reciprocamente perché gli sforzi fittizi, simmetrici, operano sui valori antisimmetrici delle deformazioni reali.

Si ha:

$$1 \cdot \eta_{C,H} = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{Hl}{2EA}$$

il segno negativo indica che lo spostamento $\eta_{C,H}$ avviene verso l'alto.

Sommando i vari contributi si ottengono le quantità richieste.

Ovviamente è: $\delta_C = \sqrt{\xi_C^2 + \eta_C^2}$ e forma con l'orizzontale un angolo $\omega = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\eta_C}{\xi_C}$.

73. - Determinare mediante il teorema di BETTI, lo spostamento orizzontale e verticale della sezione di mezzaria della trave del portale di fig. 73.1, provocati dalla coppia \bar{M} , applicata al nodo C .

Determiniamo dapprima lo spostamento orizzontale $\xi_{D, \bar{M}}$.

Applichiamo in D la forza $P_0 = 1$, orizzontale, agente nella direzione dello spostamento cercato (fig. 73.2).

Il teorema di BETTI fornisce direttamente la relazione:

$$1 \cdot \xi_{D, \bar{M}} = \bar{M} \cdot \varphi_{C, P_0} = \bar{M} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} h \right) \frac{l}{6 EJ} \right].$$

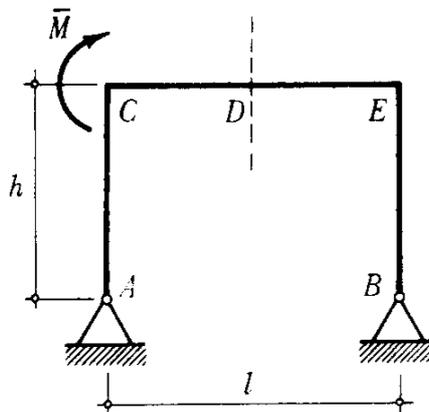


Fig. 73.1

La forza $P_0 = 1$ provoca una rotazione oraria del nodo C , e fa compiere alla coppia \bar{M} un lavoro indiretto positivo. Se ne deduce che la coppia \bar{M} sposta il punto D verso destra, concorde con il senso della P_0 .

Determiniamo ora $\eta_{D, \bar{M}}$.

Applichiamo in D la forza verticale $P_v = 1$ (fig. 73.3). È:

$$\begin{aligned} 1 \cdot \eta_{D, \bar{M}} &= \bar{M} \cdot \varphi_{C, P_v} = \\ &= \bar{M} \left\{ \frac{1 \cdot l^2}{16 \cdot EJ} - \left[\frac{l}{8h \left(1 + \frac{2h}{3l} \right)} \right] h \frac{l}{2 EJ} \right\} = \\ &= \frac{\bar{M} l^2}{16 EJ} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{2h}{3l}} \right). \end{aligned}$$

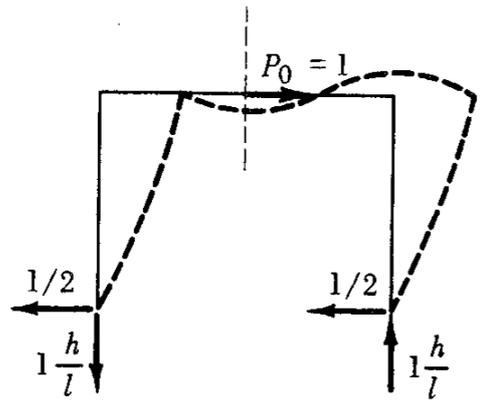


Fig. 73.2

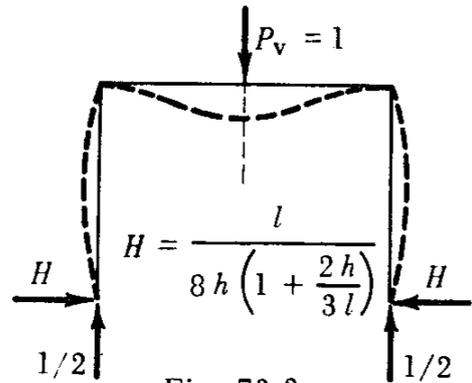


Fig. 73.3

Con considerazioni analoghe alle precedenti si vede che il lavoro indiretto compiuto dalla coppia \bar{M} è positivo; pertanto lo spostamento del punto D che essa provoca, avviene verso il basso.

OSSERVAZIONE. - In entrambi i casi, per semplicità di calcolo, si è applicata in D la forza unitaria, orizzontale o verticale. Questo accorgimento è stato adottato per determinare direttamente $\xi_{D, \bar{M}}$ o $\eta_{D, \bar{M}}$, le cui espressioni, altrimenti, sarebbero state dedotte a meno del valore della forza P_0 o P_v .

Si noti altresì come in questo caso il teorema di BETTI acquisti la stessa forma applicativa del principio dei lavori virtuali.

* * *

74. - Determinare mediante il teorema di CASTIGLIANO lo spostamento orizzontale del nodo D , e verticale del nodo C , della struttura reticolare di fig. 74.1.

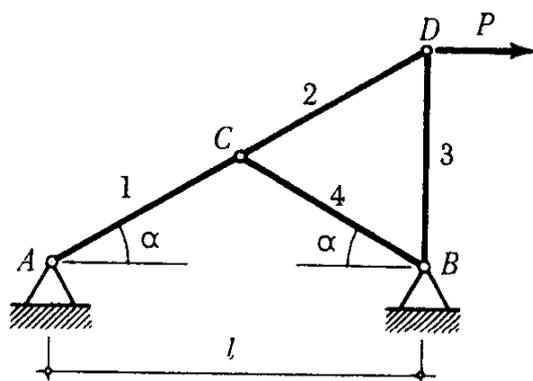


Fig. 74.1

Come è noto il teorema di CASTIGLIANO esprime la relazione generale:

$$\frac{\partial L_i}{\partial F} = \delta_F$$

ove L_i è il lavoro interno di deformazione compiuto dalla struttura per effetto dei carichi ad essa applicati, e δ_F è la componente dello spostamento del punto d'applicazione della forza generica F , valutato nella direzione della forza stessa.

Nel caso della determinazione dello spostamento orizzontale del nodo D , poiché la forza P agisce in questa stessa direzione ed è l'unica applicata alla struttura, si ha semplicemente:

$$\frac{dL_i}{dP} = \xi_D.$$

Le reazioni dei vincoli hanno il senso di fig. 74.2 e valgono:

$$l = \frac{Ph}{l} \quad H_A = P.$$

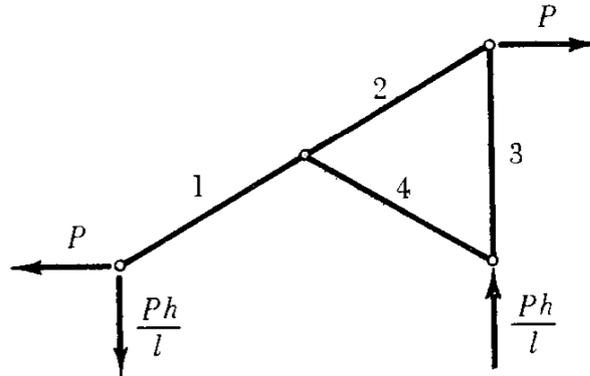


Fig. 74.2

Gli sforzi nelle aste sono:

$$S_1 = S_2 = + \frac{P}{\cos \alpha}$$

$$S_3 = -P \operatorname{tg} \alpha$$

$$S_4 = 0.$$

Si ha:

$$\begin{aligned} L_i &= \sum_1^3 \frac{S^2 d}{2EA} = 2 \left(\frac{P}{\cos \alpha} \right)^2 \frac{l}{2EA} + (-P \operatorname{tg} \alpha)^2 \frac{l \operatorname{tg} \alpha}{2EA} = \\ &= \frac{P^2 l}{2EA \cos^3 \alpha} (1 + \operatorname{sen}^3 \alpha). \end{aligned}$$

Derivando:

$$\xi_D = \frac{dL}{dP} = \frac{Pl}{EA \cos^3 \alpha} (1 + \operatorname{sen}^3 \alpha).$$

Il calcolo di η_C mediante il teorema di CASTIGLIANO, è meno spontaneo, anche se egualmente semplice, perché nel punto C non agisce alcuna forza.

Si può infatti pensare applicata in C la forza fittizia X nella direzione verticale dello spostamento cercato, e si calcola il lavoro di deformazione compiuto dal carico effettivo e dalla X aggiunta (fig. 74.3).

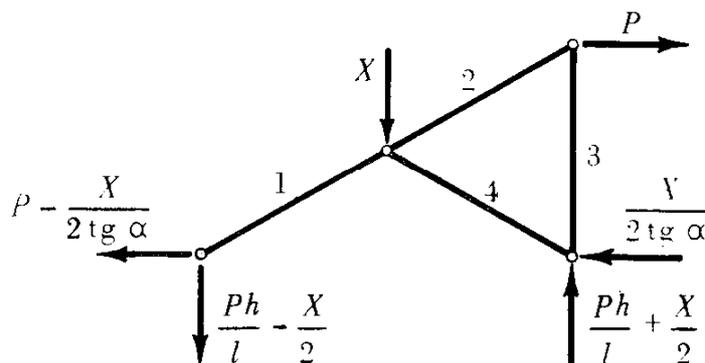


Fig. 74.3

Gli sforzi nelle aste valgono:

$$S_1 = \left(\frac{P}{\cos \alpha} - \frac{V}{2 \operatorname{sen} \alpha} \right)$$

$$S_2 = + \frac{P}{\cos \alpha}$$

$$S_3 = -P \operatorname{tg} \alpha$$

$$S_4 = - \frac{X}{2 \operatorname{sen} \alpha}.$$

Ovviamente la $\frac{\partial L}{\partial X}$ è estesa ai termini delle sole aste 1 e 4. Si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial X} &= \frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{S_1^2}{2EA} \left(\frac{l}{2 \cos \alpha} \right) + \frac{S_4^2}{2EA} \left(\frac{l}{2 \cos \alpha} \right) \right] = \\ &= \left(- \frac{P}{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} + \frac{X}{\operatorname{sen}^2 \alpha} \right) \frac{l}{4EA \cos \alpha}. \end{aligned}$$

Ponendo adesso $X = 0$ nell'espressione di $\frac{\partial L}{\partial X}$ giacché la forza X è fittizia e pertanto agisce sulla struttura con intensità nulla:

$$\eta_C = \frac{\partial L}{\partial X_{(X=0)}} = - \frac{Pl}{4EA \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha}$$

Il segno negativo indica che lo spostamento del punto C avviene in senso contrario a quello di X , cioè verso l'alto.

75. - Determinare mediante il teorema di CASTIGLIANO l'abbassamento dell'estremo libero D dello sbalzo DA , solidale con l'arco a due cerniere AB (fig. 75.1).

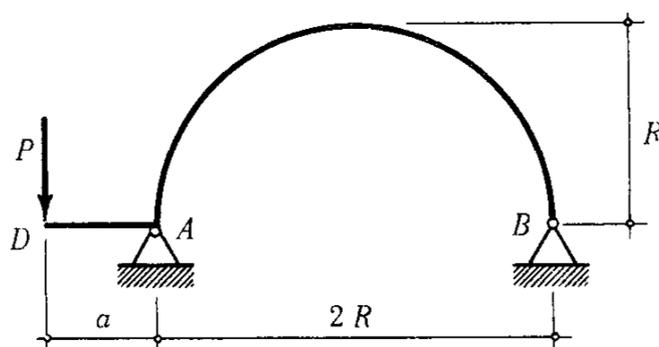


Fig. 75.1

La struttura è una volta iperstatica: le componenti verticali delle reazioni sono staticamente determinate ed hanno il medesimo valore dell'esercizio 70 (fig. 75.2):

$$V_A = P \left(1 + \frac{a}{2R} \right); \quad V_B = \frac{Pa}{2R}.$$

Le componenti orizzontali H sono incognite e costituiscono un sistema di forze equilibrato.

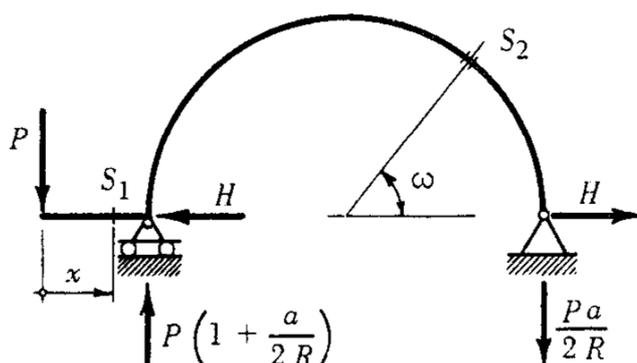


Fig. 75.2

Pertanto è necessario scrivere due equazioni di natura elastica, una per risolvere l'indeterminazione della struttura ed una per calcolare lo spostamento richiesto.

RISOLUZIONE DELLA STRUTTURA IPERSTATICA.

Assumiamo la struttura principale di fig. 75.2; ad essa il teorema di CASTIGLIANO va applicato nella forma $\frac{\partial L_i}{\partial H} = 0$.

Il momento flettente nella struttura vale:

$$\begin{aligned} \text{sbalzo } DA: \quad M_1 &= -Px \\ \text{arco } BA: \quad M_2 &= \left[HR \operatorname{sen} \omega - \frac{Pa}{2} (1 - \cos \omega) \right]. \end{aligned}$$

Il lavoro interno di deformazione è:

$$\begin{aligned} L_i &= \int_0^a \frac{P^2 x^2 dx}{2 EJ_1} + \int_0^\pi \left[HR \operatorname{sen} \omega - \frac{Pa}{2} (1 - \cos \omega) \right]^2 \frac{R d\omega}{2 EJ_2} = \\ &= \frac{P^2 a^3}{6 EJ_1} + \frac{\pi H^2 R^3}{4 EJ_2} - H \frac{Pa R^2}{EJ_2} + \frac{3\pi P^2 a^2 R}{16 EJ_2}. \end{aligned}$$

Derivando:

$$\frac{\partial L_i}{\partial H} = \frac{\pi HR^3}{2 EJ_2} - \frac{Pa R^2}{EJ_2} = 0.$$

Da cui:

$$H = \frac{2}{\pi} \frac{Pa}{R}.$$

Come si poteva facilmente prevedere il termine che esprime la deformazione della mensola non influenza l'espressione di H il cui valore dipende dalle caratteristiche flessionali del solo arco.

DETERMINAZIONE DELLO SPOSTAMENTO η_D .

In questo caso il teorema di CASTIGLIANO si impiega nella forma:

$$\frac{\partial L_i}{\partial P} = \eta_D.$$

È sufficiente sostituire il valore di H nell'espressione di L_i e derivare rispetto a P .

$$\begin{aligned} L_i &= \frac{P^2 a^3}{6 EJ_1} + \frac{\pi \left(\frac{2}{\pi} \cdot \frac{Pa}{R} \right)^2 R^3}{4 EJ_2} - \frac{2}{\pi} \frac{Pa}{R} \frac{Pa R^2}{EJ_2} + \frac{3\pi}{16} \frac{P^2 a^2 R}{EJ_2} = \\ &= \frac{P^2 a^3}{6 EJ_1} + \left(\frac{3\pi}{16} - \frac{1}{\pi} \right) \frac{P^2 a^2 R}{EJ_2}. \\ \frac{\partial L_i}{\partial P} &= \frac{dL_i}{dP} = \frac{Pa^3}{3 EJ_1} + \left(\frac{3\pi^2 - 16}{8\pi} \right) \cdot \frac{Pa^2 R}{EJ_2} = \eta_D. \end{aligned}$$

Anche in questo caso (così come nell'esercizio 70) il primo termine è la freccia della mensola DA , ed il secondo è il contributo $\varphi_A \cdot a$ dovuto alla rotazione della sezione sulla cerniera.

Si può inoltre notare che il coefficiente numerico $\frac{3\pi^2 - 16}{8\pi} = 0,54$ è minore di quello corrispondente $\frac{\pi - 2}{2} = 0,57$ ottenuto nell'esercizio 70. Ciò dipende dalla maggiore rigidità dell'arco a due cerniere, in confronto a quello isostatico a tre cerniere; di conseguenza la rotazione della sezione A dell'arco iperstatico è minore.

OSSERVAZIONE. - Se si deve risolvere una struttura una volta staticamente indeterminata, o calcolare lo spostamento di un punto di una struttura isostatica, mediante il teorema di CASTIGLIANO, questo va applicato una sola volta e non è necessario determinare l'espressione completa del lavoro di deformazione. Risulta invece più semplice eseguire direttamente la derivazione entro il segno d'integrale (o di sommatoria, nel caso di struttura reticolare).

Cioè:

$$\frac{\partial}{\partial F} \int_s \frac{M^2 ds}{2 EJ} = \int_s \frac{\partial}{\partial F} \left(\frac{M^2 ds}{2 EJ} \right) = \int_s \frac{\partial M}{\partial F} \cdot \frac{M ds}{EJ}.$$

Oppure:

$$\frac{\partial}{\partial F} \sum \frac{S^2 d}{2 EA} = \sum \frac{\partial}{\partial F} \cdot \frac{S^2 d}{2 EA} = \sum \frac{\partial S}{\partial F} \cdot \frac{S d}{EA}.$$

Gli esempi contenuti negli esercizi 76 e 77 chiariranno ulteriormente la convenienza di questo procedimento.

76. - Risolvere la struttura di fig. 76.1, mediante il teorema di CASTIGLIANO.

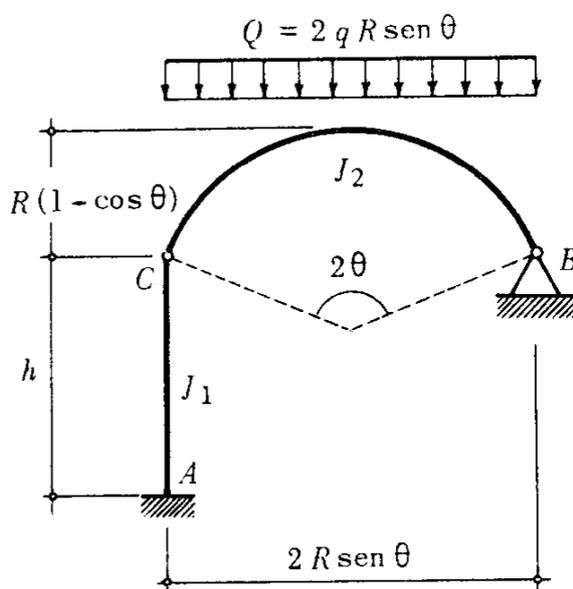
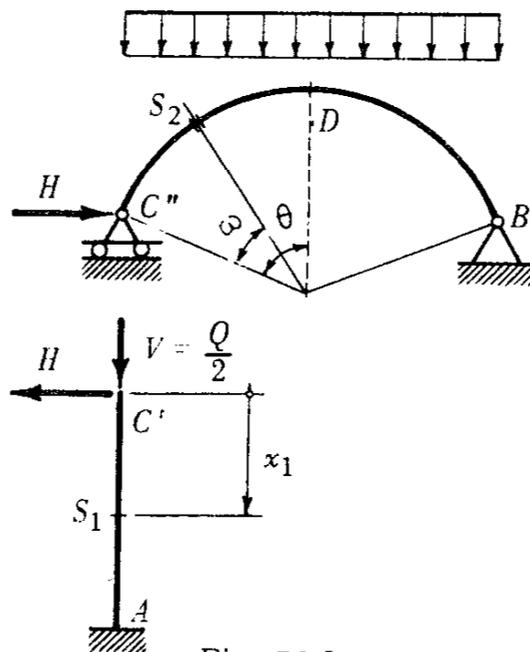


Fig. 76.1

La struttura è una volta iperstatica ed una volta staticamente indeterminata.

Possiamo, ad esempio, svincolare in corrispondenza della cerniera



interna separando le due parti, piedritto ed arco, aventi diverse caratteristiche (fig. 76.2).

Osserviamo che per la risoluzione di questo problema iperstatico è lecitamente trascurabile la deformazione assiale in confronto a quella provocata dal momento flettente. Infatti la curva delle pressioni, costituita, all'evidenza, dalla retta inclinata dell'azione interna della cerniera C per il piedritto AC , e da una parabola del secondo ordine per l'arco circolare CB , si discosta notevolmente dall'asse geometrico di tutta la struttura. Questo fatto si verifica sempre, qualunque sia la rigidezza flessionale del piedritto, che si comporta, nei riguardi dell'arco, come una cerniera cedevole orizzontalmente. In accordo con queste considerazioni si può rappresentare la struttura principale costituita dalla mensola AC' il cui estremo libero non si sposta verticalmente per l'indeformabilità assiale dell'asta, e dall'arco isostatico $C''B$, vincolato in C con un carrello a piano di scorrimento orizzontale.

La condizione di congruenza che determina l'incognita H è che sia nullo lo spostamento relativo orizzontale delle due facce C' e C'' . Applicando il teorema di CASTIGLIANO e derivando direttamente sotto il segno d'integrale si ha:

$$\frac{\partial L_i}{\partial H} = \int_{AC} \frac{\partial M_1}{\partial H} \cdot \frac{M_1 dx_1}{EJ} + \int_{CB} \frac{\partial M_2}{\partial H} \cdot \frac{M_2 ds_2}{EJ} = 0.$$

Osserviamo inoltre che l'arco è sottoposto ad una condizione simmetrica di carico (è: $H_C = H_B$ e $V_C = V_B = \frac{Q}{2}$) pertanto è sufficiente studiarne una metà e raddoppiare il risultato.

Con le indicazioni di fig. 76.2, assumendo positivi i momenti di senso orario valutati con le forze che precedono la sezione generica, si ha:

$$M_1 = +Hx_1$$

$$M_2 = \frac{QR}{2} [\text{sen } \theta - \text{sen } (\theta - \omega)] - \frac{qR^2}{2} [\text{sen } \theta - \text{sen } (\theta - \omega)]^2 - \\ - HR [\cos (\theta - \omega) - \cos \theta]$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial H} = +x_1$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial H} = -R [\cos (\theta - \omega) - \cos \theta]$$

Sostituendo:

$$\int_0^h x_1 \frac{Hx_1 dx_1}{EJ_1} + 2 \int_0^\theta [-R \cos (\theta - \omega) - \cos \theta] \left\{ \frac{QR}{2} [\text{sen } \theta - \text{sen } (\theta - \omega)] - \right. \\ \left. - \frac{qR^2}{2} [\text{sen } \theta - \text{sen } (\theta - \omega)]^2 - HR [\cos (\theta - \omega) - \cos \theta] \right\} \frac{Rd\omega}{EJ_2} = 0.$$

Eseguendo le integrazioni, semplificando e risolvendo, si ottiene il valore dell'incognita iperstatica H .

CONSIDERAZIONI DI CARATTERE GENERALE.

Si noti che $\frac{\partial M}{\partial H}$ è l'espressione che il momento flettente assume se in esso si pongono zero i carichi ed $H = 1$, ed equivale al momento generato dal sistema fittizio di forze $H = 1$ applicato dall'esterno alla struttura principale.

Pertanto il teorema di CASTIGLIANO, pur partendo da un concetto diverso, conduce alla medesima equazione risolutiva del principio dei lavori virtuali.

CONSIDERAZIONI DI TIPO CINEMATICO.

Più semplicemente si sarebbe potuto considerare la struttura costituita dal solo arco CB e valutare il piedritto un vincolo esterno, il cui cedimento orizzontale è la freccia provocata dalla spinta H .

Si sarebbe espresso direttamente:

$$2 \int_0^\theta \frac{\partial M_2}{\partial H} \cdot \frac{M_2 R d\omega}{EJ_2} = - \frac{Hh^3}{3 EJ_1}$$

ove il segno negativo al secondo membro indica, poiché si tratta di lavori, che lo spostamento del punto C'' cui è applicata la H avviene in senso opposto a questa.

RISOLUZIONE NUMERICA.

Sia:

$$R = 8,00 \text{ m}; \quad \theta = 60^\circ; \quad h = 4,00 \text{ m}; \quad J_1 = 3 J_2; \quad q = 1000 \text{ kg/m}$$

È:

$$Q = 2qR \operatorname{sen} \theta \cong 13856 \text{ kg.}$$

Risulta:

$$H = 13856 \frac{0,109}{0,268 + 0,014} \cong 5350 \text{ kg.}$$

Si noti che la flessibilità del piedritto riduce di circa il 5,6 % il valore della spinta H esistente nell'arco iperstatico CB a due cerniere.

Al confronto la spinta del corrispondente arco isostatico, a tre cerniere C , D e B , vale:

$$H = \frac{q(2R \operatorname{sen} \theta)^2}{8R(1 - \cos \theta)} = \frac{1000 \cdot (13,856)^2}{8 \cdot 4} = 6000 \text{ kg.}$$

77. - Risolvere mediante il teorema di CASTIGLIANO l'esercizio 43 del Cap. I (fig. 77.1).

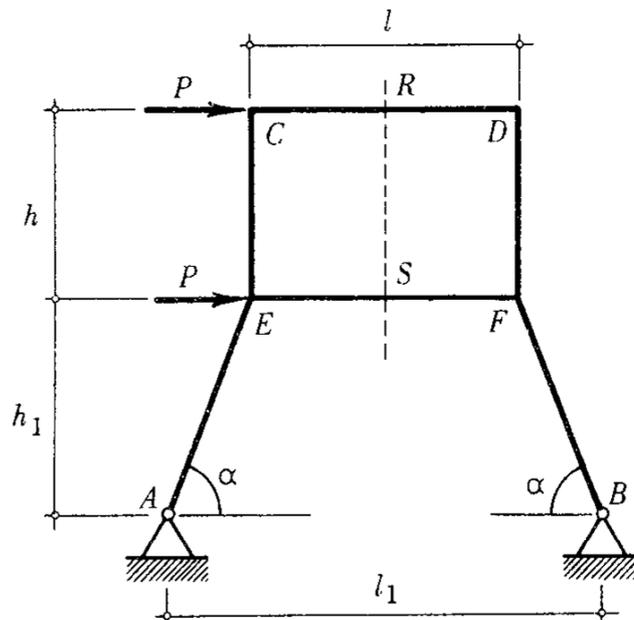


Fig. 77.1

Si è già visto come la lecita trascurabilità della deformazione assiale rende antisimmetrica la condizione di carico assegnata. Conseguentemente il comportamento delle sezioni R ed S poste sull'asse di simmetria, sia dal punto di vista delle azioni interne esistenti in esse, che dei loro spostamenti, è rappresentabile mediante due carrelli a piano di scorrimento orizzontale. Da questa schematizzazione discende che la struttura ha un solo grado di indeterminazione statica.

Sfruttiamo l'antisimmetria esistente e assumiamo la struttura principale di fig. 77.2, completamente svincolata in R ed ivi soggetta allo sforzo di taglio incognito T_R .

Il teorema di CASTIGLIANO va applicato nella forma $\frac{\partial L_i}{\partial T_R} = 0$.

Ossia derivando sotto al segno d'integrale:

$$\int \frac{\partial M}{\partial T_R} \cdot \frac{M dx}{EJ} = 0.$$

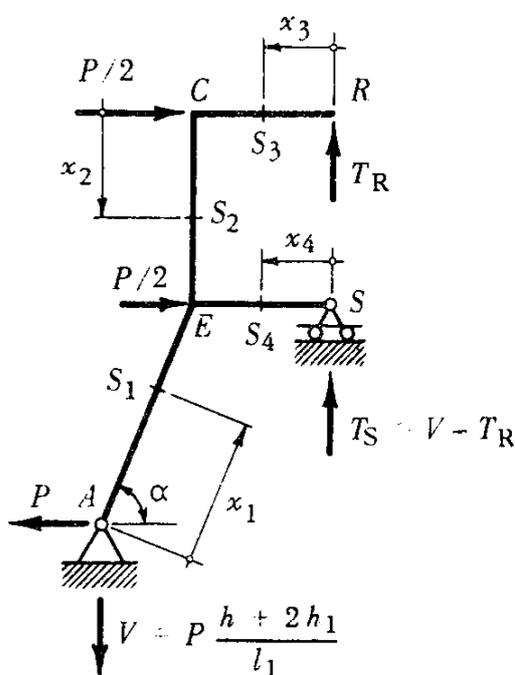


Fig. 77.2

Il momento nei vari tratti della struttura e la sua derivata rispetto a T_R valgono:

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \left[P \operatorname{sen} \alpha - P \left(\frac{h + 2h_1}{l_1} \right) \cos \alpha \right] x_1 & \frac{\partial M_1}{\partial T_R} &= 0 \\
 M_2 &= T_R \cdot \frac{l}{2} - \frac{P}{2} x_2 & \frac{\partial M_2}{\partial T_R} &= \frac{l}{2} \\
 M_3 &= T_R \cdot x_3 & \frac{\partial M_3}{\partial T_R} &= x_3 \\
 M_4 &= \left[P \left(\frac{h + 2h_1}{l_1} \right) - T_R \right] x_4 & \frac{\partial M_4}{\partial T_R} &= -x_4
 \end{aligned}$$

Si ha:

$$\begin{aligned}
 \int_0^h \frac{l}{2} \left(T_R \frac{l}{2} - \frac{P}{2} x_2 \right) \frac{dx_2}{EJ} + \int_0^{l/2} x_3 \cdot (T_R \cdot x_3) \frac{dx_3}{EJ} + \\
 + \int_0^{l/2} (-x_4) \left[P \left(\frac{h + 2h_1}{l_1} \right) - T_R \right] x_4 \frac{dx_4}{EJ} = 0.
 \end{aligned}$$

Eseguendo le integrazioni e risolvendo si ottiene:

$$T_R = P \frac{h^2 + \frac{h + 2h_1}{l_1} \cdot \frac{l^2}{3}}{2l \left(h + \frac{l}{3} \right)}.$$

Si noti ancora una volta la semplicità risolutiva del metodo energetico in confronto alla laboriosità, analitica e concettuale, del procedimento cinematico, quale essa risultava nell'esercizio 43 del Cap. I.

La risoluzione mediante il teorema di CASTIGLIANO mette anche in evidenza che la deformazione dell'asta AE non influenza il valore dell'incognita iperstatica T_R . Infatti l'indeterminazione statica della struttura è limitata al telaio chiuso $ECDF$; i piedritti AE e BF si comportano come due mensole, soggette negli estremi liberi a forze note antisimmetriche.

* * *

78. - Risolvere l'anello circolare di fig. 78.1 sottoposto nella metà ABC ad una variazione termica uniforme $+\Delta t$.

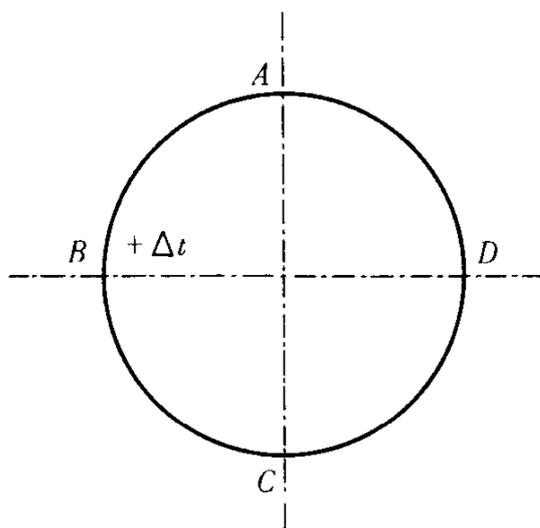


Fig. 78.1

Possiamo decomporre l'influenza termica in due distinte condizioni: effetto $+\frac{\Delta t}{2}$ uniforme su tutto l'anello ed effetto $+\frac{\Delta t}{2}$ rispettivamente sul semianello ABC e CDA .

La prima condizione, simmetrica rispetto ad entrambi i diametri, verticale ed orizzontale, fa dilatare uniformemente l'anello senza provocare tensioni interne.

La seconda, simmetrica rispetto al diametro BD e antisimmetrica rispetto ad AC , è l'unica a generare uno stato di sollecitazione, come si comprende facilmente tagliando la struttura in A e in C ed osservando che queste sezioni traslerebbero relativamente il senso verticale della quantità $\left(2R\alpha\frac{\Delta t}{2}\right)$ allontanamento per A' e C' del semianello di sinistra, avvicinamento per A'' e C'' del semianello di destra,

Risolviamo il problema applicando il teorema di Castigliano. È noto che questo fornisce gli spostamenti dei punti di una struttura elastica provocati dalle forze agenti, e non da altre cause anelastiche, quali le variazioni termiche.

È necessario pertanto poter determinare a parte l'effetto di queste ultime ed associarlo poi a quello delle forze.

Le sezioni A e C , poste sull'asse di antisimmetria, sono sollecitate solo da uno sforzo tagliante X e non compiono spostamenti verticali relativi. Esse per ragioni di antisimmetria, ruotano e traslano solamente in direzione orizzontale (fig. 78.2).

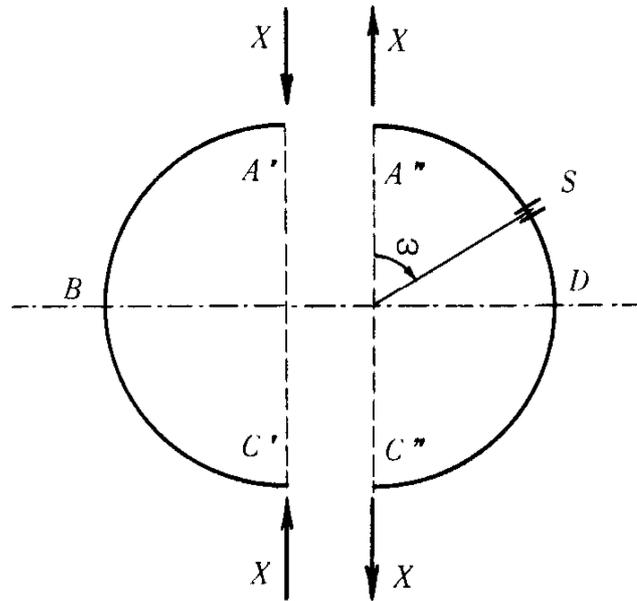


Fig. 78.2

L'effetto termico causa un avvicinamento relativo verticale delle due facce A'' e C'' pari a:

$$\eta'_{\text{rel. (A'' - C'')}} = 2R \frac{\alpha \Delta t}{2} = \alpha \Delta t \cdot R$$

Il teorema di CASTIGLIANO fornisce per le stesse facce un allontanamento relativo:

$$\eta''_{\text{rel. (A'' - C'')}} = \int_0^\pi \frac{dM}{dX} \cdot \frac{M ds}{EJ} = \int_0^\pi R \text{sen } \omega \cdot \frac{XR \text{sen } \omega \cdot R d\omega}{EJ} = \frac{\pi}{2} \frac{XR^3}{EJ}$$

In totale deve essere:

$$\eta_{\text{rel. (A'' - C'')}} = 0$$

Cioè:

$$\alpha \Delta t R = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{XR^3}{EJ}$$

Da cui:

$$X = \frac{EJ \alpha \Delta t}{R^2} \frac{2}{\pi}$$

Il diagramma del momento flettente è costituito dall'asse geometrico della struttura riferito al diametro verticale AC .

La curva delle pressioni dalla stessa retta d'azione della X .

79. - Risolvere mediante il teorema di MENABREA la struttura di fig. 79.1, una volta iperstatica ed una volta staticamente indeterminata.

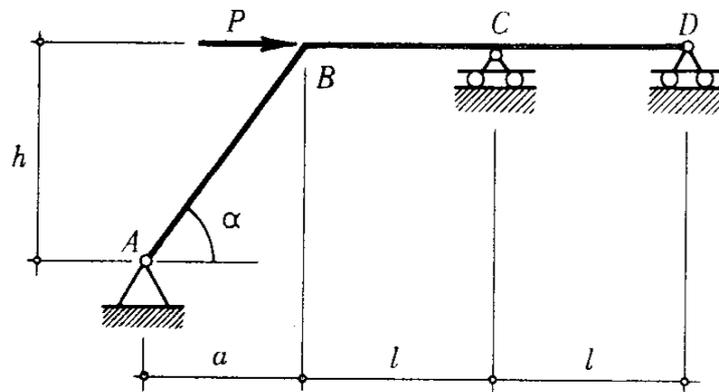


Fig. 79.1

Il teorema di MENABREA esprime la condizione che in una struttura iperstatica, a vincoli rigidi, le reazioni di questi assumono il valore che rende minimo il lavoro interno di deformazione.

Cioè:

$$d_{(X_r)} L_i = 0.$$

Si comprende come anche questa relazione conduca alla medesima espressione fornita dal principio dei lavori virtuali o dal teorema di CASTIGLIANO.

Ovviamente per la risoluzione di questo problema iperstatico è lecito trascurare la deformazione assiale della struttura; infatti le reazioni dei carrelli C e D sono comunque verticali e la curva delle pressioni non può mai coincidere totalmente con l'asse della struttura. Il prevedibile scorrimento orizzontale dei carrelli non inficia la validità del teorema di MENABREA. Questo è legato solo all'assenza di cedimenti dei vincoli nel senso delle loro reazioni e non è, naturalmente, influenzato dagli spostamenti che questi possono compiere liberamente.

Svincoliamo in D e assumiamo quale struttura principale la trave isostatica ad asse spezzato ABC e sbalzo CD . Esprimiamo le reazioni dei vincoli A e C e il momento flettente nelle singole aste. Con le indicazioni di fig. 79.2 è:

Reazioni:

$$H_A = P$$

$$V_C = \frac{P a \operatorname{tg} \alpha + X(a + 2l)}{(a + l)}$$

$$V_A = V_C - X = \frac{P a \operatorname{tg} \alpha + Xl}{a + l}.$$

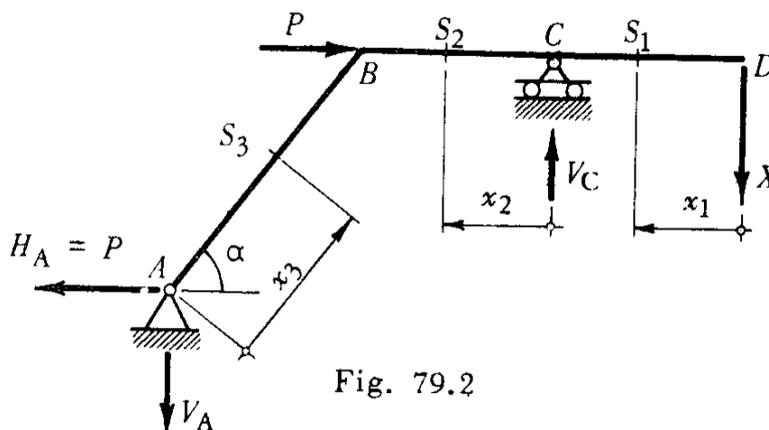


Fig. 79.2

Momento flettente:

$$M_1 = -X x_1$$

$$M_2 = V_C \cdot x_2 - X(x_2 + l) = \frac{Pa \operatorname{tg} \alpha}{a+l} x_2 + Xl \left(\frac{x_2}{a+l} - 1 \right)$$

$$M_3 = (P \operatorname{sen} \alpha - V_A \cdot \cos \alpha) x_3 = (P \operatorname{sen} \alpha - X \cos \alpha) \frac{l}{a+l} x_3.$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial X} = -x_1$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial X} = l \left(\frac{x_2}{a+l} - 1 \right)$$

$$\frac{\partial M_3}{\partial X} = -\frac{l}{a+l} \cos \alpha \cdot x_3.$$

Si ha, derivando sotto il segno d'integrale:

$$d_{(X)} L_i = \int_{AD} \frac{\partial M_i}{\partial X} \cdot \frac{M_i dx_i}{EJ} = 0.$$

Sostituendo:

$$\begin{aligned} & \int_0^l (-x_1) \frac{(-Xx_1) dx_1}{EJ} + \int_0^l \left[l \left(\frac{x_2}{a+l} - 1 \right) \right] \left[\frac{Pa \operatorname{tg} \alpha}{a+l} x_2 + Xl \left(\frac{x_2}{a+l} - 1 \right) \right] \frac{dx_2}{EJ} + \\ & + \int_0^{\frac{a}{\cos \alpha}} \left[-\frac{l}{a+l} \cos \alpha \cdot x_3 \right] \left[(P \operatorname{sen} \alpha - X \cos \alpha) \frac{l}{a+l} x_3 \right] \frac{dx_3}{EJ} = 0. \end{aligned}$$

Eseguendo le integrazioni, semplificando e risolvendo, risulta:

$$X = P \frac{\left[\frac{a^2}{\cos \alpha} + \frac{l}{2} (l + 3a) \right]}{(a+l)(4a+3l) + \left(\frac{l^3}{a} + \frac{a^2}{\cos \alpha} \right) l} \frac{a}{l} \operatorname{tg} \alpha.$$

RISOLUZIONE NUMERICA E CALCOLO DI RESISTENZA.

La struttura abbia le dimensioni:

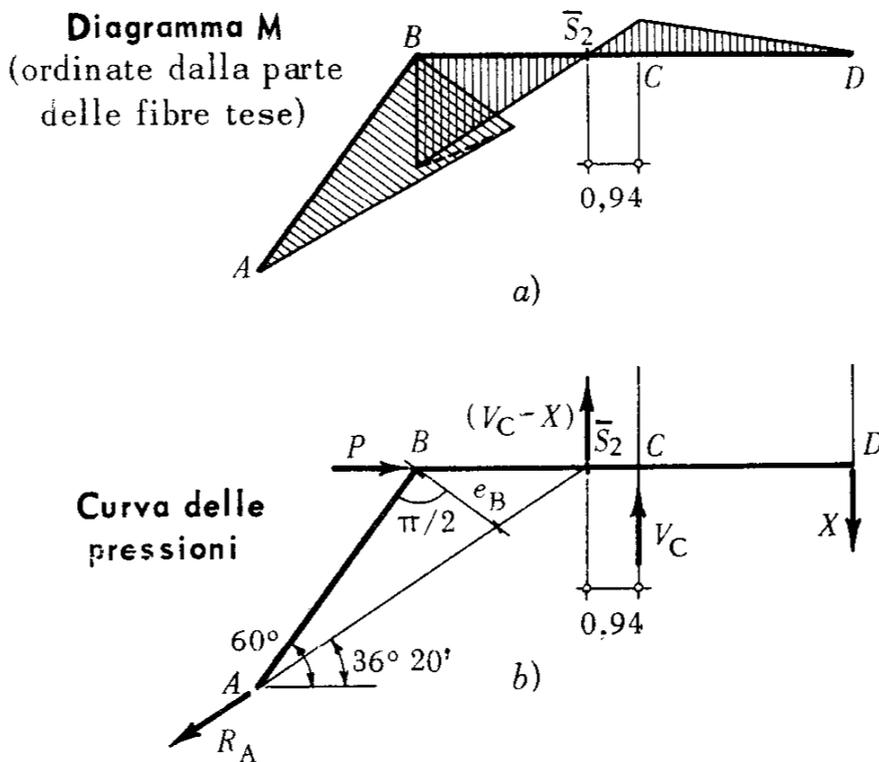
$$l = 5,00 \text{ m}; \quad a = 3,00 \text{ m}; \quad \alpha = 60^\circ.$$

Sia $P = 1000 \text{ kg}$. Si ottiene:

$$X \cong 139 \text{ kg}; \quad V_C = 875 \text{ kg}; \quad V_A = 736 \text{ kg}$$

La retta d'azione della reazione della cerniera A forma con l'orizzontale l'angolo $\omega = \arctg \frac{V_A}{P} = 36^\circ 20'$ e incontra l'asta BC nella sezione \bar{S}_2 di momento nullo, definita dall'ascissa $\bar{x}_2 = \frac{Xl}{V_C - X} = 0,94 \text{ m}$.

In fig. 79.3-a) e b) sono rappresentati il diagramma del momento flettente e la curva delle pressioni. È:



$$M_C = -139 \cdot 5 = -695 \text{ kgm}$$

$$M_B = -139 \cdot 10 + 875 \cdot 5 = +2885 \text{ kgm}$$

$$N_{BC} = \sqrt{r_A^2 + P^2} \left[\cos(60 - 36^\circ 20') \right] = 1242 \cdot 0,916 = 1140 \text{ kg.}$$

$$e_{BC} = \frac{2885}{1140} = 2,53 \text{ m.}$$

Progettiamo la struttura in PN a I ($K_F = 1600 \text{ kg/cm}^2$).

Si ha:

$$W = \frac{288500}{1600} = 180 \text{ cm}^3.$$

Adottiamo il I PN 20, la cui sezione ha caratteristiche:

$$A = 33,4 \text{ cm}^2; \quad W = 214 \text{ cm}^3.$$

Il calcolo di verifica a tensoflessione per le fibre interne della sezione di sommità del piedritto AB fornisce:

$$\sigma_{\max} = \frac{1140}{33,4} + \frac{288500}{214} \cong (34 + 1350) < K_F.$$

SPOSTAMENTO DEL NODO B .

Lo spostamento δ_B del nodo B avviene in direzione normale all'asta AB , ed è possibile calcolarlo dopo avere risolto l'indeterminazione statica della struttura.

Si può usare, indifferentemente, il teorema di CLAPEYRON, di CASTIGLIANO o il principio dei lavori virtuali. Se si procedesse, ad esempio, con quest'ultimo metodo, si potrebbe adottare come sistema fittizio la forza unitaria applicata in B , ed agente, anziché nella direzione nota dello spostamento cercato, secondo quella orizzontale del carico esterno. Questo piccolo accorgimento offre il vantaggio di potere

direttamente dedurre le reazioni vincolari e le azioni interne fittizie, dalle espressioni di quelle reali, ponendo in esse $P = 1$.

Così facendo si giungerebbe alla determinazione della componente orizzontale ξ_B , dalla cui conoscenza discende immediatamente:

$$\delta_B = \frac{\xi_B}{\text{sen } \alpha}.$$

* * *

80. - Risolvere mediante il teorema di MENABREA la struttura di fig. 80.1.

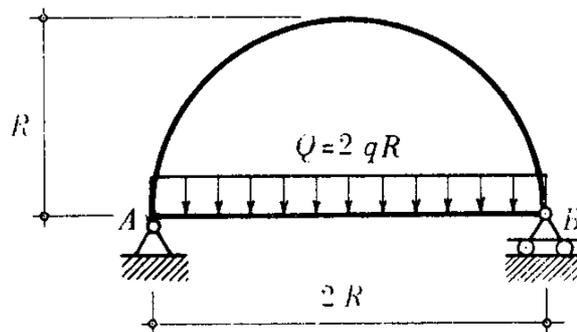


Fig. 80.1

La struttura è esternamente isostatica; internamente è due volte iperstatica e due volte staticamente indeterminata.

Sezioniamo l'arco all'attacco con la cerniera interna B; la struttura principale è costituita dalla trave isostatica AB' con sbalzo AB' ad asse semicircolare, al cui estremo libero B' sono applicate le azioni interne incognite X ed Y , esplicitate dallo svincolamento (fig. 80.2). Poiché si può lecitamente trascurare, nella risoluzione del problema iperstatico, la deformazione assiale, il carrello non si sposta, e le due condizioni di congruenza sono:

$$\xi_{B'} = 0 \quad \eta_{B'} = 0.$$

Il senso di X e Y è facilmente prevedibile. Il carico q deforma la

trave AB e fa ruotare in senso orario la sezione A ; per effetto di ciò l'estremo B' tende a spostarsi verticalmente verso il basso.

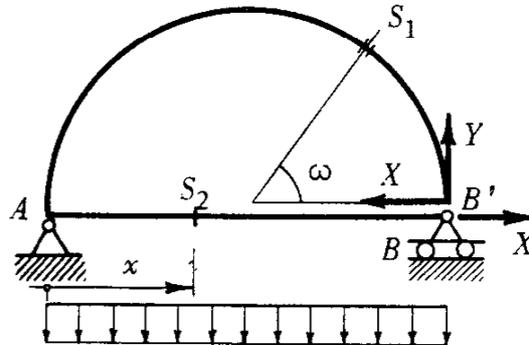


Fig. 80.2

Pertanto Y è applicata a B' con senso verso l'alto, X , a sua volta, è diretta a sinistra ed ha un'azione concorde con il carico q , per quanto riguarda il senso degli spostamenti verticali di B' , mentre ne annulla lo spostamento orizzontale verso destra, provocato dalla Y stessa.

Il punto B' si comporta come perfettamente incernierato nel piano, e le due condizioni di congruenza, espresse con il teorema di MENABREA sono:

$$d_{(X)}L = 0 \quad d_{(Y)}L = 0.$$

Ossia, con le funzioni derivate:

$$\frac{\partial L}{\partial X} = \int_s \frac{\partial M}{\partial X} \frac{M ds}{EJ} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = \int_s \frac{\partial M}{\partial Y} \frac{M ds}{EJ} = 0.$$

Il momento flettente e le sue derivate hanno l'espressione:

arco $B'A$: $M_1 = XR \operatorname{sen} \omega - YR(1 - \cos \omega)$

$$\frac{\partial M_1}{\partial X} = R \operatorname{sen} \omega$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial Y} = -R(1 - \cos \omega)$$

trave AB : $M_2 = \frac{Q}{2}x - q \frac{x^2}{2} - Y(2R - x)$

$$\frac{\partial M_2}{\partial X} = 0$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial Y} = (x - 2R).$$

Sostituendo:

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_0^\pi R \operatorname{sen} \omega [XR \operatorname{sen} \omega - YR(1 - \cos \omega)] \frac{R d\omega}{EJ} = 0 \\ & \int_0^\pi [-R(1 - \cos \omega)] [XR \operatorname{sen} \omega - YR(1 - \cos \omega)] \frac{R d\omega}{EJ} + \\ & \quad + \int_0^{2R} (x - 2R) \left[\frac{Q}{2}x - q \frac{x^2}{2} - Y(2R - x) \right] \frac{dx}{EJ} = 0. \end{aligned} \right.$$

Sviluppando gli integrali, semplificando e risolvendo, nel caso che la struttura abbia sezione costante, si ottiene:

$$Y = \frac{2\pi}{3\pi^2 + 16\pi - 48} Q = 0,197 Q$$

$$X = \frac{4}{\pi} Y = 0,262 Q.$$

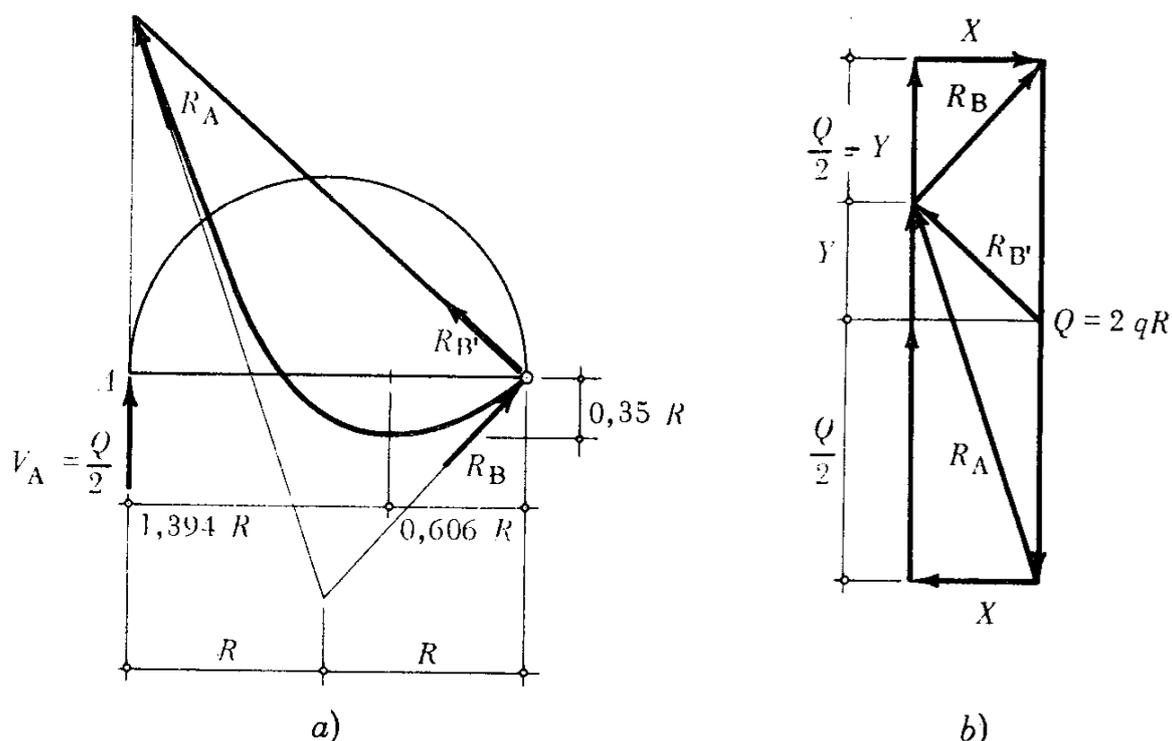


Fig. 80.3

In fig. 80.3-a) e b) sono rappresentate la *curva delle pressioni* e il *poligono delle forze*.

L'azione interna trasmessa dalla cerniera B all'arco vale:

$$R_{B'} = \sqrt{X^2 + Y^2} = 0,328 Q.$$

Le risultanti delle azioni interne agenti sulle sezioni estreme A e B della trave sono:

$$R_B = \sqrt{\left(\frac{Q}{2} - Y\right)^2 + X^2} = 0,361 Q$$

$$R_A = \sqrt{\left(\frac{Q}{2} + Y\right)^2 + X^2} = 0,724 Q.$$

La trave AB si comporta come incernierata in B e incastrata elasticamente in A .

Il momento d'incastro è:

$$M_A = -2YR = -0,394 QR.$$

Il massimo momento positivo agisce nella sezione d'ascissa:

$$x_0 = \frac{\frac{Q}{2} + Y}{q} = 1,394 R \quad (\text{ove è } T = 0)$$

e vale:

$$M_{\max} = \frac{\left(\frac{Q}{2} + Y\right)^2}{2q} - Y \cdot 2R = 0,092 QR.$$

Quivi la curva delle pressioni ha eccentricità:

$$e_{x_0} = \frac{0,092 QR}{0,262 Q} = 0,35 \cdot R.$$

81. - Risolvere mediante il teorema di MENABREA la struttura di fig. 81.1.

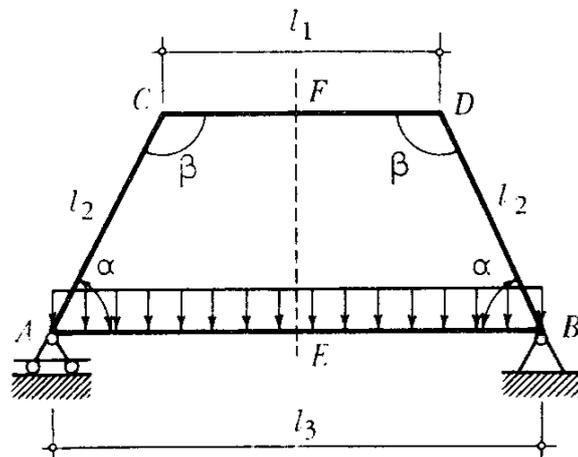


Fig. 81.1

Praticando in una struttura chiusa un taglio generico, una qualunque delle due facce messe in evidenza dal sezionamento non può compiere rispetto all'altra, per effetto della deformazione della struttura stessa, alcun movimento di traslazione o di rotazione. In questo senso

la continuità materiale agisce all'interno della struttura come un incastrato perfetto, ed è applicabile il teorema di MENABREA al fine di determinare tutte le componenti incognite dell'azione interna. Queste in generale sono tre in una struttura chiusa a maglia semplice; il loro numero si riduce se la struttura è dotata di cerniere interne, oppure se soddisfa, insieme ai carichi, a particolari condizioni di simmetria.

In questo caso (poiché le reazioni dei vincoli esterni sono entrambe verticali e valgono $\frac{Q}{2}$) la struttura è simmetrica rispetto all'asse EF , ed è all'interno due sole volte staticamente indeterminata.

Sfruttiamo la simmetria esistente e sezioniamo il telaio in F (fig. 81.2: le due facce F' ed F'' non ruotano e non traslano orizzontalmente, sia relativamente che in assoluto, mentre lo spostamento relativo verticale è nullo di per sé per ragioni di simmetria.

Le due condizioni di congruenza ovviamente sono $\xi_F = 0$ e $\varphi_F = 0$, e il teorema di MENABREA, applicato ad esse, si esprime nella forma:

$$d_{(N_F)} L_i = \int_s \frac{\partial M}{\partial N_F} \cdot \frac{M dx}{EJ} = 0 \quad d_{(M_F)} L_i = \int_s \frac{\partial M}{\partial M_F} \cdot \frac{M dx}{EJ} = 0.$$

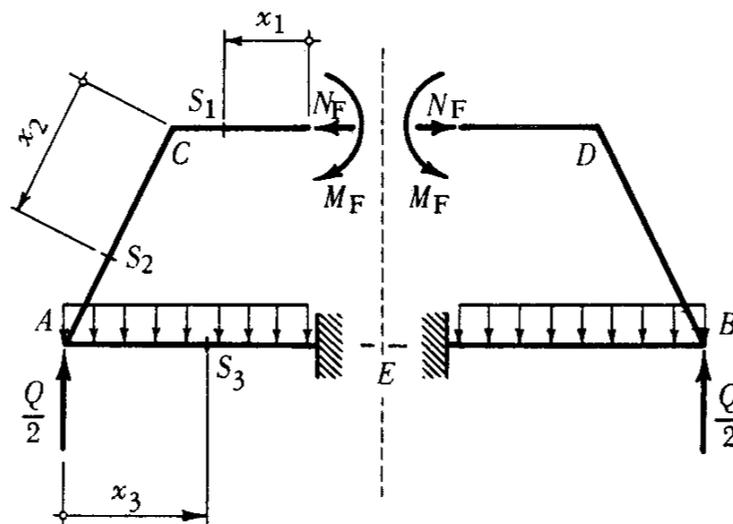


Fig. 81.2

Osserviamo che è sufficiente limitare gli integrali a metà struttura, poiché le due parti $EACF'$ e $EBDF''$ si comportano simmetricamente, e la sezione E soddisfa anch'essa alle medesime condizioni della sezione svincolata ($\xi_E = 0$; $\varphi_E = 0$).

Le azioni interne N_F e M_F , esplicitate dallo svincolamento, hanno il senso prevedibile di fig. 81.2. Esprimiamo il momento flettente e le sue derivate nei diversi tratti della struttura:

$$\text{asta } FC: \quad M_1 = +M_F$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial N_F} = 0 \qquad \frac{\partial M_1}{\partial M_F} = +1$$

$$\text{asta } CA: \quad M_2 = +M_F - N_F \cdot x_2 \operatorname{sen} \alpha$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial N_F} = -x_2 \operatorname{sen} \alpha \qquad \frac{\partial M_2}{\partial M_F} = +1$$

$$\text{asta } AE: \quad M_3 = +M_F - N_F l_2 \operatorname{sen} \alpha + \frac{Q}{2} x_3 - q \frac{x_3^2}{2}$$

$$\frac{\partial M_3}{\partial N_F} = -l_2 \operatorname{sen} \alpha \qquad \frac{\partial M_3}{\partial M_F} = +1$$

Sostituendo queste espressioni nelle due condizioni di congruenza si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{l_2} (-x_2 \operatorname{sen} \alpha) (+M_F - N_F x_2 \operatorname{sen} \alpha) \frac{dx_2}{EJ} + \int_0^{l_3/2} (-l_2 \operatorname{sen} \alpha) \cdot \\ \cdot \left[+M_F - N_F l_2 \operatorname{sen} \alpha + \frac{Q}{2} x_3 - q \frac{x_3^2}{2} \right] \frac{dx_3}{EJ} = 0 \\ \int_0^{l_1/2} (+1) (+M_F) \frac{dx_1}{EJ} + \int_0^{l_2} (+1) (+M_F - N_F x_2 \operatorname{sen} \alpha) \frac{dx_2}{EJ} + \int_0^{l_3/2} (+1) \cdot \\ \cdot \left[+M_F - N_F l_2 \operatorname{sen} \alpha + \frac{Q}{2} x_3 - q \frac{x_3^2}{2} \right] \frac{dx_3}{EJ} = 0. \end{array} \right.$$

Come appare evidente, queste due equazioni sono le medesime che si ottengono applicando il teorema di CASTIGLIANO o il principio dei lavori virtuali.

Eseguendo le integrazioni, semplificando i termini simili e portando al secondo membro quelli noti, risulta:

$$\begin{cases} -M_F \frac{l_2 + l_3}{2} + N_F l_2 \operatorname{sen} \alpha \left(\frac{l_2}{3} + \frac{l_3}{2} \right) = \frac{Q l_3^2}{24} \\ M_F \left(\frac{l_1}{2} + l_2 + \frac{l_3}{2} \right) - N_F \frac{l_2}{2} \operatorname{sen} \alpha (l_2 + l_3) = -\frac{Q l_3^2}{24} \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema si ottiene:

$$N_F = 3 \frac{l_1 + l_2}{l_2^2 \operatorname{sen} \alpha} M_F \quad M_F = \frac{Q l_3^2}{24} \cdot \frac{1}{\left(l_1 + \frac{l_2}{2} + l_3 + \frac{3}{2} \frac{l_1 l_3}{l_2} \right)}$$

In figg. 81.3-a), b), c) sono rappresentate, in via qualitativa, rispettivamente, la deformata dell'asse geometrico, il diagramma del momento flettente (le cui ordinate sono portate dalla parte delle fibre tese) e la curva delle pressioni.

Ovviamente la trave inferiore AB si comporta come imperfettamente incastrata agli estremi, la trave superiore CD si deforma ad arco di circolo ($M = \text{costante}$), i due piedritti presentano un punto di flesso in corrispondenza della sezione alla quota:

$$\bar{x}_2 \operatorname{sen} \alpha = \frac{M_F}{N_F} = \frac{l_2^2 \operatorname{sen} \alpha}{3(l_1 + l_2)}$$

Il valore di questa ordinata rappresenta anche l'eccentricità del lato superiore della curva delle pressioni dall'asse della trave CD .

Con R_A si è indicato la risultante delle azioni interne agenti nelle sezioni estreme A e B della trave inferiore. R_A è la risultante di N_F , M_F e $\frac{Q}{2}$.

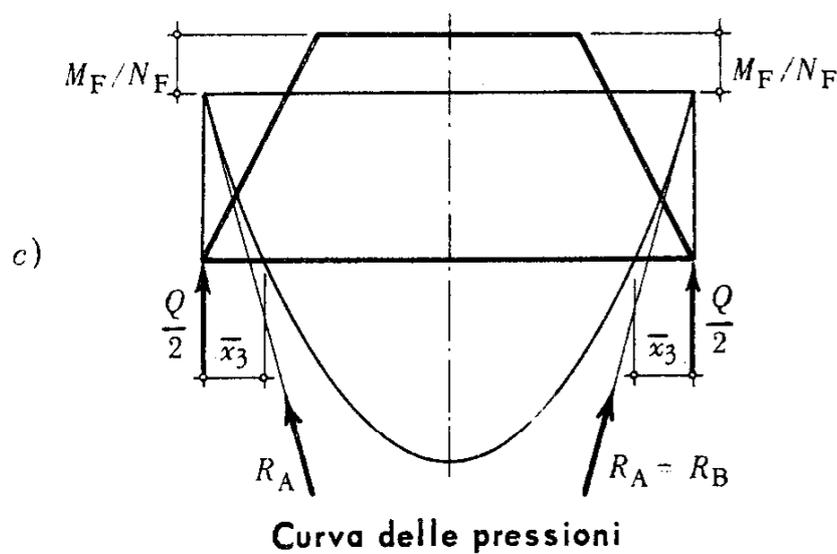
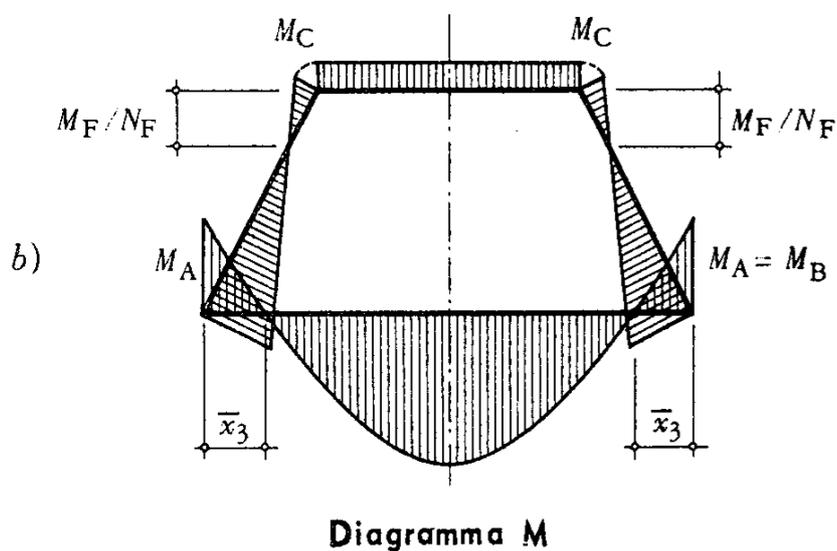
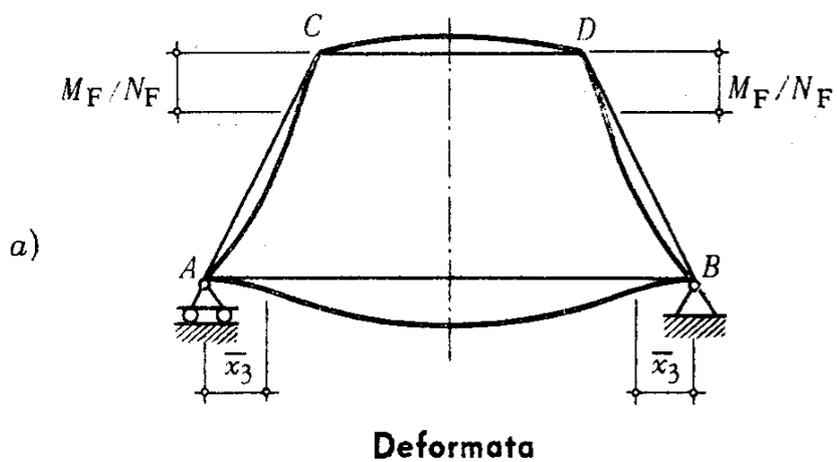


Fig. 81.3

CONSIDERAZIONI SUL METODO CINEMATICO:

In questo caso la risoluzione della struttura si presenta particolarmente semplice anche con il metodo cinematico, giacché tutti i suoi vertici sono fissi nel piano. Introducendo altrettante cerniere interne in A , B , C e D , la struttura principale che ne risulta, labile ma equilibrata per ragioni di simmetria, riporta la soluzione allo studio di travi semplici, rigidamente appoggiate, ai cui estremi, A e C , oppure B e D , vanno imposte le condizioni di congruenza angolare.

Il teorema di MENABREA è stato qui applicato volutamente a titolo d'ulteriore esempio. Questa considerazione, d'altra parte, conferma ancora una volta, se pur ve ne fosse bisogno, l'intercambiabilità e la duttilità dei vari metodi risolutivi offerti dalla Scienza delle Costruzioni. Come si è cercato spesso di mettere in luce, la scelta di un metodo rispetto ad un altro, nella maggior parte dei casi è governata solo da criteri di convenienza calcolativa, e non da diverse limitazioni concettuali o teoriche.