

CAPITOLO II

RISOLUZIONE DELLE STRUTTURE MEDIANTE IL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

GENERALITÀ E RICHIAMI.

Gli esercizi raccolti nel presente capitolo sono tutti risolti mediante il principio dei lavori virtuali. Questo metodo risolutivo gode della massima generalità e non è soggetto a particolari limitazioni. Esso può essere applicato a strutture di qualunque tipo, rigide, oppure perfettamente o imperfettamente elastiche, soggette a condizioni di carico qualsiasi, ad influenze ambientali o di costituzione, a cedimenti elastici o anelastici dei vincoli, e sia per il calcolo di reazioni, staticamente determinate o indeterminate, che per quello di spostamenti o rotazioni di sezioni particolari di esse.

Come è noto, nel campo delle strutture elastiche, oggetto dello studio della Scienza delle Costruzioni, il principio dei lavori virtuali si impiega *eguagliando i lavori esterno ed interno che un sistema di forze e azioni interne, fittizio ed equilibrato, opportunamente scelto ed applicato alla struttura, compie per effetto del sistema degli spostamenti e deformazioni reali di questa.*

In simboli:

$$L_{\text{virtuale esterno}} = L_{\text{virtuale interno}}$$

In pratica si possono presentare i seguenti casi:

DETERMINAZIONE DI SPOSTAMENTI O ROTAZIONI DI PUNTI DI STRUTTURE ISOSTATICHE.

Il sistema fittizio delle forze va applicato alla stessa struttura ed è equilibrato dalle reazioni da esso richiamate nei vincoli esterni. Per la pratica applicabilità del principio dei lavori virtuali, e per comodità di calcolo, *si sceglie il sistema fittizio costituito dalla forza unitaria applicata al punto della struttura di cui si ricerca lo spostamento e nella direzione di questo* (o una coppia unitaria nel caso si debba determinare una rotazione) dimodoché per il lavoro esterno risulta l'espressione particolarmente semplice $1 \cdot \delta$ (oppure $1 \cdot \phi$), a parte eventuali cedimenti di vincoli che fanno lavorare le reazioni fittizie. L'espressione del lavoro virtuale interno è fornita da termini noti, giacché, essendo la struttura isostatica, sono determinate sia le azioni interne fittizie, provocate dal carico unitario, che le deformazioni reali, generate dal sistema di carichi esterni assegnato.

RISOLUZIONE DI STRUTTURE IPERSTATICHE.

Si procede, anzitutto, ad uno svincolamento che fornisce la struttura principale, soggetta ai carichi noti e alle reazioni iperstatiche esplicitate ed incognite. *Il sistema fittizio delle forze, che deve soddisfare alla sola condizione d'essere equilibrato, va applicato direttamente alla struttura principale*, dimodoché sono determinate le reazioni vincolari e le azioni interne ad esso conseguenti. Naturalmente la scelta della struttura principale non è obbligata; da una stessa struttura iperstatica se ne possono dedurre diverse (a seconda del particolare svincolamento praticato), ma per ciascuna di esse risulta conseguentemente fissato il particolare sistema fittizio di forze che consente la risoluzione del problema iperstatico mediante il principio dei lavori virtuali. Se la struttura assegnata è una sola volta iperstatica, il sistema fittizio è costi-

tuito dall'unica reazione incognita $X = 1$. Se la struttura è più volte iperstatica si assumono tanti sistemi fittizi indipendenti di forze quante sono le incognite, costituiti ciascuno da una sola delle X eguagliata ad uno, e per ognuno di essi si applica, successivamente, il principio dei lavori virtuali. Il lavoro esterno è sempre espresso dai prodotti della forza unitaria e delle reazioni fittizie ciascuna moltiplicata per l'eventuale cedimento del vincolo su cui agisce. Il lavoro virtuale interno è, al solito, fornito dalle azioni interne fittizie, note, che operano sul sistema delle deformazioni reali, funzioni dei carichi assegnati e delle incognite iperstatiche esplicitate. Si ottiene, in definitiva, un sistema risolutivo di n equazioni, ciascuna delle quali contiene, nell'espressione di $L_{v,i}$, tutte le n incognite X .

DETERMINAZIONE DI SPOSTAMENTI E ROTAZIONI DI PUNTI DI STRUTTURE IPERSTATICHE.

In questi casi si deve procedere, ovviamente, sia alla risoluzione della struttura che alla determinazione delle quantità richieste. Si possono eseguire contemporaneamente i due distinti calcoli; si ottiene in tal modo un sistema risolutivo di $(n+m)$ equazioni nelle $(n+m)$ incognite: $X_1, X_2, \dots, X_n; \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$. Eliminando da tale sistema le X , se ne ottiene un altro nelle sole δ .

In ogni caso l'applicazione del principio dei lavori virtuali è concettualmente molto semplice, anche se, talvolta, può condurre a calcoli laboriosi: i successivi esempi chiariranno meglio i concetti sopra esposti. In particolare negli esercizi che seguono si è voluto mettere in evidenza la convenienza che esso offre nella risoluzione di strutture per le quali i metodi di tipo cinematico perdono della loro spontanea immediatezza, essendo costretti ad artifici che in definitiva aumentano le incognite del problema.

* * *

54. - Determinare lo spostamento orizzontale del carrello della trave isostatica ad asse spezzato di fig. 54.1, soggetta a carico verticale uniforme su tutta l'asta CB .

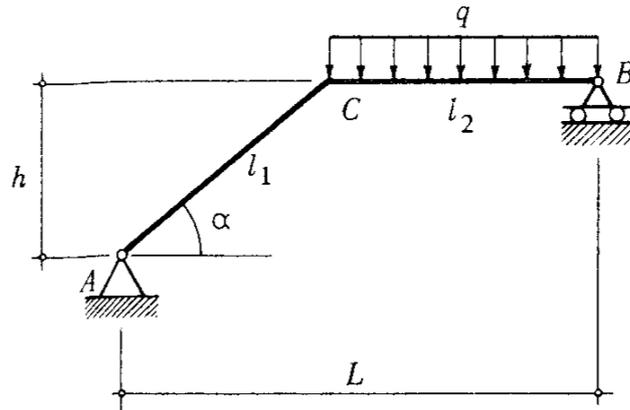


Fig. 54.1

Applichiamo il principio dei lavori virtuali, la cui espressione generale, come è noto, in simboli, è:

$$L_{\text{virtuale esterno}} = L_{\text{virtuale interno}}$$

Assumiamo il sistema di forze fittizio costituito dalla forza unitaria, applicata al carrello B , agente nella direzione orizzontale dello spostamento richiesto e concorde con il senso prevedibile di questo (fig. 54.2-a). La forza unitaria è equilibrata dalle reazioni vincolari fittizie H' e V' che indichiamo con un apice per distinguerle dalle corrispondenti forze reali. Il sistema delle deformazioni discende invece dai carichi esterni e dalle reazioni dei vincoli effettivamente agenti sulla struttura (fig. 54.2-b).

Nel nostro caso il lavoro virtuale esterno è compiuto solo dalla forza unitaria applicata al carrello, infatti la V' in B è normale alla direzione dello spostamento e la cerniera A si suppone non cedevole.

Per quanto riguarda invece il lavoro virtuale interno osserviamo che l'unico effetto deformante da computare nella trave assegnata è quel-

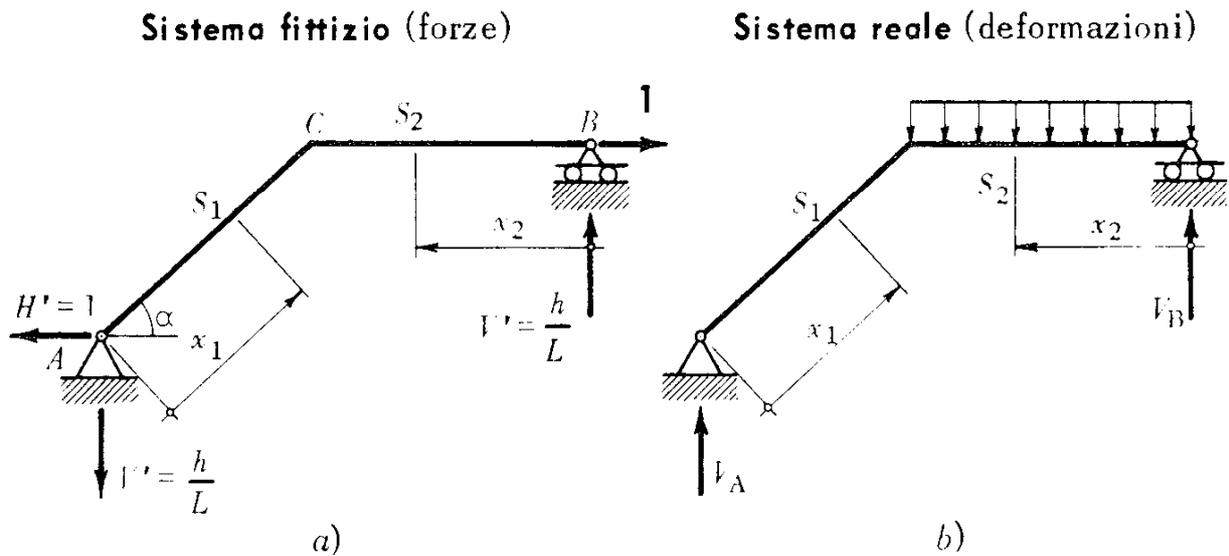


Fig. 54.2

lo flessionale. Pertanto è sufficiente determinare l'espressione corrente della sola azione interna fittizia M' che lavora per effetto della deformazione provocata dal momento reale M .

Risolviamo la struttura per le due condizioni di carico, fittizia e reale:

Sistema fittizio. - Reazioni:

$$H' = 1; \quad V' = \frac{h}{L}.$$

Momento flettente:

- asta AC: $M'_1 = (1 \cdot \text{sen } \alpha - \frac{h}{L} \cos \alpha) x_1$

- asta BC: $M'_2 = \frac{h}{L} x_2$

Sistema reale. - Reazioni:

$$V_A = \frac{q l_2^2}{2L}; \quad V_B = q l_2 \left(1 - \frac{l_2}{2L}\right).$$

Momento flettente:

$$\text{- asta } AC: \quad M_1 = q \frac{l_2^2}{2L} \cos \alpha \cdot x_1$$

$$\text{- asta } BC: \quad M_2 = ql_2 \left(1 - \frac{l_2}{2L}\right) x_2 - q \frac{x_2^2}{2}.$$

Si ha:

$$L_{v,e} = l \cdot \xi_B$$

$$L_{v,i} = \int_{(AB)} M' d\varphi = \int_0^{l_1} M_1' \left(\frac{M_1 dx_1}{EJ} \right) + \int_0^{l_2} M_2' \left(\frac{M_2 dx_2}{EJ} \right)$$

Eguagliando le due quantità ed introducendo le espressioni dei momenti fittizi e reali si ottiene:

$$\begin{aligned} \xi_B = \int_0^{l_1} \left(\sin \alpha - \frac{h}{L} \cos \alpha \right) \cos \alpha \frac{ql_2^2}{2L} \frac{x_1^2}{EJ} dx_1 + \\ + \int_0^{l_2} \frac{h}{L} x_2 \left[ql_2 \left(1 - \frac{l_2}{2L}\right) x_2 - q \frac{x_2^2}{2} \right] \frac{dx_2}{EJ}. \end{aligned}$$

Eseguendo le integrazioni, nel caso particolare di struttura a sezione costante, risulta:

$$\xi_B = \frac{1}{EJ} \left\{ \left[\left(\sin \alpha - \frac{h}{L} \cos \alpha \right) \cos \alpha \frac{ql_2^2 l_1^3}{6L} \right] + \frac{h}{L} \left[ql_2 \left(1 - \frac{l_2}{2L}\right) \frac{l_2^3}{3} - q \frac{l_2^4}{8} \right] \right\}$$

RISOLUZIONE NUMERICA.

La struttura abbia le dimensioni di fig. 54.3. Sia $q = 1000 \text{ kg/m}$.

Progettiamo dapprima la trave, in profilato normale a I assumendo $K_F = 1600 \text{ kg/cm}^2$.

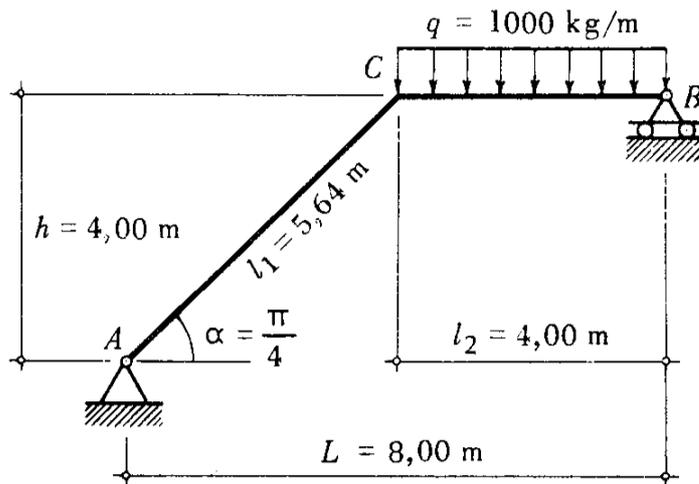


Fig. 54.3

Si ha:

$$V_A = 1000 \text{ kg}; \quad V_B = 3000 \text{ kg}.$$

Il momento nel nodo C vale:

$$M_C = V_A \cdot l_1 \cos \alpha = 4000 \text{ kgm}.$$

Il massimo momento nell'asta CB si ha nella sezione d'ascissa

$$x_2 = \frac{V_B}{q} = 3,00 \text{ m} \text{ in corrispondenza della quale è}$$

$$T = 0 \quad \text{e} \quad M_{\max} = 4500 \text{ kgm}.$$

La formula di progetto a flessione semplice fornisce:

$$W = \frac{450\,000}{1600} = 271 \text{ cm}^3.$$

Adottiamo il I PN22 le cui caratteristiche sono:

$$A = 39,5 \text{ cm}^2; \quad J = 3055 \text{ cm}^4; \quad W = 278 \text{ cm}^3.$$

Sostituendo ora i valori numerici nell'espressione prima ottenuta dello spostamento cercato risulta:

$$\xi_B = +4,8 \text{ cm.}$$

Il valore positivo ottenuto per ξ_B indica che lo spostamento del carrello, in accordo con la previsione fatta, avviene verso destra ed è concorde con il senso della forza fittizia.

CONSIDERAZIONI SUL METODO CINEMATICO.

Se si fosse voluto procedere con metodo cinematico si sarebbe potuto incastrare provvisoriamente la sezione A , assunta quale origine del sistema di riferimento, e calcolare gli spostamenti $\xi_{B,A}$ e $\eta_{B,A}$ che la sezione B , completamente svincolata, compie rispetto ad essa. Successivamente si sarebbe dovuto sbloccare l'incastro fittizio e consentire la rotazione della trave attorno alla cerniera A , mediante un moto rigido che annullasse lo spostamento verticale $\eta_{B,A}$, giacché questo, nella realtà è impedito dal carrello B .

In simboli:

$$\xi_B = \xi_{B,A} + \varphi_A \cdot h = \xi_{B,A} + \eta_{B,A} \frac{h}{L}$$

La risoluzione per via cinematica avrebbe quindi preteso la determinazione di quantità non richieste dal problema ($\eta_{B,A}$ oltre che, naturalmente, $\xi_{B,A}$ per la trave principale a mensola), cosa che, nonostante l'estrema semplicità della struttura, conduce ad una maggior laboriosità di calcolo.

55. - Sia assegnata la struttura a tre cerniere di fig. 55.1, soggetta a carico verticale uniforme su tutto lo sbalzo AD . Determinare l'abbassamento dell'estremo libero D , e la rotazione relativa delle due sezioni all'attacco con la cerniera interna C .

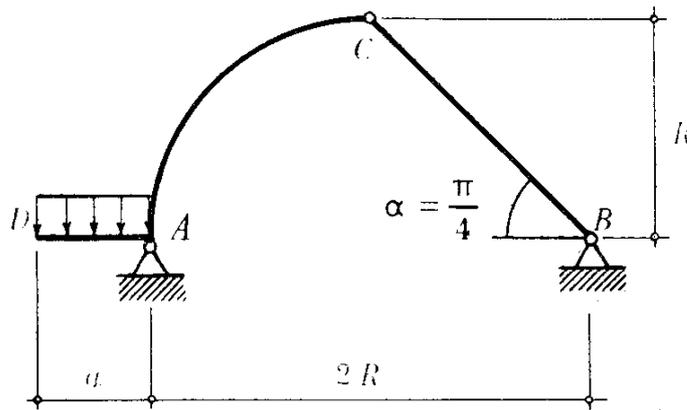


Fig. 55.1

Dovendosi calcolare due distinte quantità, è necessario, in questo caso, adottare due sistemi di forze fittizie, ciascuno dei quali sia idoneo alla determinazione di uno dei quesiti proposti.

Il sistema degli spostamenti e delle deformazioni è, al solito, quello reale. ed è sempre il medesimo in entrambi i casi.

Ovviamente il principio dei lavori virtuali va applicato due volte per il calcolo, separatamente, di η_D e di $\varphi_{C, rel.}$.

Risolviamo anzitutto la struttura per le condizioni di carico assegnate. Le reazioni dei vincoli hanno il senso di fig. 55.2 e valgono:

$$V_A = \frac{qa(2R + a/2)}{2R} = qa \left(1 + \frac{a}{4R} \right)$$

$$V_B = V_A - qa = \frac{qa^2}{4R}$$

$$H = V_B = \frac{qa^2}{4R}$$

Sistema reale (deformazioni)

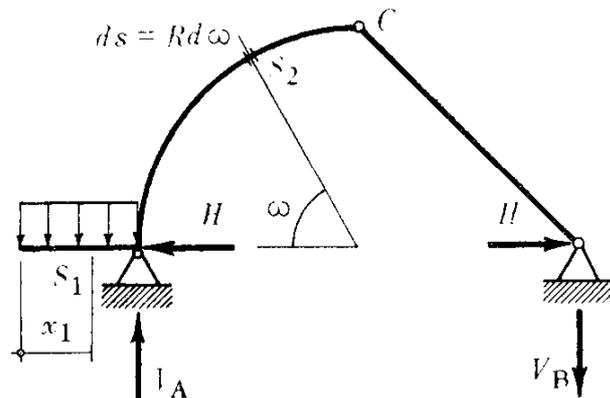


Fig. 55.2

Per quanto riguarda il calcolo delle azioni interne esistenti nella struttura, osserviamo che la biella CB funziona da tirante ed è lecito trascurarne la deformazione assiale in confronto a quella flessionale dei tratti AD e AC . Pertanto è sufficiente determinare la legge di variazione del solo momento flettente in queste due parti:

- sbalzo AD :

$$M_1 = -q \frac{x^2}{2}$$

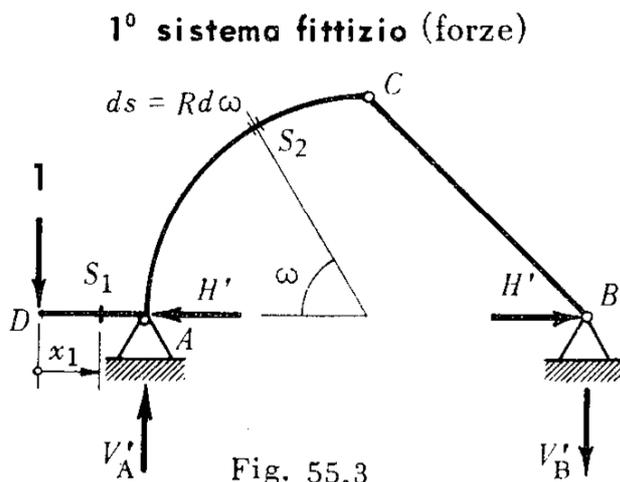
- arco AC :

$$\begin{aligned} M_2 &= -qa \left[\frac{a}{2} + R(1 - \cos \omega) \right] + HR \sin \omega + V_A R(1 - \cos \omega) = \\ &= \frac{qa^2}{4} (\sin \omega - \cos \omega - 1). \end{aligned}$$

Procediamo adesso alla scelta dei sistemi di forze necessari al calcolo di η_D e $\varphi_{C, \text{rel.}}$.

DETERMINAZIONE DI η_D .

Adottiamo il sistema di forze costituito dalla forza unitaria verticale applicata in D e dalle reazioni vincolari che la equilibrano. Fissiamo per la forza unitaria il senso verso il basso, concorde con quello dello spostamento cercato (fig. 55.3).



Le reazioni fittizie valgono:

$$V'_A = 1 \frac{a + 2R}{2R} = 1 + \frac{a}{2R}$$

$$V'_B = V'_A - 1 = \frac{a}{2R}$$

$$H' = V'_B = \frac{a}{2R}$$

Il momento fittizio nei tratti AD e AC ha l'espressione:

- sbalzo AD :

$$M_1' = -1 \cdot x$$

- arco AC :

$$\begin{aligned} M_2' &= -1 \left[a + R(1 - \cos \omega) \right] + H'R \operatorname{sen} \omega + V_A' R(1 - \cos \omega) = \\ &= \frac{a}{2} (\operatorname{sen} \omega - \cos \omega - 1). \end{aligned}$$

Eguagliando, al solito, il lavoro virtuale esterno al lavoro virtuale interno, si ha, in questo caso, la relazione:

$$1 \cdot \eta_D = \int_0^a M_1' \left(\frac{M_1 dx}{EJ} \right) + \int_0^{\pi/2} M_2' \left(\frac{M_2 R d\omega}{EJ} \right)$$

Sostituendo le precedenti espressioni di M ed M' :

$$1 \cdot \eta_D = \int_0^a \frac{q}{2 EJ} x^3 dx + \int_0^{\pi/2} \frac{qa^3 R}{8 EJ} (\operatorname{sen} \omega - \cos \omega - 1)^2 d\omega.$$

Eseguendo le integrazioni si ottiene, nel caso particolare di struttura a sezione costante:

$$\eta_D = \frac{qa^4}{8 EJ} + \frac{qa^3 R}{8 EJ} (\pi - 1).$$

Il valore positivo ottenuto per η_D conferma che esso avviene verso il basso, concorde con il senso prefissato per la forza 1.

DETERMINAZIONE DI $\varphi_{C, rel.}$

In questo caso adottiamo come sistema fittizio di forze quello costituito da due coppie unitarie, di verso opposto, applicate alle sezioni $C_{sinistra}$ e C_{destra} , all'attacco con la cerniera, delle quali si vuole calcolare la rotazione relativa.

Le reazioni vincolari equilibranti il sistema sono indicate in fig. 55.4 È

$$H = \frac{1}{R}; \quad V_A = V_B = 0.$$

2° sistema fittizio (forze)

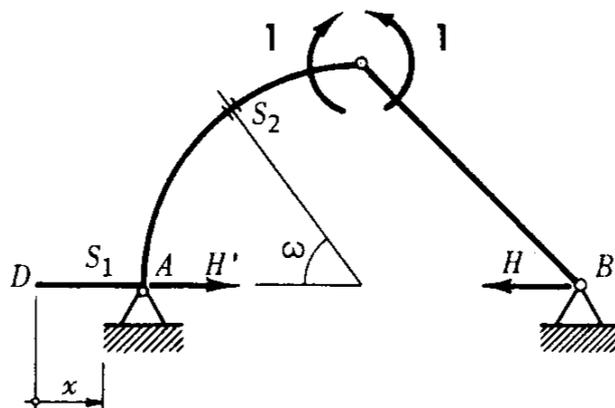


Fig. 55.4

Il momento flettente è nullo nello sbalzo DA .

Nell'arco AC vale:

$$M'_2 = -\frac{1}{R} R \operatorname{sen} \omega = -\operatorname{sen} \omega.$$

Assumiamo positive le rotazioni di senso orario.

L'espressione del lavoro virtuale esterno è:

$$L_{v, e} = 1 \cdot \varphi_{C, sin.} - 1 \cdot \varphi_{C, des.} = \varphi_{C, rel.}$$

Il lavoro virtuale interno è esteso al solo quadrante AC .

Si ottiene pertanto:

$$\varphi_{C, \text{rel.}} = \int_0^{\pi/2} M'_2 \left(\frac{M_2 R d\omega}{EJ} \right) = \int_0^{\pi/2} \frac{qa^2 R}{4 EJ} (-\text{sen } \omega) (\text{sen } \omega - \cos \omega - 1) d\omega.$$

Eseguendo le integrazioni si ottiene, nel caso particolare di struttura a sezione costante:

$$\varphi_{C, \text{rel.}} = \left(\frac{3}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \frac{qa^2 R}{4 EJ} = \frac{6 - \pi}{16} \frac{qa^2 R}{EJ}$$

$\varphi_{C, \text{rel.}}$ risulta positiva; pertanto essa avviene nel verso relativo delle due coppie fittizie.

CONSIDERAZIONI SUL METODO CINEMATICO.

I procedimenti di tipo cinematico risultano notevolmente più laboriosi del principio dei lavori virtuali, anche se, in questo caso particolare la biella CD , assialmente indeformabile, consente lo spostamento della cerniera C solo nella direzione nota della corda AC , cui è perpendicolare.

Si può pertanto schematizzare il comportamento dell'arco vincolandolo in C con un carrello a piano di scorrimento definito dalla direzione AC , inclinata di $\frac{\pi}{4}$ (fig. 55.5).

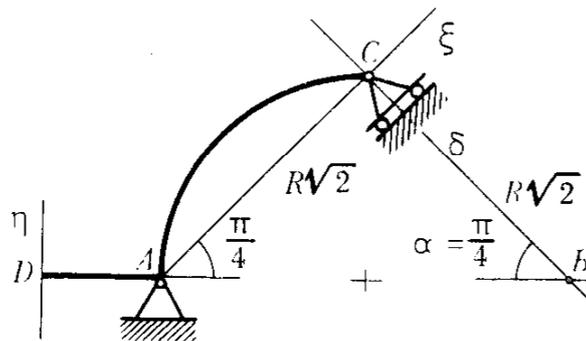


Fig. 55.5

Le espressioni simboliche di η_D e $\varphi_{C, \text{rel.}}$ sono:

$$\eta_D = \eta_{D, A} + \varphi_A \cdot a = \eta_{D, A} + \frac{\delta_C}{R\sqrt{2}}$$

$$\varphi_{C, \text{rel.}} = \varphi_{C, \text{sin.}} - \varphi_{C, \text{des.}} = \left(\varphi_{C, A} + \frac{\delta_C}{R\sqrt{2}} \right) - \frac{\xi_C}{R\sqrt{2}}.$$

È cioè necessario determinare totalmente il comportamento della cerniera interna C . Se la biella CB ha un'inclinazione $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$, non è più ortogonale alla corda AC dell'arco ed il procedimento cinematico si complica ulteriormente, giacché la cerniera C si sposta lungo entrambe le direzioni ortogonali ξ e δ .

Al contrario il principio dei lavori virtuali non risente di ciò nella propria stesura (a parte i diversi valori che risultano per le reazioni vincolari e le azioni interne) e conserva inalterata la propria semplicità applicativa.

56. - Determinare l'abbassamento del nodo 7 e la rotazione relativa delle aste $A-6$ e $6-7$ della trave reticolare di fig. 56.1.

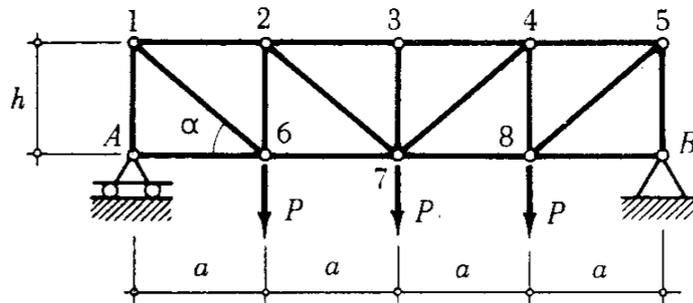


Fig. 56.1

L'applicazione del principio dei lavori virtuali alle strutture reticolari non differisce dal caso già trattato delle travi a parete piena.

L'espressione generale rimane invariata:

$$L_{\text{virtuale esterno}} = L_{\text{virtuale interno}}$$

Al solito, il lavoro virtuale esterno è compiuto dalle forze del sistema fittizio (la cui scelta è governata dalle medesime avvertenze precedenti) che operano sugli spostamenti reali dei nodi e dei vincoli della struttura. Il lavoro virtuale interno è fornito dalle azioni interne fittizie e dalle deformazioni effettive. Nel caso usuale di travi reticolari caricate solo nei nodi l'unica azione interna esistente nelle aste è lo sforzo normale, costante in ciascuna di esse, e l'espressione di $L_{v,i}$ diviene:

$$L_{v,i} = \sum N'(\Delta l) = \sum N' \left(\frac{Nl}{EA} \right)$$

Naturalmente la sommatoria risulta di fatto estesa alle sole aste soggette ad un valore non nullo di N , aventi cioè una deformazione reale diversa da zero.

Procediamo ora alla determinazione delle quantità richieste.

Determiniamo lo stato di tensione e di deformazione reale. Poiché la struttura è simmetrica e simmetricamente caricata rispetto all'asse mediano verticale, è sufficiente calcolare gli sforzi nelle aste di metà trave. Indichiamo con segno positivo l'azione di trazione.

| ASTA | SFORZO | DEFORMAZIONE |
|------|---------------------------------|--------------------------------------|
| A-1 | $-\frac{3}{2}P$ | $-\frac{3Ph}{2EA}$ |
| A-6 | 0 | 0 |
| 1-6 | $+\frac{3P}{2\text{sen}\alpha}$ | $+\frac{3Ph}{2EA\text{sen}^2\alpha}$ |
| 1-2 | $-\frac{3P}{2\text{tg}\alpha}$ | $-\frac{3Pa}{2EA\text{tg}\alpha}$ |
| 2-6 | $-\frac{P}{2}$ | $-\frac{Ph}{2EA}$ |

| | | |
|-----|--|--|
| 2-7 | $+\frac{P}{2 \operatorname{sen} \alpha}$ | $+\frac{Ph}{2 EA \operatorname{sen}^2 \alpha}$ |
| 2-3 | $-\frac{2P}{\operatorname{tg} \alpha}$ | $-\frac{2Pa}{EA \operatorname{tg} \alpha}$ |
| 6-7 | $+\frac{3P}{2 \operatorname{tg} \alpha}$ | $+\frac{3Pa}{2 EA \operatorname{tg} \alpha}$ |
| 3-7 | 0 | 0 |

Assumiamo i sistemi fittizi di forze che, nei due quesiti richiesti, lavorano sul sistema degli spostamenti reali.

ABBASSAMENTO DEL NODO 7.

Applichiamo al nodo 7 la forza unitaria verticale (fig. 56.2); questa condizione di carico fittizia è simmetrica, ed è pertanto sufficiente, in analogia con il caso delle deformazioni reali, determinare gli sforzi delle aste di metà trave.

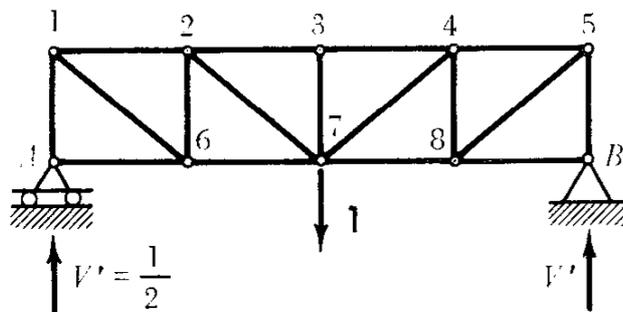


Fig. 56.2

| ASTA | SFORZO |
|------|--|
| A-1 | $-\frac{1}{2}$ |
| A-6 | 0 |
| 1-6 | $+\frac{1}{2 \operatorname{sen} \alpha}$ |

| | |
|-----|--|
| 1-2 | $-\frac{1}{2 \operatorname{tg} \alpha}$ |
| 2-6 | $-\frac{1}{2}$ |
| 2-7 | $+\frac{1}{2 \operatorname{sen} \alpha}$ |
| 2-3 | $-\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ |
| 6-7 | $+\frac{1}{2 \operatorname{tg} \alpha}$ |
| 3-7 | 0 |

Nell'ipotesi che tutte le aste abbiano la medesima sezione, il principio dei lavori virtuali fornisce l'espressione:

$$1 \cdot \eta_7 = \frac{2}{EA} \left[\left(-\frac{3Ph}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) + \left(\frac{3Ph}{2 \operatorname{sen}^2 \alpha} \right) \left(\frac{1}{2 \operatorname{sen} \alpha} \right) + \left(-\frac{3Pa}{2 \operatorname{tg} \alpha} \right) \left(-\frac{1}{2 \operatorname{tg} \alpha} \right) + \right. \\ \left. + \left(-\frac{Ph}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) + \left(\frac{Ph}{2 \operatorname{sen}^2 \alpha} \right) \left(\frac{1}{2 \operatorname{sen} \alpha} \right) + \right. \\ \left. + \left(-\frac{2Pa}{\operatorname{tg} \alpha} \right) \left(-\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right) + \left(\frac{3Pa}{2 \operatorname{tg} \alpha} \right) \left(\frac{1}{2 \operatorname{tg} \alpha} \right) \right].$$

Si ottiene:

$$\eta_7 = \frac{2P}{E1} \left[h + \frac{h}{\operatorname{sen}^3 \alpha} + \frac{7a}{2 \operatorname{tg}^2 \alpha} \right].$$

ROTAZIONE RELATIVA DELLE ASTE 4-6 E 6-7.

Il sistema fittizio da adottare in questo caso è costituito da due coppie unitarie applicate all'estremità delle aste 6-A e 6-7, all'attacco con il nodo 6 (fig. 56.3-a). Le successive b) e c) pongono in evidenza

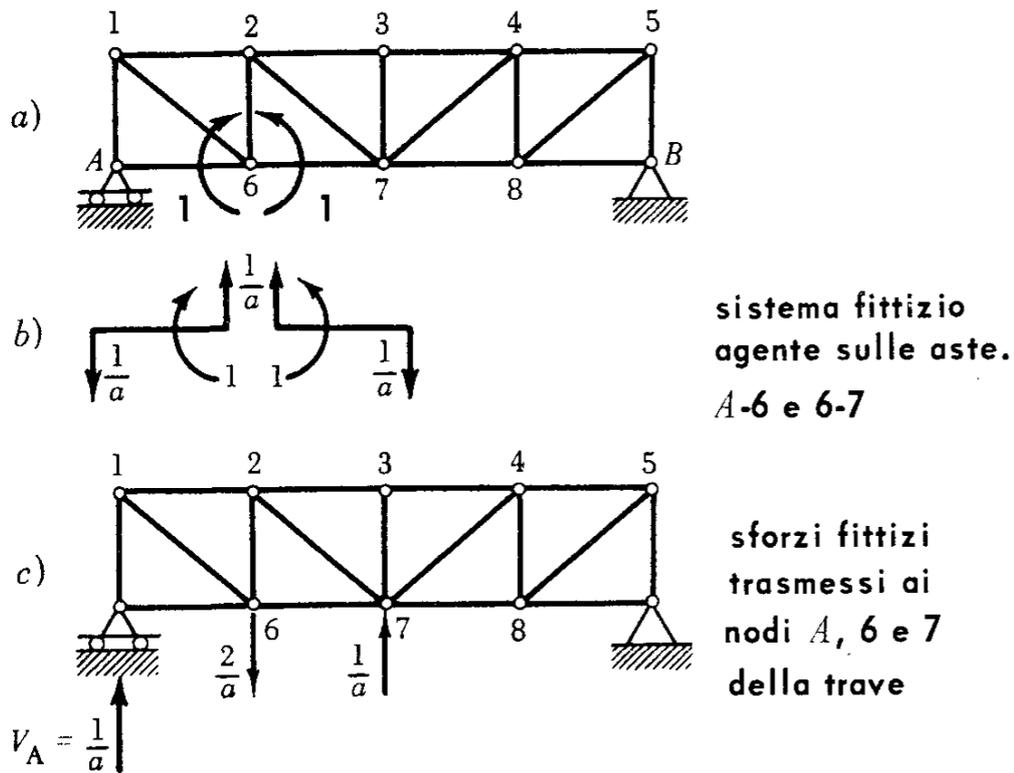


Fig. 56.3

gli sforzi di taglio che equilibrano le aste $A-6$ e $6-7$, e, mutuamente, le azioni trasmesse da queste ai nodi 6 e 7. Il carico concentrato $\frac{1}{a}$ che si scarica sul carrello A è direttamente equilibrato dalla reazione di questo. Risultano nelle due aste questi sforzi taglienti perché le coppie fittizie esercitano su di esse azione flettente, e la travatura non è più caricata nei nodi come di consueto.

Si possono ora calcolare gli sforzi assiali nelle aste generati dalle coppie unitarie applicate al nodo 6.

Le reazioni dei vincoli sono indicate in fig. 56.3-c).

È:

$$V_B = 0; \quad V_A = \frac{1}{a} \quad (\text{diretta verso l'alto}).$$

| ASTE | SFORZO |
|------------|--|
| A-1 | $-\frac{1}{a}$ |
| A-6 | 0 |
| 1-6 | $+\frac{1}{a \operatorname{sen} \alpha}$ |
| 1-2 | $-\frac{1}{a \operatorname{tg} \alpha}$ |
| 2-6 | $+\frac{1}{a}$ |
| 2-7 | $-\frac{1}{a \operatorname{sen} \alpha}$ |
| 2-3 | 0 |
| 6-7 | $+\frac{1}{a \operatorname{tg} \alpha}$ |
| altre aste | 0 |

Eguagliando il lavoro virtuale esterno a quello interno:

$$\begin{aligned} \Phi_{(A-6), (6-7)} &= \frac{1}{EA} \left[\left(-\frac{3Ph}{2} \right) \left(-\frac{1}{a} \right) + \left(\frac{3Ph}{2 \operatorname{sen}^2 \alpha} \right) \left(\frac{1}{a \operatorname{sen} \alpha} \right) + \right. \\ &+ \left(-\frac{3Pa}{2 \operatorname{tg} \alpha} \right) \left(-\frac{1}{a \operatorname{tg} \alpha} \right) + \left(-\frac{Ph}{2} \right) \left(+\frac{1}{a} \right) + \left(+\frac{Ph}{2 \operatorname{sen}^2 \alpha} \right) \left(-\frac{1}{a \operatorname{sen} \alpha} \right) + \\ &\left. + \left(+\frac{3Pa}{2 \operatorname{tg} \alpha} \right) \left(+\frac{1}{a \operatorname{tg} \alpha} \right) \right]. \end{aligned}$$

Si ottiene:

$$\Phi_{(A-6), (6-7)} = \frac{P}{EA} \left[\frac{h}{a} + \frac{h}{a} \frac{1}{\operatorname{sen}^3 \alpha} + 3 \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \right].$$

OSSERVAZIONE. - Per semplicità di procedimento si sono considerate della medesima sezione tutte le aste della trave. Nella realtà questo fatto si verifica ben raramente, sia a causa della variabilità degli sforzi da asta ad asta, sia per i diversi criteri che governano la progettazione dei puntoni e dei tiranti (vedi, ad esempio, l'esercizio 57).

57. - Determinare lo spostamento orizzontale del carrello A della struttura reticolare di fig. 57.1, soggetta al carico P , applicato al nodo D , ed agente secondo la direzione dell'asta diagonale.

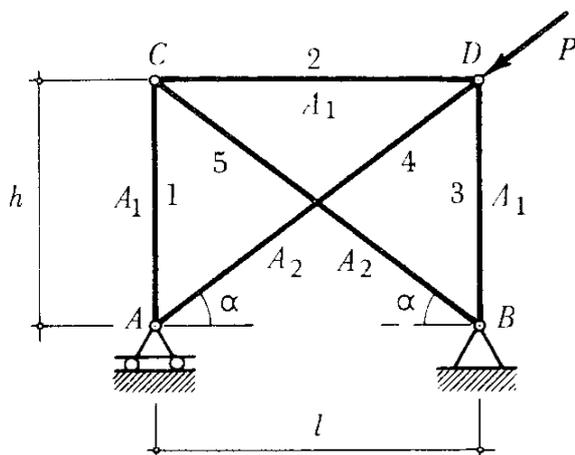


Fig. 57.1

La struttura è isostatica; si può infatti pensare che sia costituita dal portale $ACDB$, vincolato esternamente con cerniera e carrello, e i cui due gradi di labilità interna, forniti dalle cerniere C e D , sono compensati dalle bielle AD e CB , tra loro indipendenti.

Determiniamo anzitutto lo stato di tensione e deformazione reale.

Le reazioni dei vincoli valgono (fig. 57.2):

$$H = P \cos \alpha$$

$$V_A = P \sin \alpha$$

$$V_B = 0.$$

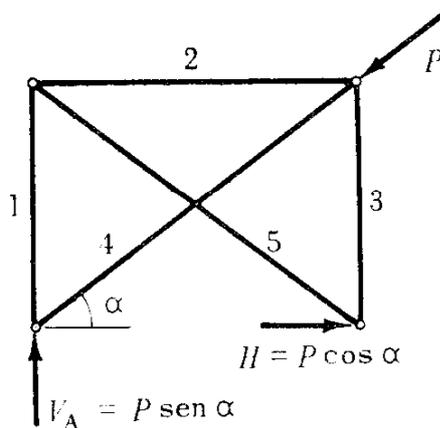


Fig. 57.2

Gli sforzi nelle aste si calcolano molto semplicemente imponendo l'equilibrio alla traslazione dei nodi; assumiamo positivi gli sforzi di trazione.

| ASTA | SFORZO | DEFORMAZIONE |
|------|-------------------|--------------------------------|
| 1 | $- P \sin \alpha$ | $-\frac{Ph}{EA_1} \sin \alpha$ |
| 2 | $- P \cos \alpha$ | $-\frac{Pl}{EA_1} \cos \alpha$ |
| 3 | $- P \sin \alpha$ | $-\frac{Ph}{EA_1} \sin \alpha$ |
| 4 | 0 | 0 |
| 5 | $+ P$ | $\frac{Pl}{EA_2 \cos \alpha}$ |

In questo caso, giacché desideriamo calcolare lo spostamento orizzontale di A , assumiamo quale sistema fittizio quello costituito dalla forza unitaria orizzontale applicata al carrello A . Risolviamo la struttura soggetta al carico fittizio. Essa è equilibrata da una spinta eguale e contraria fornita dalla cerniera B , mentre le reazioni verticali sono nulle per ragioni di simmetria (fig. 57.3).

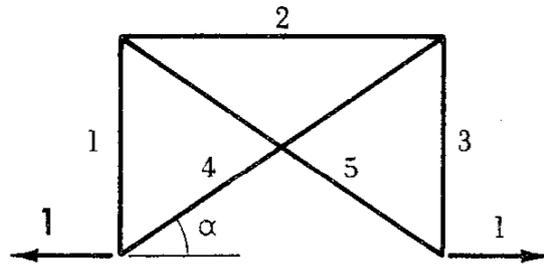


Fig. 57.3

| ASTA | SFORZO |
|------|-----------------------------|
| 1 | $-\operatorname{tg} \alpha$ |
| 2 | -1 |
| 3 | $-\operatorname{tg} \alpha$ |
| 4 | $+\frac{1}{\cos \alpha}$ |
| 5 | $+\frac{1}{\cos \alpha}$ |

Eguagliando i lavori virtuali esterno ed interno compiuti dalle forze e dalle azioni interne del sistema fittizio sugli spostamenti e le deformazioni reali, si ottiene la relazione:

$$1 \cdot \xi_A = \left(2 \frac{Ph}{EA_1} \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \alpha + \frac{Pl}{EA_1} \cos \alpha + \frac{Pl}{EA_2 \cos^2 \alpha} \right).$$

RISOLUZIONE NUMERICA.

Siano assegnate le dimensioni della struttura:

$$l = 2,00 \text{ m}; \quad h = 1,50 \text{ m} \quad \text{ed il carico } P = 4000 \text{ kg}.$$

Progettiamo la struttura in profilati d'acciaio assumendo $K_F = 1400$ kg/cm².

Si ha:

$$\operatorname{tg} \alpha = 0,75; \quad \alpha \cong 36^\circ 50'; \quad \operatorname{sen} \alpha = 0,599; \quad \operatorname{cos} \alpha = 0,800.$$

Gli sforzi nelle aste valgono:

$$\begin{aligned} S_1 = S_3 &= -2396 \text{ kg} \cong -2400 \text{ kg} \\ S_2 &= -3200 \text{ kg} \\ S_4 &= 0 \\ S_5 &= +4000 \text{ kg}. \end{aligned}$$

Se si adotta la medesima sezione per le aste compresse 1, 2, e 3, è sufficiente progettare l'asta 2, soggetta allo sforzo maggiore ed avente il rapporto di snellezza più elevato.

Seguiamo il metodo ω poiché l'asta è caricata di punta.

Procediamo per tentativi fissando inizialmente $\omega = 4$.

Risulta:

$$A_1 = \frac{\omega S_2}{K} = \frac{4 \cdot 3200}{1400} = 9,15 \text{ cm}^2.$$

Realizziamo l'asta con due PN a L , a lati eguali, accostati.

La sezione costituita da due PN $L 5,0 \times 5,0 \times 0,5$ cm ha le caratteristiche:

$$A = 2 \cdot 4,80 = 9,60 \text{ cm}^2 \quad J_{\min} = 22 \text{ cm}^4 \quad \rho_{\min} = 1,52 \text{ cm}.$$

Si ottiene:

$$\lambda = \frac{l_0}{\rho_{\min}} = \frac{200}{1,52} = 132$$

e nelle tabelle si legge:

$$\omega = \frac{1}{0,243} = 4,12.$$

Eseguendo ora un calcolo di verifica:

$$\sigma = \frac{4,12 \cdot 3200}{9,60} \cong 1380 \text{ kg/cm}^2 < K_F.$$

L'asta 5, essendo un tirante, va dimensionata a sforzo assiale semplice.

$$A_2 = \frac{S_5}{K_F} = \frac{4000}{1400} \cong 2,85 \text{ cm}^2.$$

Si adotta il PN a L a lati eguali $4,0 \times 4,0 \times 0,4$ cm per entrambe le diagonali ($A_2 = 3,08 \text{ cm}^2$).

I nodi $ABCD$ della struttura reticolare sono realizzati in pratica con delle piastre piane (fazzoletti) sulle cui facce opposte sono applicati (mediante chiodatura o saldatura) i due profilati costituenti le aste 1, 2 e 3 esterne. Le due diagonali, ottenute con un solo elemento profilato, sono collegate ai fazzoletti da parti opposte, e non interferiscono tra di loro.

Con i valori numerici precedenti, lo spostamento del carrello vale:

$$\begin{aligned} \xi_A &= \left(2 \frac{4000 \cdot 150}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 9,6} 0,599 \cdot 0,75 + \frac{4000 \cdot 200}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 9,6} 0,800 + \frac{4000 \cdot 200}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 3,08 \cdot 0,800^2} \right) = \\ &= 0,0268 + 0,0318 + 0,1935 = 0,2521 \text{ cm} \cong 2,5 \text{ mm}. \end{aligned}$$

* * *

58. - Risolvere il portale zoppo a due cerniere di fig. 58.1, soggetto a carico orizzontale uniforme su tutto il piedritto BD .

Si tratta della stessa struttura studiata nell'esercizio 18, una volta iperstatica ed una volta staticamente indeterminata.

Ricordiamo le considerazioni allora svolte e assumiamo quale struttura principale il portale isostatico di fig. 58.2, vincolato con cerniera

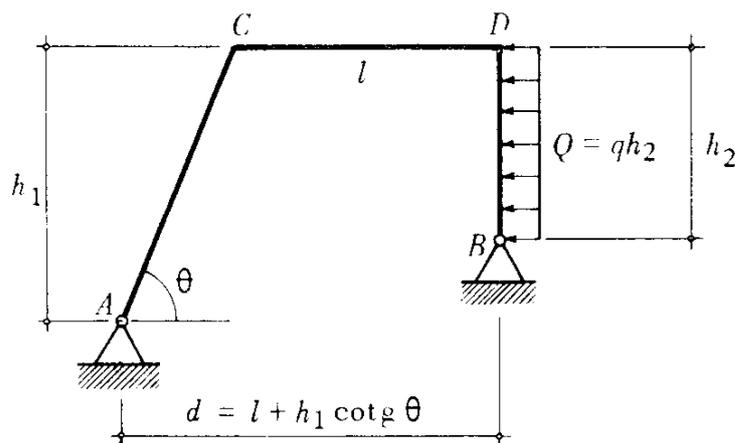


Fig. 58.1

B e carrello *A* a piano di scorrimento orizzontale. Applichiamo alla struttura principale il sistema di forze fittizio, costituito dalla forza H_A eguagliata all'unità, equilibrata dalle reazioni vincolari, e facciamo lavorare sul sistema di spostamenti e deformazioni reali, generati nella struttura dai carichi effettivamente agenti.

Come è noto il principio dei lavori virtuali si esprime nella forma:

$$L_{\text{virtuale esterno}} = L_{\text{virtuale interno}}$$

$L_{v,e}$ è costituito dal lavoro che la forza unitaria o le reazioni fittizie compiono per effetto degli eventuali cedimenti dei vincoli cui sono applicate. Nel caso di strutture a vincoli rigidi è ovviamente $L_{v,e} = 0$.

$L_{v,i}$ è fornito dalle azioni interne fittizie, il cui valore è noto, e dalle deformazioni reali, funzioni di q ed H_A . Osserviamo al proposito che la curva delle pressioni è, all'evidenza, un arco di parabola avente per tangenti estreme le rette d'azione inclinate delle reazioni delle cerniere, e si discosta molto dall'asse geometrico. Pertanto l'unica azione interna di cui si deve tener conto nel calcolo delle deformazioni è il momento flettente.

Il valore delle reazioni e azioni interne fittizie, contrassegnate con un apice per distinguerle dalle corrispondenti forze e azioni interne reali, si può ottenere direttamente dalle espressioni di queste ultime ponendo in esse $q = 0$ e $H_A = 1$.

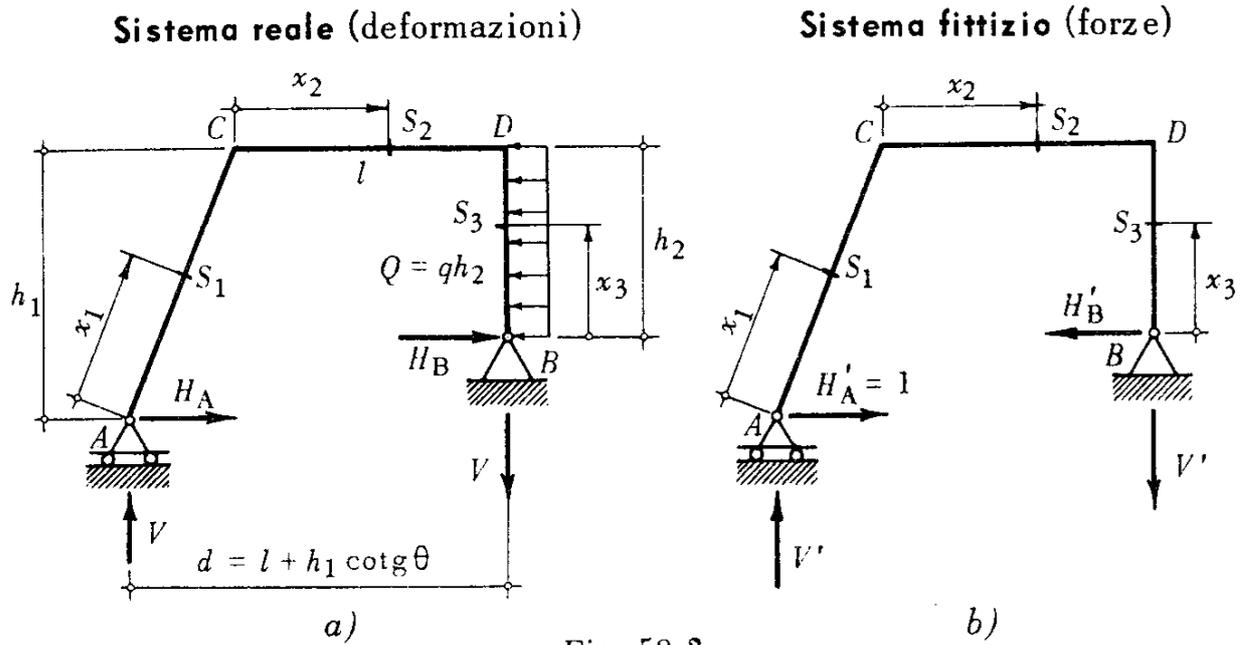


Fig. 58.2

Risulta:

$$H_B = Q - H_A$$

$$H'_B = 1$$

$$V_A = V_B = V = \frac{1}{d} \left[\frac{Qh_2}{2} + H_A(h_1 - h_2) \right] \quad V'_B = \frac{h_1 - h_2}{d}$$

$$M_1 = (V \cos \theta - H_A \sin \theta) x_1 \quad M'_1 = \left(\frac{h_1 - h_2}{d} \cos \theta - \sin \theta \right) x_1$$

$$M_2 = (V h_1 \cotg \theta - H_A h_1) + V x_2 \quad M'_2 = \left(\frac{h_1 - h_2}{d} \cotg \theta - 1 \right) h_1 + \frac{h_1 - h_2}{d} x_2$$

$$M_3 = (Q - H_A) x_3 - \frac{qx_3^2}{2} \quad M'_3 = -1 \cdot x_3.$$

L'espressione del principio dei lavori virtuali in questo caso diviene:

$$0 = \int_l M' d\varphi = \int_0^{\frac{h_1}{\sin \theta}} M'_1 \frac{M_1 dx_1}{EJ} + \int_0^l M'_2 \frac{M_2 dx_2}{EJ} + \int_0^{h_2} M'_3 \frac{M_3 dx_3}{EJ}.$$

Se la struttura ha sezione costante si possono moltiplicare tutti i

termini per il fattore EJ . Sostituendo inoltre le espressioni dei momenti flettenti, fittizi e reali, risulta.

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\frac{h_1}{\sin \theta}} \left(\frac{h_1 - h_2}{d} \cos \theta - \sin \theta \right) (V \cos \theta - H_A \sin \theta) x_1^2 dx_1 + \\
 + & \int_0^l \left[\left(\frac{h_1 - h_2}{d} \cotg \theta - 1 \right) h_1 + \frac{h_1 - h_2}{d} x_2 \right] \cdot \left[(V h_1 \cotg \theta - H_A \cdot h_1) + V x_2 \right] \cdot dx_2 + \\
 & + \int_0^{h_2} \left[(Q - H_A) x_3 - q \frac{x_3^2}{2} \right] (-x_3) \cdot dx_3 = 0.
 \end{aligned}$$

Sostituendo l'espressione precedentemente ottenuta di V funzione di H_A ed eseguendo le integrazioni, si determina il valore di quest'ultima.

Anche in questo caso vale la pena notare che il principio dei lavori virtuali consente la risoluzione immediata del problema, senza richiedere il calcolo di spostamenti o di incognite supplementari, oltre alla H_A , (al contrario di quanto accadeva con il procedimento cinematico svolto nell'esercizio 18) e di operare su una struttura principale nella quale il regime statico generato dai carichi esterni non si discosta molto da quello effettivo della struttura assegnata.

RISOLUZIONE NUMERICA.

La struttura abbia le medesime dimensioni assegnate nell'esercizio 18:

$$h_1 = 5,00 \text{ m}; \quad h_2 = 3,00 \text{ m}; \quad l = 6,00 \text{ m}; \quad \theta = 60^\circ.$$

Sia inoltre J costante per tutto il telaio e $q = 2000 \text{ kg/m}$.

Eseguendo i calcoli si ottiene:

$$H_A = 1090 \text{ kg}; \quad H_B = 4910 \text{ kg}; \quad V = 1260 \text{ kg}.$$

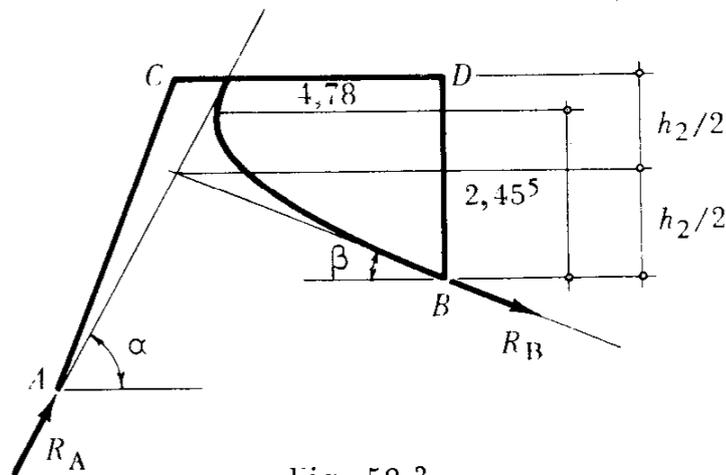


Fig. 58.3

In fig. 58.3 è riportata la curva delle pressioni. In particolare si ha:
 - inclinazione della R_A sull'orizzontale:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{V}{H_A} = 1,155; \quad \alpha = 49^\circ 10';$$

- inclinazione della R_B sull'orizzontale:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{V}{H_B} = 0,257; \quad \beta \cong 14^\circ 25'.$$

Nel piedritto BD la sezione di massimo momento è posta all'ordinata $\bar{x}_3 = \frac{H_B}{q} = 2,455 \text{ m.}$ È:

$$M_{3(\max)} = \frac{H_B^2}{2q} \cong 6025 \text{ kgm}; \quad \text{eccentricità}_{(\max)} = \frac{M_{3(\max)}}{V} = 4,78 \text{ m.}$$

59. - Risolvere la trave ad asse spezzato di fig. 59.1, soggetta a carico orizzontale uniforme su tutta l'asta AC .

La struttura è una volta iperstatica ed una volta staticamente indeterminata.

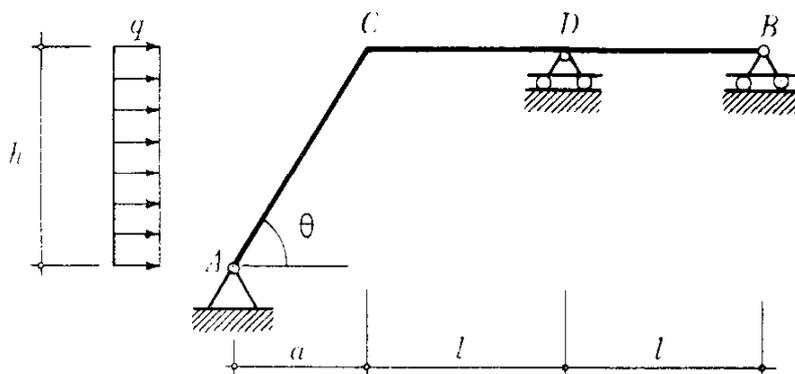


Fig. 59.1

Adottiamo la struttura principale ottenuta sopprimendo la solidarietà a rotazione in corrispondenza del nodo C mediante l'introduzione di una cerniera interna: siano M_C le coppie mutue interne esplicitate dallo svincolamento.

Risolviamo il problema mediante il principio dei lavori virtuali.

Al solito, il sistema di spostamenti e deformazioni è quello reale, generato nella struttura principale dal carico esterno q e dalle coppie iperstatiche M_C (fig. 59.2-a)). Il sistema di forze fittizio è costituito, dato lo svincolamento operato, dalle sole M_C eguagliate ad 1 e dalle loro conseguenze statiche (reazioni vincolari e azioni interne provocate nella struttura principale) (fig. 59.2-b)).

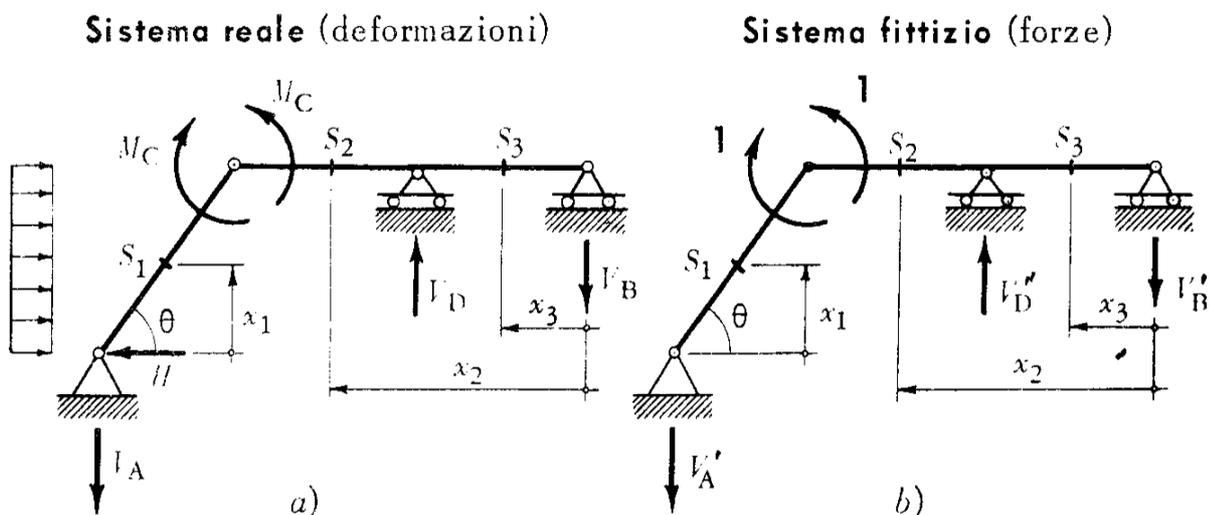


Fig. 59.2

Principio dei lavori virtuali:

$$L_{v,e} = L_{v,i}.$$

In questo caso:

$$L_{v,e} = 1 \cdot \varphi_{C, \sin.} - 1 \cdot \varphi_{C, \text{des.}} = 0.$$

Per quanto riguarda il lavoro virtuale interno è lecito, all'evidenza, trascurare la deformazione assiale della struttura in confronto a quella provocata dal momento flettente.

Il principio dei lavori virtuali assume pertanto la forma:

$$(a) \quad 0 = \int_{(AB)} M' \left(\frac{M dx}{EJ} \right).$$

Le reazioni reali si determinano mediante le relazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} \Sigma X &= 0 & H &= Q \\ \Sigma Y &= 0 & V_A - V_D + V_B &= 0 \\ \Sigma M_{B(AB)} &= 0 & -(a + 2l) V_A + Q \frac{h}{2} + V_D \cdot l &= 0 \\ \Sigma M_{C(AC)} &= 0 & -V_A \cdot a + Q \frac{h}{2} + M_C &= 0 \end{aligned}$$

Il momento flettente nelle singole aste ha l'espressione:

$$\text{asta } AC: \quad M_1 = \left(Qx_1 - q \frac{x_1^2}{2} \right) - V_A \cdot x_1 \cotg \theta$$

$$\text{asta } CD: \quad M_2 = -V_B \cdot x_2 + V_D (x_2 - l)$$

$$\text{asta } DB: \quad M_3 = -V_B \cdot x_3.$$

Reazioni e azioni interne fittizie si ottengono direttamente dalle espressioni precedenti ponendo in esse $M_C = 1$ e $q = 0$

Si ottiene:

$$\begin{aligned}
 H'_A &= 0 & V'_A &= \frac{1}{a} \\
 V'_B &= \frac{1}{l} + \frac{1}{a} & V'_D &= \frac{2}{a} + \frac{1}{l} \\
 M'_1 &= -\frac{1}{a} x_1 \cotg \theta \\
 M'_2 &= -\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{a}\right)x_2 + \left(\frac{2}{a} + \frac{1}{l}\right)(x_2 - l) \\
 M'_3 &= -\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{a}\right)x_3.
 \end{aligned}$$

Sostituendo ora nella relazione generale (a) le espressioni dei momenti fittizi e reali, e moltiplicando tutti i termini per il fattore EJ , se la struttura ha sezione costante, l'equazione dei lavori virtuali diviene:

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{h_1} \left(-\frac{1}{a} x_1 \cotg \theta\right) \left[\left(Qx_1 - q \frac{x_1^2}{2}\right) - V_A \cdot x_1 \cotg \theta\right] dx_1 + \\
 &\quad + \int_l^{2l} \left[-\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{a}\right)x_2 + \left(\frac{2}{a} + \frac{1}{l}\right)(x_2 - l)\right] \cdot \left[-V_B \cdot x_2 + V_D (x_2 - l)\right] dx_2 + \\
 &\quad + \int_0^l \left[-\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{a}\right)x_3\right] (-V_B \cdot x_3) dx_3 = 0.
 \end{aligned}$$

Eseguendo le integrazioni si ottiene una relazione che accoppia, ta a quelle d'equilibrio consente la determinazione di M_C , V_A , V_B e V_D .

ASSUNZIONE DI UN'ALTRA STRUTTURA PRINCIPALE.

Naturalmente si sarebbe potuto operare sulla struttura assegnata un altro svincolamento, ad esempio sopprimere il carrello B ed esplicitarne la reazione V_B , verticale, quale incognita iperstatica del problema. La scelta del sistema fittizio di forze è invece subordinata alla struttura principale adottata, poiché esso è costituito dalla reazione iperstatica eguagliata all'unità e dalle conseguenze statiche (reazioni e azioni interne) che esso induce sulla struttura principale medesima. In questo secondo caso si avrebbe (fig. 59.3-a) e b)):

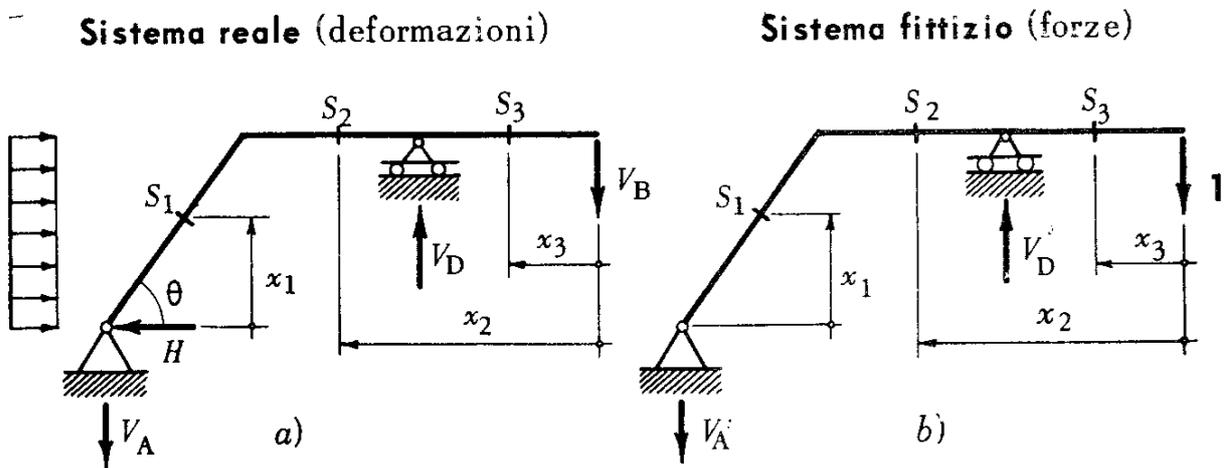


Fig. 59.3

Relazioni d'equilibrio che esprimono le reazioni reali:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0 & H_A &= Q \\ \sum Y &= 0 & V_B + V_A - V_D &= 0 \\ \sum M_{A(AB)} &= 0 & -V_B(a+2l) + V_D(a+l) - Q\frac{h}{2} &= 0. \end{aligned}$$

Momenti flettenti reali:

$$\begin{aligned} \text{asta } AC: & \quad M_1 = \left(Qx_1 - q \frac{x_1^2}{2} \right) - V_A \cdot x_1 \cotg \theta \\ \text{asta } CD: & \quad M_2 = -V_B x_2 + V_D (x_2 - l) \\ \text{asta } DB: & \quad M_3 = -V_B \cdot x_3. \end{aligned}$$

Reazioni fittizie:

$$\begin{aligned} V_B &= 1 & H'_A &= 0 \\ V'_D &= \frac{a+2l}{a+l} & V'_A &= \frac{l}{a+l} . \end{aligned}$$

Momenti flettenti fittizi:

$$\begin{aligned} M'_1 &= -\frac{l}{a+l} x_1 \cotg \theta \\ M'_2 &= -x_2 + \frac{a+2l}{a+l} (x_2 - l) \\ M'_3 &= -x_3 . \end{aligned}$$

Principio dei lavori virtuali:

$$\int_{(AB)} M' \left(\frac{M dx}{EJ} \right) = 0 .$$

Sostituendo, al solito, le espressioni dei momenti flettenti, fittizi e reali, ed eseguendo le integrazioni, si ottiene una relazione che accoppiata a quelle d'equilibrio, consente la determinazione di V_B , V_A e V_D .

CONSIDERAZIONI DI TIPO CINEMATICO.

Se si volesse risolvere questo problema iperstatico con metodo cinematico, adottando, per esempio, la struttura principale avente la cerniera interna in C , la condizione di congruenza, in simboli, sarebbe:

$$\Phi_{C, \text{ sinistra}} = \Phi_{C, \text{ destra}} .$$

Il nodo C però non è fisso, ma si sposta in direzione normale all'asta AC di una quantità δ_C , legata allo scorrimento orizzontale ξ dei carrelli dalla relazione: $\delta_C \text{ sen } \theta = \xi$ (fig. 59.4).

Pertanto la rotazione della faccia $C_{\text{sin.}}$ che precede la cerniera, è influenzata anche dallo spostamento del nodo, che si traduce per l'asta $AC_{\text{sin.}}$ in un moto rigido di rotazione:

$$\varphi_A = \frac{\delta_C}{(a/\cos \theta)}$$

attorno alla cerniera A .

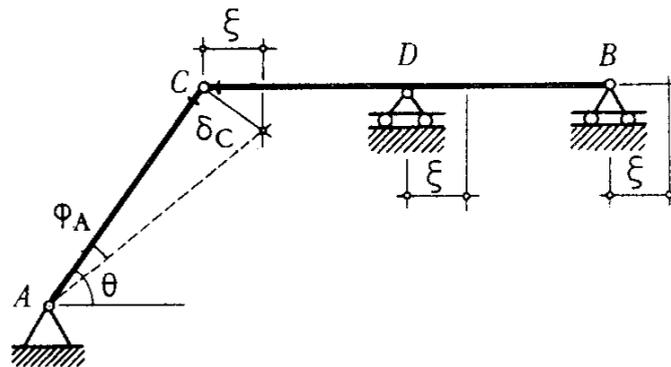


Fig. 59.4

Pertanto nella condizione di congruenza comparirebbero le due incognite indipendenti M_C e δ_C . Per rendere il problema algebricamente determinato si dovrebbe imporre una seconda condizione e, precisamente, l'eguaglianza degli spostamenti verticali delle due facce $C_{\text{sin.}}$ e $C_{\text{des.}}$, totalmente separate. Cioè:

$$\eta_{C, \text{sin.}} = \eta_{C, \text{des.}}$$

$\eta_{C, s} = \delta_C \cos \theta$ è ottenuto mediante il moto rigido dell'asta labile AC , $\eta_{C, \text{des.}}$ è fornito dalla deformazione elastica della trave isostatica BDC .

La congruenza degli spostamenti orizzontali $\xi_{C, \text{sin.}}$ e $\xi_{C, \text{des.}}$ risulta invece comunque soddisfatta dai moti rigidi dei due tronchi: la rotazione $\frac{\delta_C}{(a/\cos \theta)}$ dell'asta AC e la traslazione $\delta_C \sin \theta$ della trave BDC .

Pertanto la risoluzione affrontata per via cinematica condurrebbe alla stesura di un sistema di due equazioni in due incognite e risulterebbe

rebbe notevolmente più laboriosa di quella offerta dal principio dei lavori virtuali.

60. - Risolvere la struttura di fig. 60.1 costituita dalla trave ad asse spezzato $ABCD$ e dalle funi CE e DF .

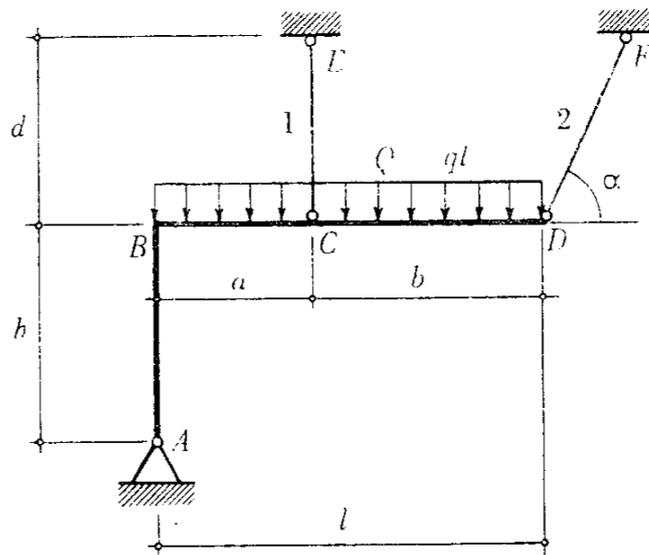


Fig. 60.1

La struttura è una volta iperstatica ed una volta staticamente indeterminata.

Sezioniamo in E ed assumiamo quale struttura principale la trave isostatica $ABCD$, vincolata con cerniera A e fune DF ; indichiamo con S_1 lo sforzo incognito, evidentemente di trazione, esplicitato nella fune labile CE (fig. 60.2-a).

Di conseguenza adottiamo come sistema fittizio di forze quello costituito dalla S_1 eguagliata ad uno, equilibrata dalle componenti H_A' e V_A' della reazione della cerniera, e dallo sforzo S_2' della fune DF . S_2' risulta diretto come se dovesse comprimere la fune su cui agisce; si tratta però di una forza fittizia, il cui senso e le cui conseguenze non hanno alcun riferimento con la realtà (fig. 60.2-b)).

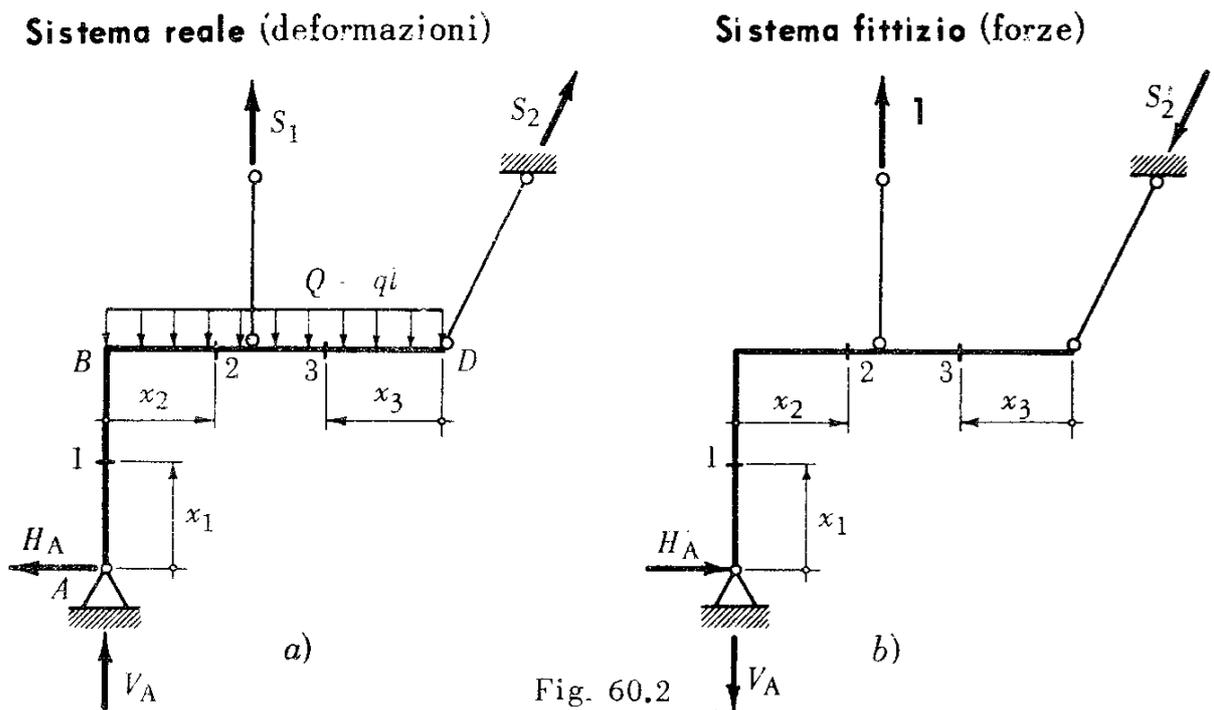


Fig. 60.2

Per la risoluzione di questo problema iperstatico bisogna mettere ovviamente in conto la deformazione flessionale della trave $ABCD$ e quella assiale delle funi CE e DF

Le reazioni dei vincoli della struttura principale, nelle condizioni reali di carico, si deducono dalle seguenti equazioni d'equilibrio:

$$\begin{aligned} \Sigma X &= 0 & H_A - S_2 \cos \alpha &= 0 \\ \Sigma Y &= 0 & V_A + S_1 + S_2 \sin \alpha - ql &= 0 \\ \Sigma M_D &= 0 & H_A \cdot h + V_A \cdot l + S_1 \cdot b - q \frac{l^2}{2} &= 0 \end{aligned}$$

Le azioni interne reali valgono

$$\begin{aligned} N_1 &= S_1 & N_2 &= S_2 \\ M_1 &= H_A \cdot x_1 \\ M_2 &= H_A h + V_A x_2 - q \frac{x_2^2}{2} \\ M_3 &= S_2 \sin \alpha \cdot x_3 - q \frac{x_3^2}{2} \end{aligned}$$

Al solito le espressioni delle reazioni ed azioni interne fittizie si ottengono dalle precedenti ponendo in esse $q = 0$ e $S_1 = 1$. Risultata:

Relazioni d'equilibrio:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0 & H'_A - S'_2 \cos \alpha &= 0 \\ \sum Y &= 0 & V'_A + S'_2 \sin \alpha - 1 &= 0 \\ \sum M_D &= 0 & -H'_A \cdot h - V'_A \cdot l + 1 \cdot b &= 0. \end{aligned}$$

Azioni interne fittizie:

$$\begin{aligned} N'_1 &= 1 & N'_2 &= -S'_2 \\ M'_1 &= -H'_A x_1 \\ M'_2 &= -H'_A h - V'_A x \\ M'_3 &= -S'_2 \sin \alpha x_3. \end{aligned}$$

Si noti che, eseguendo i calcoli, le reazioni fittizie H'_A , V'_A e S'_2 risultano di segno negativo. Esse hanno infatti il senso indicato in fig. 60.2-b), cioè contrario a quello delle corrispondenti reazioni reali.

Il lavoro virtuale esterno è nullo perché la fune CE è vincolata superiormente al punto fisso E . I cedimenti dei punti C e D dovuti alla deformabilità delle funi compaiono nell'espressione del lavoro virtuale interno. Si ha:

$$\begin{aligned} L_{v,i} &= \int_0^h M'_1 \left(\frac{M_1 dx_1}{EJ} \right) + \int_0^a M'_2 \left(\frac{M_2 dx_2}{EJ} \right) + \int_0^b M'_3 \left(\frac{M_3 dx_3}{EJ} \right) + \\ &+ 1 \cdot \frac{S_1 d}{E_F A_F} - S'_2 \cdot \frac{S_2 d}{E_F A_F \sin \alpha} = 0. \end{aligned}$$

Sostituendo le espressioni delle azioni interne, fittizie e reali, ed eseguendo le integrazioni, si ottiene una relazione che, accoppiata alle precedenti di equilibrio, rende il problema determinato dal punto di vista algebrico e consente il calcolo di tutte le reazioni.

* * *

61. - Risolvere l'arco semicircolare di fig. 61.1, soggetto al carico uniforme q su tutta la luce.

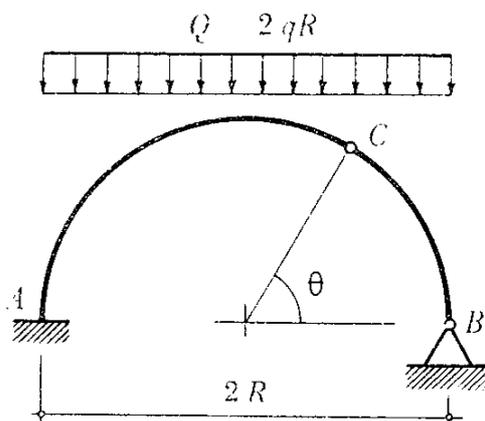


Fig. 61.1

La struttura è una volta iperstatica ed una volta staticamente indeterminata.

Risolviamola applicando il principio dei lavori virtuali.

Assumiamo quale struttura principale l'arco a tre cerniere A, C, B . Adottiamo il sistema fittizio di forze costituito dalla reazione iperstatica W_A , eguagliata ad 1, e dalle sue conseguenze statiche (reazioni dei vincoli ed azioni interne), ed esprimiamo, al solito, il lavoro virtuale, esterno ed interno, che esso compie sul sistema degli spostamenti e delle deformazioni reali, provocati dal carico q e dall'incognita W_A .

Trascurando lecitamente la deformazione assiale, ed osservando che è $L_{v,v} = 0$ perché i vincoli sono rigidi, l'espressione dei lavori virtuali in questo caso risulta:

$$\int_0^{\pi} M' \left(\frac{M \cdot R d\omega}{EJ} \right) = 0.$$

Calcoliamo ora i due sistemi, delle deformazioni e delle forze (fig. 61.2):

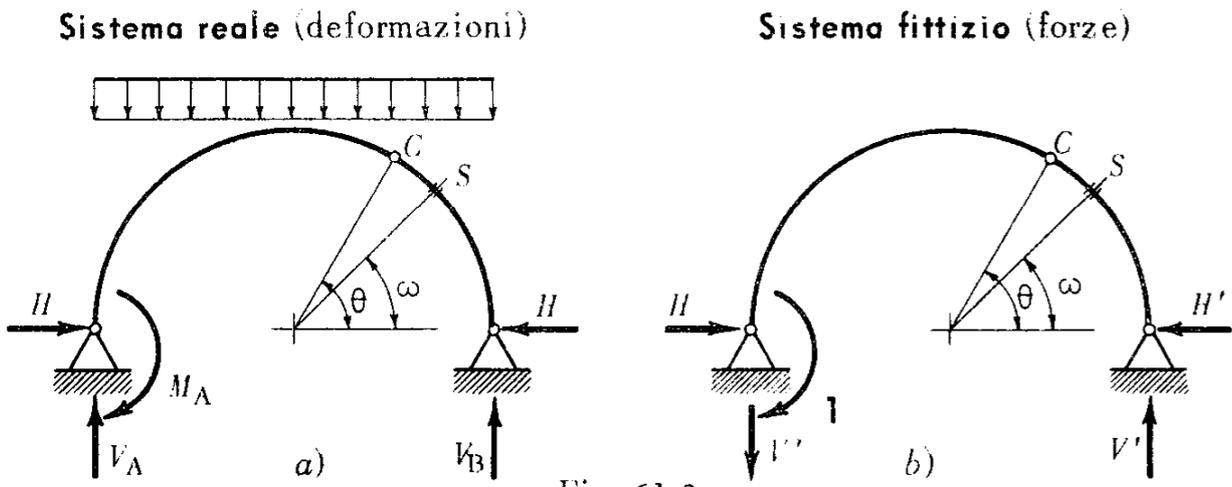


Fig. 61.2

Ricaviamo, con considerazioni d'equilibrio, le reazioni effettive dei vincoli, che esprimiamo, in funzione del carico e dell'incognita M_A , ponendo successivamente nelle loro espressioni $Q = 0$ e $M_A = 1$, si ottengono le reazioni fittizie.

$$V_A = \frac{Q}{2} - \frac{M_A}{2R}$$

$$V_B = \frac{Q}{2} + \frac{M_A}{2R}$$

$$H = \frac{1 - \cos \theta}{\text{sen } \theta} \left[V_B - \frac{Q}{4}(1 - \cos \theta) \right] = \frac{Q}{4} \text{sen } \theta + \frac{1 - \cos \theta}{\text{sen } \theta} \frac{M_A}{2R}$$

$$V' = \frac{1}{2R} \quad H' = \frac{1 - \cos \theta}{\text{sen } \theta} \frac{1}{2R}$$

Nella sezione generica S, definita dalla variabile ω , il momento flettente, fittizio e reale, vale.

$$\begin{aligned} M &= V_B \cdot R(1 - \cos \omega) - HR \text{sen } \omega - \frac{QR}{4} (1 - \cos \omega)^2 = \\ &= \frac{QR}{4} \left[(\text{sen } \omega - \text{sen } \theta) \text{sen } \omega \right] + \frac{M_A}{2} \left[(1 - \cos \omega) - \left(\frac{1 - \cos \theta}{\text{sen } \theta} \right) \text{sen } \omega \right] \\ M' &= \frac{1}{2} (1 - \cos \omega) - \frac{1 - \cos \theta}{2 \text{sen } \theta} \text{sen } \omega. \end{aligned}$$

Sostituendo le espressioni di M ed M' nella relazione dei lavori virtuali e moltiplicando per il fattore costante EI , si ottiene:

$$\int_0^\pi \left[\frac{1 - \cos \omega}{2} - \frac{1 - \cos \theta}{2 \operatorname{sen} \theta} \operatorname{sen} \omega \right] \cdot \left[\frac{QR}{4} (\operatorname{sen} \omega - \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \omega + \right. \\ \left. + \frac{M_A}{2} \left(1 - \cos \omega - \frac{1 - \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \operatorname{sen} \omega \right) \right] R d\omega = 0.$$

Eseguendo le integrazioni e risolvendo risulta:

$$M_A = \frac{QR}{8} \frac{\left[2 \operatorname{sen} \theta + \frac{1 - \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \frac{4}{3} - \frac{\pi}{2} (2 - \cos \theta) \right]}{\left[\frac{\pi}{8} \left(\frac{1 - \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \right)^2 + \frac{3}{8} \pi - \frac{1 - \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \right]}$$

CONSIDERAZIONI SUL METODO CINEMATICO.

Se si fosse voluto risolvere il problema per via cinematica, si sarebbe potuto assumere quale struttura principale la mensola AB , incastrata in A e labile nel tronco terminale CB , per la presenza della cerniera interna C (fig. 61.3).

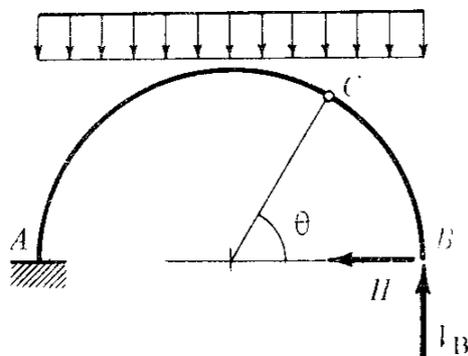


Fig. 61.3

Per il rispetto del vincolo in B si sarebbero dovute imporre le due condizioni di congruenza:

$$\xi_B = 0 \quad \eta_B = 0.$$