

\*\*\*

63. - Risolvere la struttura di fig. 63.1 nell'ipotesi che la biella  $AD$  sia sottoposta ad una variazione positiva uniforme di temperatura  $+\Delta t$ .

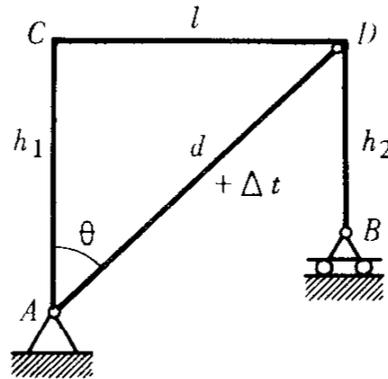


Fig. 63.1

Il portale  $ACDB$  è esternamente isostatico; non essendo soggetto a carichi esterni le reazioni della cerniera  $A$  e del carrello  $B$  sono evidentemente nulle. La biella  $AD$  costituisce un vincolo sovrabbondante interno; la variazione di temperatura genera uno stato di coazione per effetto del quale le due parti di struttura (portale e biella) si trasmettono reciprocamente delle azioni costituenti nel loro insieme un sistema equilibrato di forze.

Sezioniamo in  $D$  separando la biella dal portale e indichiamo con  $X$  l'azione mutua incognita. Per ragioni d'equilibrio  $X$  è diretta secondo l'asse della biella ed ha certamente il senso di fig. 63.2, giacché la variazione di temperatura dell'asta  $AD$  è in aumento.

Risolviamo il problema applicando il principio dei lavori virtuali.

Il sistema reale di forze e influenze ambientali che genera gli spostamenti e le deformazioni reali è indicato in fig. 63.2. Il piedritto  $BD$  è ovviamente scarico; nelle altre due aste del portale l'azione interna di momento flettente vale:

$$\begin{aligned} \text{asta } AC & \quad M_1 = X \operatorname{sen} \theta \cdot x_1 \\ \text{asta } CD & \quad M_2 = X \operatorname{cos} \theta \cdot x_2 \end{aligned}$$

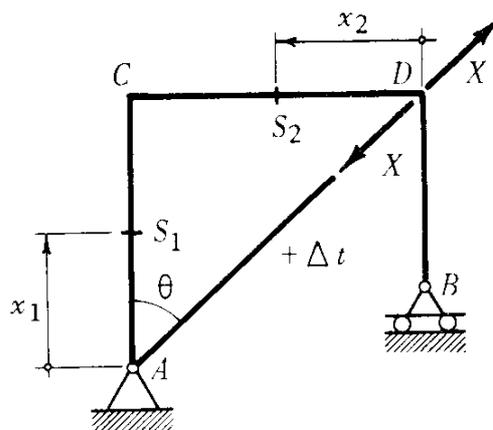


Fig. 63.2

L'asta  $AD$  è soggetta al solo sforzo assiale  $X$  di compressione.

Assumiamo quale sistema fittizio di forze quello costituito dalla incognita  $X$  eguagliata ad 1 (e  $\Delta t = 0$ ). Le azioni interne fittizie sono:

$$\text{asta } AC: \quad M'_1 = \text{sen } \theta \cdot x_1$$

$$\text{asta } CD: \quad M'_2 = \text{cos } \theta \cdot x_2$$

$$\text{asta } AD: \quad N' = 1.$$

Applichiamo il principio dei lavori virtuali:  $L_{v,e} = L_{v,i}$ .

Il lavoro virtuale esterno è zero perché i vincoli esterni non reagiscono, ed in  $D$  è nullo lo spostamento relativo dell'estremità della biella e del vertice del portale.

Il lavoro virtuale interno è costituito dalla seguente espressione:

$$L_{v,i} = \int_0^{h_1} M'_1 \left( \frac{M_1 dx_1}{EJ} \right) + \int_0^l M'_2 \left( \frac{M_2 dx_2}{EJ} \right) + \int_0^d N' d\xi = 0.$$

$d\xi$  è la dilatazione del tronco generico infinitesimo della biella, provocata dalla variazione termica e dallo sforzo assiale, che consideriamo positiva nel senso degli accorciamenti.

Sostituendo:

$$\int_0^{h_1} (\text{sen } \theta \cdot x_1) \frac{X \text{ sen } \theta \cdot x_1}{EJ} dx_1 + \int_0^l (\text{cos } \theta \cdot x_2) \frac{X \text{ cos } \theta \cdot x_2}{EJ} dx_2 + 1 \left( \frac{X}{E_F A_F} - \alpha_F \Delta t \right) d = 0.$$

Eseguendo le integrazioni, nell'ipotesi di struttura a sezione costante, si ottiene:

$$(a) \quad \frac{X h_1^3}{3 EJ} \text{sen}^2 \theta + \frac{X l^3}{3 EJ} \text{cos}^2 \theta + \left( \frac{X}{E_F A_F} - \alpha_F \Delta t \right) d = 0.$$

Risolvendo:

$$X = \frac{\alpha_F \cdot \Delta t \cdot d}{\frac{h_1^3 \text{sen}^2 \theta + l^3 \text{cos}^2 \theta}{3 EJ} + \frac{d}{E_F A_F}}.$$

*OSSERVAZIONE SULLO SVINCOLAMENTO.* - Anzi che sezionare solo in  $D$  si sarebbe potuto separare totalmente la biella dal portale tagliando in  $A$  e in  $D$ , ed assumere la struttura principale di fig. 63.3.

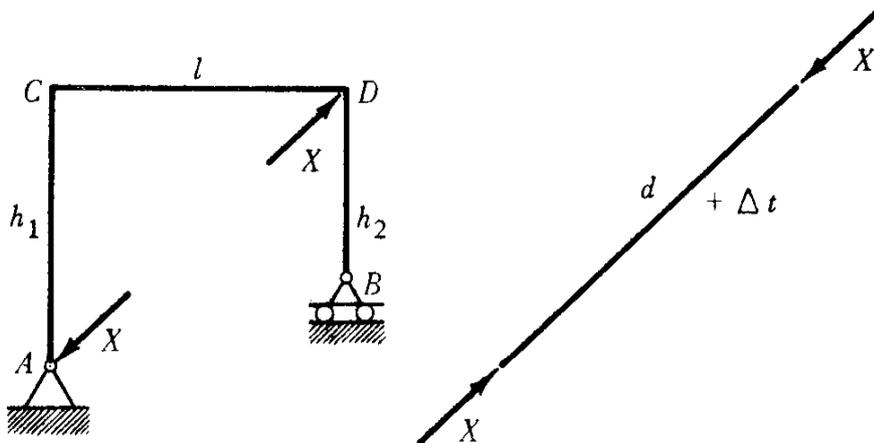


Fig. 63.3

In questo caso il lavoro virtuale interno si manifesta solo nelle due aste  $AC$  e  $CD$ . Il lavoro virtuale esterno non è più nullo, ma è fornito dalla forza  $X = 1$  che lavora per effetto dello spostamento del vertice  $D$  del portale. Questo si determina direttamente sulla biella soggetta a  $\Delta t$  e  $X$ .

Risulta:

$$l \left( \alpha_F \Delta t - \frac{X}{E_F A_F} \right) d = \int_0^{h_1} (\text{sen } \theta \cdot x_1) \frac{X \text{ sen } \theta \cdot x_1}{EJ} dx_1 + \\ + \int_0^l (\text{cos } \theta \cdot x_2) \frac{X \text{ cos } \theta \cdot x_2}{EJ} dx_2.$$

Ovviamente il segno del lavoro virtuale esterno è in questo caso positivo, contrario a quello del lavoro virtuale interno dell'asta  $AD$ , calcolato in precedenza, in accordo con il fatto che il senso della  $X = 1$  applicata al vertice del portale è concorde con lo spostamento di  $D$  provocato dalla variazione termica.

#### CONSIDERAZIONI DI TIPO CINEMATICO.

L'equazione di congruenza (a) ottenuta precedentemente esprime l'annullarsi dello spostamento relativo in  $D$  dell'estremità della biella e del portale. Infatti i primi due termini rappresentano la freccia nella direzione  $AD$  delle due mensole  $CA$  e  $CD$  caricate dalla  $X$  nell'estremo libero. Allo stesso risultato, naturalmente, si sarebbe giunti procedendo con il metodo cinematico, fissando il nodo  $C$  nel piano, e calcolando lo spostamento relativo di  $A$  e  $D$  lungo la loro congiungente.

CALCOLO DI RESISTENZA.

Per quanto riguarda la biella essa va verificata a carico di punta, se il suo rapporto di snellezza è tale da richiederlo. Il portale va verificato in corrispondenza del nodo *C*, a flessione semplice, a causa della grande eccentricità della curva delle pressioni che coincide con la retta d'azione della *X*.

Qualora si voglia mettere in conto anche il piccolo contributo dello sforzo normale, occorre prendere in considerazione la sezione di sommità del piedritto *AC*, o quella iniziale della trave *CD*, a seconda che sia  $h_1 > l$ , o viceversa.

\*\*\*

64. - Risolvere la trave reticolare di fig. 64.1 soggetta al carico concentrato verticale *P*, applicato al nodo *D*.

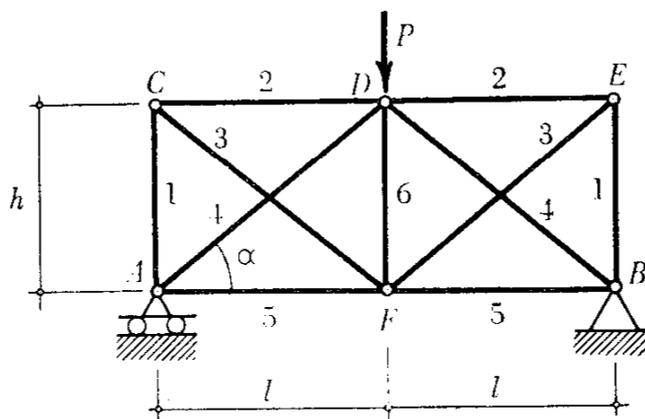


Fig. 64.1

La struttura è due volte staticamente indeterminata all'interno, giacché possiede due aste sovrabbondanti; la simmetria riduce però ad uno solo il grado di indeterminazione.

Svincoliamo in modo da sfruttare la simmetria esistente: sezioniamo le due diagonali *AD* e *BD* all'attacco con il nodo *D* ed esplicitiamo

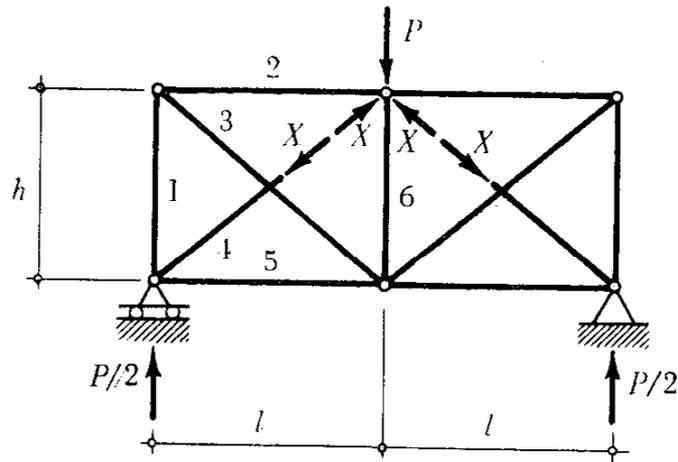


Fig. 64.2

gli sforzi incogniti  $X$ , che indichiamo di compressione per le aste (figura 64.2).

Determiniamo lo stato di tensione e deformazione reale: per ragioni di simmetria calcoliamo gli sforzi delle aste di sola metà trave e indichiamo positivi quelli di trazione.

ASTA	SFORZO	DEFORMAZIONE
1	$S_1 = -\left(\frac{P}{2} - X \operatorname{sen} \alpha\right)$	$\Delta l_1 = -\frac{\left(\frac{P}{2} - X \operatorname{sen} \alpha\right) h}{EA_1}$
2	$S_2 = -\left(\frac{P}{2 \operatorname{tg} \alpha} - X \operatorname{cos} \alpha\right)$	$\Delta l_2 = -\frac{\left(\frac{P}{2 \operatorname{tg} \alpha} - X \operatorname{cos} \alpha\right) l}{EA_2}$
3	$S_3 = +\left(\frac{P}{2 \operatorname{sen} \alpha} - X\right)$	$\Delta l_3 = +\frac{\left(\frac{P}{2 \operatorname{sen} \alpha} - X\right) l}{E l_3 \operatorname{cos} \alpha}$
4	$S_4 = -X$	$\Delta l_4 = -\frac{X l}{EA_4 \operatorname{cos} \alpha}$
5	$S_5 = +X \operatorname{cos} \alpha$	$\Delta l_5 = +\frac{X l \operatorname{cos} \alpha}{EA_5}$
6	$S_6 = -(P - 2 X \operatorname{sen} \alpha)$	$\Delta l_6 = -\frac{(P - 2 X \operatorname{sen} \alpha) h}{EA_6}$

Assumiamo come sistema fittizio di forze quello costituito dalle sole  $\Lambda = 1$  (fig. 64.3). Gli sforzi fittizi valgono:

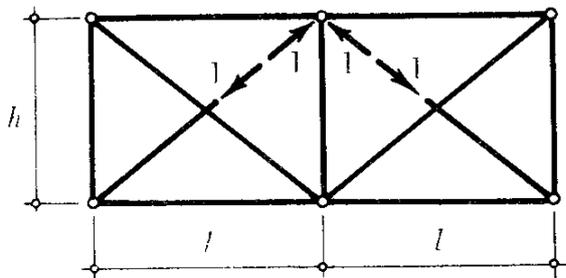


Fig. 64.3

ASTA	SFORZO
1	$S'_1 = + \text{sen } \alpha$
2	$S'_2 = + \text{cos } \alpha$
3	$S'_3 = -1$
4	$S'_4 = -1$
5	$S'_5 = + \text{cos } \alpha$
6	$S'_6 = + 2 \text{sen } \alpha.$

Il lavoro virtuale esterno è nullo poiché non si ha spostamento relativo delle estremità superiori delle aste 4 rispetto al nodo D, cui sono vincolate.

Il principio dei lavori virtuali si esprime pertanto nella forma:

$$L_{v,i} = 2 \sum_1^5 S'_i \left( \frac{S_i d_i}{EA_i} \right) + S'_6 \left( \frac{S_6 h}{EA_6} \right) = 0.$$

Sostituendo in questa equazione le espressioni degli sforzi fittizi e delle deformazioni reali, si ottiene la relazione che consente la determinazione dell'incognita  $\Lambda$ .

### RISOLUZIONE NUMERICA E CALCOLO DI RESISTENZA.

Si è già visto nell'esercizio 57 quale importanza abbia il carico di punta nel progetto delle aste compresse. È pertanto conveniente dimensionare inizialmente la struttura tenendo già conto di ciò, in linea di massima.

Adottiamo per i tiranti una sezione di valore  $A$ , e per i puntoni  $5A$ . L'equazione dei lavori virtuali risulta:

$$\frac{2}{5 EA} \left[ \left( -\frac{P}{2} + X \operatorname{sen} \alpha \right) h \operatorname{sen} \alpha + \left( -\frac{P}{2 \operatorname{tg} \alpha} + X \cos \alpha \right) l \cos \alpha + \frac{Xl}{\cos \alpha} \right] +$$

$$+ \frac{2}{E \cdot l} \left[ \left( -\frac{P}{2 \operatorname{sen} \alpha} + X \right) \frac{l}{\cos \alpha} + Xl \cos^2 \alpha \right] + \frac{(-P + 2X \operatorname{sen} \alpha)h}{5 EA} 2 \operatorname{sen} \alpha = 0$$

Sviluppando e semplificando i termini simili si ottiene:

$$V \cdot 3 \left[ h \operatorname{sen}^2 \alpha + 2l \left( \cos^2 \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \right) \right] =$$

$$= \frac{P}{2} \left[ h \left( \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} + \operatorname{sen} \alpha \right) + l \left( \frac{\cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} \right) \right].$$

Se la struttura ha le dimensioni  $h = 2,00$  m;  $l = 3,00$  m e il carico vale  $P = 5000$  kg, risulta:

$$X = +1040 \text{ kg.}$$

Gli sforzi nelle singole aste valgono:

$$S_1 = -1925 \text{ kg}$$

$$S_2 = -2885 \text{ «}$$

$$S_3 = +3460 \text{ «}$$

$$S_4 = -1040 \text{ «}$$

$$S_5 = +865 \text{ «}$$

$$S_6 = -3870 \text{ «.}$$

Si può ora procedere al dimensionamento delle aste; in accordo con il proporzionamento iniziale è sufficiente progettare la sezione del tirante 3 e del puntone 2 cui, per effetto della maggior snellezza in confronto al puntone 6, compete un coefficiente  $\omega_2$  tale senz'altro che  $\omega_2 S_2 > \omega_6 S_6$ .

Assumiamo  $K_F = 1400 \text{ kg/cm}^2$ .

Dimensioniamo dapprima l'asta 3:

$$A_3 = \frac{3460}{1400} = 2,47 \text{ cm}^2.$$

Adottiamo il PN a L a lati uguali  $3,5 \times 3,5 \times 0,4$  cm avente la sezione di  $2,67 \text{ cm}^2$ .

Per il puntone 2 deve aversi:

$$A_2 = 5 A_3 = 13,3 \text{ cm}^2.$$

Adottiamo la sezione costituita da due PN a L a lati uguali, affiancati,  $6,0 \times 6,0 \times 0,5$  cm, avente le caratteristiche:

- Sezione:

$$A_2 = 2 \cdot 6,91 = 13,82 \text{ cm}^2$$

$$J_{\min} = 45,5 \text{ cm}^4$$

$$\rho_{\min} = 1,82 \text{ cm}.$$

Risulta:

$$\lambda = \frac{l_0}{\rho_{\min}} = \frac{300}{1,82} = 165 \quad \omega_2 = 6,44.$$

Eseguendo un calcolo di verifica:

$$\sigma = 6,44 \frac{2885}{13,82} = 1330 \text{ kg/cm}^2 < K_F.$$

Per il puntone 6 si ottiene:

$$\lambda = \frac{200}{1,82} = 110 \quad \omega = 2,86$$

$$\sigma = 2,86 \frac{3870}{13,82} = 800 \text{ kg/cm}^2 < K_F.$$

\* \* \*

65. - Risolvere il telaio zoppo di fig. 65.1, la cui trave  $CD$  è soggetta ad una variazione termica, lineare nell'altezza, di valore  $+\Delta t_2$  per le fibre superiori esterne, e  $+\Delta t_1$  per le fibre inferiori interne (sia  $\Delta t_2 > \Delta t_1$ ). Si supponga inoltre che nel nodo  $C$  il piedritto e la trave siano collegati mediante una cerniera elastica di costante nota  $K$ .

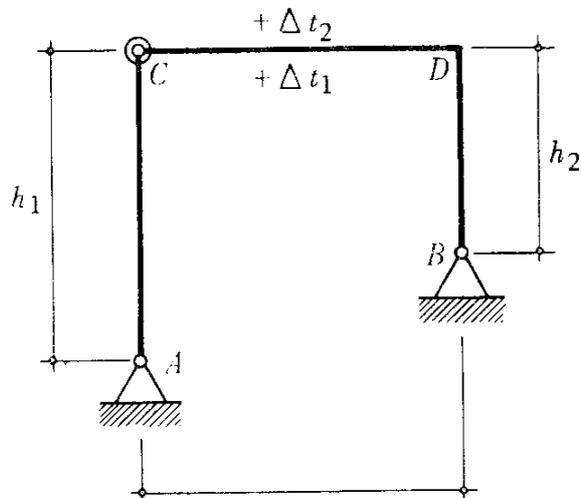


Fig. 65.1

La struttura è una volta iperstatica: svincoliamo in  $A$  sostituendo alla cerniera un carrello a piano di scorrimento orizzontale e indichiamo con  $H$  la componente orizzontale esplicitata della reazione incognita.

Evidentemente le reazioni dei vincoli, dovendo costituire un sistema equilibrato di forze, sono dirette secondo la congiungente  $AB$ ; tuttavia il loro senso dipende dal rapporto  $\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1}$  e dal valore della costante  $K$ , oltre che dalle caratteristiche geometriche del portale, e non è, a priori, facilmente prevedibile.

Se la  $H$  è diretta all'interno della struttura, le reazioni verticali hanno il senso di fig. 65.2 e valgono:

$$V = \frac{h_1 - h_2}{l} H.$$

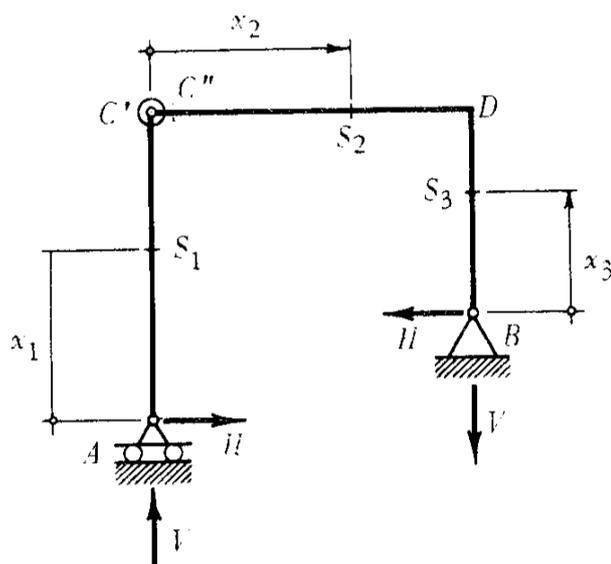


Fig. 65.2

Il momento flettente nei vari tratti è:

$$\begin{aligned} \text{piedritto } AC: \quad M_1 &= -H x_1 \\ \text{trave } CD: \quad M_2 &= -H h_1 + H \frac{h_1 - h_2}{l} x_2 \\ \text{piedritto } BD: \quad M_3 &= -H x_3. \end{aligned}$$

Il sistema fittizio di forze da applicare alla struttura principale è costituito dalla stessa  $H$  posta eguale ad 1 e dalle reazioni  $H'$  e  $V'$  che la equilibrano. Le azioni interne fittizie  $M'$  si ottengono direttamente dalle espressioni di quelle reali ponendo in esse:

$$H = 1 \quad \text{e} \quad V = V' = \frac{h_1 - h_2}{l}.$$

Risulta:

$$\begin{aligned} M'_1 &= -x_1 \\ M'_2 &= -h_1 + \frac{h_1 - h_2}{l} x_2 \\ M'_3 &= -x_3. \end{aligned}$$

Le deformazioni reali da associare alle azioni interne fittizie sono:

a) dilatazioni generate dalla variazione termica. Possiamo scinderne gli effetti in due distinti contributi: il primo dovuto alla variazione uniforme  $\Delta t_G$  baricentrica, che provoca la medesima dilatazione  $\alpha \Delta t_G$  di tutte le fibre della trave. In particolare se l'asse baricentrico è a metà dell'altezza  $s$  della sezione si ha:

$$\Delta t_G = \frac{1}{2} (\Delta_1 + \Delta_2);$$

il secondo relativo alla variazione  $+(\Delta t_2 - \Delta t_G)$  all'estradosso e  $-(\Delta t_G - \Delta t_1)$  all'intradosso, variabile linearmente nello spessore della trave, nulla nel baricentro, tale da provocare una rotazione relativa delle due facce di un tronco generico  $dx_2$ , d'altezza  $s$ :

$$d\varphi_t = -\alpha \left[ (\Delta t_2 - \Delta t_G) + (\Delta t_G - \Delta t_1) \right] \frac{dx_2}{s} = -\alpha \frac{\Delta t_2 - \Delta t_1}{s} dx_2;$$

b) le deformazioni flessionali provocate dai momenti reali  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ;

c) la rotazione relativa  $(\varphi_{C'} - \varphi_{C''}) = K \cdot M_C = \Delta \varphi_C$  delle facce  $C'$  e  $C''$  all'attacco con la cerniera elastica  $C$ .

Il principio dei lavori virtuali acquista pertanto la forma:

$$\int_0^{h_1} M_1' \left( \frac{M_1 dx_1}{EJ} \right) + \int_0^l M_2' \left( \frac{M_2 dx_2}{EJ} \right) + \int_0^{h_2} M_3' \left( \frac{M_3 dx_3}{EJ} \right) + N_2' (\alpha \Delta t_G \cdot l) - \int_0^l M_2' \alpha \left( \frac{\Delta t_2 - \Delta t_1}{s} \right) dx_2 + M_C' (KM_C) = 0.$$

Sostituendo le espressioni dei momenti fittizi e reali osservando che è  $M_C = -Hh_1$  e  $N_2' = -1$ , ed eseguendo le integrazioni si ottiene il valore dell'incognita  $H$ .

$$H = \frac{1}{h_1} \left[ \int_0^{h_1} M_1' M_1 dx_1 + \int_0^l M_2' M_2 dx_2 + \int_0^{h_2} M_3' M_3 dx_3 + \alpha \Delta t_G \cdot l - \int_0^l M_2' \alpha \left( \frac{\Delta t_2 - \Delta t_1}{s} \right) dx_2 + KM_C \right]$$

\*\*\*

66. - Risolvere il telaio di fig. 66.1, in cui si pratica, in corrispondenza della sezione  $E$ , una distorsione, mediante l'inserimento di un cuneo d'acciaio indeformabile di spessore medio  $\delta_0$  e angolo al vertice  $\varphi_0$ .

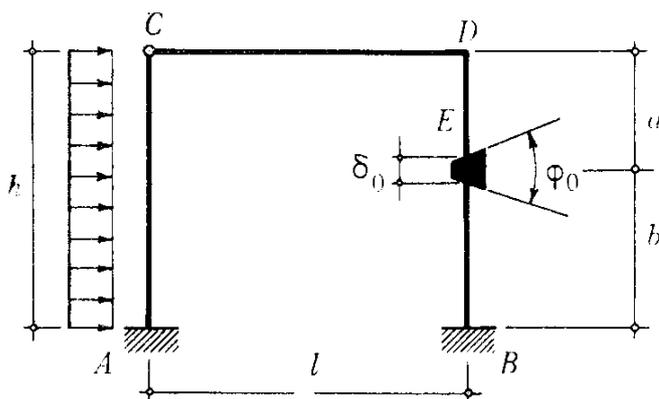


Fig. 66.1

Il problema presenta le medesime caratteristiche degli esercizi 46 e 47.

La struttura è due volte iperstatica e due volte staticamente indeterminata. Risolviamola mediante il principio dei lavori virtuali.

Sezioniamo in  $C$  ed assumiamo come struttura principale le due mensole  $AC$  e  $BDC$  soggette negli estremi liberi alle azioni mutue interne  $X$  ed  $Y$  esplicitate dallo svincolamento (fig. 66.2).

In questo caso particolare per determinare i due sistemi, degli spostamenti e delle forze, non è necessario calcolare le reazioni dei vincoli esterni, giacché è possibile esprimere le azioni interne, reali e fittizie, in qualunque punto della struttura, a partire dalla sezione  $C$  svincolata.

Naturalmente, essendo la curva delle pressioni molto discosta dall'asse geometrico (è un arco di parabola per il tratto  $AC$ , ed è la retta d'azione della risultante di  $X$  ed  $Y$  per il tratto  $CDB$ ) l'unica deformazione corrente di cui si tien conto è quella provocata dal momento flettente, oltre, naturalmente, alle deformazioni impresse  $\delta_0$  e  $\varphi_0$ , concentrate nella sezione  $E$  d'inserimento del cuneo.

**Sistema reale** (deformazioni). - Momenti flettenti reali (considerati positivi se tendono le fibre interne):

$$M_1 = -\frac{qx_1^2}{2} + Xx_1$$

$$M_2 = +Yx_2$$

$$M_3 = +Yl + Xx_3.$$

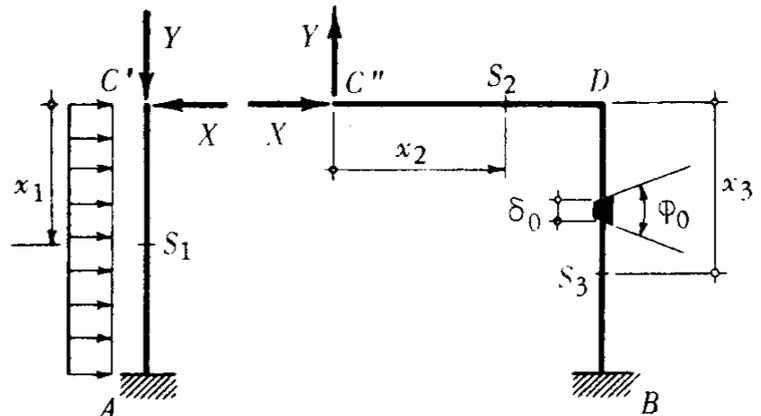


Fig. 66.2

Si adottano due sistemi fittizi di forze; essi, conseguentemente allo svincolamento operato, sono:

**1° Sistema fittizio di forze:**  $X = 1$  ( $Y = 0$ ;  $q = 0$ ).

- Momenti fittizi:

$$M'_1 = 1 \cdot x_1$$

$$M'_2 = 0$$

$$M'_3 = +1 \cdot x_3.$$

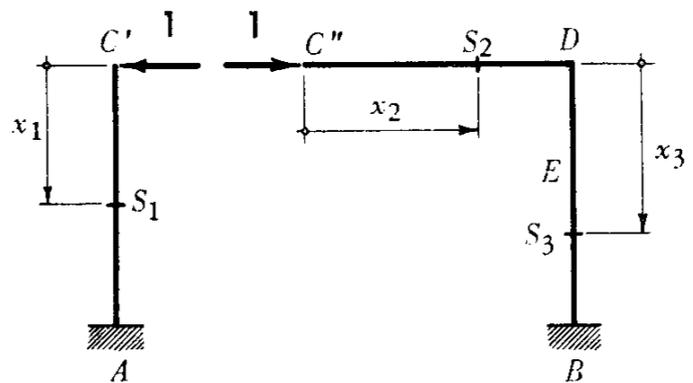


Fig. 66.3

**2° Sistema fittizio di forze:**  $Y = 1$  ( $X = 0$ ;  $q = 0$ ).

- Momenti fittizi:

$$M''_1 = 0$$

$$M''_2 = 1 \cdot x_2$$

$$M''_3 = 1 \cdot l.$$

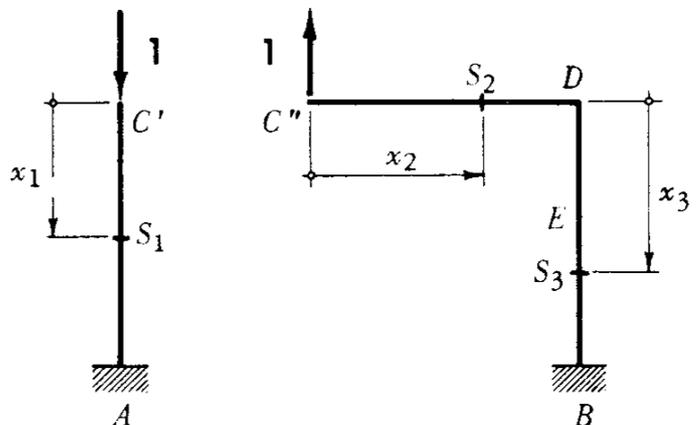


Fig. 66.4

Si deve inoltre tenere presente lo sforzo normale fittizio in  $E$  che localmente lavora sull'allungamento imposto  $\delta_0$ . Ovviamente è:  $N_3' = 0$ ;  $N_3'' = +1$ .

Applichiamo il principio dei lavori virtuali due volte, facendo lavorare ciascun sistema fittizio di forze su quello reale delle deformazioni. Poiché le due facce  $C'$  e  $C''$ , all'attacco con la cerniera, non possono compiere spostamenti relativi nelle due direzioni orizzontale e verticale, e gli incastri  $A$  e  $B$  si suppongono rigidi, il lavoro virtuale esterno è nullo in entrambi i casi.

Con il 1° sistema fittizio si ha:

$$L_{v,i} = \int_0^h 1 \cdot x_1 \left( X x_1 - \frac{q x_1^2}{2} \right) \frac{dx_1}{EJ} + \int_0^h 1 \cdot x_3 (X x_3 + Y l) \frac{dx_3}{EJ} - (1 \cdot a) \varphi_0 = 0$$

Con il 2° sistema fittizio si ha:

$$L_{v,i} = \int_0^l (1 \cdot x_2) Y x_2 \frac{dx_2}{EJ} + \int_0^h (1 \cdot l) (X x_3 + Y l) \frac{dx_3}{EJ} - (1 \cdot l) \varphi_0 + 1 \cdot \delta_0 = 0.$$

Nel caso che la struttura abbia sezione costante, eseguendo le integrazioni e raccogliendo i termini simili, si ottiene il sistema risolutivo nelle incognite  $X$  ed  $Y$ :

$$\begin{cases} X \frac{2}{3} h^3 + Y \frac{l h^2}{2} & = \frac{Q h^3}{8} + EJ \cdot \varphi_0 a \\ X \frac{l h^2}{2} + Y \left( \frac{l^3}{3} + l^2 h \right) & = EJ \cdot (\varphi_0 \cdot l - \delta_0). \end{cases}$$

### CONSIDERAZIONI SUL METODO CINEMATICO.

In questo caso si sarebbe giunti molto semplicemente allo stesso risultato procedendo anche con il metodo cinematico.

Con la medesima struttura principale adottata in precedenza le due condizioni di congruenza, sarebbero state:

$$\xi_{C'} - \xi_{C''} = 0 \quad \eta_{C'} - \eta_{C''} = 0.$$

Lo spostamento dell'estremo libero  $C'$ , per l'indefornabilità assiale dell'asta  $AC$ , può avvenire solo in senso orizzontale. Lo spostamento di  $C''$  è influenzato sia dalla deformazione elastica delle aste  $CD$  e  $DB$ , che dall'inserimento del cuneo, i cui effetti si trasmettono rigidamente all'estremo libero.

In simboli:

$$\begin{cases} \xi_{C', A} - (\xi_{D, B} + \varphi_0 \cdot a) = 0 \\ \varphi_D \cdot l + \eta_{C'', D} + (\delta_0 - \varphi_0 \cdot l) = 0. \end{cases}$$

## CONSIDERAZIONI SULLA SCELTA DI UN'ALTRA STRUTTURA PRINCIPALE.

Meno spontanea appare la soluzione se si seziona la struttura in  $E$ . Procedendo, ad esempio, con il principio dei lavori virtuali, si può eseguire uno svincolamento parziale che consenta alle due facce  $E'$  ed  $E''$  gli stessi movimenti relativi imposti dalla distorsione. È quello che si ottiene collegandole con una biella orizzontale infinitesima: questa permette la rotazione relativa e lo spostamento relativo verticale ed impedisce lo spostamento relativo orizzontale (fig. 66.5). Le azioni interne esplicitate sono solo  $N_E$  ed  $M_E$ , tuttavia anche lo sforzo di taglio  $T_E$  interviene nell'espressione corrente del momento flettente nelle varie aste della struttura.  $T_E$  si esprime in funzione di  $N_E$  ed  $M_E$  mediante la condizione d'equilibrio alla rotazione del tronco  $E'DC$  attorno alla cerniera  $C$ .

I due sistemi fittizi da adottare in questo caso sono:

$$\begin{aligned} 1^\circ) \quad N_E &= 1; & M_E &= 0; & q &= 0 \\ 2^\circ) \quad M_E &= 1; & N_E &= 0; & q &= 0; \end{aligned}$$

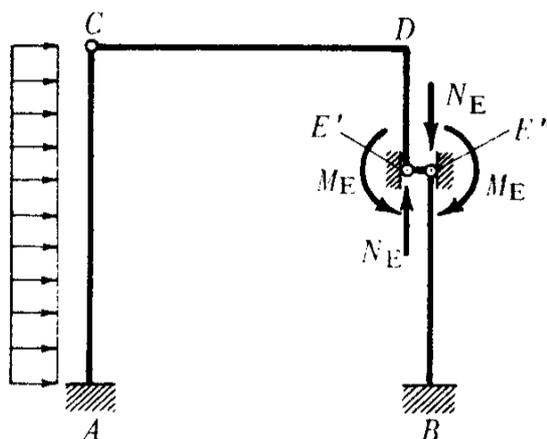


Fig. 66,5

(ciascuno, naturalmente, con le proprie conseguenze statiche indotte sulla struttura principale) ed il lavoro virtuale esterno che ognuno di essi compie allorché è associato al sistema reale degli spostamenti è costituito proprio dalle deformazioni impresse  $\delta_0$ , e  $\varphi_0$ .

\*\*\*

67. - Risolvere la struttura di fig. 67.1, nell'ipotesi che la cerniera A ceda elasticamente nella direzione  $\beta$  (il senso del cedimento è indicato dalla freccia).

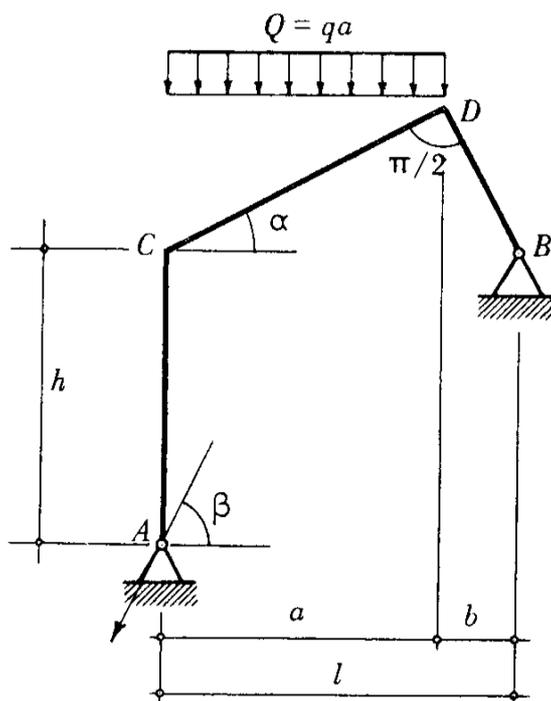


Fig. 67.1

La struttura è una volta iperstatica ed una volta staticamente indeterminata.

Assumiamo quale struttura principale il portale isostatico vincolato con cerniera  $B$  e carrello  $A$  a piano di scorrimento orizzontale, cui è applicata la spinta  $H$  esplicitata (fig. 67.2).

Procediamo con il principio dei lavori virtuali.

Determiniamo anzitutto il sistema reale degli spostamenti e delle deformazioni.

### Sistema reale (deformazioni)

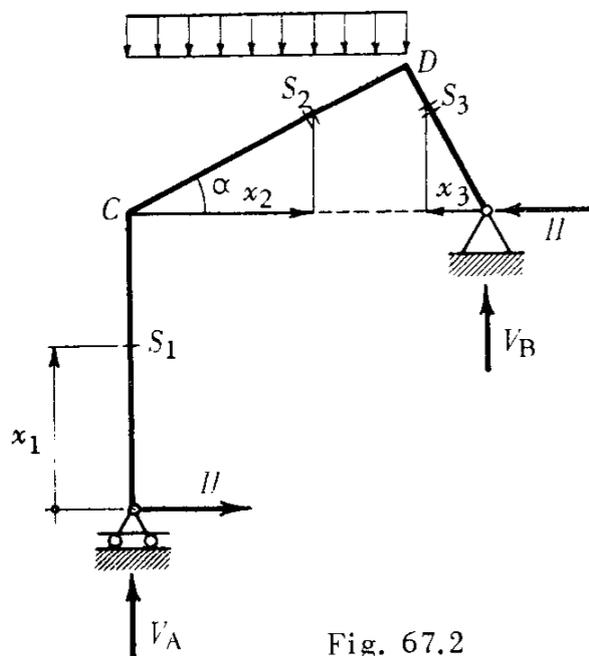


Fig. 67.2

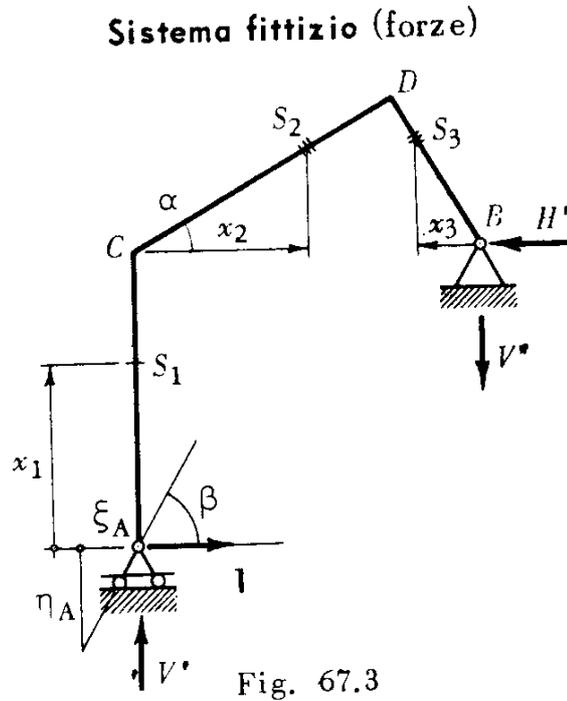
Reazioni della struttura principale:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0 & H_B = H_A = H \\ \sum M_B &= 0 & V_A = Q \left(1 - \frac{a}{2l}\right) + H \frac{h}{l} \\ \sum Y &= 0 & V_B = Q \frac{a}{2l} - H \frac{h}{l}. \end{aligned}$$

Momenti flettenti nelle aste:

$$\begin{aligned} M_1 &= -H x_1 \\ M_2 &= V_A \cdot x_2 - H (h + x_2 \operatorname{tg} \alpha) - q \frac{x_2^2}{2} \\ M_3 &= V_B \cdot x_3 - H x_3 \cdot \operatorname{cotg} \alpha \end{aligned}$$

Al solito il sistema fittizio di forze si ottiene da quello reale assegnando alla incognita iperstatica esplicitata il valore 1, e annullando i carichi esterni (fig. 67.3).



Reazioni fittizie:

$$H' = 1; \quad V' = \frac{h}{l}.$$

Momenti flettenti fittizi:

$$M'_1 = -1 \cdot x_1$$

$$M'_2 = \frac{h}{l} x_2 - 1 \cdot (h + x_2 \operatorname{tg} \alpha)$$

$$M'_3 = -\frac{h}{l} x_3 - 1 \cdot x_3 \operatorname{cotg} \alpha.$$

Il cedimento elastico della cerniera  $A$  è proporzionale al valore delle componenti, orizzontale e verticale, che agiscono su di essa. Cioè:

$$\xi_A = K'H \quad \text{ed} \quad \eta_A = K'' \cdot V_A = K' \cdot H \operatorname{tg} \beta.$$

I coefficienti di proporzionalità  $K'$  e  $K''$  sono eguali se il vincolo cede nella direzione della risultante di  $H$  e  $V_A$ .

Ovviamente in questo caso si ha un lavoro virtuale esterno diverso da zero, compiuto, sia dalla forza unitaria applicata alla struttura principale, che dalla reazione fittizia  $V'$  esistente in  $A$ . Il lavoro virtuale interno è fornito solamente dai momenti fittizi che lavorano per effetto delle deformazioni flessionali reali della struttura; si noti che in base ai sistemi di riferimento assunti nelle aste  $CD$  e  $BD$  i tronchi infinitesimi valgono:

$$ds_2 = \frac{dx_2}{\cos \alpha} \quad \text{e} \quad ds_3 = \frac{dx_3}{\sin \alpha}.$$

Il principio dei lavori virtuali ha la forma:

$$-1 \cdot \xi_A - V' \eta_A = \int_0^h M'_1 \left( \frac{M_1 dx_1}{EJ} \right) + \int_0^a M'_2 \left( \frac{M_2 dx_2}{EJ \cos \alpha} \right) + \int_0^b M'_3 \left( \frac{M_3 dx_3}{EJ \sin \alpha} \right).$$

Ossia, esplicitando i vari termini ed esprimendo le reazioni verticali in funzione del carico esterno e dell'incognita  $H$ :

$$\begin{aligned} -K' \left( 1 + \frac{h}{l} \operatorname{tg} \beta \right) H &= \int_0^h (-x_1) (-H x_1) \frac{dx_1}{EJ} + \int_0^a \left[ \frac{h}{l} x_2 - (h + x_2 \operatorname{tg} \alpha) \right] \\ &\quad \left[ \left( Q \left( 1 - \frac{a}{2l} \right) + H \frac{h}{l} \right) x_2 - H (h + x_2 \operatorname{tg} \alpha) - \frac{qx_2^2}{2} \right] \frac{dx_2}{EJ \cos \alpha} - \\ &\quad - \int_0^b \left( \frac{h}{l} x_3 + x_3 \operatorname{cotg} \alpha \right) \left[ \left( Q \frac{a}{2l} - H \frac{h}{l} \right) x_3 - H x_3 \operatorname{cotg} \alpha \right] \frac{dx_3}{EJ \sin \alpha} = 0. \end{aligned}$$

Questa equazione, integrata e risolta, fornisce il valore della incognita  $H$ .

## CONSIDERAZIONI GENERALI.

Naturalmente questo problema va affrontato dal punto di vista del calcolo di verifica della struttura.

Infatti il cedimento elastico dipende sia dalle caratteristiche elastiche del materiale cui la cerniera  $A$  è collegata (terreno di fondazione, eventuale struttura sussidiaria di sostegno, ecc.) che da quelle del telaio iperstatico  $ACDB$ , il cui dimensionamento influenza la rigidezza flessionale delle aste e, conseguentemente, i valori delle reazioni vincolari.

Ovviamente la componente del cedimento nella direzione  $AB$ , tende ad avvenire nel senso da provocare un allontanamento relativo delle due cerniere, cui consegue una diminuzione della componente, secondo questa stessa direzione, della reazione  $R_A$ .

In pratica il problema può essere affrontato procedendo in questo modo. Si esegue inizialmente il calcolo delle reazioni della struttura (non ancora dimensionata se di sezione costante) supponendo i vincoli rigidi; si determina, in base ai valori ottenuti, approssimati per eccesso, e alle costanti  $K$  note, l'entità del cedimento; si variano opportunamente, in funzione di questo, le componenti della reazione del vincolo cedevole, e se ne valuta l'influenza sul regime statico della struttura; si progetta questa di tentativo per le massime sollecitazioni in tal modo ottenute; si calcola l'effettivo comportamento della struttura così dimensionata e se ne esegue la verifica di resistenza.

\* \* \*

**68. - Risolvere il telaio chiuso di fig. 68.1, soggetto a carico uniforme sul piedritto  $AC$  e sulla trave  $CD$ .**

La struttura è isostatica all'esterno, ed una volta iperstatica all'interno.

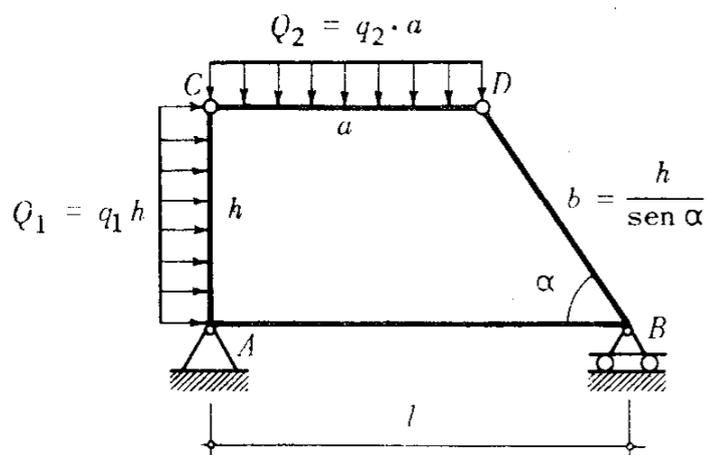


Fig. 68.1

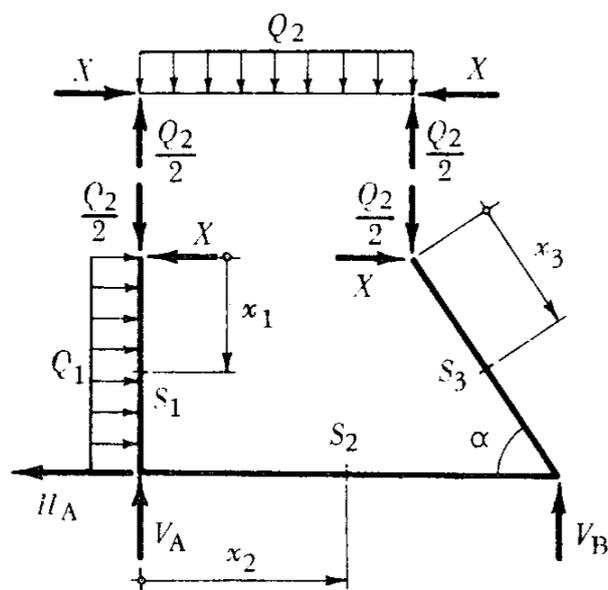


Fig. 68.2

Le reazioni della cerniera  $A$  e del carrello  $B$  hanno il senso di fig. 68.2 e valgono:

$$H_A = Q_1$$

$$V_A = Q_2 \left(1 - \frac{a}{2l}\right) - \frac{Q_1 h}{2l}$$

$$V_B = Q_2 \frac{a}{2l} + Q_1 \frac{h}{2l}.$$

Estraiamo la trave superiore dal telaio e applichiamo in  $C$  e  $D$  le azioni mutue (fig. 68.2).

Per ragioni d'equilibrio (alla traslazione verticale e alla rotazione) dell'asta superiore le azioni mutue verticali valgono  $\frac{Q_2}{2}$ ; lo sforzo  $X$  è invece incognito; il suo senso è sicuramente quello indicato in fig. 68.2 giacché sia il carico distribuito  $q_1$ , sia il carico concentrato  $\frac{Q_2}{2}$ , applicato in  $D$ , tendono ad avvicinare gli estremi liberi  $C$  e  $D$  della trave principale  $CABD$ .

Ovviamente nella risoluzione di questo problema iperstatico la deformazione assiale è trascurabile; di conseguenza la distanza tra i nodi  $C$  e  $D$  rimane invariata e la condizione di congruenza che consente la determinazione dell'incognita  $X$  è:

$$\xi_{C, D} = 0.$$

In base alla struttura principale prescelta, assumiamo il sistema fittizio di forze di fig. 68.3. Il lavoro virtuale nel tratto  $CD$  è all'evidenza nullo. Esprimiamo allora solamente i momenti flettenti, fittizi e reali, esistenti nelle altre tre aste  $AB$ ,  $BD$ ,  $AC$ , e consideriamo convenzionalmente positivi quelli che tendono le fibre esterne.

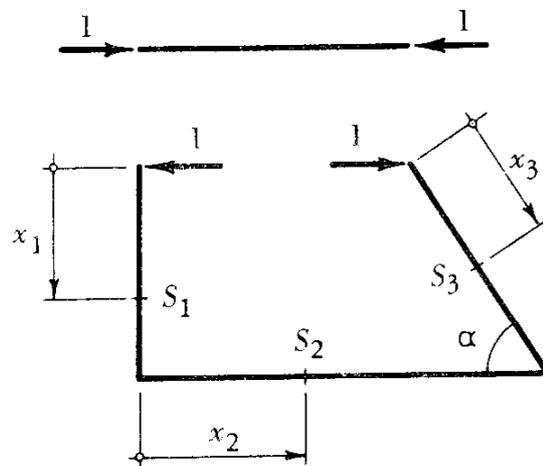


Fig. 68.3

Momenti flettenti reali:

$$M_1 = q_1 \frac{x_1^2}{2} - X x_1$$

$$M_2 = Q_1 \frac{h}{2} - X h + \left( V_A - \frac{Q_2}{2} \right) x_2$$

$$M_3 = \left( \frac{Q_2}{2} \cos \alpha - X \operatorname{sen} \alpha \right) x_3 .$$

Momenti flettenti fittizi (ottenuti dai precedenti, ponendo in essi  $Q_1 = Q_2 = 0$  e  $X = 1$ ):

$$M_1' = -1 \cdot x_1$$

$$M_2' = -1 \cdot h$$

$$M_3' = -(1 \cdot \operatorname{sen} \alpha) x_3$$

L'espressione del principio dei lavori virtuali è:

$$\int_0^h (-x_1) \left( q_1 \frac{x_1^2}{2} - X x_1 \right) \frac{dx_1}{EJ} + \int_0^l (-h) \left[ Q_1 \frac{h}{2} - X h + \left( V_A - \frac{Q_2}{2} \right) x_2 \right] \frac{dx_2}{EJ} + \int_0^{h/\operatorname{sen} \alpha} (-\operatorname{sen} \alpha \cdot x_3) \left( \frac{Q_2}{2} \cos \alpha - X \operatorname{sen} \alpha \right) x_3 \frac{dx_3}{EJ} = 0.$$

Eseguendo le integrazioni, semplificando e risolvendo, si ottiene, nel caso di telaio a sezione costante:

$$X = \frac{\frac{3}{8} Q_1 \left( 1 + 2 \frac{l}{h} \right) + \frac{Q_2}{2} \left[ \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} + \frac{3}{2} \frac{l}{h} \left( \frac{l}{h} - \frac{a}{h} \right) \right]}{\left( 1 + \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} + 3 \frac{l}{h} \right)} .$$

**RISOLUZIONE NUMERICA.**

La struttura abbia le dimensioni:

$$l = 6,00 \text{ m}; \quad a = h = 4,00 \text{ m}.$$

I carichi siano:

$$q_1 = 1000 \text{ kg/m} \quad \text{e} \quad q_2 = 2000 \text{ kg/m}.$$

Si ha:

$$\operatorname{tg} \alpha = 2 \quad \alpha = 63^\circ 30' \quad \operatorname{sen} \alpha = 0,895 \quad \operatorname{cos} \alpha = 0,446.$$

Le reazioni dei vincoli valgono in questo caso particolare:

$$H = V_A = V_B = 4000 \text{ kg}.$$

Si ottiene:

$$X = 1930 \text{ kg}.$$

Determiniamo il valore delle azioni interne nelle sezioni che più interessano:

- sezione di mezzaria della trave  $CD$ :

$$N_0 = -1930 \text{ kg}; \quad T_0 = 0; \quad M_0 = \frac{Q_2 l}{8} = 4000 \text{ kg} \text{ (tese le fibre interne)}$$

- sezione del piedritto  $AC$  soggetta al momento massimo: è definita dall'ascissa  $\bar{x}_1 = \frac{X}{q_1} = 1,93 \text{ m}$  e in essa si ha:

$$N_1 = -4000 \text{ kg}; \quad T_1 = 0; \quad M_1 = \frac{X^2}{2 q_1} = 1850 \text{ kgm} \text{ (tese le fibre interne)}$$

Nella trave inferiore  $AB$  lo sforzo normale, costante, vale:

$$N_2 = X = +1930 \text{ kg};$$

il taglio è nullo poiché in questo caso particolare è:

$$V_B = V_A = \frac{Q_2}{2},$$

e il momento flettente vale ovunque:

$$M_2 = \frac{Q_2}{2} (l - h) - Xh = +280 \text{ kgm.}$$

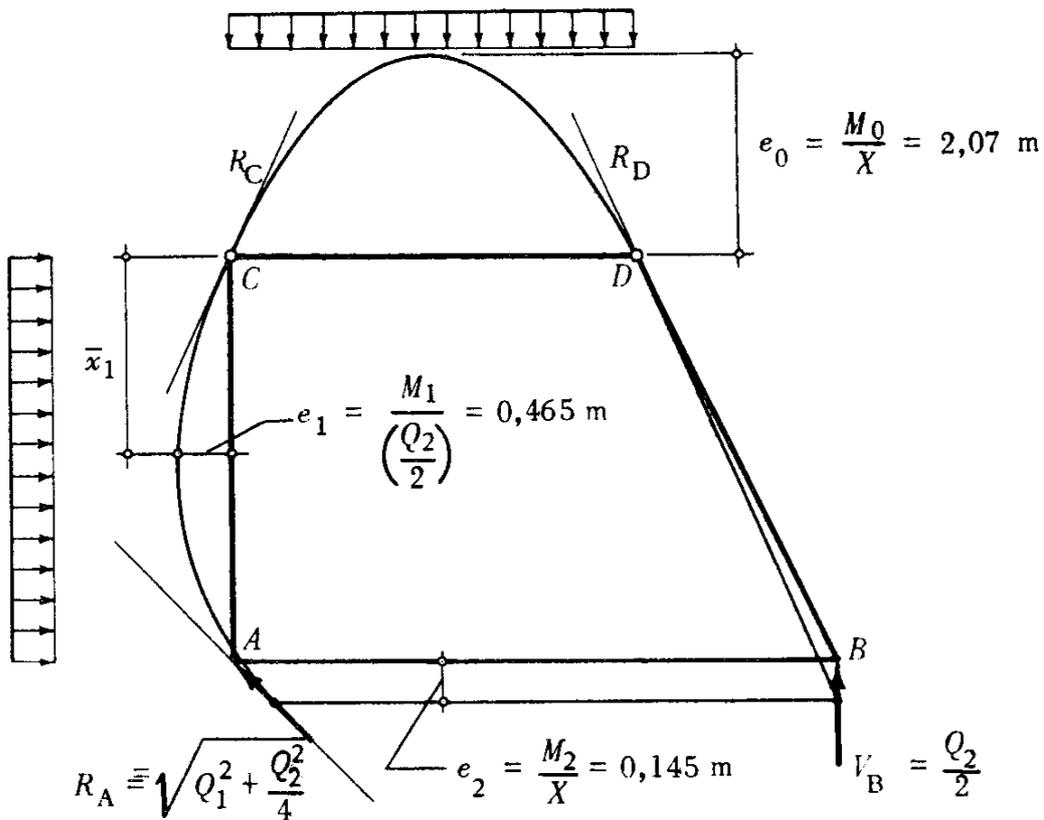


Fig. 68.4

La curva delle pressioni ha l'andamento di fig. 68.4.

La retta d'azione della risultante  $R_C$  di  $\frac{Q_2}{2}$  e  $X$  è in  $C$  la tangente comune ai due archi di parabola relativi al piedritto  $AC$  e alla trave  $CD$ . Nel piedritto  $BD$  la curva delle pressioni è costituita dalla retta d'azione della  $R_D$  ed è interna alla struttura, giacché la risultante delle azioni

della cerniera forma con l'orizzontale un angolo  $\beta = \arctg\left(\frac{Q_2}{2X}\right) = 64^\circ 13' > \alpha$ .

Nella trave inferiore  $AB$  la curva delle pressioni è ovviamente orizzontale, perché  $T_2 = 0$ , ed esterna all'asse geometrico.

\*\*\*

69. - Risolvere il telaio chiuso di fig. 69.1, soggetto al carico orizzontale  $P$ , applicato al vertice  $C$ .

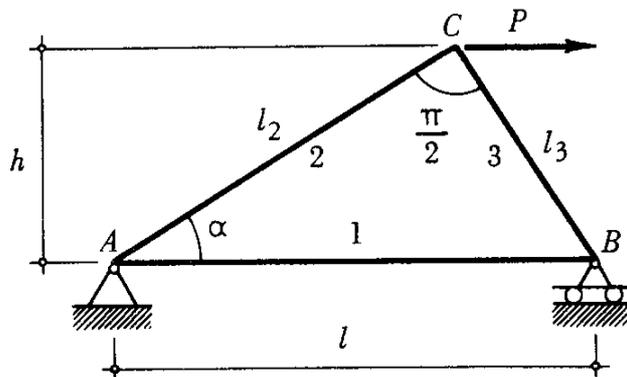


Fig. 69.1

Esternamente la struttura è isostatica; le reazioni dei vincoli valgono (fig. 69.2):

$$H_A = P$$

$$V = \frac{Ph}{l} = P \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

All'interno il telaio è tre volte iperstatico e tre volte staticamente indeterminato.

La curva delle pressioni è, ovviamente, un triangolo chiuso poco discosto dall'asse geometrico, ed avente i vertici sulle rette d'azione delle forze agenti  $P$ ,  $R_A$  e  $V$ . Pertanto, nella risoluzione del problema iperstatico, è necessario valutare anche la deformazione assiale: tra-

scurandola, la curva delle pressioni coinciderebbe esattamente con l'asse della struttura e questa rimarrebbe totalmente indeformata.

Assumiamo quale struttura principale la maglia isostatica triangolare di fig. 69.2, ottenuta mediante l'introduzione nei nodi  $A$ ,  $B$  e  $C$  di tre cerniere interne che sopprimono la solidarietà a rotazione delle aste.

Determiniamo le espressioni delle azioni interne effettive nelle aste.

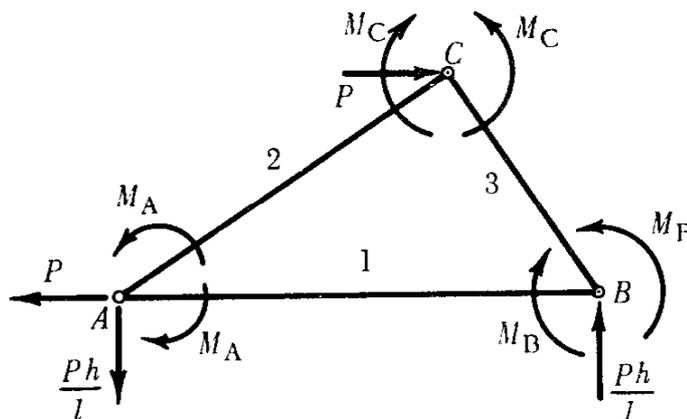


Fig. 69.2

Gli sforzi normali principali valgono:

$$S_1 = +P \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$S_2 = +P \cos \alpha$$

$$S_3 = -P \operatorname{sen} \alpha.$$

Le azioni interne  $T$  ed  $\bar{N}$  che sorgono nelle aste della struttura principale per effetto della applicazione delle coppie iperstatiche  $W_A$ ,  $W_B$  ed  $W_C$ , esplicitate dallo svincolamento, sono indicate in fig. 69.3. ove per semplicità le aste sono state rappresentate separate. Al solito, le espressioni di  $T$  ed  $\bar{N}$  si ottengono, rispettivamente, soddisfacendo l'equilibrio alla rotazione delle singole aste e alla traslazione dei nodi  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

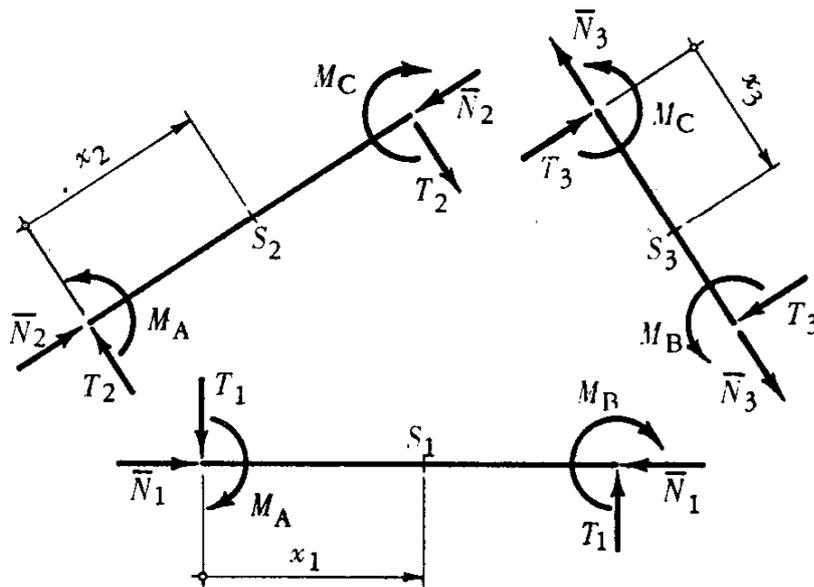


Fig. 69.3

**Sforzi di taglio:**

$$T_1 = \frac{M_A + M_B}{l}$$

$$T_2 = \frac{M_A - M_C}{l_2} = \frac{M_A - M_C}{l \cos \alpha}$$

$$T_3 = \frac{M_B + M_C}{l_3} = \frac{M_B + M_C}{l \sin \alpha}$$

**Equilibrio alla traslazione dei nodi:**

$$\text{Nodo A} \begin{cases} T_1 - T_2 \cos \alpha - \bar{N}_2 \sin \alpha = 0 \\ \bar{N}_1 + \bar{N}_2 \cos \alpha - T_2 \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\text{Nodo B} \begin{cases} T_1 - T_3 \sin \alpha - \bar{N}_3 \cos \alpha = 0 \\ \bar{N}_1 + T_3 \cos \alpha - \bar{N}_3 \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\text{Nodo C} \begin{cases} \bar{N}_2 = T_3 \\ \bar{N}_3 = T_2 \end{cases}$$

**Sforzi normali secondari:**

$$\bar{N}_1 = \frac{M_A - M_C}{l} \operatorname{tg} \alpha - \frac{M_B + M_C}{l \operatorname{tg} \alpha}$$

$$\bar{N}_2 = \frac{M_B + M_C}{l \operatorname{sen} \alpha}$$

$$\bar{N}_3 = \frac{M_A - M_C}{l \operatorname{cos} \alpha} .$$

Assumiamo positivi gli sforzi di trazione e i momenti orari valutati in ciascuna asta mediante le forze che precedono; con le indicazioni di figg. 69.2 e 69.3, le azioni interne reali  $N$  ed  $M$  valgono:

$$N_1 = +(S_1 - \bar{N}_1) \cong S_1 = +P \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$N_2 = +(S_2 - \bar{N}_2) \cong S_2 = +P \operatorname{cos} \alpha$$

$$N_3 = +(S_3 - \bar{N}_3) \cong S_3 = -P \operatorname{sen} \alpha$$

$$M_1 = +(M_A - T_1 x_1) = +\left(M_A - \frac{M_A + M_B}{l} x_1\right)$$

$$M_2 = -(M_A - T_2 x_2) = -\left(M_A - \frac{M_A - M_C}{l \operatorname{cos} \alpha} x_2\right)$$

$$M_3 = -(M_C - T_3 x_3) = -\left(M_C - \frac{M_B + M_C}{l \operatorname{sen} \alpha} x_3\right).$$

Si noti come, in accordo con i criteri già adottati nella risoluzione degli esercizi 30 e 35, anche in questo caso si sono trascurati gli sforzi normali secondari  $\bar{N}$ , provocati dalle reazioni iperstatiche, in confronto a quelli principali  $S$ , esistenti nella struttura principale.

I sistemi fittizi di forze da associare agli spostamenti reali sono naturalmente tre; ciascuno di essi è costituito da una delle tre coppie mutue  $M_A$ ,  $M_B$  o  $M_C$ , eguagliata all'unità. Naturalmente mancano le forze applicate all'esterno della struttura. Le azioni interne fittizie si ot-

tengono direttamente da quelle reali annullando nelle espressioni di queste i termini dipendenti da  $P$  e dalle coppie iperstatiche ciascuna volta omesse.

**1° Sistema fittizio:**  $M_A = 1; M_B = M_C = 0; P = 0$

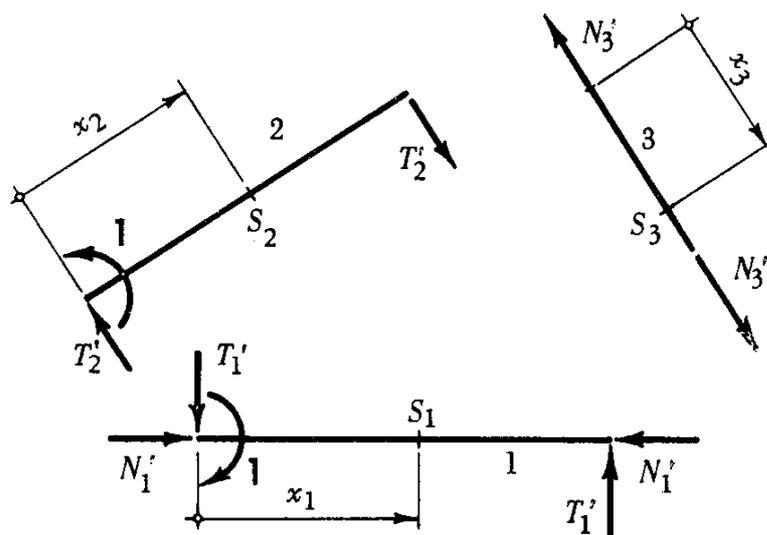


Fig. 69.4

$$\begin{aligned}
 N_1' &= -\frac{\operatorname{tg} \alpha}{l} & T_1' &= -\frac{1}{l} & M_1' &= \left(1 - \frac{x_1}{l}\right) \\
 N_2' &= 0 & T_2' &= \frac{1}{l \cos \alpha} & M_2' &= -\left(1 - \frac{x_2}{l \cos \alpha}\right) \\
 N_3' &= \frac{1}{l \cos \alpha} & T_3' &= 0 & M_3' &= 0
 \end{aligned}$$

**2° Sistema fittizio:**  $M_B = 1; M_A = M_C = 0; P = 0$

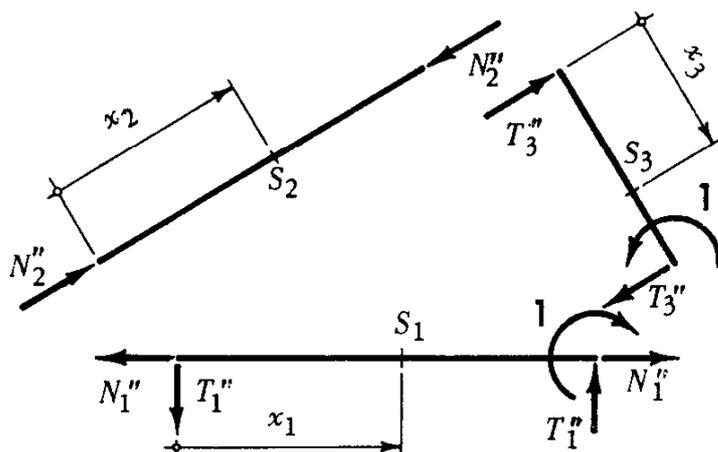


Fig. 69.5

$$\begin{aligned}
 N_1'' &= \frac{1}{l \operatorname{tg} \alpha} & T_1'' &= -\frac{1}{l} & M_1'' &= -\frac{x_1}{l} \\
 N_2'' &= -\frac{1}{l \operatorname{sen} \alpha} & T_2'' &= 0 & M_2'' &= 0 \\
 N_3'' &= 0 & T_3'' &= \frac{1}{l \operatorname{sen} \alpha} & M_3'' &= \frac{x_3}{l \operatorname{sen} \alpha}
 \end{aligned}$$

3° Sistema fittizio:  $M_C = 1$ ;  $M_A = M_B = 0$ ;  $P = 0$

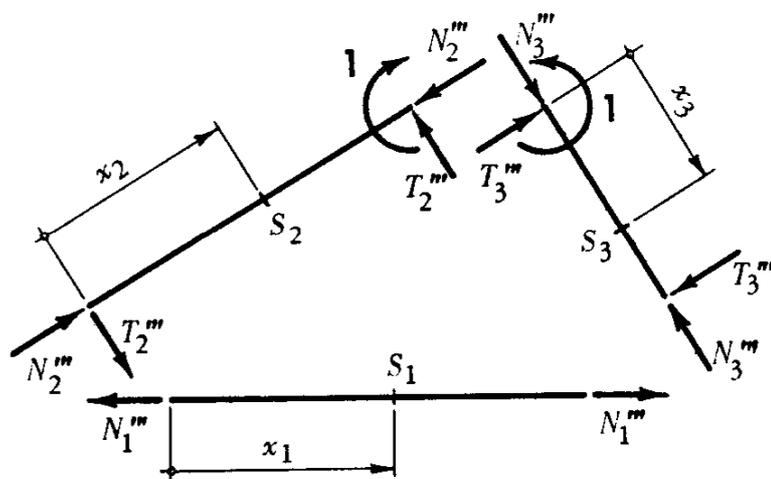


Fig. 69,6

$$\begin{aligned}
 N_1''' &= \frac{1}{l} \left( \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right) & T_1''' &= 0 & M_1''' &= 0 \\
 N_2''' &= -\frac{1}{l \operatorname{sen} \alpha} & T_2''' &= -\frac{1}{l \cos \alpha} & M_2''' &= -\frac{x_2}{l \cos \alpha} \\
 N_3''' &= -\frac{1}{l \cos \alpha} & T_3''' &= \frac{1}{l \operatorname{sen} \alpha} & M_3''' &= -\left( 1 - \frac{x_3}{l \operatorname{sen} \alpha} \right)
 \end{aligned}$$

Applichiamo ora tre volte il principio dei lavori virtuali, una per ciascuna delle condizioni fittizie di carico; le equazioni di congruenza sono:

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^{l_1} M_1' \left( \frac{M_1 dx_1}{EJ} \right) + \int_0^{l_2} M_2' \left( \frac{M_2 dx_2}{EJ} \right) + N_1' \left( \frac{S_1 l}{EA} \right) + N_3' \left( \frac{S_3 l_3}{EA} \right) &= 0 \\ \int_0^{l_1} M_1'' \left( \frac{M_1 dx_1}{EJ} \right) + \int_0^{l_3} M_3'' \left( \frac{M_3 dx_3}{EJ} \right) + N_1'' \left( \frac{S_1 l}{EA} \right) + N_2'' \left( \frac{S_2 l_2}{EA} \right) &= 0 \\ \int_0^{l_2} M_2''' \left( \frac{M_2 dx_2}{EJ} \right) + \int_0^{l_3} M_3''' \left( \frac{M_3 dx_3}{EJ} \right) + N_1''' \left( \frac{S_1 l}{EA} \right) + N_2''' \left( \frac{S_2 l_2}{EA} \right) + N_3''' \left( \frac{S_3 l_3}{EA} \right) &= 0 \end{aligned} \right.$$

Sostituendo le espressioni dei momenti fittizi e reali, eseguendo le integrazioni e portando ai secondi membri i termini noti, risulta:

$$\left\{ \begin{aligned} (2M_A - M_B) \frac{l}{6 EJ} + (2M_A + M_C) \frac{l \cos \alpha}{6 EJ} &= \\ &= -N_1' \left( \frac{S_1 l}{EA} \right) - N_3' \left( \frac{S_3 l \sin \alpha}{EA} \right) \\ (2M_B - M_A) \frac{l}{6 EJ} + (2M_B - M_C) \frac{l \sin \alpha}{6 EJ} &= \\ &= -N_1'' \left( \frac{S_1 l}{EA} \right) - N_2'' \left( \frac{S_2 l \cos \alpha}{EA} \right) \\ (2M_C + M_A) \frac{l \cos \alpha}{6 EJ} + (2M_C - M_B) \frac{l \sin \alpha}{6 EJ} &= \\ &= -N_1''' \left( \frac{S_1 l}{EA} \right) - N_2''' \left( \frac{S_2 l \cos \alpha}{EA} \right) - N_3''' \left( \frac{S_3 l \sin \alpha}{EA} \right). \end{aligned} \right.$$

La risoluzione di questo sistema consente la determinazione delle tre incognite  $M_A$ ,  $M_B$  e  $M_C$ .

Si noti che i primi membri delle equazioni rappresentano le rotazioni relative delle sezioni estreme di due aste concorrenti in un medesimo nodo, per effetto della deformazione flessionale; ovviamente i secondi membri forniscono l'analogo contributo provocato dalla deformazione assiale.

## RISOLUZIONE NUMERICA.

Sia assegnato un telaio in c.a. delle dimensioni:

$$l = 8,00; \quad \alpha = 30^\circ.$$

Il carico valga:

$$P = 8 t.$$

La struttura abbia sezione rettangolare, costante, di larghezza  $b = 12$  cm e  $H = 15$  cm, e sia uniformemente armata con 4  $\phi$  12 dritti disposti a reggistaffa, due all'intradosso e due all'estradosso.

Le altre caratteristiche geometriche del telaio sono:

$$\sin \alpha = 0,5; \quad \cos \alpha = 0,866; \quad \operatorname{tg} \alpha = 0,577; \quad l_2 = 6,93 \text{ m}; \quad l_3 = 4,00 \text{ m}$$

La sezione ha superficie:  $A = 180 + 10 \cdot 4 \cdot 1,13 \cong 225 \text{ cm}^2$  e momento d'inerzia:  $J = 15^3 + 4(10 \cdot 1,13) 5,5^2 \cong 4740 \text{ cm}^4$ .

Gli sforzi principali valgono:

$$S_1 = +2000 \text{ kg}$$

$$S_2 = +6930 \text{ «}$$

$$S_3 = -4000 \text{ «}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (2M_A - M_B) \cdot 0,141 \cdot 10^{-6} + (2M_A + M_C) \cdot 0,122 \cdot 10^{-6} = \\ \quad = 0,256 \cdot 10^{-4} + 0,512 \cdot 10^{-4} \\ (2M_B - M_A) \cdot 0,141 \cdot 10^{-6} + (2M_B - M_C) \cdot 0,0705 \cdot 10^{-6} = \\ \quad = -0,770 \cdot 10^{-4} + 2,67 \cdot 10^{-4} \\ (2M_C + M_A) \cdot 0,122 \cdot 10^{-6} + (2M_C - M_B) \cdot 0,0705 \cdot 10^{-6} = \\ \quad = -1,027 \cdot 10^{-4} + 2,67 \cdot 10^{-4} - 0,512 \cdot 10^{-4}. \end{array} \right.$$

Da cui:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,526 M_A - 0,141 \cdot M_B + 0,122 \cdot M_C = 76,8 \\ -0,141 M_A + 0,423 \cdot M_B - 0,0705 M_C = 190 \\ 0,122 M_A - 0,0705 M_B + 0,385 \cdot M_C = 113,1. \end{array} \right.$$

Si ottiene:

$$M_A = +360 \text{ kg cm}$$

$$M_B = +520 \quad \llcorner$$

$$M_C = -323 \quad \llcorner$$

La sezione soggetta alla massima tensoflessione è quella dell'asta  $AC$  all'attacco con il nodo  $A$ , in cui si ha:

$$N = S_2 = +6930 \text{ kg} \quad M = M_A = +360 \text{ kg cm};$$

l'eccentricità vale  $e = \frac{360}{6930} = 0,05 \text{ cm}$ ; il centro di trazione è interno alle armature. La tensione maggiore, nei ferri all'intradosso, è:

$$\sigma_{F_{\max}} = \frac{(5,50 + 0,05)}{11,00} \cdot \frac{6930}{2 \cdot 1,13} = 1550 \text{ kg/cm}^2 < K_F.$$

La sezione sottoposta alla massima pressoflessione è quella dell'asta  $BC$  all'attacco con il nodo  $B$ , ove è:

$$N = S_3 = -4000 \text{ kg} \quad M = M_B = +520 \text{ kg cm}.$$

L'eccentricità vale:

$$e = \frac{520}{4000} = 0,13 \text{ cm.}$$

Ovviamente il centro di pressione è interno al nocciolo; la sezione è tutta reagente e si può verificare con la formula binomia della flessione composta, naturalmente tenendo conto della particolare snellezza dell'asta.

Si può assumere

$$l_0 \cong \frac{2}{3}l = 267 \text{ cm (asta semincastrata)}$$

$$b_{\min} = 12 \text{ cm; } \quad \lambda = \frac{l_0}{b_{\min}} = 22,5 \quad \omega = 1,5.$$

Si ha in definitiva:

$$\sigma_{\max} = \frac{1,5 \cdot 4000}{225} + \frac{520}{\frac{4740}{7,5}} = 28 \text{ kg/cm}^2 < K_C.$$

Come appare evidente, rimane ancora una volta confermato che la deformabilità assiale della struttura e il regime flessionale che conseguentemente si genera in essa, influenzano pochissimo il regime statico di uniforme compressione proprio della struttura principale isostatica.

#### SPOSTAMENTO DEL VERTICE C.

Il vertice C si sposta sia orizzontalmente che verticalmente, giacché le aste del telaio variano di lunghezza. Pertanto per determinare  $\delta_C$  è necessario calcolare entrambe le componenti  $\xi_C$  ed  $\eta_C$ , dalla conoscenza delle quali discende:

$$\delta_C = \sqrt{\xi_C^2 + \eta_C^2} \quad \text{ed} \quad \omega = \text{arctg} \frac{\eta_C}{\xi_C}.$$

Procedendo ancora mediante il principio dei lavori virtuali si devono adottare i due sistemi fittizi di forze indicati in fig. 69.7-a) e b).

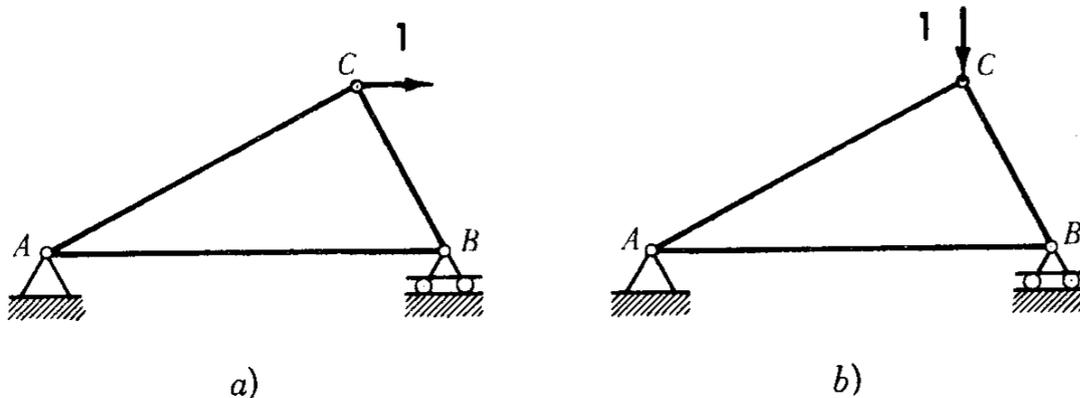


Fig. 69.7

L'associazione del sistema di forze a) (forza unitaria orizzontale agente in C e sue conseguenze statiche) a quello già noto degli spostamenti e deformazioni reali, consente la determinazione di  $\xi_C$ . Analogamente l'associazione del sistema di forze b) a quello reale degli spostamenti e deformazioni, fornisce  $\eta_C$ .

Si noti che i sistemi fittizi a) e b) di forze applicati alla struttura principale isostatica generano solo azione interna di sforzo normale. Ciò conferma che lo spostamento del vertice della struttura assegnata è provocato solo dalla deformazione assiale, che è l'unica a fornire lavoro virtuale interno non nullo.

Queste sono soddisfatte dall'insieme degli spostamenti provocati in  $B$  dalla deformazione elastica dell'intero arco e dalla rotazione relativa in  $C$ , tra le due facce a sinistra e a destra della cerniera, che si traduce in un moto rigido dell'elemento  $BC$  attorno al centro di rotazione  $C$ .

In tal modo si sarebbero avuti tre parametri incogniti ( $H$ ,  $l_B$  e  $\varphi_{C, \text{rel.}}$ ) legati dalle condizioni:

$$\begin{cases} \xi_B = \xi_{B/A} + \varphi_{C, \text{rel.}} \cdot R \sin \theta = 0 \\ \eta_B = \eta_{B/A} + \varphi_{C, \text{rel.}} \cdot R (1 - \cos \theta) = 0 \\ \Sigma M_{C(BC)} = \frac{QR}{4} (1 - \cos \theta)^2 + H \cdot R \sin \theta - l_B R (1 - \cos \theta) = 0. \end{cases}$$

Anche in questo caso il procedimento cinematico fa intervenire nella risoluzione del problema iperstatico una incognita in più rispetto al metodo dei lavori virtuali  $\varphi_{C, \text{rel.}}$ .

La cerniera interna influenza in ogni caso la configurazione della struttura, il cui assetto finale dipende sia dalla deformazione elastica, che dalla rotazione relativa dei due tronchi  $AC$  e  $BC$  attorno ad essa.

Pertanto la  $\varphi_{C, \text{rel.}}$  interviene qualunque sia la struttura principale adottata e compare sempre nell'equazione di congruenza.

\*\*\*

**62.** Risolvere la struttura dell'esercizio precedente soggetta a pressione radiale uniforme (fig. 62.1).

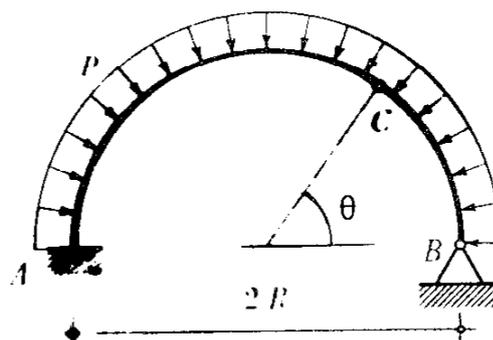


Fig. 62.1

In analogia con l'esercizio precedente, assumiamo quale struttura principale l'arco a tre cerniere  $A, C, B$ . Questo è l'esatta funicolare della pressione radiale  $p$  che genera all'interno uno sforzo normale di compressione uniforme  $N = pR$ .

Pertanto, nella risoluzione del problema iperstatico, è necessario tenere conto della deformazione assiale, a causa della quale tutta la struttura entra in tensione e si deforma anche flessionalmente.

In relazione alla scelta della struttura principale, dobbiamo assumere il medesimo sistema fittizio di forze dell'esercizio 61, cioè la coppia  $M_A$  eguagliata ad 1 e valutarne le conseguenze statiche.

Calcoliamo anzitutto le forze e azioni interne che provocano gli spostamenti e le deformazioni reali; consideriamo separatamente i due contributi, assiale, dovuto a  $p$ , e flessionale, dovuto a  $M_A$ , secondo il criterio già adottato negli esercizi 24, 30, 35, e analoghi. Successivamente, ponendo nelle espressioni così ottenute  $p = 0$  e  $M_A = 1$ , si deducono le reazioni ed azioni interne fittizie.

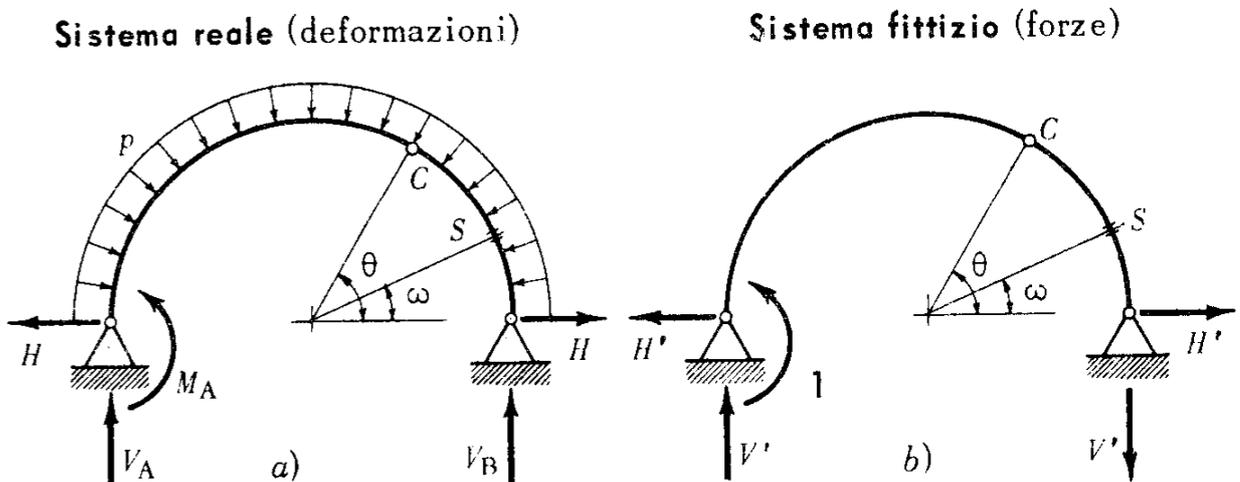


Fig. 62.2

Reazioni:

$$V_A = pR + \Delta V = pR + \frac{M_A}{2R}$$

$$V' = \frac{1}{2R}$$

$$V_B = pR - \Delta V = pR - \frac{M_A}{2R}$$

$$H' = \frac{1}{2R} \cdot \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$$

$$H = \Delta V \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{M_A}{2R} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$$

Azioni interne:

$$\begin{aligned}
 N &= pR - (\Delta V \cos \omega + H \operatorname{sen} \omega) \cong pR \\
 M &= H \cdot R \operatorname{sen} \omega - \Delta V \cdot R(1 - \cos \omega) = \frac{M_A}{2} \left[ \frac{1 - \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \operatorname{sen} \omega - (1 - \cos \omega) \right] \\
 N' &= -(V' \cos \omega + H' \operatorname{sen} \omega) = -\frac{1}{2R} \left( \cos \omega + \frac{1 - \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \operatorname{sen} \omega \right) \\
 M' &= H' \cdot R \operatorname{sen} \omega - V' R(1 - \cos \omega) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1 - \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \operatorname{sen} \omega - (1 - \cos \omega) \right].
 \end{aligned}$$

Per quanto riguarda le azioni interne reali osserviamo che è lecito valutare  $N = pR$ , trascurando la piccola influenza della reazione iperstatica  $M_A$  (o delle sue conseguenze  $H$  e  $\Delta V$ ); invece  $M'$  è generato solo da quest'ultima.

Il principio dei lavori virtuali assume in questo caso la forma:

$$0 = \int_0^\pi M' \left( \frac{M \cdot R d\omega}{EJ} \right) + \int_0^\pi N' \left( \frac{N \cdot R d\omega}{EA} \right)$$

Sostituendo:

$$\begin{aligned}
 &\int_0^\pi \frac{M_A R}{4EJ} \left[ \frac{1 - \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \operatorname{sen} \omega - (1 - \cos \omega) \right]^2 d\omega - \\
 &\quad - \int_0^\pi \frac{p R}{2EA} \left( \frac{1 - \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \operatorname{sen} \omega + \cos \omega \right) d\omega = 0.
 \end{aligned}$$

Indicando per semplicità con  $K$  il coefficiente  $\frac{1 - \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta}$  ed eseguendo le integrazioni, risulta, se la struttura ha sezione costante:

$$\frac{M_A R}{4EJ} \left( \frac{3}{2} \pi + \frac{\pi}{2} K^2 - 2K \right) - \frac{p R}{EA} K = 0$$

In definitiva si ottiene:

$$M_A = p \frac{J}{A} \frac{4K}{\frac{\pi}{2}(3 + K^2) - 2K}$$

### CONSIDERAZIONI SUL SENSO DELLE REAZIONI.

Il senso delle reazioni, indicate in fig. 62.2-a), era facilmente prevedibile.

Quelle dovute alla sola pressione valgono  $pR$ , sono entrambe verticali e dirette verso l'alto, per ragioni di simmetria e d'equilibrio. L'arco uniformemente compresso si mantiene circolare e diminuisce il proprio raggio, assumendo la configurazione  $AC'B'$ , se si è tolta la cerniera  $B$  e si considera fissa la sezione  $A$ , assunta quale origine del sistema di riferimento (fig. 62.3).

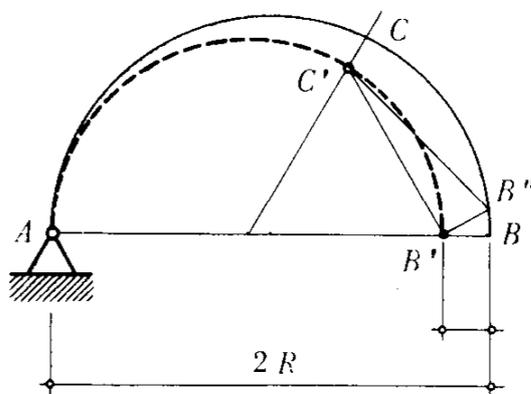


Fig. 62.3

È possibile ora con un moto rigido di rotazione del tronco  $C'B'$  attorno a  $C'$ , portare l'estremo dell'arco da  $B'$  in  $B''$ , sulla verticale per  $B$ , e, successivamente, con una rotazione rigida di tutto l'arco attorno ad  $A$ , fare coincidere  $B''$  con la posizione iniziale  $B$ .

Oltre alla rotazione relativa in  $C$  si manifesta la rotazione di senso orario della sezione  $A$ :

$$\varphi_A = \frac{\overline{BB''}}{2R}.$$

Per garantire il rispetto delle condizioni d'incastro esiste in  $A$  il momento  $M_A$ , il cui senso prevedibile, alla luce del ragionamento ora svolto, è antiorario. Conseguentemente la  $\Delta V$  applicata in  $A$  è diretta verso l'alto (per la condizione  $\Sigma M_{B(AB)} = 0$ ) e la spinta  $H$  verso l'esterno (per la condizione  $\Sigma M_{C(BC)} = 0$ ).

### RISOLUZIONE NUMERICA E VERIFICA DI RESISTENZA.

La struttura sia realizzata con un profilato a I PN 20 le cui caratteristiche sono:

$$A = 33,4 \text{ cm}^2; \quad J = 2142 \text{ cm}^4; \quad \rho^2 = 64,1 \text{ cm}^2; \quad W = 214,2 \text{ cm}^3.$$

Si abbia:

$$R = 5,00 \text{ m}; \quad \theta = \frac{\pi}{3}; \quad p = 100 \text{ kg/cm}.$$

È:

$$K = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = 0,578.$$

Si ottiene:

$$M_A = 100 \cdot 64,1 \cdot \frac{2,31}{5,24 - 1,16} \cong 3620 \text{ kg cm}$$

$$H = \frac{3620}{1000} 0,578 \cong 2,1 \text{ kg}$$

$$V_A = 50\,000 + 3,6 \cong 50\,004 \text{ kg}$$

$$V_B = 50\,000 - 3,6 \cong 49\,996 \text{ kg}.$$

Il valore ottenuto per le reazioni fa comprendere come il regime

statico all'interno della struttura si discosta pochissimo da quello di uniforme compressione generato dal carico esterno nella struttura principale.

La sezione più sollecitata è quella d'incastro. Eseguendo la verifica a pressoflessione risulta:

$$\sigma_{\max} = \frac{50\,004}{33,4} + \frac{3620}{214,2} \cong (1497 + 17) = 1514 \text{ kg/cm}^2 < K_F.$$

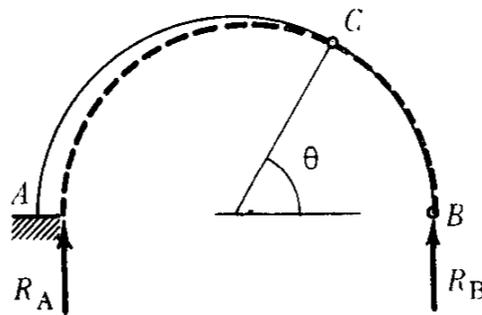


Fig. 62.4

La curva delle pressioni ha l'andamento di fig. 62.4. Essa interseca l'asse geometrico solo in corrispondenza della cerniera interna C come appare immediato se si pensa che il momento flettente nell'arco è generato dalle reazioni iperstatiche, la cui retta d'azione è definita dalla congiungente le due cerniere B e C.

Con i valori numerici prima ottenuti l'eccentricità della reazione nella sezione d'incastro vale:

$$e_A = \frac{M_A}{V_A} \cong 0,07 \text{ cm.}$$