

CAPITOLO I

RISOLUZIONE DELLE STRUTTURE IPERSTATICHE CON PROCEDIMENTO CINEMATICO

Si definisce iperstatica una struttura avente uno o più gradi di vincolo sovrabbondanti rispetto a quelli che in misura strettamente sufficiente ne garantiscono l'equilibrio di corpo rigido, Si intende, naturalmente, che i vincoli applicati debbono essere efficaci.

Da un punto di vista analitico le strutture iperstatiche sono staticamente indeterminate; una struttura n volte iperstatica ammette ∞^n sistemi di reazioni vincolari che equilibrano i carichi applicati. È necessario pertanto fare ricorso alla *statica dei sistemi elastici*; questa studia le condizioni di equilibrio elastico dei corpi introducendo, quale elemento fondamentale, la deformazione provocata in essi dalle forze agenti, carichi e reazioni, o dalle influenze ambientali o di costituzione.

Il procedimento è noto. Si sopprimono tanti vincoli semplici quanto è il grado di iperstaticità della struttura ottenendo così una corrispondente struttura principale isostatica. Questa, sotto l'azione dei carichi o delle influenze esterne, si deformerebbe in modo incompatibile con l'effettiva esistenza di quei vincoli momentaneamente soppressi. Ciò significa che nella realtà questi vincoli sono chiamati a condizionare certi spostamenti, e ciò fanno mediante le loro reazioni che è necessario applicare esplicitamente alla struttura principale. A queste reazioni si potrebbe assegnare qualunque valore arbitrario senza pregiudicare la possibilità dell'equilibrio; il loro valore esatto si ottiene imponendo ai punti

svincolati il rispetto delle necessità geometriche dei vincoli soppressi, mediante la scrittura di equazioni che discendono dall'esame delle deformazioni della struttura principale. Queste equazioni si definiscono di *congruenza* perché rappresentano le condizioni fisiche grazie alle quali la struttura assume una deformata compatibile con i vincoli sovrabbondanti esistenti, e tale, inoltre, da soddisfare le condizioni generali d'equilibrio.

La scelta della struttura principale non è condizionata; da una stessa struttura iperstatica si possono liberamente dedurre più strutture principali, a seconda dei vincoli ciascuna volta soppressi; però per ognuna di esse risultano poi obbligate le condizioni di congruenza da imporre.

A seconda delle particolari caratteristiche del problema si può caso per caso cercare di assumere una struttura principale che si presti a considerazioni intuitive e dia luogo a calcoli il meno possibile laboriosi. Naturalmente le condizioni di congruenza risultano tante quanti sono i gradi di vincolo soppressi, cioè le reazioni iperstatiche incognite, con il che il problema analitico risulta determinato mediante un sistema di n equazioni in n incognite.

La Scienza delle Costruzioni fornisce svariati metodi per la risoluzione delle strutture iperstatiche: integrazione della linea elastica, applicazione del teorema di MOHR e dei suoi corollari, procedimenti di successiva approssimazione, metodi cinematici, principio dei lavori virtuali, metodi energetici, ecc. La convenienza e la praticità di ciascuno di essi varia da caso a caso, in relazione al tipo di struttura e alle particolari condizioni di carico.

Le strutture esaminate nel presente capitolo sono tutte risolte con metodi di tipo cinematico, sia facendo ricorso a coefficienti elastici noti, sia mediante la composizione diretta delle deformazioni elementari. Si tratta di strutture semplici alle quali il procedimento cinematico è applicabile con particolare facilità poiché alcuni loro punti fondamentali (nodi oppure vincoli interni) sono fissi, oppure compiono spostamenti noti o facilmente valutabili.

Quasi tutte le strutture proposte sono state progettate e risolte numericamente allo scopo di fornire elementi diretti di valutazione che al

di là delle esigenze didattiche del testo, costituiscono anche un utile riferimento pratico.

Si precisa tuttavia che non si è fatto uso della macchina calcolatrice, ma, più semplicemente, del regolo; i risultati risentono pertanto di una certa approssimazione; spesso, anzi, sono stati volutamente arrotondati.

* * *

1. - Risolvere la trave ad asse rettilineo orizzontale di fig. 1.1, vincolata alle estremità con un incastro B e un carrello A a piano di scorrimento inclinato, e sottoposta a carico verticale uniforme su tutta la luce.

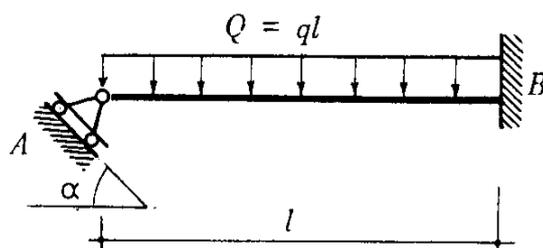


Fig. 1.1

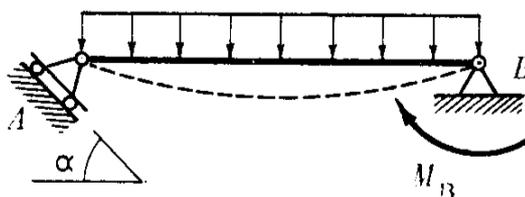


Fig. 1.2

La struttura è una volta iperstatica e una volta staticamente indeterminata.

Si toglie 1 grado di vincolo sostituendo l'incastro con una cerniera: la struttura principale è pertanto la trave isostatica vincolata col primitivo carrello in A e con una cerniera in B (fig. 1.2). Sotto l'azione del solo carico q la trave principale si inflette e la sezione terminale B ruota

liberamente. Nella realtà la sezione B non può ruotare per come è vincolata; ciò vuol dire che l'incastro reagisce sulla struttura e la sua azione sulla trave principale va esplicitata con l'introduzione di un momento M_B . Questo è inizialmente incognito e qualunque valore arbitrario fissato per esso non pregiudica l'equilibrio della struttura, cui provvedono sempre le restanti componenti delle reazioni V_B , V_A , H_B e H_A . Il valore esatto di M_B si ottiene scrivendo la condizione di congruenza che stabilisce il rispetto del vincolo soppresso: cioè la sezione B della trave principale, sotto l'azione complessiva del carico q noto e di M_B incognito, non deve ruotare.

In simboli:

$$\varphi_B = 0.$$

Il carico, diretto verso il basso, fa ruotare la sezione B in senso antiorario; M_B ha ovviamente senso orario per generare una rotazione eguale e contraria.

Si può inoltre osservare come la curva delle pressioni è costituita da un arco di parabola avente come tangenti estreme le rette d'azione delle reazioni dei vincoli. Se il carrello ha piano di scorrimento non prossimo alla verticale la parabola si discosta nettamente dall'asse geometrico rettilineo ed è lecito trascurare, nella risoluzione del problema iperstatico, la deformazione dovuta allo sforzo normale in confronto a quella provocata dal momento flettente. In tale ipotesi l'asse geometrico della trave non si accorcia né si allunga e il punto A rimane fisso.

Si può pertanto esprimere la condizione di congruenza ricorrendo ai coefficienti elastici della trave appoggiata.

Assumendo positive le rotazioni antiorarie, si ha:

$$\varphi_B = \frac{ql^3}{24 EJ} - \frac{M_B l}{3 EJ} = 0 \quad M_B = \frac{ql^2}{8} = \frac{Ql}{8}.$$

Si possono ora ricavare le altre componenti delle reazioni dei vincoli mediante le equazioni d'equilibrio.

Equilibrio alla rotazione attorno al punto A (reazione V_B):

$$\Sigma M_A = 0 \quad M_B + \frac{ql^2}{2} - V_B \cdot l = 0 \quad V_B = \frac{ql}{2} + \frac{M_B}{l} = \frac{5}{8} ql.$$

Equilibrio alla traslazione verticale (reazione V_A):

$$\Sigma Y = 0 \quad V_A + V_B = ql \quad V_A = \frac{ql}{2} - \frac{M_B}{l} = \frac{3}{8} ql.$$

Componente orizzontale della reazione del carrello:

$$H_A = V_A \operatorname{tg} \alpha.$$

Equilibrio alla traslazione orizzontale (reazione H).

$$\Sigma X = 0 \quad H_A = H_B = H \quad (\text{non vi sono altre forze orizzontali}).$$

Nella fig. 1.3 è indicata la struttura completamente svincolata in equilibrio sotto l'azione del carico e delle reazioni.

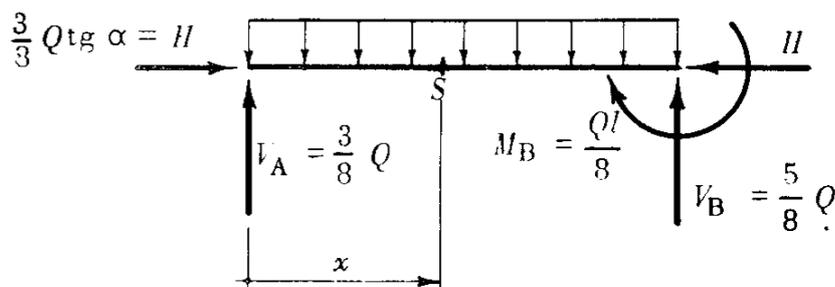


Fig. 1.3

LEGGE DI VARIAZIONE DELLE AZIONI INTERNE.

In una sezione generica S d'ascissa x , valutando le azioni interne con le forze che precedono, si ha:

$$N_S = H \quad (\text{costante, di compressione per } 0 < \alpha < 90^\circ)$$

$$T_S = V_A - qx \quad (\text{inizialmente positivo})$$

$$M_S = V_A x - q \frac{x^2}{2} \quad (\text{inizialmente tese le fibre inferiori}).$$

Nella sezione di ascissa:

$$x = \frac{V_A}{q} \quad \text{è} \quad T = 0$$

e

$$M = M_{\text{max positivo}} = \frac{V_A^2}{2q} = \frac{9}{128} ql^2 = \frac{ql^2}{14,2} < |M_B|.$$

Inoltre si ha:

$$M = 0 \quad \text{per} \quad \begin{cases} x = 0 & (\text{carrello } A) \\ x = \frac{2V_A}{q} & (\text{punto di flesso nella deformata}). \end{cases}$$

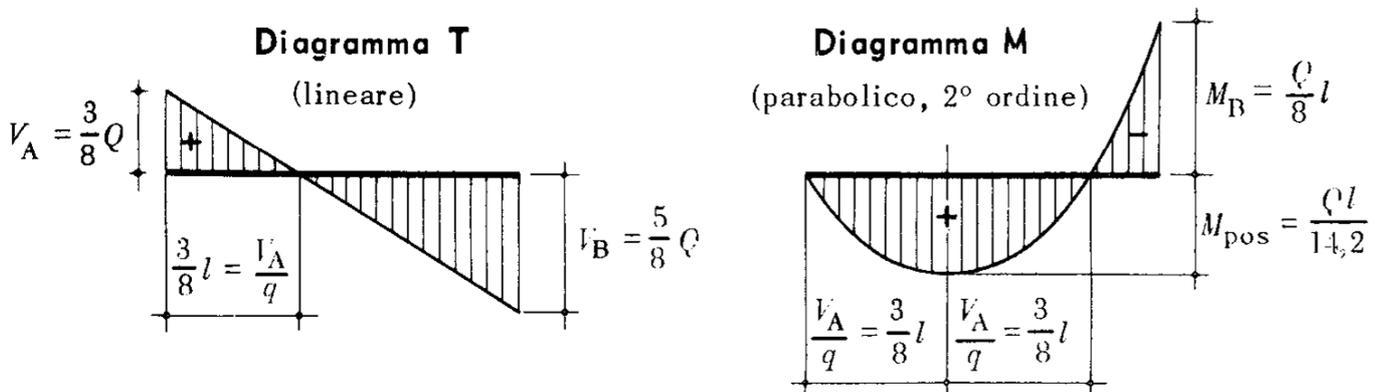


Fig. 1.4

CURVA DELLE PRESSIONI.

La curva delle pressioni (fig. 1.5) è una parabola del 2° ordine avente per tangenti nei punti estremi A e B' le rette d'azione delle reazioni dei vincoli. B' si trova sulla verticale per B e rappresenta il cen-

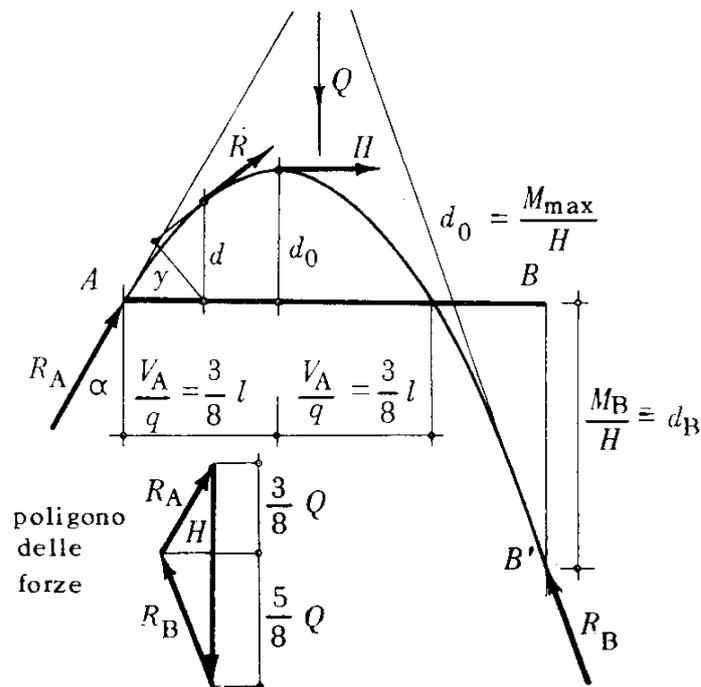


Fig. 1.5

tro di pressione della sezione d'incastro, cioè il punto in cui la risultante delle azioni interne interseca il piano della sezione.

Si ha:

$$d_B = \frac{M_B}{H}.$$

Il momento flettente in una sezione generica si può dedurre dalla curva delle pressioni:

$$M_S = Ry = Hd$$

dove H , reazione orizzontale dei vincoli, è la componente costante di sforzo normale della risultante delle azioni interne, e d è l'eccentricità.

In questo caso particolare la curva delle pressioni, riferita all'asse geometrico della trave, definisce un diagramma le cui ordinate d forniscono, a meno di H , i valori del momento flettente. Cioè le due funzioni, diagramma M e curva delle pressioni, differiscono solo per il fattore costante H .

CONSIDERAZIONI SULLA LINEA ELASTICA.

L'equazione della linea elastica si ottiene integrando l'equazione differenziale:

$$EJ\eta'' = -M = -\left(\frac{3}{8}qlx - \frac{qx^2}{2}\right).$$

Determinate le 2 costanti di integrazione con le condizioni ai limiti, risulta:

$$\eta = \frac{qx}{48 EJ} (2x^3 - 3lx^2 + l^3).$$

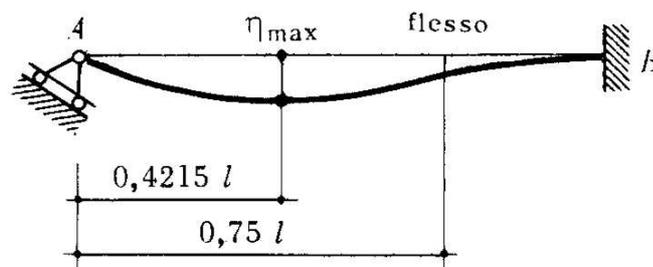


Fig. 1.6

Nella sezione di mezzaria si ha

$$\eta_{1/2} = \frac{ql^4}{192 EJ}$$

(che si sarebbe potuto ottenere direttamente sommando algebricamente le frecce provocate dal carico uniforme e da M_B agenti sulla trave principale appoggiata).

Nella sezione di ascissa $x = 0,4215 l$ si ha

$$\eta' = 0 \quad \text{e} \quad \eta = \eta_{\max} = 1,04 \eta_{1/2}.$$

In corrispondenza della sezione di ascissa $x = \frac{3}{4}l$, in accordo con quanto già visto a proposito del momento flettente e della curva delle pressioni, si ha un punto di flesso.

ASSUNZIONE DI UN'ALTRA STRUTTURA PRINCIPALE.

Con riferimento a quanto già accennato nella premessa al presente capitolo, si sarebbe potuto assumere per la risoluzione anche un'altra struttura principale: ad esempio la trave a mensola che si ottiene sopprimendo il carrello A (fig. 1.7).

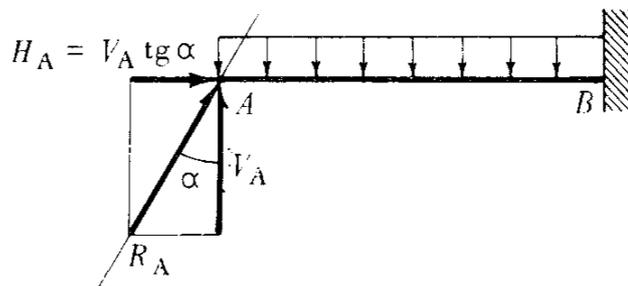


Fig. 1.7

L'equazione di congruenza si imposta concettualmente con ragionamento analogo al precedente. Per effetto del solo carico q la trave principale si inflette e l'estremo A subisce uno spostamento verticale verso il basso; pertanto il vincolo soppresso sviluppa sulla trave una reazione R_A che si deve mettere in evidenza nella struttura principale, a svincolamento compiuto. La R_A è diretta normalmente al piano di scorrimento del carrello e si può decomporre in una componente H orizzontale che non interviene nei calcoli, se è lecito trascurare la deformazione dovuta allo sforzo normale in confronto a quella provocata dal momento flettente, e in una componente V_A verticale, incognita.

La condizione di congruenza è

$$\eta_A = 0.$$

Ricorrendo ai coefficienti elastici noti delle travi a mensola:

$$\frac{ql^4}{8 EJ} - \frac{V_A l^3}{3 EJ} = 0 \quad \text{da cui} \quad V_A = \frac{3}{8} ql \quad (\text{idem c.s.})$$

OSSERVAZIONI. - Per quanto riguarda la diversa convenienza nella scelta della struttura principale si rimanda alle considerazioni svolte nell'esercizio 7.

CONSIDERAZIONI INTUITIVE SUL COMPORTAMENTO DELLA STRUTTURA.

Dai calcoli precedenti risulta come l'incognita iperstatica M_B non dipende dall'inclinazione α del piano di scorrimento del carrello. Infatti al variare di α , purché si possa sempre trascurare la deformazione assiale e considerare l'estremo A fisso, M_B rimane costante e con esso V_B e V_A . Non si modificano le azioni interne di momento flettente e taglio; varia solo la componente orizzontale H in modo da fare sì che la reazione del carrello sia sempre normale al suo piano di scorrimento. Quando il carrello ha piano di scorrimento orizzontale la H è nulla e la trave non è soggetta ad azione interna di sforzo normale. In questo caso la curva delle pressioni è costituita da un fascio di rette parallele verticali.

Per valori di $\alpha > 0$ la curva delle pressioni è un arco di parabola, tanto più appiattita quanto più è grande α .

Quando α giunge a valori elevati (cioè per piani di scorrimento del carrello abbastanza prossimi alla verticale) la componente H della reazione assumerebbe valori molto grandi in confronto a V_A e la curva delle pressioni tenderebbe ad una parabola ribassatissima molto prossima all'asse rettilineo indeformato della trave.

In questa situazione si deve tener conto, nella risoluzione del problema iperstatico, anche della deformazione dovuta allo sforzo normale H . Questo fa variare la lunghezza dell'asse geometrico (la trave è compressa per $\alpha < 90^\circ$, tesa per $\alpha > 90^\circ$), e conseguentemente l'appoggio A cede lungo il suo piano di scorrimento portandosi in A' (fig. 1.8).

Si ha:

$$AA' = \frac{\Delta l}{\cos \alpha} = \frac{Hl}{EA \cos \alpha} = \frac{V_A \operatorname{tg} \alpha \cdot l}{EA \cos \alpha}.$$

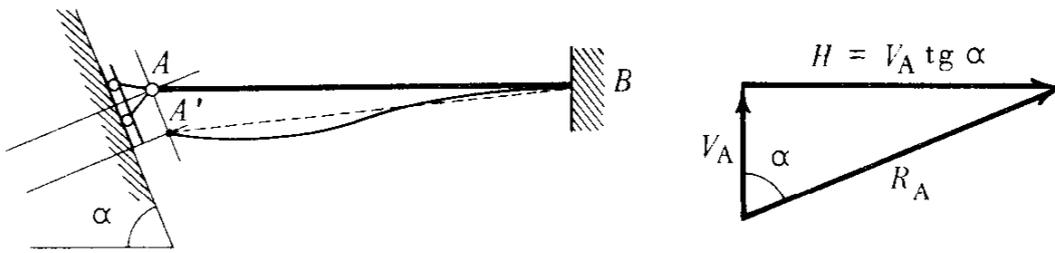


Fig. 1.8

Il momento d'incastro M_B aumenta rispetto al valore $\frac{ql^2}{8}$ perché deve annullare in B sia la rotazione di moto rigido provocata dal cedimento, sia la rotazione per deformazione elastica della trave appoggiata. L'equazione di congruenza diviene:

$$\varphi_B = \left(\frac{ql^3}{24 EJ} + \frac{\Delta l \operatorname{tg} \alpha}{l} \right) - \frac{M_B l}{3 EJ} = 0$$

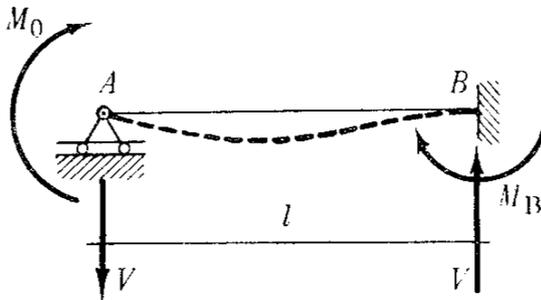
che accoppiata all'equazione di equilibrio alla rotazione rispetto a B , $(\sum M)_B = 0$, consente di determinare l'incognita.

Conseguentemente al maggior valore di M_B , risulta aumentato anche $V_B = \frac{ql}{2} + \frac{M_B}{l}$, mentre diminuiscono V_A e H .

In ultima analisi la possibilità del cedimento, consente al carrello di sviluppare una reazione di valore finito non eccessivamente elevato, compatibile con le effettive capacità di resistenza della trave.

Quando poi il piano di scorrimento del carrello è esattamente verticale, il vincolo diviene inefficace e la trave si comporta come una mensola incastrata in B e libera in A .

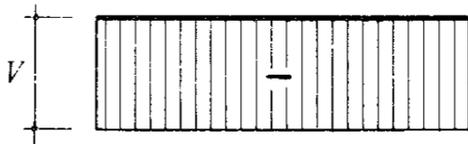
TRAVE AD ASSE RETTILINEO AD APPOGGIO E INCASTRO: casi semplici importanti.



$$M_B = \frac{M_0}{2}$$

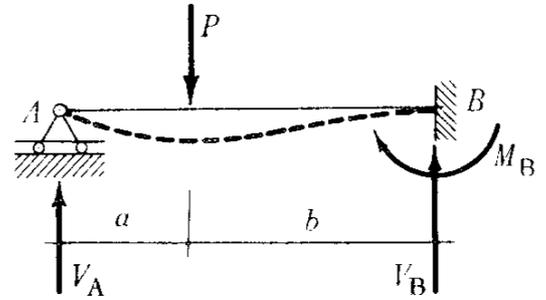
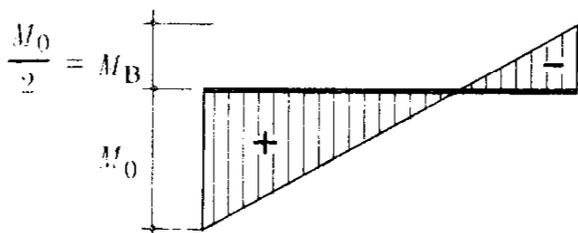
$$V = \frac{3}{2} \frac{M_0}{l}$$

Diagramma T



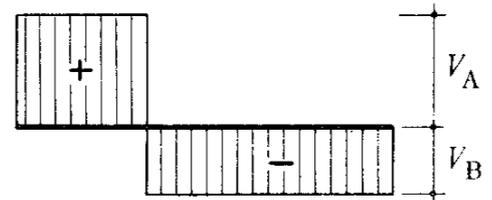
$$\varphi_A = \frac{M_0 l}{4 E J}$$

Diagramma M



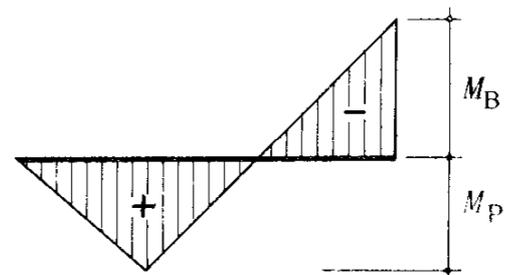
$$V_A = \frac{P b^2}{2 l^3} (a + 2 l)$$

$$V_B = P - V_A$$



$$M_B = P \frac{a b}{2 l^2} (a + l)$$

$$M_P = P \frac{a b^2}{2 l^3} (a + 2 l)$$



2. - Risolvere la trave dell'esercizio precedente vincolata con incastro B e carrello A , a piano di scorrimento orizzontale. La sezione retta della trave ha larghezza b costante ed altezza variabile con legge lineare (fig. 2.1).

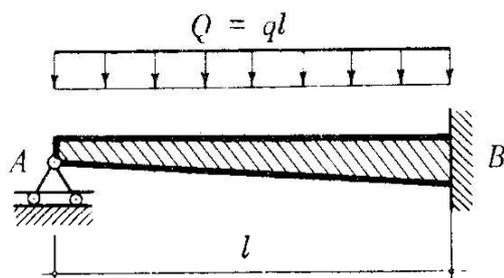


Fig. 2.1

Naturalmente la linea elastica della trave è influenzata dalla legge di variazione della sezione. Pertanto per la risoluzione del problema iperstatico è necessario esprimere la deformazione del tronco infinitesimo dx , definito dall'ascissa corrente x , ed imporre la condizione di congruenza mediante l'integrazione dei contributi elementari dei singoli tronchi, estesa a tutta la trave.

Sopprimiamo il carrello e assumiamo quale struttura principale la mensola soggetta al carico q e alla V_A incognita (fig. 2.2).

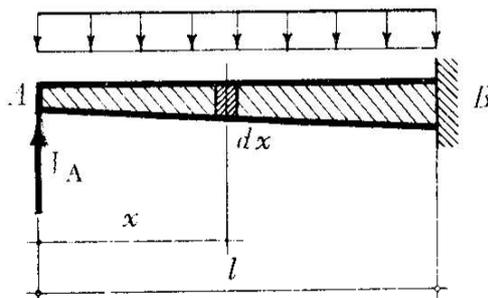


Fig. 2.2

La rotazione relativa delle due facce del tronco generico infinitesimo dx è, in simboli:

$$d\varphi = \frac{M(x)}{EJ(x)} dx.$$

Questa deformazione genera in A lo spostamento verticale:

$$d\eta_A = \frac{M(x) \cdot x}{EJ(x)} dx.$$

La condizione di congruenza è

$$\eta_A = 0.$$

Cioè, componendo i contributi delle deformazioni elementari:

$$\eta_A = \int_0^l \frac{M(x) x}{EJ(x)} dx = 0.$$

Nel caso assegnato è:

$$M(x) = V_A \cdot x - q \frac{x^2}{2}$$

$$h(x) = h_A + \frac{h_B - h_A}{l} x = h_A \left(1 + \frac{h_B - h_A}{h_A l} x \right) = h_A (1 + \alpha x).$$

Si può quindi esprimere:

$$J(x) = \frac{bh^3(x)}{12} = \frac{bh_A^3}{12} (1 + \alpha x)^3 = J_A (1 + \alpha x)^3$$

Sostituendo queste espressioni nell'equazione di congruenza si ha:

$$\frac{1}{EJ_A} \int_0^l \frac{V_A \cdot x^2 - \frac{q}{2} x^3}{(1 + \alpha x)^3} dx = 0.$$

Ossia

$$\frac{V_A}{EJ_A} \int_0^l \frac{x^2}{(1 + \alpha x)^3} dx - \frac{q}{2EJ_A} \int_0^l \frac{x^3}{(1 + \alpha x)^3} dx = 0$$

Eseguendo le integrazioni e ponendo i valori ai limiti, si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{V_A}{\alpha^3} \left[\frac{3+4\alpha l}{2(1+\alpha l)^2} + \log(1+\alpha l) - \frac{3}{2} \right] = \\ = \frac{q}{2\alpha^4} \left[\frac{1}{2(1+\alpha l)^2} - \frac{3}{(1+\alpha l)} - 3 \log(1+\alpha l) - (1+\alpha l) - \frac{3}{2} \right]. \end{aligned}$$

Si ricorre a questo procedimento di composizione cinematica delle deformazioni infinitesime se non sono noti i coefficienti elastici della struttura principale isostatica. Naturalmente questo può verificarsi sia nel caso di strutture a sezione variabile che in quello di carichi agenti espressi da una funzione analitica non semplice.

RISOLUZIONE NUMERICA.

Sia assegnato:

$$q = 1000 \text{ kg/m}; \quad l = 6,00 \text{ m}; \quad h_A = 30 \text{ cm}; \quad h_B = 60 \text{ cm}.$$

Risulta:

$$\alpha = \frac{1}{600}.$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$0,068 V_A = 3000 \cdot 0,046 ,$$

da cui:

$$V_A \cong 2030 \text{ kg.}$$

Il valore ottenuto per la reazione iperstatica corrisponde a:

$$V_A = 0,339 \cdot ql$$

Il momento d'incastro vale:

$$M_B = 2030 \cdot 6 - \frac{1000}{2} 6^2 = -5820 \text{ kgm} = -\frac{ql^2}{6,2}$$

Ricordiamo che nella corrispondente trave a sezione costante è:

$$V_A = \frac{3}{8} ql = 0,375 ql; \quad M_B = -\frac{ql^2}{8} ..$$

Com'era facilmente prevedibile il momento d'incastro è maggiore di quello della corrispondente trave a sezione costante. Infatti la condizione di congruenza esprime l'annullarsi, rispetto ad 1, del momento statico del diagramma della curvatura dell'intera trave. Poiché J aumenta procedendo verso l'incastro, un'analogha variazione deve subire M rispetto al caso della trave di sezione costante.

Se la determinazione delle funzioni $M(x)$ o $J(x)$, oppure la risoluzione dell'integrale, presenta particolari difficoltà si può procedere per sommatoria.

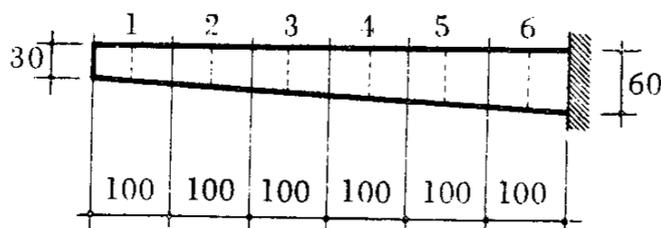


Fig. 2.3

Ad esempio nel caso assegnato, si può dividere la trave in 6 tronchi di lunghezza $\Delta x = 1,00$ m e calcolare $M(x)$ ed $J(x)$ per la sezione media di ciascun tronco (fig. 2.3).

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \frac{30}{12} 32,5^3 = 86\,000 \text{ cm}^4 & M_1 &= (50 V_A - 12\,500) \text{ kg cm} \\
 J_2 &= \frac{30}{12} 37,5^3 = 132\,000 \text{ «} & M_2 &= (150 V_A - 112\,500) \text{ «} \\
 J_3 &= \frac{30}{12} 42,5^3 = 192\,500 \text{ «} & M_3 &= (250 V_A - 312\,500) \text{ «} \\
 J_4 &= \frac{30}{12} 47,5^3 = 268\,000 \text{ «} & M_4 &= (350 V_A - 612\,500) \text{ «} \\
 J_5 &= \frac{30}{12} 52,5^3 = 363\,000 \text{ «} & M_5 &= (450 V_A - 1\,012\,500) \text{ «} \\
 J_6 &= \frac{30}{12} 57,5^3 = 476\,000 \text{ «} & M_6 &= (550 V_A - 1\,512\,500) \text{ «}
 \end{aligned}$$

L'equazione di congruenza è:

$$\eta_A = \sum_{i=1}^6 \frac{M_i x_i}{E J_i} \Delta x = 0.$$

Risulta:

$$\begin{aligned}
 \frac{50(50 V_A - 12\,500)}{E \cdot 86\,000} 100 &= \frac{1}{E} (2,9 V_A - 700) \\
 \frac{150(150 V_A - 112\,500)}{E \cdot 132\,000} 100 &= \frac{1}{E} (17 V_A - 12\,800) \\
 \frac{250(250 V_A - 312\,500)}{E \cdot 192\,500} 100 &= \frac{1}{E} (32,5 V_A - 40\,600) \\
 \frac{350(350 V_A - 612\,500)}{E \cdot 268\,000} 100 &= \frac{1}{E} (45,7 V_A - 80\,000)
 \end{aligned}$$

$$\frac{450(450 V_A - 1012500)}{E \cdot 363000} 100 = \frac{1}{E} (55,7 V_A - 125500)$$

$$\frac{550(550 V_A - 1512500)}{E \cdot 476000} 100 = \frac{1}{E} (63,5 V_A - 175000).$$

Eseguendo la sommatoria si ottiene:

$$217,3 V_A - 434600 = 0.$$

Da cui:

$$V_A = 2000 \text{ kg}$$

con uno scarto dell'1,5 % rispetto al valore esatto precedente.

* * *

3. - Risolvere la trave di fig. 3.1, soggetta alla coppia C nella sezione iniziale A , e avente nei due tratti AO e OB , di eguale lunghezza, momento d'inerzia della sezione retta costante e di valore, rispettivamente:

$$a): \frac{J_1}{J_2} = \infty \qquad b): \frac{J_1}{J_2} = 2$$

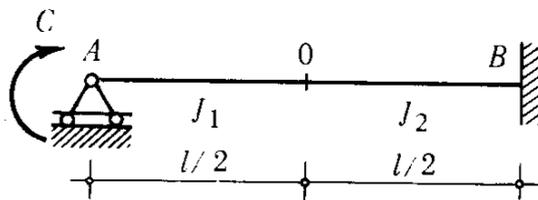


Fig. 3.1

Risolviamo l'esercizio applicando i corollari del teorema di MOHR.

Ricordiamo la corrispondenza tra le caratteristiche di deformazione della trave reale e quelle di sollecitazione della trave ausiliaria, sottopo-

sta al carico fittizio $q^* = \frac{M}{EJ}$:

$$\varphi_{\text{reale}} = T^*$$

$$\eta_{\text{reale}} = M^*.$$

All'incastro B della trave reale corrisponde un estremo libero nella trave ausiliaria (infatti: $\varphi_B = T_B^* = 0$; $\eta_B = M_B^* = 0$) e all'appoggio A un altro appoggio ($\varphi_A = T_A^* \neq 0$; $\eta_A = M_A^* = 0$).

Pertanto nel nostro caso la trave ausiliaria è vincolata in modo labile.

L'incognita iperstatica che ci proponiamo di determinare è la reazione verticale V_A del carrello; il suo valore si ottiene soddisfacendo l'equilibrio della trave ausiliaria, imponendo cioè l'annullarsi del momento statico del carico fittizio q^* rispetto al punto A .

In simboli

$$\int_l q^* \cdot x dx = 0.$$

(Se si pensa che è $q^* = \frac{M}{EJ}$, si comprende facilmente che questa condizione corrisponde all'equazione di congruenza $\eta_A = 0$, che si dovrebbe imporre alla trave principale a mensola, procedendo con metodo cinematico, sommando i contributi elementari di deformazione dei singoli tronchi).

CASO a): $\frac{J_1}{J_2} = \infty$ (tratto AO indeformabile).

Il carico q^* dovuto alla coppia C e alla reazione V_A incognita, vale:

$$\text{tratto } AO: q^* = 0$$

$$\text{tratto } OB: q^* = \frac{C}{EJ_2} - \frac{V_A \cdot x}{EJ_2}$$

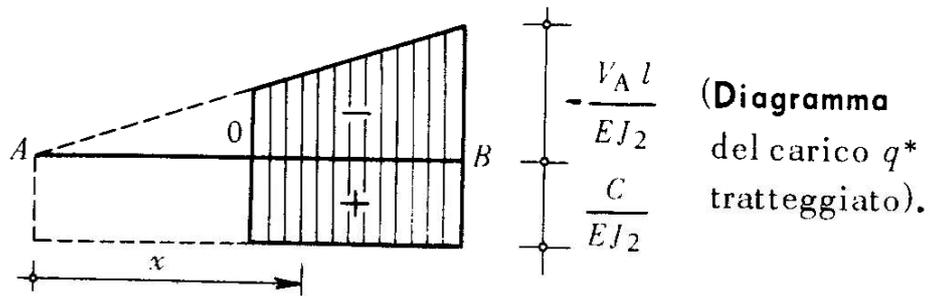


Fig. 3.2

$\Sigma M_A^* = 0$, da cui:

$$\left(\frac{C}{EJ_2} \frac{l}{2} \right) \frac{3}{4} l - \left[\left(\frac{V_A l}{2EJ_2} \cdot \frac{l}{2} \right) \frac{3}{4} l + \left(\frac{V_A l}{2EJ_2} \cdot \frac{l}{4} \right) \frac{5}{6} l \right] = 0$$

Ovviamente nell'equazione non compaiono termini contenenti il momento J_1 del tratto indeformabile.

Si ottiene:

$$V_A = \frac{9}{7} \frac{C}{l}.$$

Ovviamente questo valore è minore di $V_A = \frac{3}{2} \frac{C}{l}$ che la reazione del carrello assume quando la trave è tutta egualmente deformabile.

La deformata della trave è indicata in fig. 3.3:

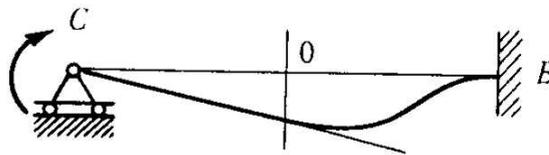


Fig. 3.3

il tratto AO ruota rigidamente attorno ad A , ed il punto O si comporta come incastrato cedevolmente in senso verticale e angolare.

CASO b): $\frac{J_1}{J_2} = 2.$

Si procede in maniera analoga, cercando di esprimere, per semplicità di calcolo, il carico q^* sempre in funzione dello stesso J .

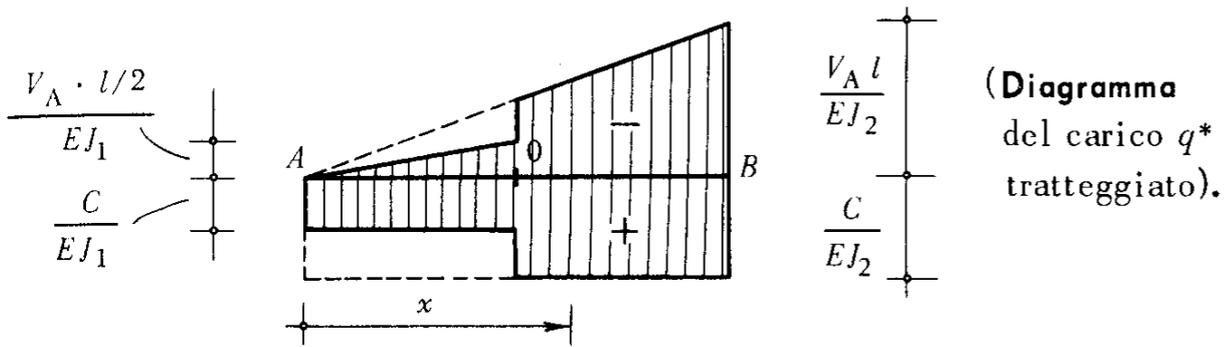


Fig. 3.4

tratto AO: $q^* = \frac{C}{EJ_1} - \frac{V_A \cdot x}{EJ_1} = \frac{1}{2EJ_2} (C - V_A \cdot x)$

tratto OB: $q^* = \frac{C}{EJ_2} (C - V_A \cdot x)$

Dalla condizione $\sum M_A^* = 0$ si deduce anche in questo caso il valore di V_A .

* * *

4. - Risolvere la trave ad asse rettilineo orizzontale di fig. 4.1 vincolata alle estremità con due incastri e soggetta ad una coppia esterna C applicata in una sezione generica.

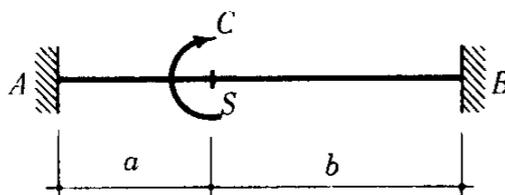


Fig. 4.1

La struttura è tre volte iperstatica ma due sole volte staticamente indeterminata. Infatti non agiscono sulla trave carichi aventi componenti orizzontali; inoltre per effetto della deformazione flessionale l'asse geometrico rettilineo si incurva senza variare di lunghezza e i punti estremi A e B non tendono a spostarsi relativamente in senso orizzontale, a meno di infinitesimi del 2° ordine. Se ne deduce che i vincoli non sono chiamati a reagire in tal senso, e pertanto si hanno quattro soli parametri incogniti delle reazioni: V_A , V_B , M_A , M_B . Le equazioni d'equilibrio a disposizione sono però solo due, perché l'equilibrio alla traslazione orizzontale è identicamente soddisfatto.

Per risolvere il problema iperstatico si può sezionare completamente in corrispondenza della sezione S e assumere come struttura principale l'insieme delle due mensole AS' e $S''B$ (fig. 4.2).

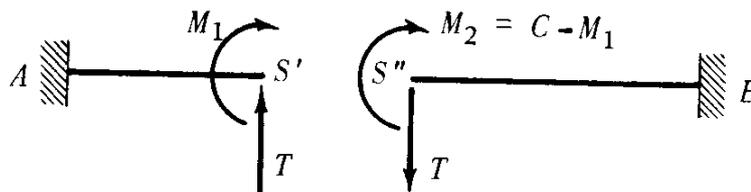


Fig. 4.2

Le condizioni di congruenza da imporre sono evidentemente quelle relative al vincolo soppresso della continuità materiale in S ; le due facce S' e S'' pur così separate non possono compiere movimenti relativi; in simboli:

$$\begin{cases} \varphi_{S'} = \varphi_{S''} \\ \eta_{S'} = \eta_{S''} \end{cases}$$

(la condizione $\xi_{S'} = \xi_{S''}$ è già identicamente soddisfatta perché non esiste in alcun punto della struttura la tendenza allo spostamento orizzontale).

La coppia esterna C deforma elasticamente tutta la trave AB ; nella struttura principale essa si ripartisce sulle due mensole secondo due aliquote incognite M_1 e $M_2 = C - M_1$ aventi il medesimo senso di rota-

zione. M_1 provoca un abbassamento della sezione S' ; M_2 , viceversa, un innalzamento di S'' ; pertanto, affinché possa essere soddisfatta la seconda equazione di congruenza, deve esistere nella sezione S anche un'azione interna mutua di taglio che deve essere esplicitata all'atto dello svincolamento. Il taglio T applicato alla faccia S' (azione della parte che segue su quella che precede) è diretto verso l'alto, quello applicato ad S'' verso il basso, perché solo così può essere annullato lo spostamento relativo verticale provocato da M_1 e M_2 .

In tal modo risultano messe in evidenza due incognite iperstatiche (M_1 e T ; M_2 è nota in funzione di M_1) cui corrispondono due equazioni di congruenza, cosicché il problema analitico risulta possibile e determinato.

Si possono esprimere le condizioni di congruenza mediante i coefficienti elastici noti delle travi a mensola. Assumendo positive le rotazioni di senso orario e gli spostamenti verso il basso, si ha:

$$\begin{cases} \frac{M_1 a}{EJ} - \frac{Ta^2}{2EJ} = \frac{M_2 b}{EJ} - \frac{Tb^2}{2EJ} \\ \frac{M_1 a^2}{2EJ} - \frac{Ta^3}{3EJ} = -\frac{M_2 b^2}{2EJ} + \frac{Tb^3}{3EJ} \end{cases}$$

Moltiplicando per il fattore comune EJ che si è supposto costante, e risolvendo il sistema, si ha:

$$T = 6C \frac{ab}{l^3}$$

$$M_1 = C \frac{b}{l} \left[1 + \frac{3a}{l^2} (a - b) \right]$$

$$M_2 = C \frac{a}{l} \left[1 + \frac{3b}{l^2} (b - a) \right].$$

(L'espressione di M_2 , ottenuta dalla relazione $M_2 = C - M_1$ risulta anche direttamente da quella di M_1 scambiando i termini a e b).

Con condizioni d'equilibrio si ricavano ora le reazioni dei vincoli:

Equilibrio alla traslazione verticale delle mensole:

$$V_A = V_B = V = T = 6C \frac{ab}{l^3}.$$

Equilibrio alla rotazione delle mensole attorno ai punti A e B:

$$\text{mensola } AS' \quad \Sigma M_A = 0 \quad M_1 - Ta + M_A = 0 \quad M_A = C \frac{b}{l} \left(3 \frac{a}{l} - 1 \right)$$

$$\text{mensola } BS'' \quad \Sigma M_B = 0 \quad M_2 - Tb + M_B = 0 \quad M_B = C \frac{a}{l} \left(3 \frac{b}{l} - 1 \right)$$

La fig. 4.3 pone in evidenza l'equilibrio della trave completamente svincolata.

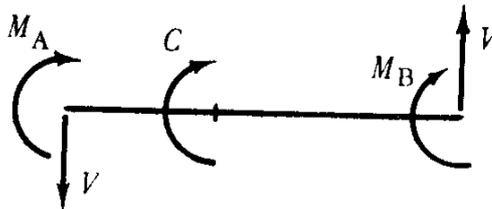


Fig. 4.3

DIAGRAMMI DELLE AZIONI INTERNE.

Diagramma T. - (Costante, negativo).



Diagramma M. - È rappresentato da due tratti rettilinei paralleli (perché T è costante); la discontinuità in corrispondenza di S vale naturalmente $C = M_1 + M_2$.

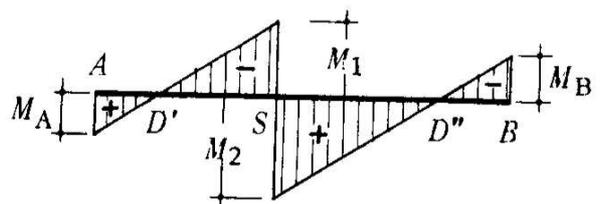


Fig. 4.4

CURVA DELLE PRESSIONI.

La curva delle pressioni è costituita da due forze V parallele verticali aventi le rette d'azione r' e r'' delle risultanti delle reazioni degli incastri. Esse incontrano l'asse geometrico della trave in corrispondenza

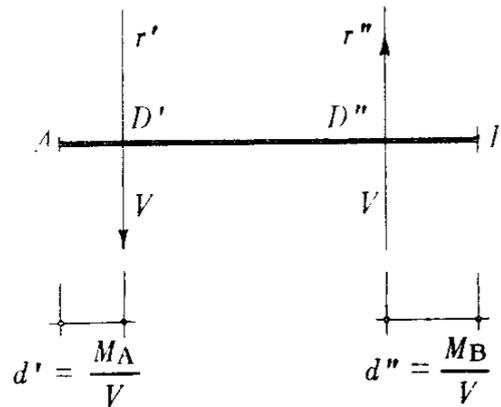


Fig. 4.5

delle sezioni D' e D'' nelle quali il momento flettente è nullo e la deformata presenta un flesso. Le ascisse di D' e D'' valgono, riferite rispettivamente agli estremi A e B : $d' = \frac{M_A}{V}$ e $d'' = \frac{M_B}{V}$.

CONSIDERAZIONI SULLA LINEA ELASTICA.

L'equazione della linea elastica per l'intera trave si ottiene integrando le due equazioni differenziali:

per il tronco AS : $EJ \eta'' = -(M_A - Vx)$

per il tronco BS : $EJ \eta'' = +(M_B - Vx')$

avendo valutato nel primo caso le forze che precedono, e nel secondo quelle che seguono. Le condizioni ai limiti per le costanti di integrazione sono:

$$\left. \begin{array}{l} \text{per } x = 0 \quad \eta = 0 \quad \eta' = 0 \\ \text{per } x' = 0 \quad \eta = 0 \quad \eta' = 0 \end{array} \right\} \text{(incastri } A \text{ e } B).$$

Si ottiene, rispettivamente:

$$EJ\eta = \frac{C}{2} \frac{b}{l} x^2 \left[\frac{2a}{l^2} (l-x) - \frac{b}{l} \right]$$

$$EJ\eta = -\frac{C}{2} \frac{a}{l} x'^2 \left[\frac{2b}{l^2} (l-x') - \frac{a}{l} \right]$$

(la seconda equazione si può anche ottenere direttamente dalla prima alterando segno e scambiando tra loro i termini contenenti a e b).

Avendo presente la curva delle pressioni e il diagramma del momento flettente prima ottenuti, che forniscono i punti di flesso e l'andamento delle fibre tese e compresse della trave, si può tracciare qualitativamente la deformata in accordo con essi (fig. 4.6).

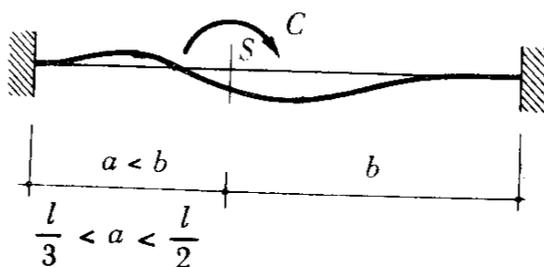


Fig. 4.6

La struttura è simmetrica per asse geometrico e condizioni di vincolo rispetto al suo punto di mezzo. La coppia C applicata in un punto generico costituisce però una condizione di carico qualunque, e la sezione S subisce sia una rotazione φ_{CS} (di senso orario, concorde con C), che uno spostamento verticale η_{CS} .

Le espressioni prima ottenute per i momenti di incastro pongono in evidenza come i diagrammi e la deformata tracciati sono validi qualitativamente se la coppia C agisce nel terzo medio della trave AB . Per coppia C agente nei terzi esterni della trave ($a < \frac{l}{3}$, oppure $a > \frac{2}{3}l$) i momenti M_A e M_B si invertono di segno e i punti D' e D'' di flesso non si verificano più contemporaneamente nella deformata (fig. 4.7).

Le reazioni verticali V conservano sempre lo stesso senso qualunque sia la sezione S . Infatti la coppia C si ripartisce sui tronchi

AS' e $S''B$ secondo due aliquote M_1 e M_2 aventi sempre il suo stesso senso di rotazione. Questo fatto mantiene inalterato il senso delle azioni mutue T e, conseguentemente, quello delle V .

Man mano si riduce a , la mensola AS' diviene sempre più rigida in confronto alla $S''B$ e assorbe una porzione di C gradatamente maggiore. Contemporaneamente si riduce la freccia relativa provocata da M_1 e M_2 in S' e S'' e quindi diminuisce l'azione mutua T .

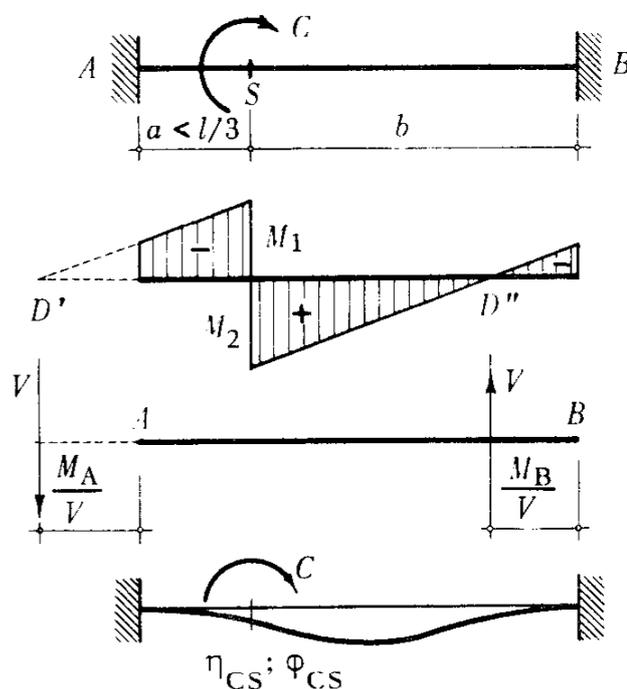


Fig. 4.7

Al limite quando $a \rightarrow 0$ e $S \rightarrow A$ la coppia esterna C tende ad essere totalmente equilibrata dall'incastro A , mentre tendono ad annullarsi M_B e le reazioni verticali V .

CASO PARTICOLARE: $a = b = \frac{l}{2}$.

È questo un caso di carico antisimmetrico su struttura simmetrica. La sezione O di mezzaria ruota solamente senza spostarsi verticalmente ed il regime statico della trave AB è il medesimo nelle due metà luci OA e OB , appoggiate in O e soggette entrambe, per ragioni di antisimmetria,

alla coppia $\frac{C}{2}$ (fig. 4.8).

La trave AB risulta in questo caso una sola volta staticamente indeterminata; assumendo quale struttura principale una delle due possibili mensole AO , oppure BO , si determina, con procedimento analogo al precedente, l'azione interna T_0 mediante la condizione di congruenza $\eta_0 = 0$.

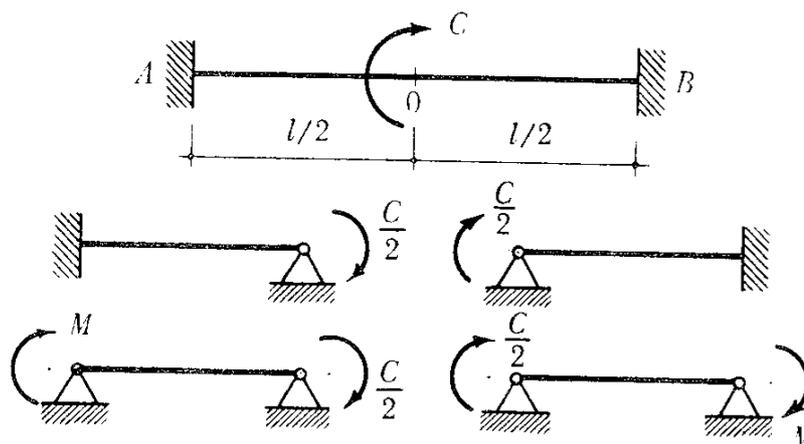


Fig. 4.8

Indifferentemente, ci si può ricondurre ad una struttura principale appoggiata, sostituendo l'incastro esterno con una cerniera; in tal caso la condizione di congruenza è:

$$\varphi_A = 0.$$

Ricorrendo ai coefficienti elastici delle travi appoggiate e assumendo positive le rotazioni orarie, si ha:

$$\frac{\frac{C}{2} \cdot \frac{l}{2}}{6EJ} - \frac{M \frac{l}{2}}{3EJ} = 0$$

da cui:

$$M = \frac{C}{4}.$$

Le reazioni verticali risultano:

$$V = \frac{\frac{C}{2} + \frac{C}{4}}{\frac{l}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{C}{l}.$$

TRAVE AD ASSE RETTILINEO DOPPIAMENTE INCASTRATA: casi semplici importanti.

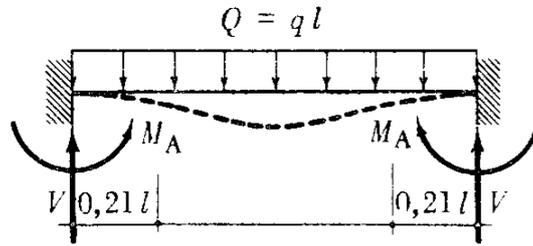
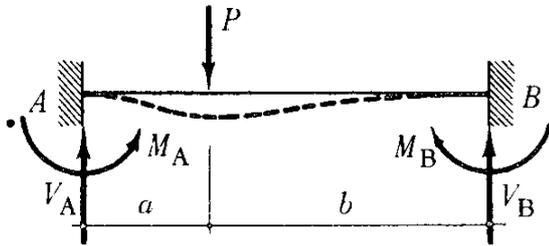
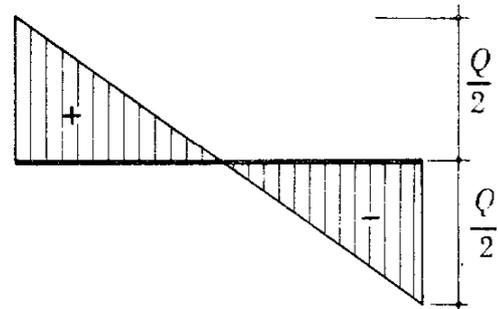
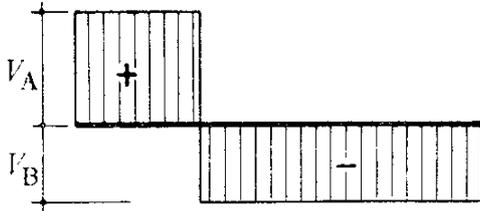


Diagramma T

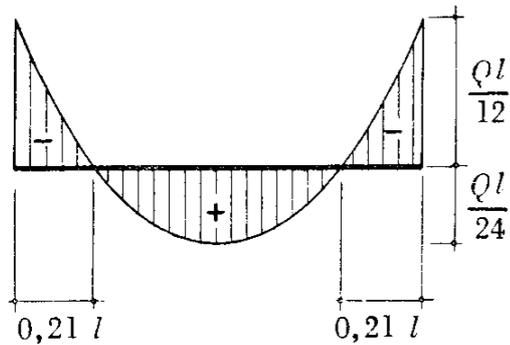
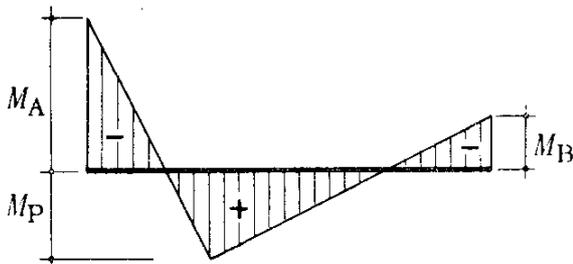


$$V_A = P \frac{b^2}{l^3} (l + 2a)$$

$$V_B = P - V_A$$

$$V_A = V_B = \frac{Q}{2}$$

Diagramma M



$$M_A = P \frac{ab^2}{l^2}$$

$$M_B = P \frac{a^2b}{l^2}$$

$$M_P = 2P \frac{a^2b^2}{l^3}$$

$$M_A = M_B = \frac{Ql}{12}$$

$$\eta_{1/2} = \eta_{\max} = \frac{1}{384} \frac{ql^4}{EJ}$$

per $a = b = \frac{l}{2}$: $M_A = M_B = M_P = \frac{Pl}{8}$; $\eta_{1/2} = \eta_{\max} = \frac{2}{384} \cdot \frac{Pl^3}{EJ}$

* * *

5. - Risolvere la trave incastrata di fig. 5.1 costituita da un profilato a I PN 24, rinforzato nei tratti laterali AC e BD mediante due piastre saldate alle ali, superiore ed inferiore.

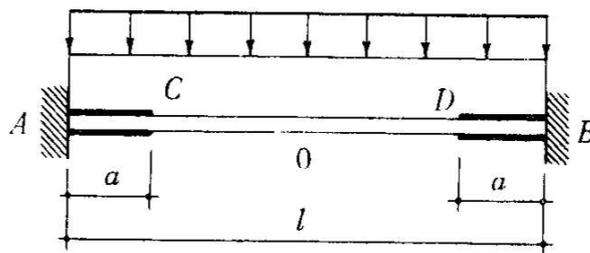


Fig. 5.1

La sezione del profilato I PN 24 ha le dimensioni indicate in figura 5.2 e le sue caratteristiche sono:

$$A = 46,1 \text{ cm}^2; \quad J = 4246 \text{ cm}^4; \quad W = 354 \text{ cm}^3.$$

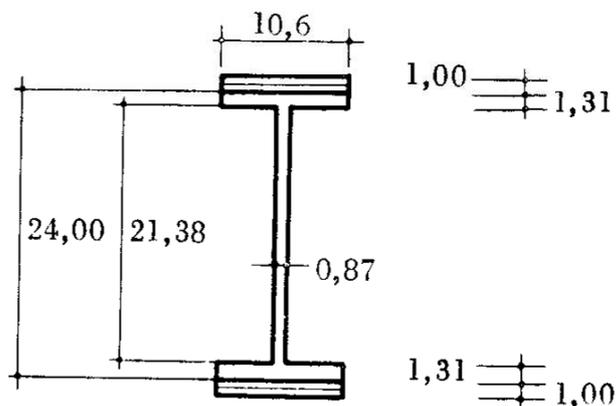


Fig. 5.2

Le piastre saldate hanno larghezza $b = 10,6$ cm, eguale all'ala del profilato, e spessore $s = 1,00$ cm.

Le caratteristiche della sezione rinforzata sono:

$$A_1 = 67,3 \text{ cm}^2; \quad J_1 = 7555 \text{ cm}^4; \quad W_1 = 581 \text{ cm}^3.$$

Le reazioni verticali degli incastrati, per ragioni di simmetria, sono staticamente determinate e valgono $V = \frac{Q}{2}$. I momenti d'incastro \bar{M} , tra loro eguali, sono staticamente indeterminati.

Il loro valore è influenzato dalla variazione di rigidezza apportata alla trave, ed è diverso da quello che si ha nel caso del profilato a sezione costante.

Sfruttiamo la simmetria esistente assumendo quale struttura principale la metà trave AO , incastrata in O , giacché la sezione di mezzaria, posta sull'asse di simmetria, non ruota, e completamente svincolata in A , ed ivi soggetta alle reazioni esplicitate \bar{M} e \bar{V} .

La condizione di congruenza da imporre per la determinazione dell'incognita \bar{M} è:

$$\varphi_A = 0.$$

Ossia:

$$\int_0^a \frac{M dx}{EJ_1} + \int_a^{l/2} \frac{M dx}{EJ} = 0.$$

È:

$$M = q \frac{l}{2} x - q \frac{x^2}{2} - \bar{M}$$

(per una sezione generica sia del tratto AC che del tratto CO).

Sostituendo l'espressione di M e raccogliendo a fattor comune $\frac{1}{EJ_1}$:

$$\frac{1}{EJ_1} \left\{ \int_0^a \left(q \frac{l}{2} x - q \frac{x^2}{2} - \bar{M} \right) dx + \frac{J_1}{J} \int_a^{l/2} \left(q \frac{l}{2} x - q \frac{x^2}{2} - \bar{M} \right) dx \right\} = 0$$

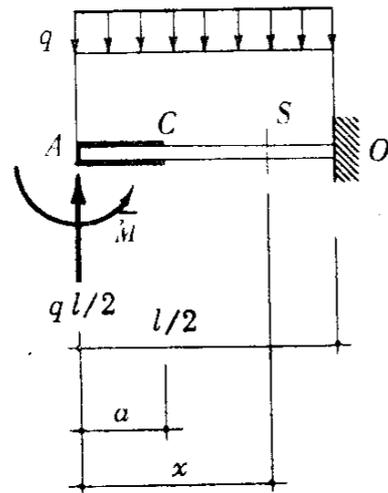


Fig. 5.3

Eseguendo l'integrazione:

$$\left(1 - \frac{J_1}{J}\right) \left(\frac{qla^2}{4} - \frac{qa^3}{6} - \bar{M}a\right) + \frac{J_1}{J} \left(\frac{ql^3}{16} - \frac{ql^3}{48} - \bar{M}\frac{l}{2}\right) = 0.$$

Risulta:

$$\bar{M} = \frac{\frac{ql^2}{12} + \left(\frac{J}{J_1} - 1\right) \frac{qa^2}{2} \left(1 - \frac{2a}{3l}\right)}{1 + \frac{2a}{l} \left(\frac{J}{J_1} - 1\right)}$$

L'equazione che determina \bar{M} corrisponde alla condizione che sia nulla l'area del diagramma della curvatura $\frac{M}{EJ}$ (dell'intera trave, o di metà di essa, per le condizioni di simmetria).

Poiché il profilato ha due diversi valori di J , il maggiore dei quali nei tronchi AC e BD prossimi agli incastri, si verifica un aumento di M in questi tratti, e una diminuzione in corrispondenza della mezzaria. Ne segue che \bar{M} è maggiore del valore $\frac{ql^2}{12}$ che compete al momento d'incastro allorché la trave ha sezione costante.

L'inverso accade se la zona di maggior momento d'inerzia è quella centrale CD .

RISOLUZIONE NUMERICA E VERIFICA DI RESISTENZA.

Si abbia:

$$l = 10,00 \text{ m}; \quad a = 2,00 \text{ m}; \quad q = 1000 \text{ kg/m.}$$

Nel caso del profilato di sezione costante risulterebbe:

$$\bar{M} = \frac{ql^2}{12} = 8333 \text{ kgm} \quad (\sigma_{\max} = \frac{833300}{354} \cong 2355 \text{ kg/cm}^2).$$

$$M_0 = \frac{ql^2}{24} = 4167 \text{ kgm.}$$

Le sezioni S di momento nullo distano $x = 2,10$ m dagli incastri.
Nel caso del profilato rinforzato nei due tratti AC e BD , si ha:

$$\bar{M} = \frac{8333 - 760}{1 - 0,1755} \cong 9200 \text{ kgm} = \frac{ql^2}{10,88}$$

$$M_0 = \frac{ql^2}{8} - \frac{ql^2}{10,88} = \frac{ql^2}{30,2}$$

La legge di variazione del momento, per una sezione d'ascissa x , è:

$$M = 5000x - 500x^2 - 9200$$

e le due sezioni S_0 di momento nullo hanno distanza $x_0 = 2,43$ m dagli incastri.

La verifica di resistenza della sezione d'incastro dà:

$$\sigma_{\max} = \frac{920000}{581} = 1585 \text{ kg/cm}^2 < K_F.$$

* * *

6. - Risolvere la trave doppiamente incastrata di fig. 6.1 soggetta ai due carichi simmetrici P , inclinati dell'angolo α .

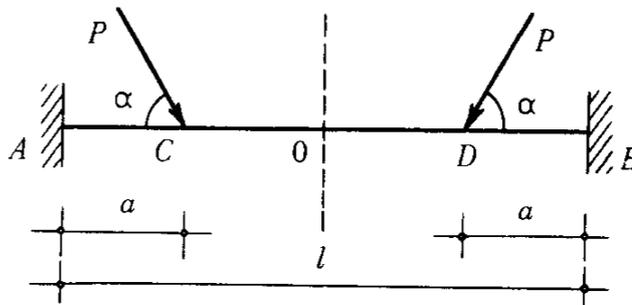


Fig. 6.1

Decomponiamo le forze P nelle loro componenti verticali $P_v = P \sin \alpha$ e orizzontali $P_0 = P \cos \alpha$ e studiamo separatamente gli ef-

fetti provocati da ciascun sistema.

a) *Componenti verticali P_v* . - La trave è 3 volte iperstatica ma una sola volta staticamente indeterminata: infatti gli incastrati A e B non reagiscono orizzontalmente (vedi anche esercizio 4), e le componenti verticali V_A e V_B valgono entrambe P per ragioni di simmetria. L'unica incognita è il momento d'incastro $M_i = M_A = M_B$.

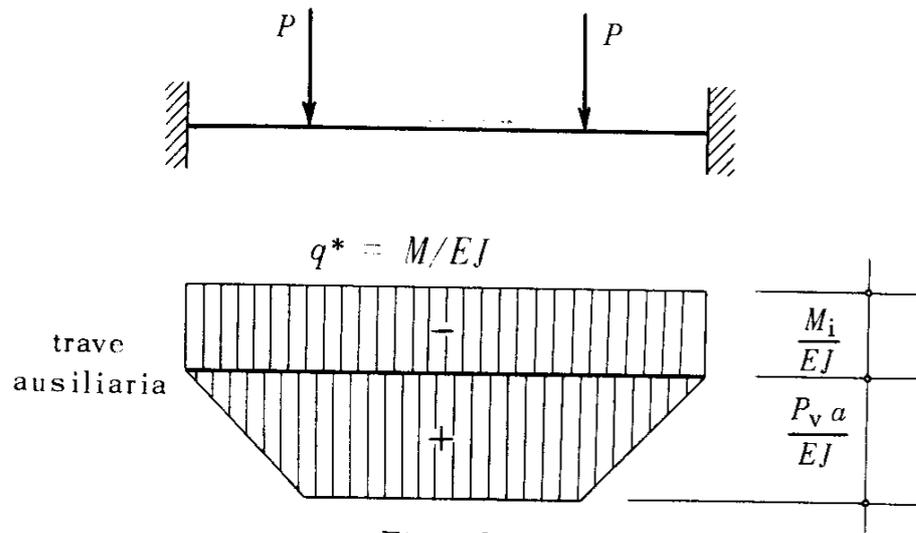


Fig. 6.2

Risolviamo la trave applicando ad esempio il corollario del teorema di MOHR. In questo caso la trave ausiliaria, soggetta al carico $q^* = \frac{M}{EJ}$ (o più semplicemente M , se EJ è costante) è totalmente libera nel piano. Il carico q^* deve perciò essere autoequilibrato; essendo simmetrico, basta soddisfare la condizione d'equilibrio alla traslazione verticale $\int_l q^* dx = 0$

(corrispondente alla condizione cinematica $\int_l \frac{M dx}{EJ} = 0$ che esprime la rotazione nulla agli incastrati).

Cioè :

$$\frac{P_v \cdot a}{EJ} [a + (l - 2a)] - \frac{M_i l}{EJ} = 0$$

Da cui:

$$M_i = P_v \frac{a}{l} (l - a).$$

b) *Componenti orizzontali P_0 .* - Per quanto riguarda le componenti orizzontali P_0 esse inducono nella trave uno stato di sollecitazione assiale semplice, che si determina imponendo che l'asse geometrico (o metà, per ragioni di simmetria), vincolato agli estremi a due punti fissi, non vari di lunghezza.

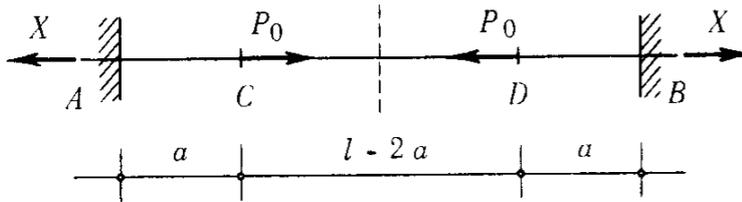


Fig. 6.3

Si ha:

$$\frac{Xa}{EA} - \frac{(P_0 - X)\left(\frac{l}{2} - a\right)}{EA} = 0$$

da cui:

$$X = P_0 \frac{l - 2a}{l}$$

Il *calcolo di resistenza* si esegue a pressoflessione per una qualunque sezione del tratto CD (che è uniformemente sollecitato) e a tensoflessione per le sezioni d'incastro che sono le più affaticate.

* * *

7. - Risolvere la trave continua a due campate di fig. 7.1, soggetta a carico uniformemente distribuito su tutta la sua lunghezza.

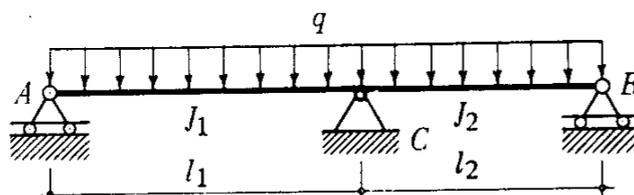


Fig. 7.1

La struttura è una volta iperstatica ed una volta staticamente indeterminata.

Volendo risolvere il problema con metodo cinematico, mediante l'uso dei coefficienti elastici delle travi inflesse ad una sola campata, si può assumere come struttura principale la trave isostatica ACB , ottenuta dalla data mediante l'introduzione di una cerniera interna in C , che sopprime la solidarietà a rotazione in corrispondenza della sezione sull'appoggio intermedio.

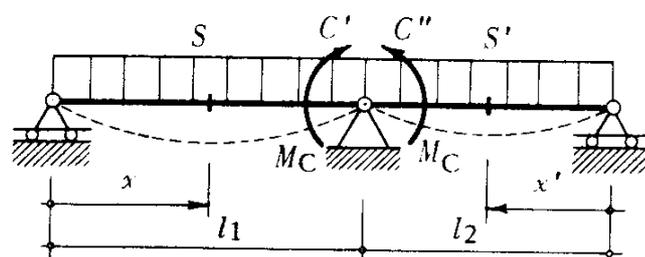


Fig. 7.2

In tal caso le due campate AC e CB si comportano come semplicemente appoggiate e tra loro indipendenti. Se consideriamo l'azione del solo carico esterno q , esse si inflettono come tratteggiato in fig. 7.2 e le due facce C' e C'' della sezione (rappresentante C' la sezione terminale della prima trave e C'' la sezione iniziale della seconda) ruotano liberamente una rispetto all'altra. Deve pertanto sussistere nella sezione C della trave continua assegnata una azione interna di momento flettente che, all'atto dello svincolamento, si esplicita in due coppie mutue M_C , staticamente incognite, il cui compito è quello di imporre il rispetto della solidarietà materiale.

La condizione di congruenza che determina M_C è appunto che sia nulla la rotazione relativa di C' e C'' o, identicamente, che siano eguali le loro rotazioni assolute:

$$\varphi_{C'} = \varphi_{C''}$$

È facilmente prevedibile che i momenti M_C , per poter soddisfare questa condizione, abbiano il senso di figura, contrario a quello della

rotazione provocata dai carichi.

Assumendo positive le rotazioni antiorarie si ha:

$$\left(\frac{ql_1^3}{24 EJ_1} - \frac{M_C l_1}{3 EJ_1} \right) = - \left(\frac{ql_2^3}{24 EJ_2} - \frac{M_C l_2}{3 EJ_2} \right)$$

da cui:

$$\frac{M_C l_1}{3 EJ_1} \left(1 + \frac{K_2}{K_1} \right) = \frac{ql_1^3}{24 EJ_1} \left(1 + \frac{K_2}{K_1} \right)$$

si ottiene

$$M_C = \frac{ql_1^2}{8} \cdot \frac{K_1^3 + K_2}{K_1^2(K_1 + K_2)}$$

avendo posto

$$\begin{cases} K_1 = l_1/l_2 \\ K_2 = J_1/J_2. \end{cases}$$

È ora possibile ricavare le reazioni dei vincoli esterni mediante equazioni d'equilibrio. Assumendo positive le reazioni V dirette verso l'alto e i momenti di senso orario per le forze che precedono, si ha:

Equilibrio alla rotazione dell'asta AC attorno alla cerniera C :

$$\Sigma M_{CA} = 0 \quad V_A \cdot l_1 - \frac{ql_1^2}{2} + M_C = 0$$

$$V_A = \frac{ql_1}{2} - \frac{M_C}{l_1}$$

Equilibrio alla rotazione dell'asta CB attorno alla cerniera C :

$$\Sigma M_{CB} = 0 \quad V_B \cdot l_2 - \frac{ql_2^2}{2} + M_C = 0$$

$$V_B = \frac{ql_2}{2} - \frac{M_C}{l_2}$$

Equilibrio alla traslazione dell'intera struttura:

$$\Sigma Y = 0 \quad V_A + V_B + V_C - q(l_1 + l_2) = 0$$

$$V_C = (ql_1 - V_A) + (ql_2 - V_B) =$$

$$= \left(\frac{ql_1}{2} + \frac{M_C}{l_1} \right) + \left(\frac{ql_2}{2} + \frac{M_C}{l_2} \right) = T_{Cd} - T_{Cs}$$

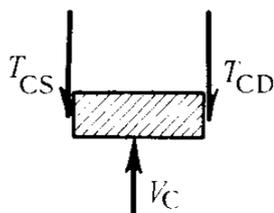


Fig. 7.3

dove, con le convenzioni fatte sul segno dell'azione interna di taglio, e in accordo con le indicazioni di fig. 7.3, T_{CD} va preso positivo e T_{CS} negativo.

LEGGE DI VARIAZIONE DELLE AZIONI INTERNE.

La trave continua ad asse rettilineo orizzontale, sottoposta a carichi verticali, e munita di carrelli a piano di scorrimento orizzontale, è soggetta solo alle azioni interne di momento flettente e taglio.

Per una sezione generica S della campata AC si ha:

$$T_S = V_A - qx$$

$$M_S = V_A \cdot x - q \frac{x^2}{2}.$$

Il segno delle azioni interne dipende da quello di V_A , che può anche invertirsi al variare del rapporto l_1/l_2 .

Per una sezione S' della campata BC si ottengono espressioni analoghe, in funzioni di V_B e q , valutando le azioni interne con le forze che seguono.

Nell'ipotesi di V_A e V_B positivi (diretti verso l'alto) si ha inoltre:

$$\text{campata } AC: \quad \text{per } x = \frac{V_A}{q} \quad T = 0 \quad M = M_{\max \text{ pos.}} = \frac{V_A^2}{2q}$$

$$\text{per } x' = \frac{2V_A}{q} \quad M = 0 \quad (\text{punto di flesso})$$

campata BC : per $x' = \frac{V_B}{q}$ $T = 0$ $M = M_{\max \text{ pos.}} = \frac{V_B^2}{2q}$

per $x' = \frac{2V_B}{q}$ $M = 0$ (punto di flesso).

Diagramma T. - È costituito da due tratti rettilinei e paralleli, perché q è costante su tutta la trave. Ha una discontinuità di valore $V_C = |T_{CS}| + |T_{CD}|$ in corrispondenza dell'appoggio C .

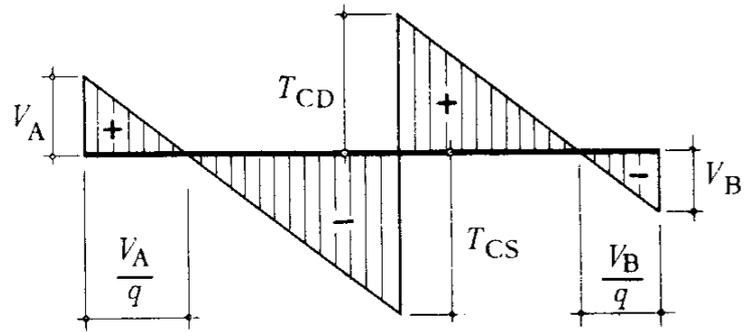


Diagramma M. - È costituito da due archi di parabola del 2° ordine formanti una cuspide in corrispondenza dell'appoggio C , punto d'applicazione del carico concentrato V_C . In A e B le tangenti sono inclinate per effetto delle V_A e V_B .

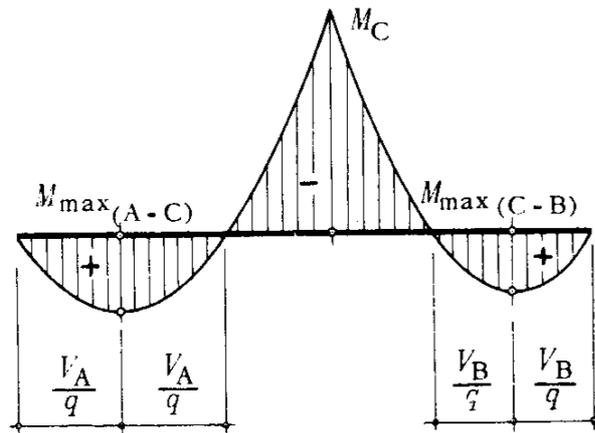


Fig. 7.4

RISOLUZIONE NUMERICA E CALCOLO DI RESISTENZA.

Sia assegnato:

$$l_1 = 6,00 \text{ m}; \quad l_2 = 5,00 \text{ m}; \quad q = 1000 \text{ kg/m}; \quad J_1 = J_2 = \text{costante},$$

per tutta la struttura.

L'espressione di M_C diviene:

$$M_C = \frac{q}{8} \cdot \frac{l_1^3 + l_2^3}{l_1 + l_2}.$$

Si ottiene per le varie grandezze:

$$M_C = \frac{1000}{8} \cdot \frac{6^3 + 5^3}{6 + 5} = 3870 \text{ kgm}$$

$$V_A = \frac{1000}{2} 6 - \frac{3870}{6} = 2355 \text{ kg}$$

$$V_B = \frac{1000}{2} 5 - \frac{3870}{5} = 1725 \text{ «}$$

$$T_{CS} = 2355 - 1000 \cdot 6 = -3645 \text{ «}$$

$$T_{CD} = -(1725 - 1000 \cdot 5) = +3275 \text{ «}$$

$$V_C = 3275 - (-3645) = 6920 \text{ «}$$

$$M_{\max \text{ pos. (A-C)}} = \frac{2355^2}{2000} = 2775 \text{ kgm} \quad \text{per} \quad x = 2,355 \text{ m.}$$

$$M_{\max \text{ pos. (C-B)}} = \frac{1725^2}{2000} = 1485 \text{ kgm} \quad \text{per} \quad x' = 1,725 \text{ m.}$$

Inoltre:

$$M = 0 \quad \text{per} \quad x = 2 \cdot 2,355 = 4,71 \quad \text{e} \quad x' = 2 \cdot 1,725 = 3,45.$$

Avendo assunto $J = \text{costante}$ per tutta la struttura, l'incognita iperstatica M_C risulta funzione delle sole caratteristiche geometriche e del carico. La si può quindi determinare senza avere preventivamente fissato le dimensioni della sezione.

È pertanto possibile eseguire un calcolo di progetto, anziché di verifica, della struttura iperstatica assegnata. Nel caso si intenda adottare un profilato a I PN con $K_F = 1600 \text{ kg/cm}^2$, si ha:

$$W = \frac{|M_{\max}|}{K} = \frac{387\,000}{1600} = 242 \text{ cm}^3.$$

Il profilato I PN 22 ha le seguenti caratteristiche:

$$A = 39,5 \text{ cm}^2, \quad J = 3060 \text{ cm}^4, \quad W = 278 \text{ cm}^3$$

e soddisfa le condizioni di resistenza.

CONSIDERAZIONI SULLA DEFORMATA ELASTICA.

Il comportamento delle due campate AC e BC è paragonabile, sia dal punto di vista delle azioni interne che della deformata, a quello di travi ad una campata, appoggiate ad un estremo (A o B) e incastrate elasticamente in C (l'incastro elastico è fornito dalla continuità materiale).

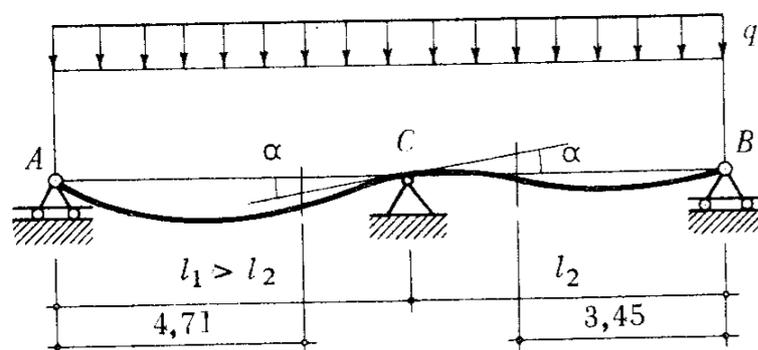


Fig. 7.5

Se la trave continua, di sezione costante e caricata uniformemente su tutta la sua lunghezza, ha le due campate di luce diversa, la sezione sull'appoggio intermedio C compie una rotazione α diversa da zero (fig. 7.5). Più precisamente la campata di maggior luce si comporta come incastrata cedevolmente in C , l'altra, di luce minore, come più che incastrata in C , e la rotazione α avviene nel senso indicato in figura. Infatti dalle espressioni prima ricavate per α_C e α_C'' si comprende facilmente che, per $l_1 > l_2$, prevale molto di più $\frac{ql_1^3}{24 EJ}$ su $\frac{ql_2^3}{24 EJ}$, che non $\frac{M_C l_1}{3 EJ}$

su $\frac{M_C l_2}{3 EJ}$, e pertanto il segno della rotazione α_C complessiva è condizionato dal termine maggiore $\left(\frac{q l_1^3}{24 EJ}\right)$.

Nel caso particolare di $l_1 = l_2$ la sezione sull'appoggio C non ruota per ragioni di simmetria e le due campate AC e BC si comportano come perfettamente incastrate in C (fig. 7.6).

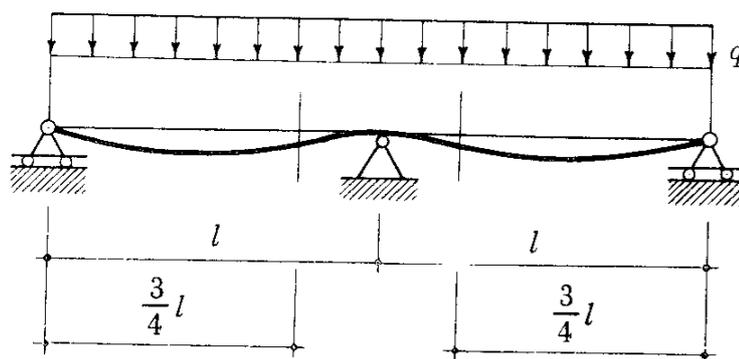


Fig. 7.6

Valgono pertanto, per ciascuna di esse, i risultati della trave appoggio-incastro (qualunque sia la condizione di carico assegnata, uniforme o variabile, purché simmetrica).

ASSUNZIONE DI UN'ALTRA STRUTTURA PRINCIPALE. OSSERVAZIONI.

Naturalmente per la risoluzione del problema iperstatico, pur procedendo sempre con metodo cinematico e facendo uso dei coefficienti elastici delle travi ad una sola campata, si sarebbe potuto assumere un'altra struttura principale.

Ad esempio, sopprimendo l'appoggio in C e imponendo la condizione di congruenza $\eta_C = 0$ sulla trave principale AB , a due appoggi, soggetta ai carichi noti e alla V_C incognita (fig. 7.7). È comunque evidente che questo svincolamento, dal punto di vista del calcolo, non è il più logico e conveniente perché conduce ad esprimere i coefficienti elastici dell'abbassamento di un punto qualunque C della trave AB .

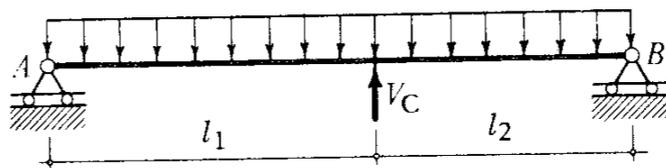


Fig. 7.7

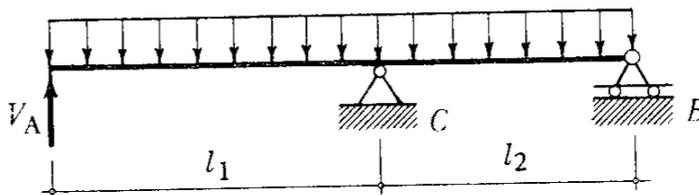


Fig. 7.8

Oppure, in altro modo, sopprimendo un appoggio esterno, A , e imponendo la condizione di congruenza $\eta_A = 0$ nella trave principale a due appoggi BC e sbalzo AC , per effetto dei carichi noti e della V_A incognita (fig. 7.8). Questo svincolamento mette chiaramente in luce la possibilità dell'invertirsi del senso di V_A , rispetto a quello prima previsto verso l'alto, se il carico q tende ad innalzare l'estremo A . Si verifica questo fatto se l_1 è notevolmente minore di l_2 .

Si deve però notare come lo svincolamento inizialmente adottato ha permesso di calcolare direttamente M_C , cioè la grandezza che più interessa per il progetto della struttura.

Un errore, ad esempio, del 3 % commesso nel calcolo di M_C , comporterebbe un eguale errore nel calcolo di progetto e un errore nel calcolo delle altre grandezze pari a:

$$V_A = \frac{ql_1}{2} - \frac{M_C}{l_1} = 2375 \text{ kg} \quad \text{errore} = 1 \%$$

$$M_{\text{max pos. (A-C)}} = \frac{V_A^2}{2q} = 2820 \text{ kgm} \quad \text{«} = 1,6 \%$$

Adottando invece un'altra struttura principale, ad esempio quella ottenuta sopprimendo l'appoggio A , se in questo caso si commettesse un

errore del 3 % nel calcolo di V_A , si avrebbe per le altre grandezze:

$$M_{\max \text{ pos. (A-C)}} = \frac{V_A^2}{2q} = 2660 \text{ kgm} \quad \text{errore} = 4 \%$$

$$M_C = \frac{ql_1^2}{2} - V_A \cdot l_1 = 4170 \text{ kgm} \quad \text{«} = 8 \%$$

La differenza degli errori percentuali ottenuti nei due casi, deriva dal fatto che il regime statico di una struttura iperstatica è dato dalla sovrapposizione dei regimi statici generati nella struttura principale dai carichi esterni noti e dalle reazioni incognite.

Non è quindi opportuno partire da una struttura principale vincolata in modo molto diverso da quello della struttura iperstatica assegnata. Infatti, discostandosi molto il regime statico dovuto ai soli carichi nella struttura principale, da quello effettivo esistente nella struttura iperstatica assegnata, le azioni interne finali si ottengono come differenza di due quantità (quelle dovute ai carichi e quelle dovute alle incognite) molto grandi e poco diverse tra loro, con possibilità di notevoli errori percentuali, qualora l'approssimazione tenuta nei calcoli non sia molto spinta.

CASO DI CARICHI NON PERPENDICOLARI ALL'ASSE.

Se nella trave il carico agisce secondo una direzione α qualsiasi, i ragionamenti e i calcoli fin qui svolti valgono inalterati per la componente del carico $q_n = q \sin \alpha$ normale all'asse della trave.

La risultante dei carichi agenti secondo l'asse della trave vale $Q_0 = q(l_1 + l_2) \cos \alpha$, ed è equilibrata dalla reazione orizzontale della cerniera C . Lo sforzo normale nella trave vale:

- sezione S della campata AC :

$$N_S = qx \cos \alpha \quad (\text{trazione})$$

- sezione S'' della campata BC :

$$N_{S'} = qx' \cos \alpha \quad (\text{compressione}).$$

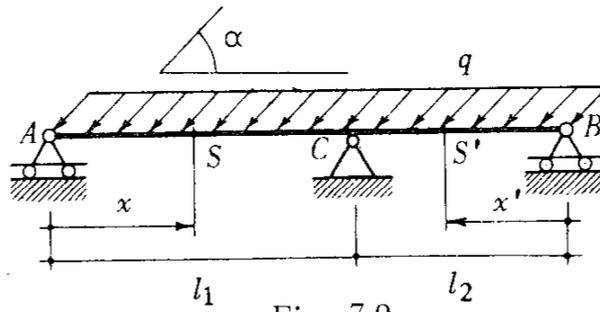


Fig. 7,9

Il calcolo di resistenza della struttura si esegue in questo caso a flessione composta (pressoflessione o tensoflessione a seconda che l_2 sia maggiore o minore di l_1).

TRAVE CONTINUA A DUE CAMPATE EGUALI: casi semplici importanti.

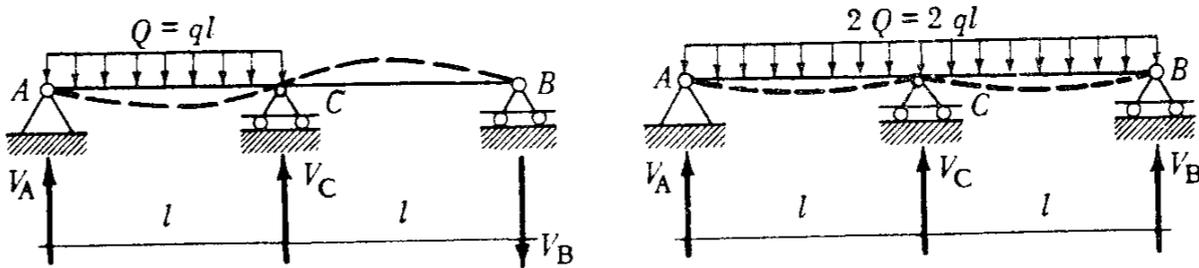
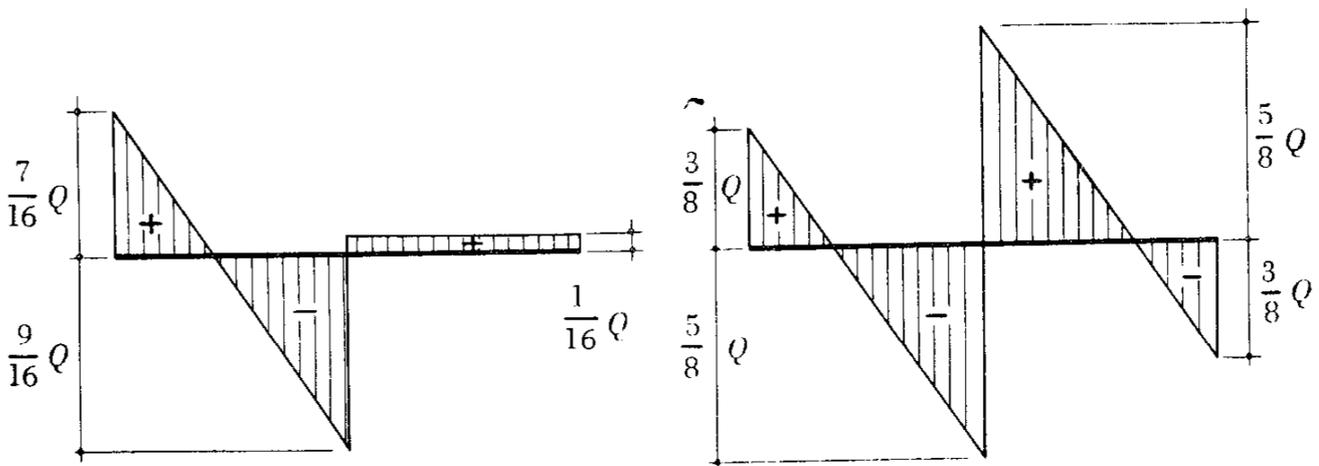
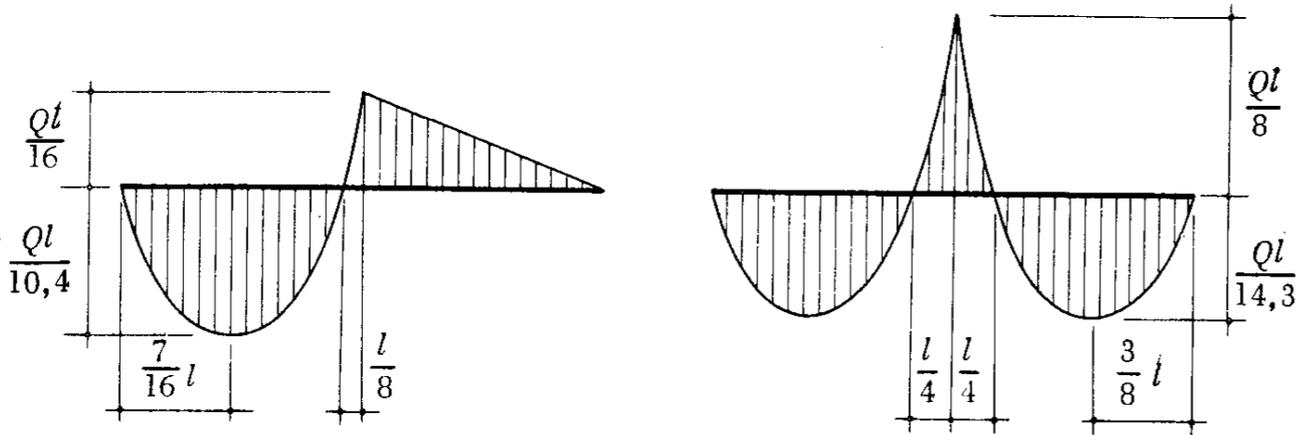


Diagramma T



$$V_A = \frac{7}{16}Q; \quad V_C = \frac{10}{16}Q; \quad V_B = -\frac{1}{16}Q. \quad V_A = \frac{3}{8}Q; \quad V_C = \frac{10}{8}Q; \quad V_B = \frac{3}{8}Q.$$

Diagramma M



$$M_C = \frac{Ql}{16}$$

$$M_{1/2(A-C)} = \frac{Ql}{8} - \frac{1}{2} \frac{Ql}{16} = \frac{3}{32} Ql$$

$$M_{\max \text{ pos.}} = \frac{Ql}{10,4}$$

$$M_C = \frac{Ql}{8}$$

$$M_{1/2(A-B)} = \frac{Ql}{8} - \frac{1}{2} \frac{Ql}{8} = \frac{Ql}{16}$$

$$M_{\max \text{ pos.}} = \frac{Ql}{14,3}$$

OSSERVAZIONI. - Il metodo risolutivo adottato nell'esercizio precedente rappresenta un'applicazione diretta del teorema dei tre momenti (era $M_C \neq 0$; $M_A = M_B = 0$) ed è sempre applicabile qualunque sia il numero delle campate della trave continua assegnata e comunque sia vincolata agli estremi (appoggi o incastri) (fig. 7.10).

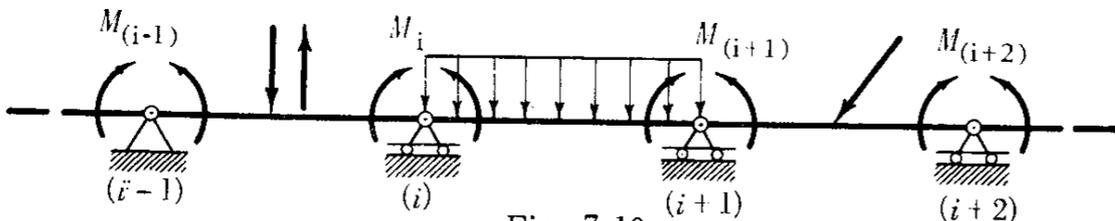


Fig. 7.10

In ogni caso il problema, indipendentemente dal numero di incognite complessivo, viene sempre ricondotto allo studio delle singole campate, soggette ai carichi esterni direttamente agenti su ciascuna di esse, e alle coppie mutue incognite applicate ai loro estremi. Ogni equazione di congruenza esprime l'eguaglianza delle rotazioni della sezione terminale

di una campata e della sezione iniziale della campata successiva, e in essa compaiono al massimo tre incognite (il momento sull'appoggio considerato e quelli sui due appoggi adiacenti).

Svincolando secondo uno degli altri modi successivamente accennati, ci si riconduce ad un'unica trave isostatica, su due appoggi, soggetta contemporaneamente a tutto il sistema dei carichi (che possono essere variabili da campata a campata) e a tutte le reazioni iperstatiche X degli appoggi sovrabbondanti. Si ha così il duplice svantaggio di avere assunto una struttura principale che si discosta molto da quella iperstatica assegnata (con possibilità di elevati errori percentuali nel calcolo numerico) e di dovere risolvere un sistema di n equazioni di congruenza, ciascuna delle quali contiene tutte le n incognite.

* * *

8. - Risolvere la trave continua a due campate di fig. 8.1, soggetta alla coppia esterna M_0 , applicata alla sezione iniziale A .

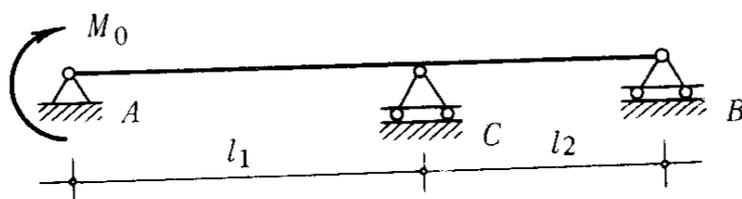


Fig. 8.1

Procediamo come nell'esercizio precedente, sopprimendo la solidarietà angolare in C e studiando la struttura principale costituita dalle due travi semplici AC' e $C''B$, incernierate agli estremi.

In fig. 8.2 è indicata l'azione mutua iperstatica M_C , esplicitata dallo svincolamento, il cui senso è reso facilmente prevedibile dall'andamento della deformata (tratteggiata in figura) che la sola coppia esterna provoca nella struttura principale.

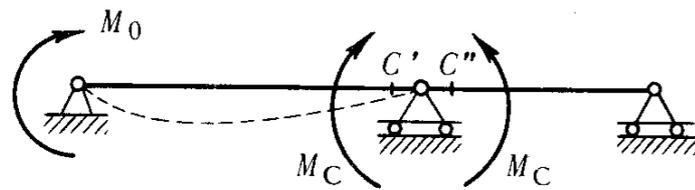


Fig. 8.2

La condizione di congruenza è:

$$\varphi_{c'} = \varphi_{c''}$$

Assumendo positive le rotazioni antiorarie e supponendo che la trave sia di sezione costante si ha:

$$(M_0 - 2M_C) \frac{l_1}{6EJ} = \frac{M_C l_2}{3EJ}$$

da cui:

$$M_C = M_0 \frac{l_1}{2(l_1 + l_2)}$$

(in particolare se $l_1 = l_2$ risulta $M_C = \frac{M_0}{4}$).

Le reazioni dei vincoli esterni hanno il senso di fig. 8.3 e valgono:

$$V_A = \frac{M_0 + M_C}{l_1}$$

$$V_B = \frac{M_C}{l_2}$$

$$V_C = V_A + V_B$$

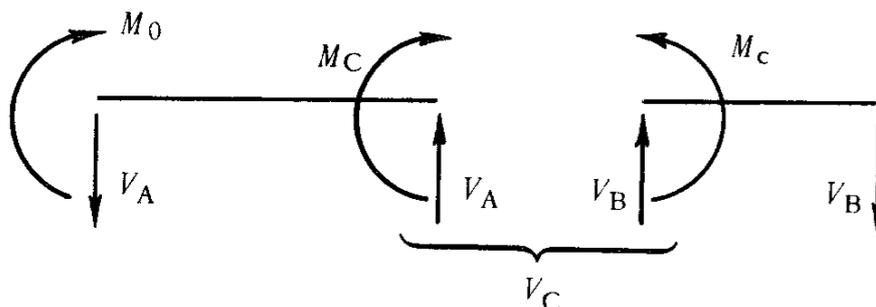


Fig. 8.3

Diagramma T. - Ha valore costante, V_A e V_B , nelle due campate.

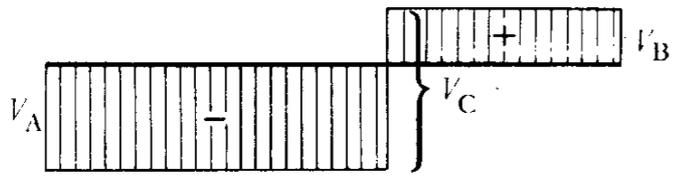
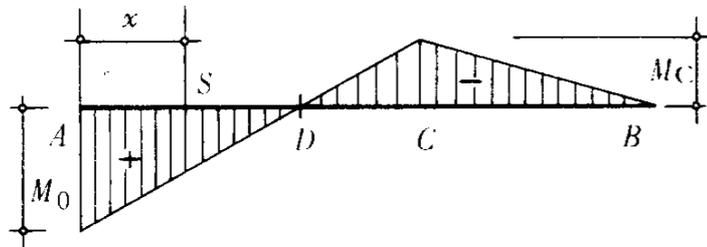


Diagramma M (portato con le ordinate dalla parte delle fibre tese). - Ha andamento lineare:



$$M_S = M_0 - V_A \cdot x$$

Deformata. - E una curva del 3° ordine

$$\eta'' = -\frac{M}{EJ}$$

Nella sezione D , corrispondente all'invertirsi del segno del momento, si ha un flesso.

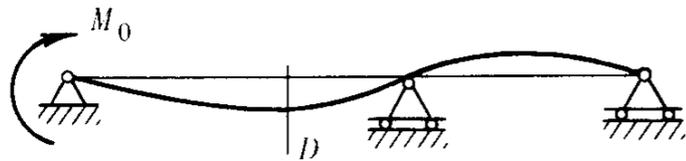


Fig. 8.4

9. - Risolvere la trave continua di fig. 9.1, soggetta a carico triangolare sulle ultime due luci.

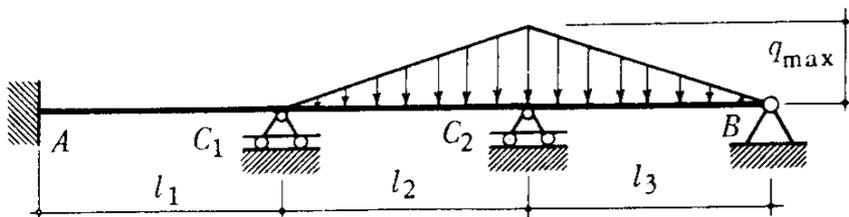


Fig. 9.1

La struttura è quattro volte iperstatica; tre sole volte staticamente indeterminata (non esistono componenti orizzontali delle reazioni).

Sopprimiamo la solidarietà angolare in corrispondenza delle sezioni C_1 e C_2 sugli appoggi intermedi e introduciamo le coppie mutue incognite M_1 e M_2 , che hanno prevedibilmente il senso indicato in fig. 9.2 (è segnata con tratteggio la deformata delle due campate indipendenti C_1C_2 e C_2B provocata dai soli carichi).

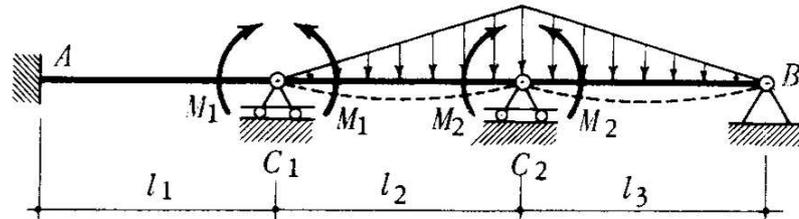


Fig. 9.2

La struttura principale così assunta risulta ancora una volta iperstatica; tuttavia il regime statico della prima campata è noto (trave ad incastro-appoggio soggetta ad una coppia applicata all'estremo), per cui non si procede ad ulteriori svincolamenti. Non è infatti necessario ricondursi ad una struttura principale isostatica; quando è possibile, è lecito adottare una struttura principale iperstatica, purché di funzionamento noto, col vantaggio di ridurre il numero delle incognite e delle condizioni di congruenza necessarie alla risoluzione del problema.

Nel nostro caso si può mantenere l'incastro in A ed esplicitare le due sole incognite M_1 e M_2 .

Le condizioni di congruenza sono:

$$\begin{cases} \varphi_{C_1 \text{ sinistra}} = \varphi_{C_1 \text{ destra}} \\ \varphi_{C_2 \text{ sinistra}} = \varphi_{C_2 \text{ destra}}. \end{cases}$$

Nell'ipotesi che la trave continua sia a sezione costante e assumendo positive le rotazioni di senso orario si ha:

$$\begin{cases} \frac{M_1 l_1}{4EJ} = \frac{7 q_{\max} l_2^3}{360 EJ} - \frac{l_2}{6 EJ} (2M_1 + M_2) \\ -\frac{8 q_{\max} l_2^3}{360 EJ} + \frac{l_2}{6 EJ} (M_1 + 2M_2) = \frac{8 q_{\max} l_3^3}{360 EJ} - \frac{M_2 l_3}{3 EJ} \end{cases}$$

Ponendo:

$$\gamma_1 = \frac{l_1}{l_2} \quad \gamma_2 = \frac{l_3}{l_2}$$

si ricava: :

$$M_1 = \frac{q_{\max} l_2^2}{30} \left(\frac{3 - 4\gamma_2^3 + 7\gamma_2}{3 + 3\gamma_1 + 4\gamma_2 + 3\gamma_1\gamma_2} \right)$$

$$M_2 = \frac{7q_{\max} l_2^2}{60} \left[1 - \frac{4 + 3\gamma_1}{7} \cdot \frac{3 - 4\gamma_2^3 + 7\gamma_2}{3 + 3\gamma_1 + 4\gamma_2 + 3\gamma_1\gamma_2} \right]$$

È ora possibile ricavare il taglio immediatamente prima e dopo gli appoggi e il valore complessivo delle reazioni, mediante semplici equazioni d'equilibrio (fig. 9.3).

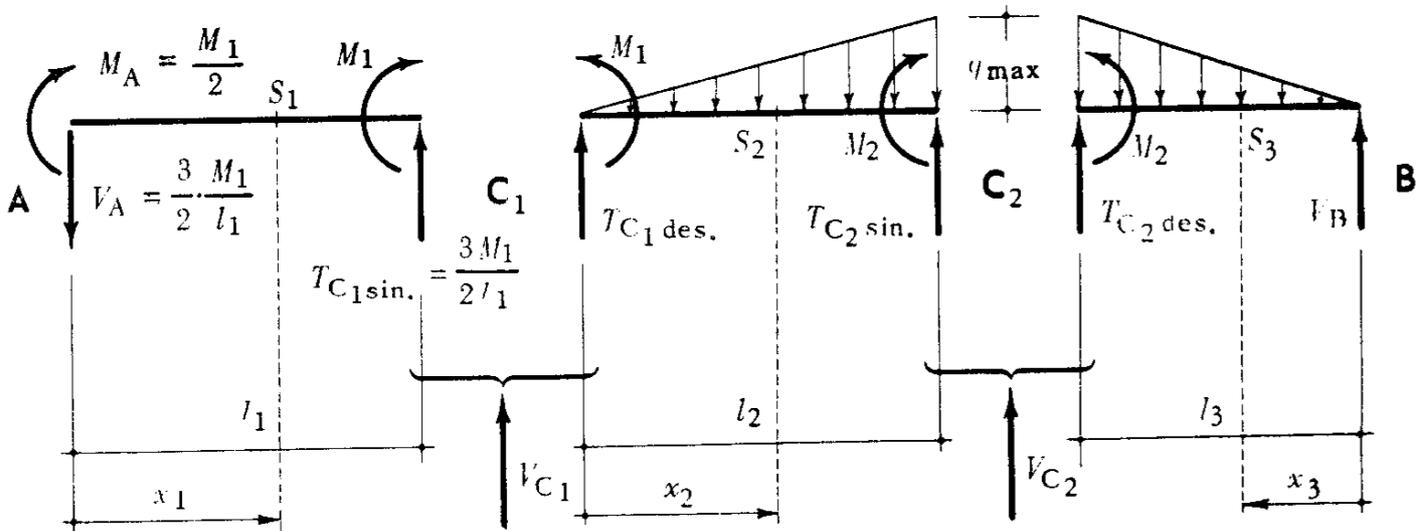


Fig. 9.3

Per la trave AC_1 , staticamente nota, si conosce (con i sensi indicati):

$$M_A = \frac{M_1}{2}; \quad V_A = T_{C_1 \sin.} = \frac{3 M_1}{2 l_1}.$$

Equilibrio alla rotazione dell'asta C_1C_2 attorno a C_2 :

$$T_{C_1 \text{ des.}} \cdot l_2 - \frac{q_{\max} \cdot l_2^2}{6} - (M_1 - M_2) = 0.$$

$$T_{G_1 \text{ des.}} = \frac{q_{\max} \cdot l_2}{6} + \frac{M_1 - M_2}{l_2}.$$

Equilibrio dell'asta C_1C_2 alla rotazione attorno a C_1 :

$$T_{C_2 \text{ sin.}} \cdot l_2 - \frac{q_{\max} \cdot l_2^2}{3} - (M_2 - M_1) = 0.$$

$$T_{C_2 \text{ sin.}} = \frac{q_{\max} \cdot l_2}{3} + \frac{M_2 - M_1}{l_2}.$$

Equilibrio alla rotazione dell'asta C_2B attorno a B :

$$T_{C_2 \text{ des.}} \cdot l_3 - \frac{q_{\max} \cdot l_3^2}{3} - M_2 = 0.$$

$$T_{C_2 \text{ des.}} = \frac{q_{\max} \cdot l_3}{3} + \frac{M_2}{l_3}.$$

Equilibrio alla rotazione dell'asta C_2B attorno a C_2 :

$$V_B \cdot l_3 - \frac{q_{\max} \cdot l_3^2}{6} + M_2 = 0.$$

$$V_B = \frac{q_{\max} \cdot l_3}{6} - \frac{M_2}{l_3}.$$

Inoltre si ha:

$$V_{C_1} = \left| T_{C_1 \text{ sin.}} \right| + \left| T_{C_1 \text{ des.}} \right|$$

$$V_{C_2} = \left| T_{C_2 \text{ sin.}} \right| + \left| T_{C_2 \text{ des.}} \right|.$$

RISOLUZIONE NUMERICA E CALCOLO DI RESISTENZA.

Si abbia:

$$l_1 = 6,00 \text{ m}; \quad l_2 = l_3 = 5,00 \text{ m}; \quad q_{\max} = 2000 \text{ kg/m.}$$

Si ottiene:

$$M_1 = 704 \text{ kgm}; \quad M_2 = 3160 \text{ kgm}; \quad V_A = 175 \text{ kg}; \quad V_B = 1035 \text{ kg}$$

$$T_{C_1 \text{ sin.}} = 175 \text{ kg}; \quad T_{C_1 \text{ des.}} = 1255 \text{ kg}; \quad V_{C_1} = 1430 \text{ kg}$$

$$T_{C_2 \text{ sin.}} = 3745 \text{ kg}; \quad T_{C_2 \text{ des.}} = 3965 \text{ kg}; \quad V_{C_2} = 7710 \text{ kg.}$$

Tutte le reazioni risultano con segno positivo, il che significa che si sono previsti per esse i sensi esatti.

- Nella campata AC_1

$$\text{per } x = \frac{l_1}{3} = 2,00 \text{ m} \quad \text{è} \quad M = 0 \quad (\text{flesso}).$$

- Nella campata C_1C_2 in corrispondenza della sezione di ascissa

$$x_2 = \sqrt{\frac{2 l_2 \cdot T_{C_1 \text{ des.}}}{q_{\max}}} = 2,50 \text{ m} \quad \text{è} \quad T = 0$$

e

$$M = M_{\max. \text{ pos.}} = \frac{2}{3} x_2 \cdot T_{C_1 \text{ des.}} - M_1 = 1380 \text{ kgm.}$$

Inoltre è

$$M(x) = \frac{q_{\max} x_2^3}{6 l_2} - T_{C_1 \text{ des.}} \cdot x_2 + M_1 = 0$$

$$\text{per } x_2' = 0,57 \text{ m} \quad \text{e} \quad x_2'' = 4,03 \text{ m} \quad (\text{flessi}).$$

- Nella campata C_2B in corrispondenza della sezione di ascissa:

$$x_3 = \sqrt{\frac{2 l_3 \cdot V_B}{q_{\max}}} = 2,30 \text{ m} \quad \text{è} \quad T = 0$$

e

$$M = M_{\max \text{ pos.}} = \frac{2}{3} x_3 V_B = 1595 \text{ kgm.}$$

Inoltre per

$$x'_3 = \sqrt{\frac{6 l_3 \cdot V_B}{q_{\max}}} = 3,93 \text{ m} \quad \text{è} \quad M = 0.$$

Per il calcolo di resistenza valgono le considerazioni svolte nell'esercizio 7. Si voglia adottare un profilato I PN con $K_F = 1600 \text{ kg/cm}^2$; eseguendo un calcolo di progetto per la sezione sull'appoggio C_2 , che è la più sollecitata dell'intera struttura, si ha:

$$W = \frac{M_2}{K_F} = \frac{316\,000}{1600} = 198 \text{ cm}^3.$$

Il profilato I PN 20 ha le caratteristiche:

$$A = 33,4 \text{ cm}^2; \quad J = 2142 \text{ cm}^4; \quad W = 214 \text{ cm}^3$$

e soddisfa le condizioni di resistenza richieste.

DIAGRAMMI DELLE AZIONI INTERNE.

Diagramma T. - Il diagramma del taglio (fig. 9.4) è costante, negativo nella prima campata, e varia con legge parabolica nelle altre due.

In particolare nella seconda campata parte con tangente orizzontale da C_1 ($q = 0$) ed ha tangente con inclinazione crescente e concavità rivolta verso il basso fino a C_2 . Lo stesso accade nella terza campata

ma con concavità rivolta verso l'alto (tangente in B orizzontale e crescente procedendo verso C_2). In C_2 i due archi di parabola hanno la tangente con la stessa inclinazione perché q non è discontinuo sull'appoggio.

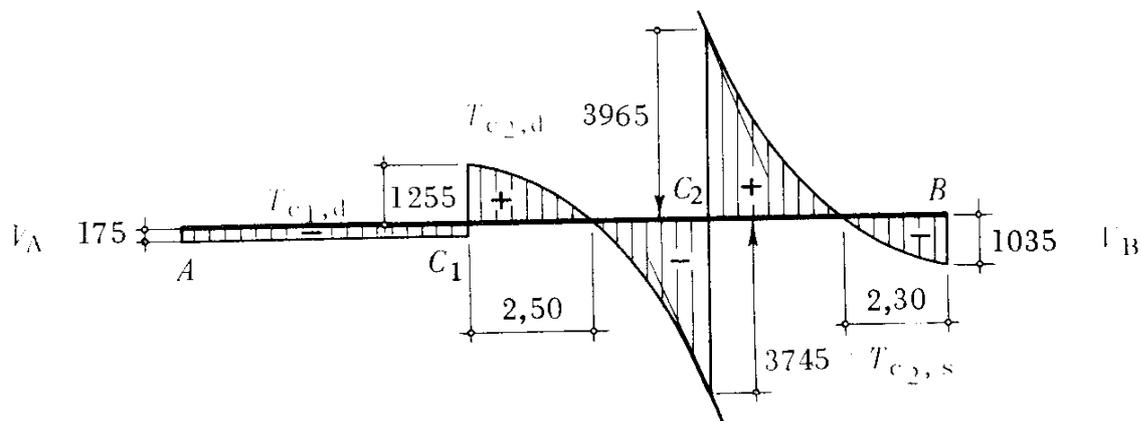


Fig. 9.4

Diagramma M. - Il diagramma del momento (fig. 9.5) varia linearmente nella prima campata e con legge parabolica del 3° ordine nelle altre due.

Sono indicati i punti di M_{max} e $M = 0$.

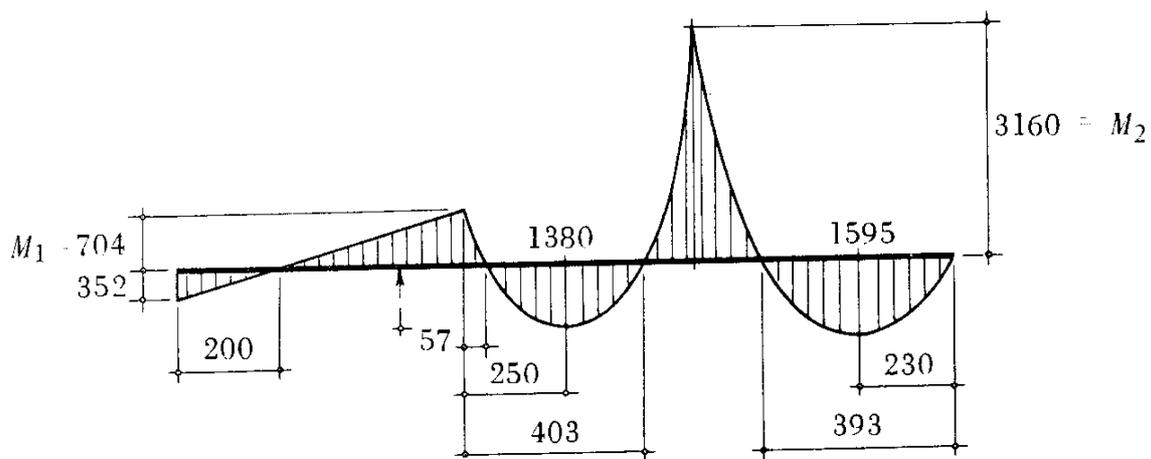


Fig. 9.5

CONSIDERAZIONI SULLA LINEA ELASTICA.

È possibile valutare facilmente la rotazione delle due sezioni in corrispondenza degli appoggi intermedi C_1 e C_2 . Pensiamo di interrompere la continuità materiale in corrispondenza della sezione sull'appoggio C_1 ed esplicitiamo l'azione mutua interna M_1 , già nota.

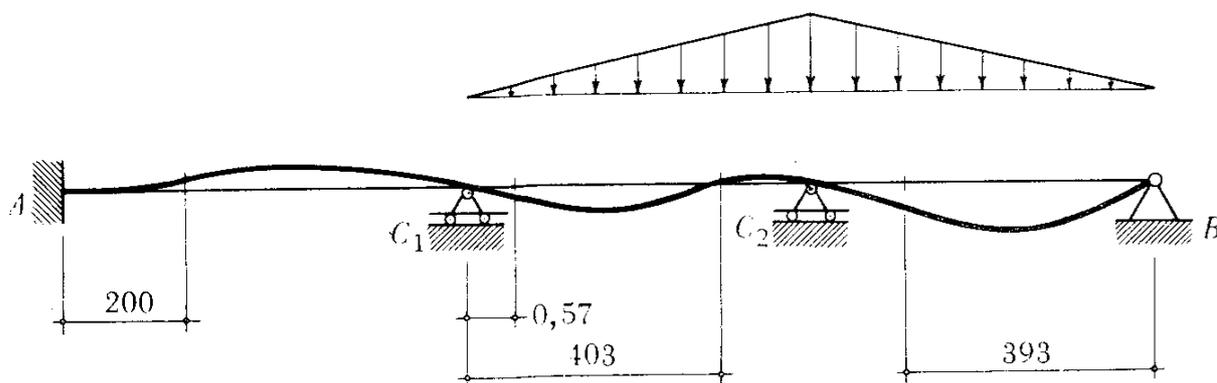


Fig. 9.6

La trave a due campate C_1C_2B , nel nostro caso particolare, è simmetrica ($l_2 = l_3$) e soggetta a carico esterno q pure simmetrico; quindi la rotazione sull'appoggio C_2 è provocata solamente dalla coppia M_1 (fig. 9.7). Essa si ottiene determinando l'azione interna M_2' incognita nel-

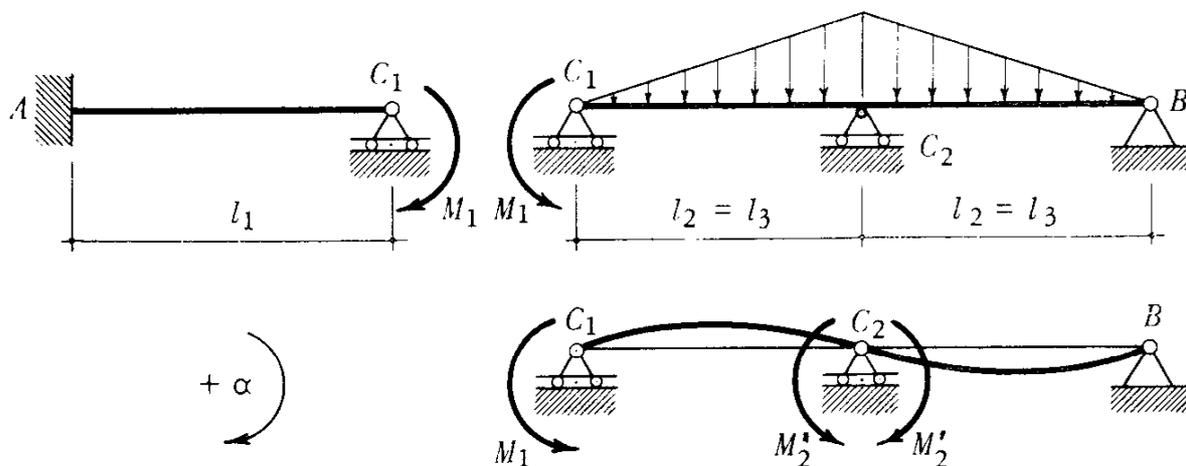


Fig. 9.7

la trave C_1C_2B , una volta iperstatica, soggetta alla sola M_1 , in base alla condizione di congruenza:

$$\varphi_{C_2 \text{ sin.}} = \varphi_{C_2 \text{ des.}}$$

cioè:

$$(M_1 - 2M'_2) \frac{l_2}{6EJ} = \frac{M'_2 l_2}{3EJ} \quad M'_2 = \frac{M_1}{4}.$$

Quindi

$$\varphi_{C_2} = \frac{\left(\frac{M_1}{4}\right) l_2}{3EJ} = \frac{316\,000 \cdot 500}{12 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 2142} = 0,0029 \text{ rad.}$$

ed avviene evidentemente in senso orario.

Per quanto riguarda la rotazione della sezione C_1 essa si ottiene considerando la trave AC_1 ad appoggio e incastro (fig. 9.7):

$$\varphi_{C_1} = \frac{M_1 l_1}{4EJ} = \frac{316\,000 \cdot 600}{4 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 2142} = 0,0105 \text{ rad.}$$

ed avviene anch'essa in senso orario.

TRAVE CONTINUA A TRE CAMPATE EGUALI: casi semplici importanti.

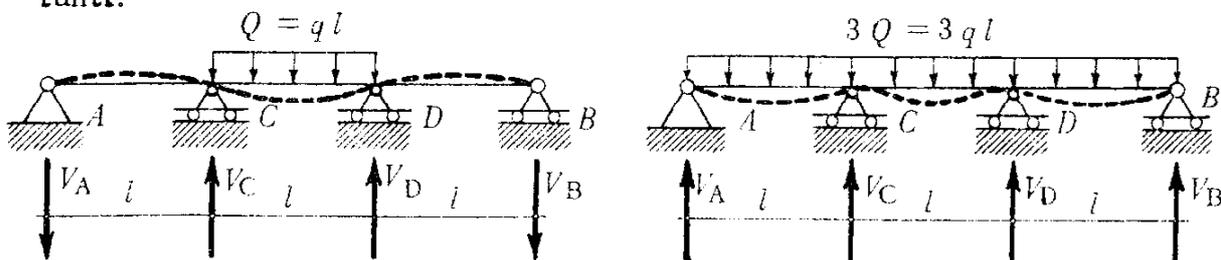
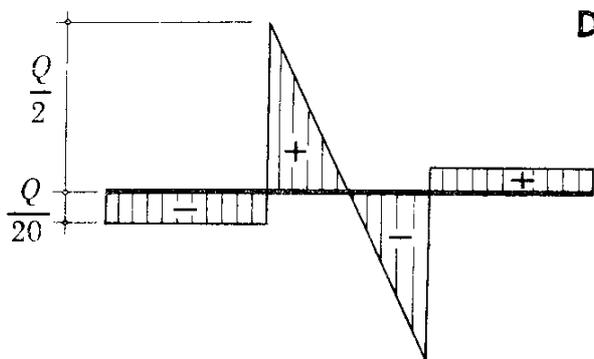
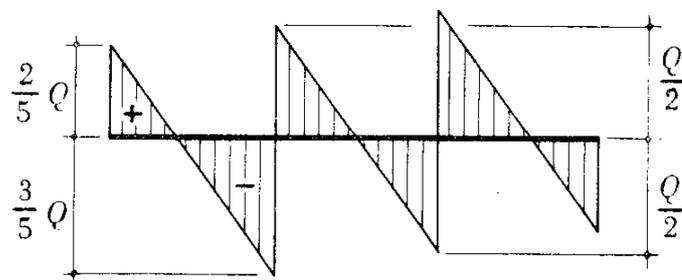


Diagramma T



$$V_A = V_B = -\frac{Q}{20}$$

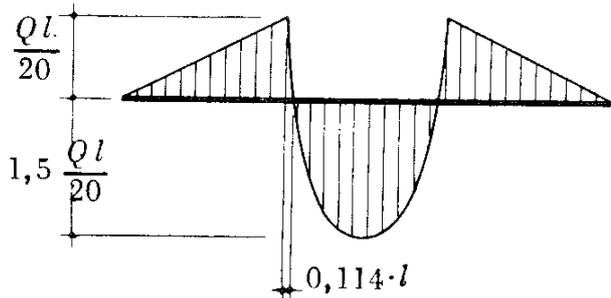
$$V_C = V_D = +\frac{11}{20} Q$$



$$V_A = V_B = +\frac{2}{5} Q$$

$$V_C = V_D = +\frac{11}{10} Q$$

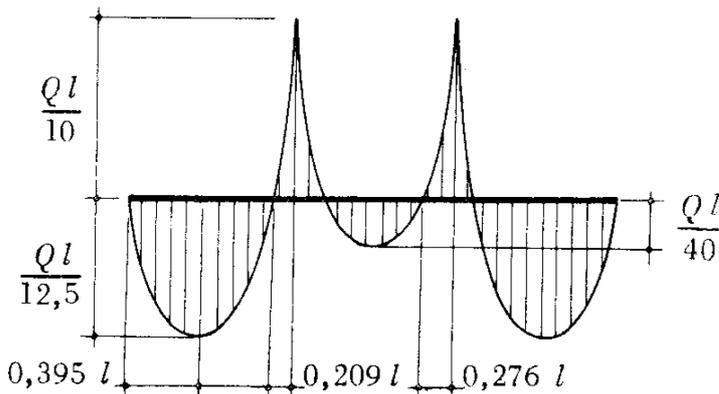
Diagramma M



$$M_C = M_D = \frac{Ql}{20}$$

$$M_{\max \text{ pos.}} = M_{1/2 (A-B)} =$$

$$= \frac{Ql}{8} - \frac{Ql}{20} = 1,5 \frac{Ql}{20}$$



$$M_C = M_D = \frac{Ql}{10}$$

$$M_{\max \text{ pos.}} = \frac{Ql}{12,5}$$

$$M_{1/2 (C-D)} = \frac{Ql}{40}$$