

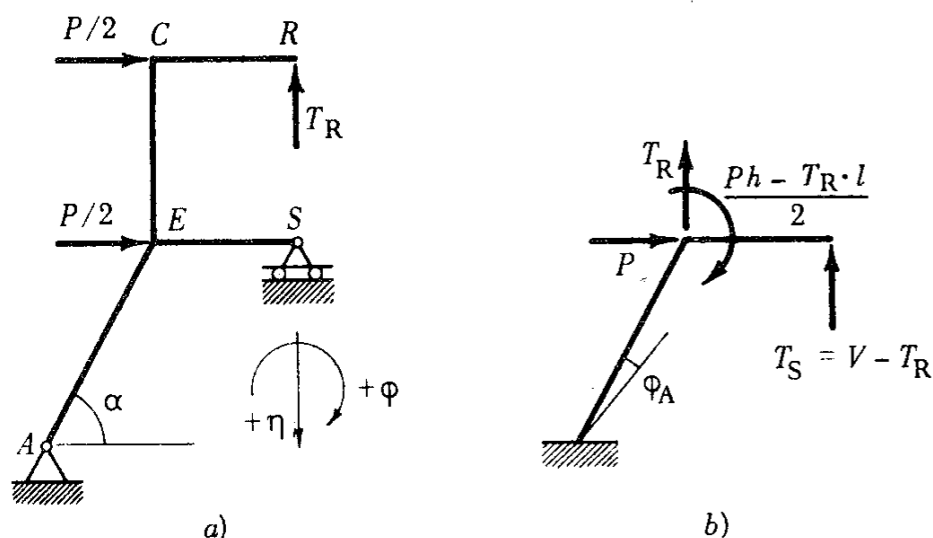


Fig. 43.3

cizio 18 (fig. 43.3, b). Calcoliamo dapprima i movimenti relativi di E rispetto ad A supponendo la trave libera in S (ed ivi soggetta alla reazione $T_S = V - T_R$) e incastrata in A ; poi, a deformazione avvenuta, sblocciamo l'incastro fittizio e annulliamo lo spostamento verticale η_S , compiuto da S nella fase elastica, mediante un moto di rotazione rigida $\bar{\varphi}_A$ attorno ad A . Valutiamo i movimenti compiuti da E in questa seconda fase e li sommiamo alle precedenti quantità dovute alla deformazione elastica.

Si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_S = \eta_E + \varphi_E \frac{l}{2} + \bar{\varphi}_A \frac{l_1}{2} - \frac{T_S \left(\frac{l}{2} \right)^3}{3 EJ} = 0 \\ \varphi_E = \left(\frac{Ph - (T_R + T_S)l}{2} \right) \frac{h_1}{EJ \sin \alpha} + \\ \quad + \frac{[P \sin \alpha - (T_R + T_S) \cos \alpha]}{2 EJ} \left(\frac{h_1}{\sin \alpha} \right)^2 + \bar{\varphi}_A \\ \eta_E = \frac{[Ph - (T_R + T_S)l]}{4 EJ} \left(\frac{h_1}{\sin \alpha} \right)^2 \cos \alpha + \\ \quad + \frac{[P \sin \alpha - (T_R + T_S) \cos \alpha]}{3 EJ} \left(\frac{h_1}{\sin \alpha} \right)^3 \cos \alpha + \bar{\varphi}_A \frac{l_1 - l}{2} \end{array} \right.$$

Risolviamo per $\bar{\varphi}_A$ la prima equazione e sostituiamone l'espressione nella seconda e terza equazione. Ricordando inoltre che è $T_R + T_S = V$ si ottiene:

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_E \left(1 + \frac{l}{l_1} \right) + \eta_E \frac{2}{l_1} &= \frac{(Ph - Vl) h_1}{2 EJ \sin \alpha} + \\ &+ \frac{(P \sin \alpha - V \cos \alpha) h_1^2}{2 EJ \sin^2 \alpha} + \frac{T_S l^3}{12 EJ l_1} \\ \varphi_E \frac{(l_1 - l) l}{2 l_1} + \eta_E \left(1 + \frac{l_1 - l}{l_1} \right) &= \frac{(Ph - Vl) h_1^2 \cos \alpha}{4 EJ \sin^2 \alpha} + \\ &+ \frac{(P \sin \alpha - V \cos \alpha) h_1^3 \cos \alpha}{3 EJ \sin^3 \alpha} + \frac{T_S l^3 (l_1 - l)}{24 EJ l_1} \end{aligned} \right.$$

Basta ora associare queste due equazioni a quella d'equilibrio $T_R + T_S = V$ e a quella di congruenza $\eta_R = 0$. Si ottiene un sistema che dovrà risolversi rispetto alle incognite T_R e T_S .

Come si vede il metodo cinematico ora esposto risulta particolarmente laborioso; infatti la determinazione di T_R e T_S richiede anche il calcolo di spostamenti e rotazioni quali η_E e φ_E . Pertanto in casi analoghi al presente esercizio è senz'altro preferibile applicare il principio dei lavori virtuali o uno dei teoremi sul lavoro di deformazione, che prescindono dai movimenti dei nodi della struttura e non introducono nel procedimento risolutivo ulteriori incognite.

Riportiamo in fig. 43.4, *a*, *b*, *c*, *d*:

a) la costruzione grafica per la determinazione delle reazioni dei vincoli. Per antisimmetria R_A ed R_B sono eguali ed egualmente inclinate e le loro rette d'azione si incontrano sull'asse $y-y$ nel punto di mezzo del segmento RS , poiché la loro risultante equilibra il sistema di carichi esterni $2P$;

b) il diagramma del momento flettente. Nelle travi orizzontali i punti di momento nullo cadono nelle sezioni R ed S sull'asse d'antisimmetria. È facile prevedere come anche lungo i piedritti EC ed FD si abbia un punto di momento nullo;

c) la deformata del telaio $ECDF$ qualora fosse sottoposto all'azione del carico orizzontale P in C , e fosse semplicemente incernierato in E e in F .

Esso però è solidalmente vincolato al telaio inferiore $AEFB$, la cui rigidezza dà luogo ad un incastro di tipo elastico ed a coppie di reazione M_{EC} , aventi il senso di figura, giacché la parte inferiore della struttura limita e contrasta la libera deformazione della parte superiore.

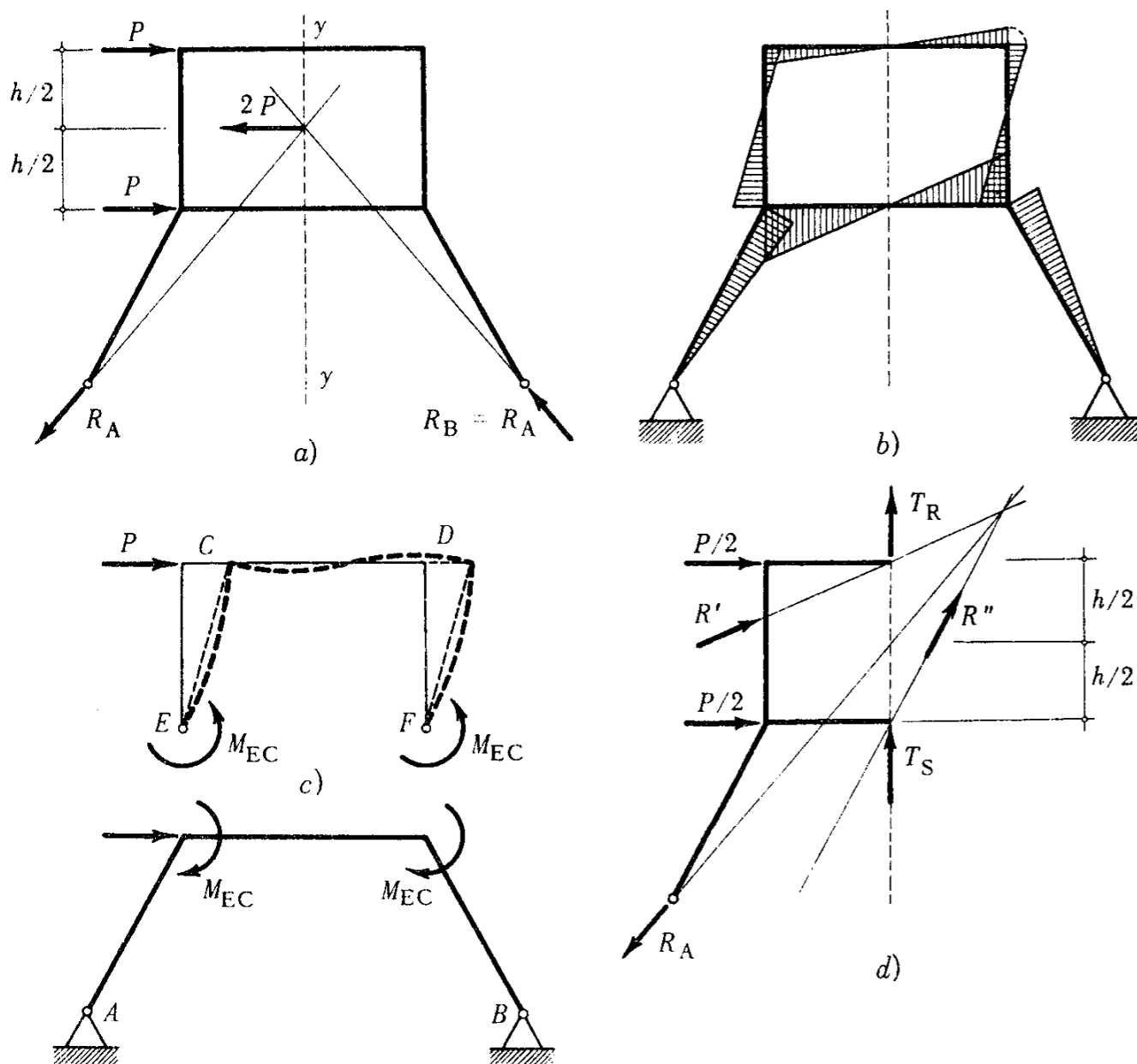


Fig. 43.4

d) la curva delle pressioni. Essa è il poligono delle successive risultanti delle azioni interne. Per la struttura chiusa si ottiene sezionando i punti in cui le azioni interne sono note (nel nostro caso in R e in S ove valgono T_R e T_S). Poiché sulla struttura agiscono solo carichi concentrati la curva delle pressioni è costituita da tratti rettilinei; più precisamente: dalla retta d'azione delle reazioni delle cerniere per i piedritti AE e BF ; dall'asse $y-y$ d'antisimmetria per le travi CD ed EF ; dalla retta d'azione della risultante R' di $P/2$ e di T_S per i piedritti superiori EC ed FD . La R'' indicata in figura rappresenta la risultante di $P/2$ e T_S ed incontra la R_A e la R' nel loro punto comune.

* * *

44. - Risolvere la struttura chiusa di fig. 44.1, soggetta a pressione radiale uniforme su tutto il quadrante CB , e al carico concentrato $pR\sqrt{2}$ applicato in O , inclinato di 45° .

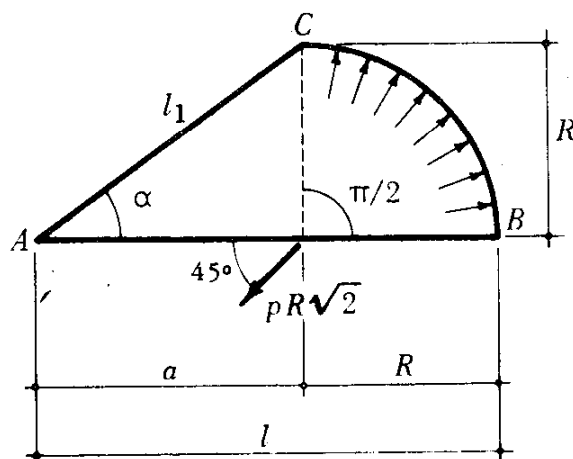


Fig. 44.1

La struttura non è vincolata all'esterno, ma è soggetta ad un sistema di carichi equilibrato. All'interno essa è tre volte iperstatica e tre volte staticamente indeterminata.

La curva delle pressioni si discosta sicuramente dall'asse geo-

metrico della struttura ed è pertanto lecito trascurare, nella risoluzione del problema iperstatico, la deformazione assiale in confronto a quella provocata dal momento flettente. Tuttavia i nodi A , B e C compiono egualmente degli spostamenti relativi, per effetto della deformazione flessionale dell'arco e delle aste.

Lo svincolamento che sopprime la solidarietà a rotazione delle aste nei nodi ed esplicita quali incognite i momenti mutui M_A , M_B ed M_C (fig. 44.2), comporterebbe ovviamente l'imposizione delle seguenti equazioni di congruenza:

$$\begin{cases} \Delta \varphi_A = 0 \\ \Delta \varphi_B = 0 \\ \Delta \varphi_C = 0. \end{cases}$$

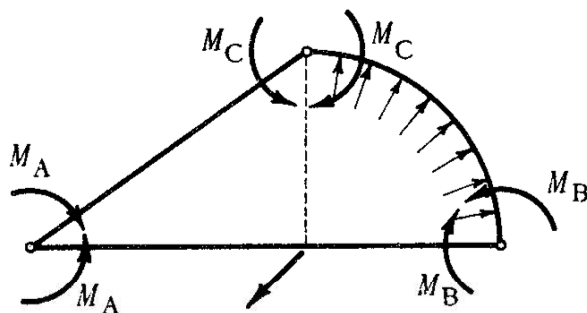


Fig. 44.2

La rotazione delle sezioni delle aste all'attacco con le cerniere è però influenzata anche dagli spostamenti relativi dei nodi, e pertanto riesce poco agevole procedere per questa via con metodo cinematico.

È preferibile procedere ad un sezionamento totale della struttura in un suo punto (di preferenza un vertice) e bloccare con un incastro una delle due facce determinate dal taglio, riferendo ad essa i movimenti dell'altra faccia, completamente svincolata e soggetta alle azioni mutue interne esplicitate. In tal modo la struttura principale è una mensole (ad asse spezzato o curvilineo); il regime statico generato in essa dai carichi esterni si allontana molto da quello effettivo esistente nella

struttura iperstatica assegnata (vedi esercizio 7) però la scrittura delle equazioni di congruenza risulta concettualmente più semplice e spedita.

La configurazione assunta dalla struttura principale differisce da quella effettiva dei movimenti del punto che è stato fissato nel piano e preso come origine del sistema di riferimento. È però possibile realizzare la completa coincidenza dei due casi mediante moti rigidi che non influenzano la risoluzione del problema iperstatico.

Tagliamo in C e incastriamo la sezione terminale dell'asta AC (fig. 44.3-a). Poiché le due facce C_1 e C_2 non compiono movimenti relativi, le equazioni di congruenza sono:

$$\begin{cases} \varphi_{C_2} = 0 \\ \xi_{C_2} = 0 \\ \eta_{C_2} = 0. \end{cases}$$

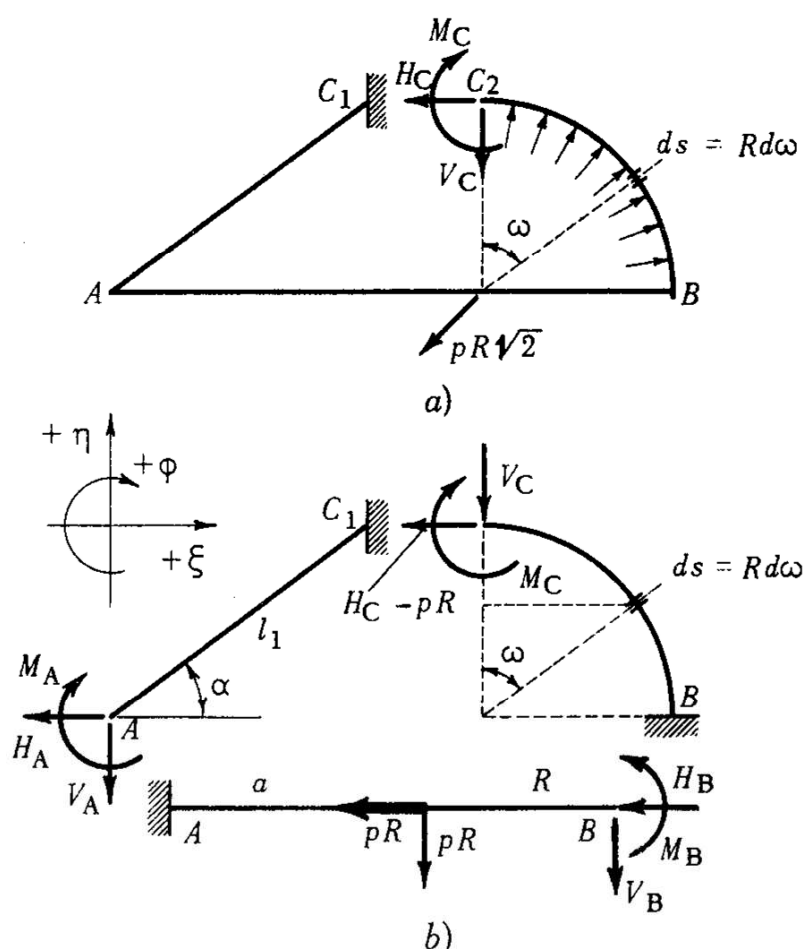


Fig. 44.3

Componendo cinematicamente gli spostamenti, con i sensi positivi indicati in fig. 44.3-b) per le rotazioni e gli spostamenti, si ha:

$$\begin{cases} \varphi_{C_2} = \varphi_{C_2, B} + \varphi_{B, A} + \varphi_{A, C_1} = 0 \\ \xi_{C_2} = \xi_{C_2, B} + (\varphi_{B, A} + \varphi_{A, C_1}) \cdot R + \xi_{A, C_1} = 0 \\ \eta_{C_2} = \eta_{C_2, B} + \eta_{B, A} + \varphi_{B, A} \cdot R - \varphi_{A, C_1} \cdot a + \eta_{A, C_1} = 0. \end{cases}$$

Per semplificare il calcolo della determinazione degli spostamenti di C_2 rispetto a B possiamo esprimere $H_C = pR + H'$. L'aliquota pR , agente sull'arco assieme alla pressione radiale uniforme, genera solo azione interna di sforzo normale, il cui effetto deformante si trascura; è pertanto sufficiente valutare i movimenti di C_2 provocati da $H' = (H_C - pR)$ e dalle altre due azioni interne V_C ed M_C sull'arco scarico (fig. 44.3-b).

Le azioni interne in A e B sono espresse da:

$$\begin{aligned} H_B &= (H_C - pR) & H_A &= H_C \\ V_B &= V_C & V_A &= V_C + pR \\ M_B &= [(H_C - pR) + V_C] R - M_C & M_A &= -H_C R + V_C a + M_C + pR(a + R). \end{aligned}$$

Esplicitando i vari termini si ottiene il sistema la cui soluzione fornisce i valori delle tre incognite H_C , V_C ed M_C ; la loro determinazione rende noto il regime statico di tutta la struttura.

* * *

45. - Risolvere la struttura di fig. 45.1, costituita da un anello circolare, a semplice contatto con le travi superiore e inferiore, e sottoposto a pressione interna uniforme p .

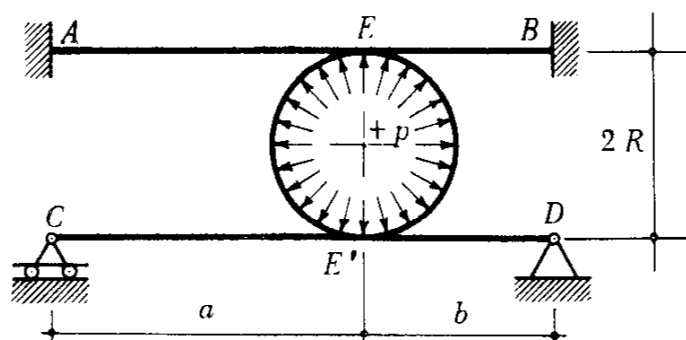


Fig. 45.1

Si studia la struttura separando le tre parti fondamentali che la compongono: le reazioni mutue X che si trasmettono i vari pezzi sono normali alle superficie di contatto, e perciò verticali. Per ragioni d'equilibrio dell'anello esse sono eguali tra di loro. Dell'anello, simmetrico e simmetricamente carico, se ne considera solo una metà, ottenuta per sezionamento secondo il diametro verticale; le azioni interne orizzontali sono staticamente determinate e valgono $H = pR$ (di trazione); le forze X si ripartiscono su ciascun semianello in due parti eguali, per ragioni di simmetria; inoltre, sempre per ragioni di simmetria, è $M_E = M_{E'} = M$ (fig. 45.2).

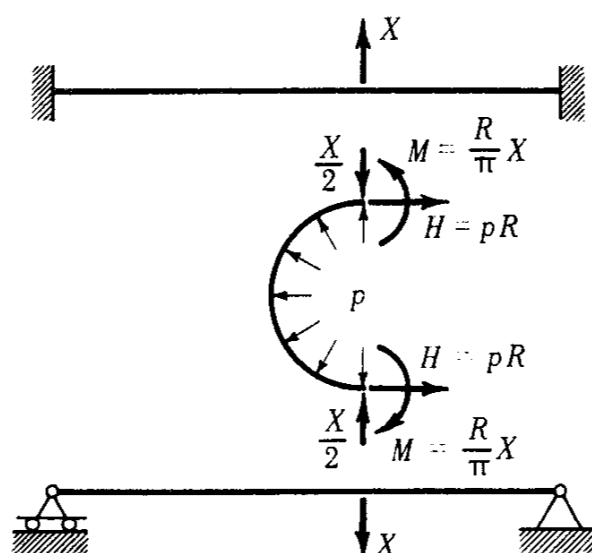


Fig. 45.2

Le sezioni E ed E' dell'anello sull'asse verticale non ruotano; se si osserva che le forze $H = pR$ e la pressione radiale p generano nel-

l'arco solo azione interna di sforzo normale (di valore costante pR), se ne deduce che anche il sistema di forze costituito dalle $X/2$ e dalle coppie M deve essere tale da non fare ruotare le due sezioni terminali dell'arco. Ne segue che, essendo l'anello di sezione costante, l'area del diagramma del momento da esse generato deve essere nulla, cioè la risultante F di $X/2$ e M è una forza baricentrica (vedi anche esercizio 39).

I momenti M sono stati quindi indicati con il verso giusto nel sezionamento e la relazione che li lega alle X è:

$$M = \left(\frac{2}{\pi} R \right) \cdot \frac{X}{2} = \frac{R}{\pi} X.$$

Pertanto l'anello è staticamente determinato in funzione delle X . Inoltre la trave CD è isostatica; se la trave AB , pur essendo iperstatica, è staticamente nota, basta imporre una sola condizione di congruenza per determinare la X quale unica incognita del problema.

La condizione di congruenza è:

$$f_{X(A, B)} + f_{X(C, D)} = \Delta d_{EE'},$$

cioè lo spostamento relativo dei due punti E ed E' pensati appartenenti alle travi è eguale alla variazione del diametro EE' dell'anello per effetto della pressione interna p e delle X .

È sufficiente limitare lo studio dell'anello ad un solo quadrante; bisogna tener conto delle deformazioni flessionali e, naturalmente, di quelle a sforzo normale, perché se il tubo non si dilatasse non sorgerebbero le X (fig. 45.3).

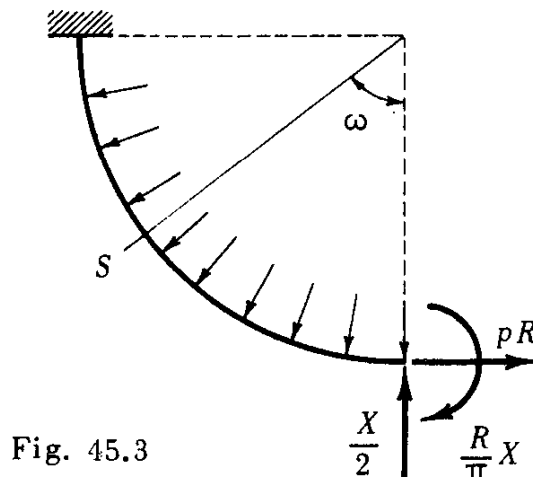


Fig. 45.3

Indicando con J_1 il momento d'inerzia (costante) della sezione retta delle travi e con J_2 il momento d'inerzia della sezione dell'anello si ha:

$$X \frac{a^3 b^3}{3 E J_1 l^3} + X \frac{a^2 b^2}{3 E J_1 l} = 2 \left[\frac{p R^2}{E A_2} + \int_0^{\pi/2} \left(\frac{R}{\pi} X - \frac{X}{2} R \sin \omega \right) \frac{R^2 \sin \omega d\omega}{E J_2} \right]$$

da cui:

$$X \cdot \left[\frac{a^2 b^2}{3 E J_1 l} \left(1 + \frac{ab}{l^2} \right) + \frac{\pi^2 - 8}{4\pi} \frac{R^3}{E J_2} \right] = \frac{2 p R^2}{E A_2}.$$

Naturalmente il valore di X dipende dalla posizione in cui è inserito il tubo tra le due travi.

Si ha il massimo valore di X quando il tubo è inserito in corrispondenza dei vincoli (ad esempio $a = 0$; $b = l$). In questo caso il tubo è vincolato tra due punti fissi e l'equazione di congruenza diviene:

$$\Delta d_{EE'} = 0 \quad \text{cioè} \quad \frac{2 p R^2}{E A_2} - \frac{\pi^2 - 8}{4\pi} \frac{X R^3}{E J_2} = 0$$

da cui:

$$X = \frac{8\pi}{\pi^2 - 8} p R \left(\frac{\rho_2}{R} \right)^2.$$

Il valore minimo di X si ha quando il tubo è inserito in corrispondenza della mezzaria delle travi ($a = b = \frac{l}{2}$), perché questa è la posizione in cui le travi, per un dato carico esterno concentrato, presentano la massima freccia.

Si ha:

$$\frac{1}{192} \frac{X l^3}{E J_1} + \frac{1}{48} \frac{X l^3}{E J_1} = \frac{2 p R^2}{E A_2} - \frac{\pi^2 - 8}{4\pi} \frac{X R^3}{E J_2}$$

da cui:

$$X \left[\frac{5}{192} \frac{l^3}{E J_1} + \frac{\pi^2 - 8}{4\pi} \frac{R^3}{E J_2} \right] = \frac{2 p R^2}{E A_2}.$$

È facile constatare come il valore di X è sempre molto piccolo rispetto all'azione di sforzo normale pR esistente nel tubo. Questo fatto si spiega osservando che la deformabilità flessionale delle travi e del tubo è molto più elevata di quella a sforzo normale del tubo stesso; basta quindi un valore di X piccolo in confronto a pR per soddisfare la condizione di congruenza.

SOLUZIONE NUMERICA E VERIFICA DI RESISTENZA.

Le due travi siano entrambe costituite da un profilato I PN 20 cm.
Caratteristiche della sezione del profilato:

$$A = 33,4 \text{ cm}; \quad J_1 = 2142 \text{ cm}^4; \quad W_1 = 214,2 \text{ cm}^3.$$

Luce delle travi:

$$l = 7,00 \text{ m};$$

inoltre sia:

$$a = 4,00 \text{ m}; \quad b = 3,00 \text{ m}.$$

L'anello sia costituito da una piastra metallica di dimensioni trasversali:

$$\text{spessore} = 4,00 \text{ cm}; \quad \text{larghezza} = 10,00 \text{ cm}.$$

Caratteristiche della sezione dell'anello:

$$A_2 = 40 \text{ cm}^2; \quad J_2 = 53,4 \text{ cm}^4; \quad W_2 = 26,7 \text{ cm}^3.$$

Raggio medio dell'anello:

$$R = 100 \text{ cm}.$$

Pressione interna:

$$p = 50 \text{ kg/cm}^2 = 500 \text{ kg/cm di circonferenza}.$$

Si assume per il materiale:

$$K_F = 1400 \text{ kg/cm}^2.$$

Sostituendo i valori numerici nell'espressione di X si ottiene:

$$X \cong 37 \text{ kg.}$$

Nel tubo le sezioni più sollecitate sono la E e la E' nelle quali si ha:

$$N = pR = 50\,000 \text{ kg}; \quad M = \frac{R}{\pi} X = 1180 \text{ kg cm.}$$

L'eccentricità della risultante delle azioni interne vale:

$$e = \frac{M}{N} = 0,024 \text{ cm.}$$

Verificando:

$$\sigma_{\max} = \frac{50\,000}{40} + \frac{1180}{26,7} = 1250 + 44 = 1294 \text{ kg/cm}^2 < K_F.$$

Le sezioni dell'anello poste in corrispondenza del diametro orizzontale sono meno sollecitate. Infatti in esse si ha:

$$N = pR; \quad M = \frac{\pi - 2}{2\pi} RX < \frac{R}{\pi} X.$$

Delle due travi la più sollecitata è quella inferiore CD , semplicemente appoggiata. Per essa si ha:

$$M_{\max} = \frac{Xab}{l} = 6350 \text{ kg cm}; \quad \sigma_{\max} = \frac{6350}{214} \cong 30 \text{ kg/cm}^2.$$

Con gli stessi valori numerici prima fissati, si ricava:

a) per anello posto in corrispondenza della mezzaria delle due travi:

$$X \cong 35,8 \text{ kg,}$$

b) per anello posto in corrispondenza delle sezioni terminali:

$$X \cong 120 \text{ kg.}$$

46. - Si seziona radialmente un anello circolare e si inserisce nel taglio una piastra d'acciaio indeformabile, a facce parallele, di spessore δ_0 (fig. 46.1). Determinare lo stato di tensione causato nell'anello dalla distorsione.

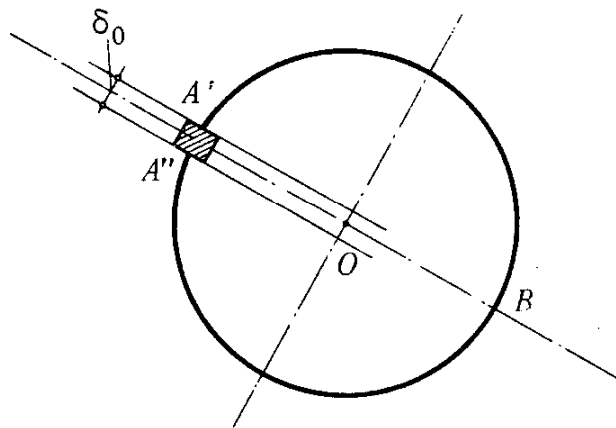


Fig. 46.1

Il problema proposto corrisponde alla determinazione del sistema d'azioni mutue che, applicate direttamente alle facce dell'anello A' e A'' , definite dal taglio, genera in esse gli stessi spostamenti relativi prodotti dall'inserimento della piastra.

Osserviamo che vi è simmetria rispetto al diametro AB , e tutto avviene come se ciascuna delle due facce traslasse di $\frac{\delta_0}{2}$ normalmente all'asse di simmetria. Pertanto esistono solo le azioni mutue N_A ed M_A , ed è nullo lo sforzo tagliante (fig. 46.2).

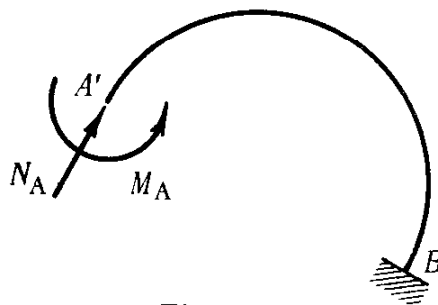


Fig. 46.2

Limitiamo il nostro studio a metà anello, incastrato in B , giacché questa sezione, posta sull'asse di simmetria, non ruota, e libero in A' , ed ivi soggetto alle N_A ed M_A incognite.

Le condizioni di congruenza da imporre sono:

$$\begin{cases} \varphi_{A'} = 0 \\ \xi_{A'} = \frac{\delta_0}{2} \end{cases}.$$

Il senso delle incognite iperstatiche è facilmente prevedibile se si tiene presente l'origine del problema: N_A comprime la sezione A' , M_A è antiorario perché deve annullare la rotazione oraria che N_A tende a generare in A' .

Con ragionamento analogo a quello svolto nell'esercizio 39, si può osservare che, poiché la sezione A' non ruota, e la struttura ha sezione costante, è nulla l'area del diagramma del momento flettente relativo al semianello. Pertanto la risultante di N_A ed M_A , essendo l'unica forza agente, ha retta d'azione passante per il baricentro G della struttura principale, ed anche per il centro O dell'intero anello (fig. 46.3).

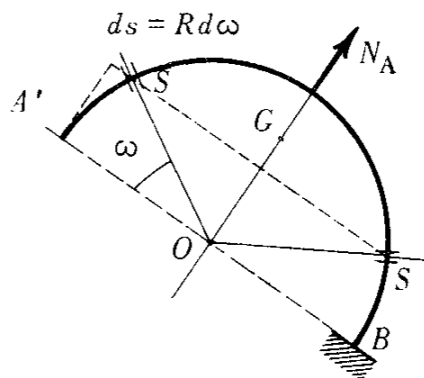


Fig. 46.3

Quindi è:

$$M_A = N_A \cdot R.$$

Per determinare il valore di N_A esplicitiamo i termini della seconda equazione.

È:

$$M_S = N_A \cdot R \cos \omega$$

$$\xi'_A = \int_0^\pi N_A \cdot R \cos \omega \cdot R (1 - \cos \omega) \frac{R d\omega}{EJ} = \frac{\delta_0}{2} .$$

Si ottiene:

$$N_A = \frac{EJ}{R^3} \frac{\delta_0}{\pi} .$$

RISOLUZIONE NUMERICA E CALCOLO DI RESISTENZA.

L'anello abbia raggio $R = 50$ cm e sia costituito da una piattina d'acciaio di sezione costante, delle dimensioni: spessore = 2 cm; larghezza = 10 cm. La piastra abbia la medesima sezione dell'anello, e spessore $\delta_0 = 1,00$ cm.

Risulta:

$$N_A = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 6,67}{50^3} \frac{1}{3,14} = 35,7 \text{ kg}$$

$$M_A = 35,7 \cdot 50 = 1785 \text{ kg'cm.}$$

Le sezioni più sollecitate dell'anello sono la A (presso inflessa) e la B (tenso inflessa) in corrispondenza delle quali la $\sigma_{\max}$ in valore assoluto è:

$$\sigma_{\max} = \frac{35,7}{20} + \frac{35,7 \cdot 50}{6,67} \cong 270 \text{ kg/cm}^2 .$$

47. - Sia assegnata la trave continua di fig. 47.1. Si opera in D un sezionamento e si inserisce tra le facce del taglio un cuneo d'acciaio indeformabile, di sezione eguale a quella della trave, di spessore medio δ_0 e d'angolo al vertice φ_0 . Determinare lo stato di tensione generato nella struttura dalla distorsione.

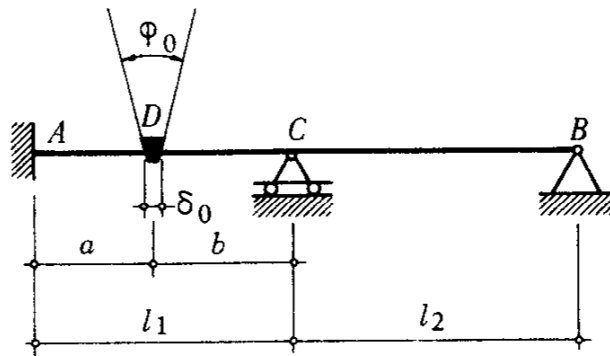


Fig. 47.1

Disinseriamo il cuneo e assumiamo come struttura principale le due travi isostatiche separate; la mensola AD' e la trave appoggiata BC con sbalzo CD'' .

La risoluzione del problema consiste nella determinazione delle azioni mutue N , T , M che applicate agli estremi liberi D' e D'' danno luogo in essi ai medesimi spostamenti relativi generati dall'introduzione del cuneo (fig. 47.2).

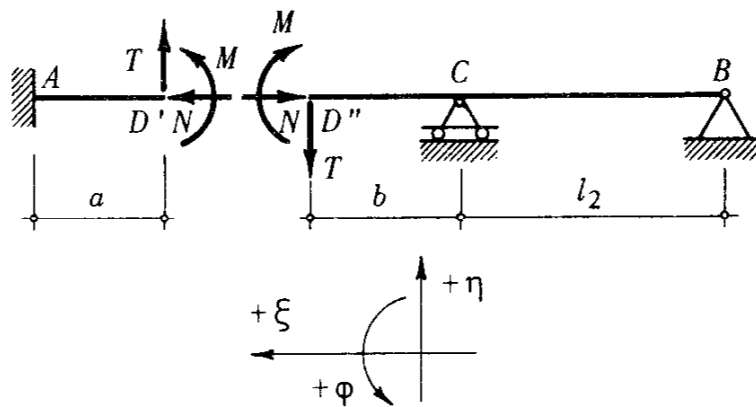


Fig. 47.2

In simboli:

$$\begin{cases} \varphi_{D'} - \varphi_{D''} = \varphi_0 \\ \eta_{D'} - \eta_{D''} = 0 \\ \xi_{D'} - \xi_{D''} = \delta_0. \end{cases}$$

La trave ACB assegnata è tre volte iperstatica e tutte e tre le azioni mutue N , T ed M sono staticamente indeterminate. Cerchiamo di prevederne il senso.

Lo sforzo normale N è indubbiamente di compressione giacché la trave continua è vincolata ai due punti fissi A e B , e la deformazione flessionale non provoca spostamenti orizzontali di D' e D'' .

- Le coppie mutue devono dare una rotazione relativa delle due facce concorde con φ_0 , ed hanno il senso indicato in fig. 47.2 (antiorario quella applicata a D' , orario quella applicata a D'').

- Se a e b hanno valori poco diversi tra di loro, lo sforzo di taglio T agisce in modo da incrementare in D' la freccia e la rotazione provocata da M , e da limitarle in D'' , giacché l'elemento a sbalzo CD'' si comporta come una mensola incastrata elasticamente in C , a differenza di AD' che è vincolata perfettamente in A . Si noti però che il senso di T dipende dal valore del rapporto $\frac{a}{b}$.

Esplicitiamo i termini delle equazioni, con i sensi positivi adottati per la rotazioni e gli spostamenti si ha:

$$\begin{cases} \left(\frac{Ma}{EJ} + \frac{Ta^2}{2EJ} \right) - \left(-\frac{(M-Tb)l_2}{3EJ} - \frac{Mb}{EJ} + \frac{Tb^2}{2EJ} \right) = \varphi_0 \\ \left(\frac{Ma^2}{2EJ} + \frac{Ta^3}{3EJ} \right) - \left(\frac{(M-Tb)l_2}{3EJ} b + \frac{Mb^2}{2EJ} - \frac{Tb^3}{3EJ} \right) = 0 \\ \frac{Na}{EA} - \left(-\frac{N(b+l_2)}{EA} \right) = \delta_0. \end{cases}$$

Se la trave continua fosse vincolata sia in C che in D con due carrelli, la parte di struttura $D''CB$ potrebbe traslare liberamente in senso orizzontale, e le azioni mutue N sarebbero evidentemente nulle.

* * *

48. - Risolvere la struttura di fig. 48.1 costituita da un anello semicircolare AB , soggetto a pressione idrostatica, incastrato in A e vincolato in B con una biella.

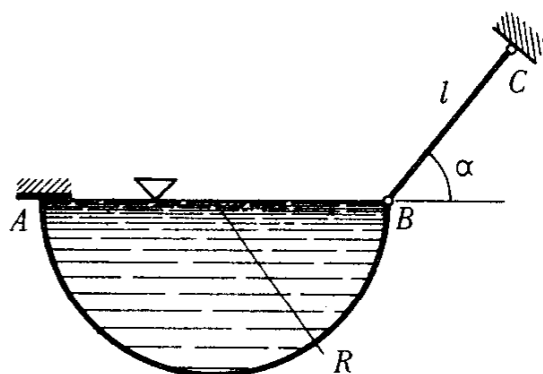


Fig. 48.1

La struttura assegnata è una volta iperstatica ed una volta staticamente indeterminata. La biella è un vincolo semplice, cedevole elasticamente in B . Separiamola dall'arco e assumiamo quale struttura principale la mensola AB soggetta alla pressione idrostatica e all'azione mutua X , che indichiamo di trazione per la biella (fig. 48.2).

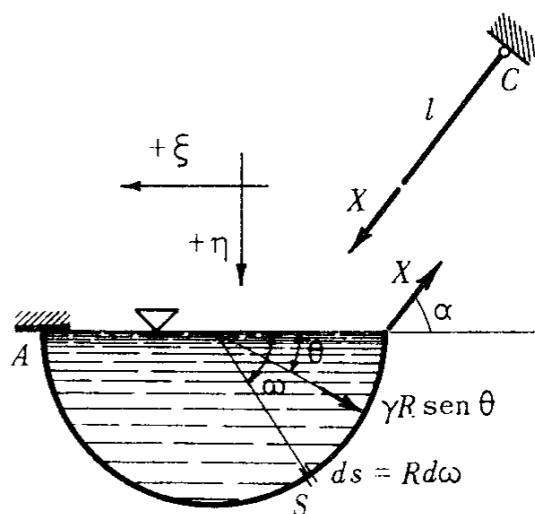


Fig. 48.2

La condizione che determina il valore di X è che l'estremo libero B della struttura principale compia nella direzione BC dell'asse della biella, definita dall'angolo α , uno spostamento eguale alla variazione di lunghezza della biella stessa (la congruenza allo spostamento di B in direzione normale ad α è soddisfatta dalla biella mediante un moto rigido di rotazione attorno a C . La rotazione relativa in B è liberamente consentita dalla cerniera interna).

Indichiamo con ξ_B ed η_B le componenti orizzontale e verticale dello spostamento dell'estremo B dell'arco con il senso prefissato per X ed i versi positivi assunti per ξ ed η , l'equazione di congruenza, in simboli, si esprime:

$$\xi_B \cdot \cos \alpha + \eta_B \cdot \sin \alpha = \frac{Xl}{E_1 A_1}.$$

Per determinare ξ_B ed η_B procediamo ad una composizione cinematica delle deformazioni elementari. Fissiamo una sezione generica S nell'arco, definita dalla variabile ω , e assumiamo positivo il momento orario M_S delle forze che seguono S :

$$\begin{aligned} M_S &= \int_0^\omega \gamma R \sin \theta \cdot R d\theta \cdot R \sin (\omega - \theta) + X \cos \alpha \cdot R \sin \omega - X \sin \alpha \cdot R (1 - \cos \omega) = \\ &= \frac{\gamma R^3}{2} (\sin^3 \omega + \sin \omega \cos^2 \omega - \omega \cos \omega) + X \cos \alpha R \sin \omega - \\ &\quad - X \sin \alpha R (1 - \cos \omega). \end{aligned}$$

Deve essere:

$$-\cos \alpha \int_0^\pi \frac{M_S \cdot ds}{EJ} R \sin \omega + \sin \alpha \int_0^\pi \frac{M_S \cdot ds}{EJ} R (1 - \cos \omega) = \frac{Xl}{E_1 A_1}.$$

Esplicitando i vari termini ed eseguendo le integrazioni si ottiene:

$$\frac{\gamma R^5}{2 EJ} \left(-\frac{3\pi}{4} \cos \alpha + \frac{16 + \pi^2}{4} \sin \alpha \right) + \frac{\lambda R^3}{EJ} \left[-\left(\frac{\pi}{2} \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha \right) + \right. \\ \left. + (2 \sin \alpha \cos \alpha - \frac{3}{2} \pi \sin^2 \alpha) \right] = \frac{\lambda l}{E_1 A_1} .$$

Da cui:

$$\lambda = \frac{\gamma R^2}{8} \cdot \frac{(16 + \pi^2) \sin \alpha - 3\pi \cos \alpha}{\left[\frac{\pi}{2} (\cos^2 \alpha + 3 \sin^2 \alpha) - 4 \sin \alpha \cos \alpha \right] + \frac{EJ}{R^3} \cdot \frac{l}{E_1 A_1}} .$$

La pressione idrostatica fa spostare l'estremo libero di:

$$\xi'_B = -\frac{3\pi}{8} \cdot \frac{\gamma R^5}{EJ} \quad (\text{verso destra})$$

$$\eta'_B = +\frac{16 + \pi^2}{8} \cdot \frac{\gamma R^5}{EJ} \quad (\text{verso il basso}).$$

La direzione dello spostamento di B dovuto alla pressione dell'acqua è definita dalla inclinazione rispetto alla verticale (fig. 48.3):

$$\beta = \arctg \frac{\xi'_B}{\eta'_B} = \arctg \frac{3\pi}{16 + \pi^2} = 20^\circ .$$

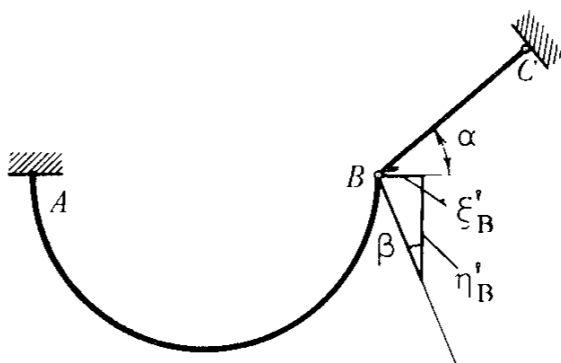


Fig. 48.3

Pertanto se è $\alpha = \beta = 20^\circ$ la pressione idrostatica fa spostare B in direzione normale a quella della biella ed è $\lambda = 0$ come risulta dall'e-

49. - Risolvere la trave continua di fig. 49.1 vincolata con tre molle A , B e C , d'eguale costante elastica k .

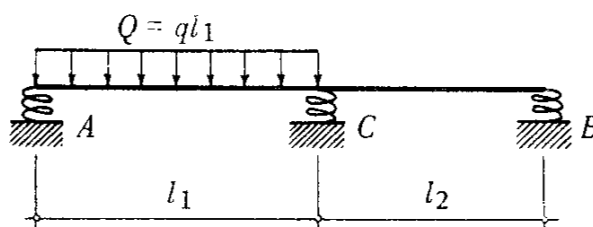


Fig. 49.1

Il collegamento tra la trave e le molle sia realizzato in modo che ciascuna di queste possa egualmente reagire a trazione e a compressione.

Operiamo lo stesso svincolamento eseguito nella trave dell'esercizio 11: introduciamo una cerniera interna in C , sopprimendo la solidarietà a rotazione in corrispondenza della sezione sull'appoggio intermedio.

La configurazione finale assunta dalla trave dipende sia dalla sua deformazione elastica, che dai cedimenti dei vincoli. Questi sono proporzionali, mediante K , alle forze $|V_A|$, $|V_B|$ e $|V_C|$ che si scaricano sulle molle.

Si può semplificare il procedimento risolutivo separando in due distinte fasi gli spostamenti compiuti dai punti dell'asse geometrico della trave:

1^a fase: mediante un moto rigido di traslazione e rotazione delle due aste AC e BC , consentiamo i cedimenti $\overline{AA'} = \delta_A$; $\overline{BB'} = \delta_B$; $\overline{CC'} = \delta_C$ (fig. 49.2). Intendiamo che A' , B' e C' siano le posizioni fi-

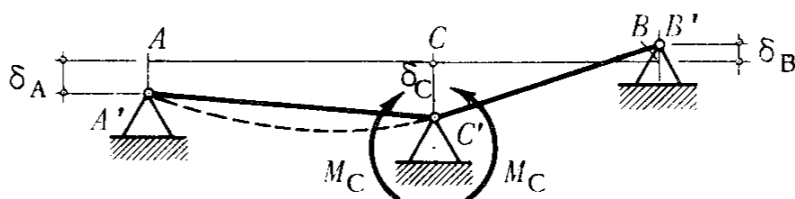


Fig. 49.2

nali assunte da A , B e C . I cedimenti avvengono senz'altro nel senso indicato in figura giacché si può facilmente prevedere che le molle A e C sono compresse e la B è tesa. È:

$$\delta_A = k V_A; \quad \delta_B = k V_B; \quad \delta_C = k V_C$$

ove V_A , V_B e V_C rappresentano le azioni trasmesse dalla trave ai vincoli (equilibranti delle reazioni);

2^a fase: consentiamo la deformazione elastica della trave principale su appoggi rigidi A' , B' , C' . Le coppie mutue M_C , esplicitate dallo svincolamento, devono assicurare il rispetto della solidarietà angolare in C , alterata sia dal moto rigido che dalla inflessione della campata AC .

La condizione di congruenza da imporre per la determinazione dell'incognita M_C è:

$$\Phi_C \text{ sinistra} = \Phi_C \text{ destra}.$$

EsPLICITIAMO i vari termini assumendo positive le rotazioni di senso antiorario. Si ottiene:

$$\frac{Q l^2}{24 E J} - \left(\frac{\delta_C - \delta_A}{l_1} \right) - \frac{M_C l_1}{3 E J} = \left(\frac{\delta_C + \delta_B}{l_2} \right) + \frac{M_C l_2}{3 E J}$$

Esprimiamo i cedimenti delle molle in funzione del carico Q e dell'incognita M_C .

$$\delta_A = K \left(\frac{Q}{2} - \frac{M_C}{l_1} \right)$$

$$\delta_B = K \frac{M_C}{l_2}$$

$$\delta_C = K \left(\frac{Q}{2} + \frac{M_C}{l_1} + \frac{M_C}{l_2} \right)$$

Sostituendo queste espressioni nell'equazione di congruenza e risolvendo per M_C , si ottiene:

$$M_C = \frac{\frac{Q l_1^2}{8} - Q \frac{3 EJ}{2 l_2} K}{l_1 + l_2 + 6 EJ K \left(\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_1 l_2} + \frac{1}{l_2^2} \right)}$$

Se è $K = 0$, cioè se la trave è vincolata ad appoggi rigidi, risulta:

$$M_C = \frac{Q l_1^2}{8 (l_1 + l_2)}.$$

Questo valore di M_C è maggiore di quello ottenuto nel caso precedente, più generale.

Infatti i cedimenti delle molle e la flessione dell'asta AC provocata da q , generano nella struttura principale variazioni di senso opposto dell'angolo in C . Di conseguenza l'incognita iperstatica M_C ha un valore inferiore a quello che le compete se la trave è vincolata ad appoggi non cedevoli, perché deve ripristinare una congruenza alterata di una minor quantità.

In particolare è:

$$M_C = 0 \quad \text{per} \quad K = \frac{l_1^2 \cdot l_2}{12 EJ}.$$

50. - Risolvere il portale $ACDB$, soggetto al carico verticale P , applicato alla sezione di mezzaria della trave, nell'ipotesi che l'incastro A subisca i cedimenti anelastici $\bar{\varphi}_A$, $\bar{\xi}_A$, $\bar{\eta}_A$, indicati in fig. 50.1.

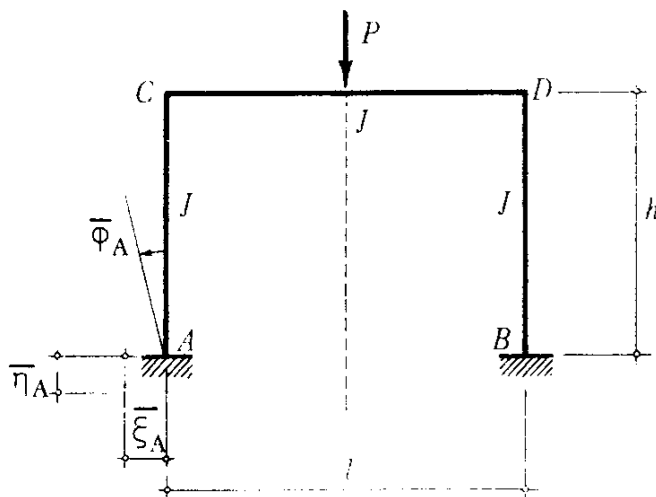


Fig. 50.1

Se è già noto il regime statico generato dal carico P nella struttura rigidamente vincolata (vedi pag. 178) si può procedere alla risoluzione del telaio soggetto al solo cedimento dell'incastro A ; successivamente sovrapponendo gli effetti si determina lo stato di tensione complessivo.

In tal modo possiamo valutare sia gli effetti specifici del cedimento, che la loro influenza sul regime statico provocato dal carico esterno.

Così semplificato il problema presenta le stesse caratteristiche degli esercizi 46 e 47.

Svincoliamo completamente il portale in A e assumiamo quale struttura principale la mensola $ACDB$, perfettamente incastrata in B . Dobbiamo determinare il valore $\bar{H}_A$, $\bar{V}_A$ e $\bar{M}_A$ delle azioni interne che applicate alla sezione A provocano gli spostamenti assegnati $\bar{\xi}_A$, $\bar{\eta}_A$ e $\bar{\varphi}_A$ (figura 50.2):

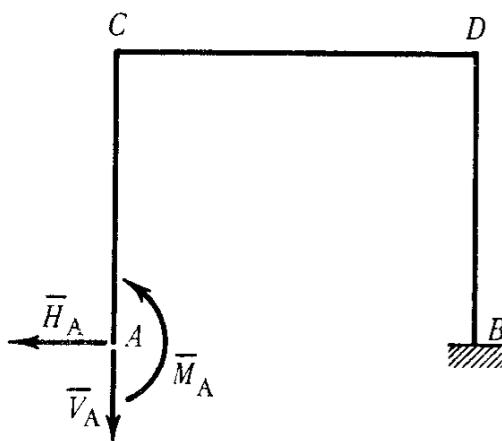


Fig. 50.2

$\bar{H}_A$, $\bar{V}_A$ e $\bar{M}_A$ sono le componenti della reazione dell'incastro, cioè le azioni trasmesse dal vincolo alla struttura.

Componiamo cinematicamente le deformazioni; con i versi prefissati per $\bar{H}_A$, $\bar{V}_A$ e $\bar{M}_A$, e assumendo quali sensi positivi degli spostamenti e delle rotazioni quelli definiti dai cedimenti, si ha, in simboli:

$$\begin{cases} \varphi_{D,B} + \varphi_{C,D} + \varphi_{A,C} = \bar{\varphi}_A \\ \xi_{D,B} - (\varphi_{D,B} + \varphi_{C,D})h + \xi_{A,C} = \bar{\xi}_A \\ \varphi_{D,B} \cdot l + \eta_{C,D} = \bar{\eta}_A \end{cases}$$

Esplicitiamo i vari termini; se il telaio ha sezione costante è:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[(\bar{M}_A + \bar{V}_A \cdot l - \bar{H}_A \cdot h) \frac{h}{EJ} + \frac{\bar{H}_A h^2}{2EJ} \right] + \left[(\bar{M}_A - \bar{H}_A \cdot h) \frac{l}{EJ} + \frac{\bar{V}_A \cdot l^2}{2EJ} \right] + \\ & \qquad \qquad \qquad + \left[\frac{\bar{M}_A \cdot h}{EJ} - \frac{\bar{H}_A \cdot h^2}{2EJ} \right] = \bar{\varphi}_A \\ & \left[(\bar{M}_A + \bar{V}_A \cdot l - \bar{H}_A \cdot h) \frac{h^2}{2EJ} + \frac{\bar{H}_A \cdot h^3}{3EJ} \right] - \left[(\bar{M}_A + \bar{V}_A \cdot l - \bar{H}_A \cdot h) \frac{h}{EJ} + \right. \\ & \qquad \qquad \qquad + \frac{\bar{H}_A \cdot h^2}{2EJ} + (\bar{M}_A - \bar{H}_A \cdot h) \frac{l}{EJ} + \frac{\bar{V}_A \cdot l^2}{2EJ} \left. \right] h + \left[\frac{\bar{H}_A \cdot h^3}{3EJ} - \frac{\bar{M}_A \cdot h^2}{2EJ} \right] = \bar{\xi}_A \\ & \left[(\bar{M}_A + \bar{V}_A \cdot l - \bar{H}_A \cdot h) \frac{h}{EJ} + \frac{\bar{H}_A \cdot h^2}{2EJ} \right] l + \left[(\bar{M}_A - \bar{H}_A \cdot h) \frac{l^2}{2EJ} + \frac{\bar{V}_A \cdot l^3}{3EJ} \right] = \bar{\eta}_A \end{aligned} \right.$$

Si ottiene il sistema risolutivo:

$$\left\{ \begin{aligned} & + \bar{M}_A (2h + l) - \bar{H}_A \cdot h (h + l) + \bar{V}_A \cdot \frac{l}{2} (2h + l) = EJ \cdot \bar{\varphi}_A \\ & - \bar{M}_A \cdot h (h + l) + \bar{H}_A \cdot h^2 \left(\frac{2}{3} h + l \right) - \bar{V}_A \cdot \frac{lh}{2} (h + l) = EJ \cdot \bar{\xi}_A \\ & + \bar{M}_A \cdot \frac{l}{2} (2h + l) - \bar{H}_A \cdot \frac{lh}{2} (h + l) + \bar{V}_A \cdot l^2 \left(h + \frac{l}{3} \right) = EJ \cdot \bar{\eta}_A. \end{aligned} \right.$$

Si noti come i coefficienti delle incognite sono simmetrici rispetto alla diagonale principale (vedi anche esercizio 29). Infatti essi rappresentano i coefficienti d'influenza delle incognite stesse e per il teorema di Maxwell deve essere:

$$\alpha_{i,n} = \alpha_{n,i}.$$

Ad esempio, nel nostro caso, $\alpha_{1,2} = -\frac{h(h+l)}{(EJ)}$, rotazione pro-

vocata in A dalla forza $\bar{H}_A = 1$, è uguale ad $\alpha_{2,1}$, spostamento orizzontale generato in A dalla coppia $\bar{M}_A = 1$.

RISOLUZIONE NUMERICA E CALCOLO DI RESISTENZA.

Sia assegnato il portale di dimensioni:

$$h = 4,00 \text{ m}; \quad l = 6,00 \text{ m};$$

soggetto al carico $P = 5000 \text{ kg}$.

Se i vincoli sono rigidi, dai precedenti risultati (sono indicati con segno positivo i momenti che tendono le fibre interne del portale) (pag. 178), si ha:

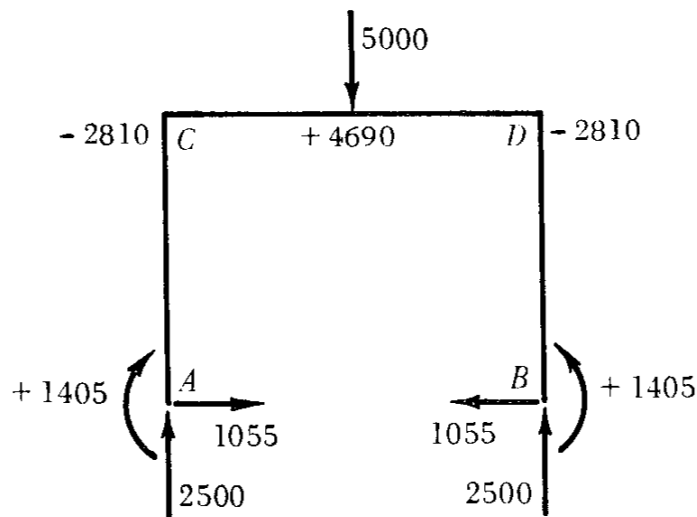


Fig. 50.3

$$M_C = \frac{1}{1 + \frac{h}{2l}} \frac{Pl}{8} = \frac{3}{32} Pl \cong 2810 \text{ kgm}$$

$$M_A = \frac{M_C}{2} = 1405 \text{ kgm}$$

$$M_{1/2} = \frac{Pl}{4} - \frac{3}{32} Pl = 4690 \text{ kgm}$$

$$V = \frac{P}{2} = 2500 \text{ kg}$$

$$H = \frac{3}{2} \frac{M_C}{h} = 1055 \text{ kg.}$$

La sezione più sollecitata è quella di mezzaria della trave.

Assumiamo per il ferro $K_F = 1600 \text{ kg/cm}^2$.

$$W = \frac{469\,000}{1600} = 293 \text{ cm}^3.$$

Realizziamo la struttura con il profilato a I PN 24, le cui caratteristiche sono:

$$A = 46,1 \text{ cm}^2, \quad W = 354 \text{ cm}^3, \quad J = 4246 \text{ cm}^4.$$

Vediamo ora gli effetti del cedimento (fig. 50.4). Sia:

$$\bar{\varphi}_A = 0,01 \text{ rad.}; \quad \bar{\xi}_A = 0,5 \text{ cm}; \quad \bar{\eta}_A = 0,5 \text{ cm}.$$

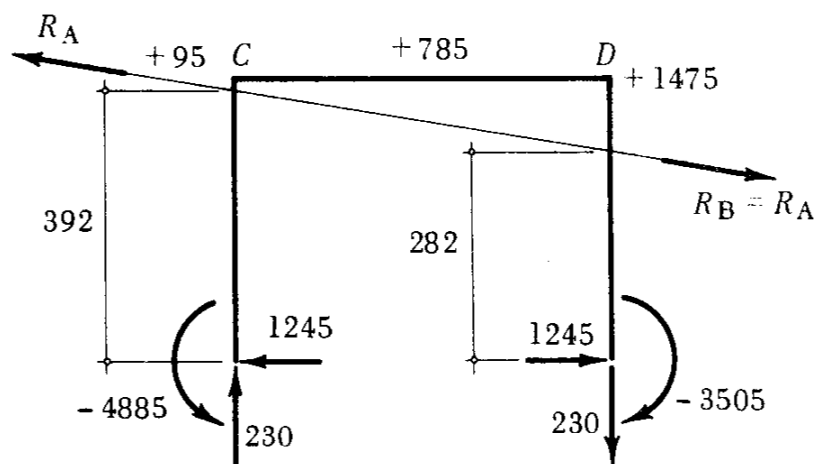


Fig. 50.4

Risolvendo il sistema precedente, si ottiene:

$$\bar{H}_A = +1245 \text{ kg}$$

$$\bar{V}_A = -230 \text{ kg}$$

$$\bar{M}_A = +4885 \text{ kgm}.$$

Inoltre si calcola:

$$M_B = \bar{M}_A - \bar{V}_A \cdot l = -3505 \text{ kgm}$$

$$M_C = \bar{M}_A - \bar{H}_A \cdot h = +95 \text{ «}$$

$$M_D = \bar{M}_B - \bar{H}_A \cdot h = +1475 \text{ «}.$$

Sovrapponendo gli effetti si ottengono i valori indicati in fig. 50.5: la sezione più sollecitata è quella di mezzaria della trave. Eseguendo un calcolo di verifica si ottiene:

$$\sigma_{\max} = \frac{547\,500}{354} = 1550 \text{ kg/cm}^2 < K_F$$

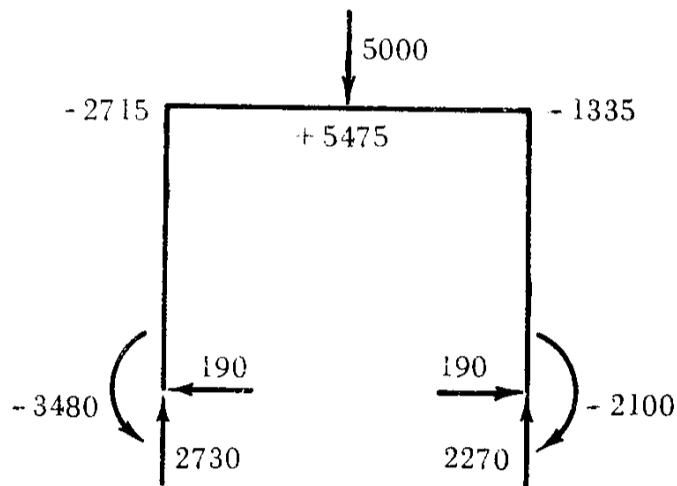


Fig. 50.5

CASI PARTICOLARI IMPORTANTI.

Esaminiamo alcuni casi particolari di cedimento dell'incastro A .

In tutte le equazioni del sistema risolutivo raccogliamo a fattor comune il coefficiente dell'incognita $\bar{M}_A$; le espressioni che si ottengono consentono una più facile deduzione dei risultati.

$$\left\{ \begin{array}{l} (2h + l) \left[\bar{M}_A - h \frac{h + l}{2h + l} \bar{H}_A + \frac{l}{2} \bar{V}_A \right] = EJ \cdot \bar{\varphi}_A \\ h(h + l) \left[-\bar{M}_A + h \frac{\frac{2}{3}h + l}{h + l} \bar{H}_A - \frac{l}{2} \bar{V}_A \right] = EJ \cdot \bar{\xi}_A \\ \frac{l}{2}(2h + l) \left[\bar{M}_A - h \frac{h + l}{2h + l} \bar{H}_A + 2l \frac{h + \frac{l}{3}}{2h + l} \bar{V}_A \right] = EJ \cdot \bar{\eta}_A \end{array} \right.$$

1° caso: Cedimento orizzontale dell'incastro:

$$\bar{\xi}_A \neq 0; \quad \bar{\varphi}_A = 0; \quad \bar{\eta}_A = 0.$$

Il sistema delle equazioni di congruenza diviene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{M}_A - h \frac{h+l}{2h+l} \bar{H}_A + \frac{l}{2} \bar{V}_A = 0 \\ -\bar{M}_A + h \frac{\frac{2}{3}h+l}{h+l} \bar{H}_A - \frac{l}{2} \bar{V}_A = \frac{EJ}{h(h+l)} \bar{\xi}_A \\ \bar{M}_A - h \frac{h+l}{2h+l} \bar{H}_A + 2l \frac{h+\frac{l}{3}}{2h+l} \bar{V}_A = 0. \end{array} \right.$$

Sottraendo la terza equazione dalla prima si vede che è $\bar{V}_A = 0$.
Risolvendo quindi la prima equazione risulta:

$$\bar{M}_A = h \frac{h+l}{2h+l} \bar{H}_A.$$

Sostituendo nella seconda equazione e risolvendo, si ottiene:

$$\bar{H}_A = \frac{3 EJ}{h^3} \cdot \frac{2h+l}{h+2l} \cdot \bar{\xi}_A.$$

La fig. 50.6 rappresenta la curva delle pressioni della struttura.

Il cedimento $\bar{\xi}_A$ soddisfa la simmetria rispetto all'asse mediano verticale del portale. Infatti, a meno di un moto rigido di traslazione o-

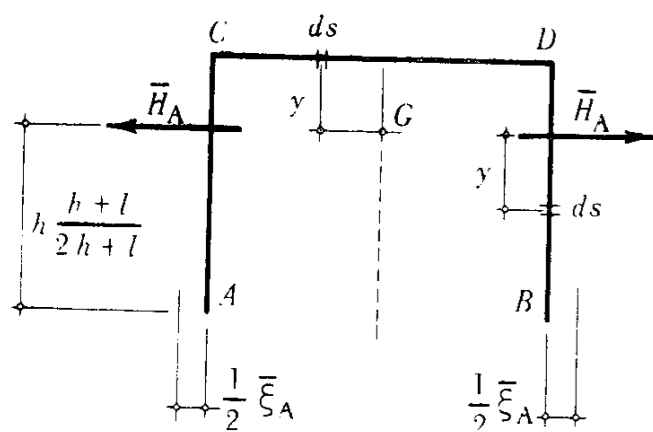


Fig. 50.6

rizzontale, tutto avviene come se lo spostamento relativo $\bar{\xi}_A$ di A rispetto a B , fosse provocato da un cedimento $\frac{\bar{\xi}_A}{2}$ di entrambi i vincoli. È giusto pertanto che le componenti V siano nulle per ragioni di simmetria, Inoltre poiché le due sezioni A e B non ruotano, e la struttura è a sezione costante, la retta d'azione della reazione $\bar{H}_A$ d'incastro passa per il baricentro G degli elementi ds dell'asse geometrico ($\varphi_A = \int_s \frac{M ds}{EJ} = \frac{\bar{H}_A}{EJ} \int_s y \cdot ds = 0$).

2° caso: Cedimento verticale dell'incastro:

$$\bar{\eta}_A \neq 0; \quad \bar{\varphi}_A = 0; \quad \bar{\xi}_A = 0.$$

Il sistema delle equazioni di congruenza diviene:

$$\begin{cases} \bar{M}_A - h \frac{h+l}{2h+l} \bar{H}_A + \frac{l}{2} \bar{V}_A = 0 \\ -\bar{U}_A + h \frac{\frac{2}{3}h+l}{h+l} \bar{H}_A - \frac{l}{2} \bar{V}_A = 0 \\ \bar{M}_A - h \frac{h+l}{2h+l} \bar{H}_A + 2l \frac{h+\frac{l}{3}}{2h+l} \bar{V}_A = \frac{2 EJ}{l(2h+l)} \cdot \bar{\eta}_A \end{cases}$$

Procediamo in modo analogo a quanto già fatto nel 1° caso: sommando membro a membro le prime due equazioni si vede che è $\bar{H}_A = 0$. Risultava poi immediatamente $\bar{M}_A = -\frac{l}{2} \bar{V}_A$. Risolvendo infine la terza equazione si ottiene:

$$\bar{V}_A = \frac{2 EJ}{l^2} \cdot \frac{1}{h+l/6} \cdot \bar{\eta}_A$$

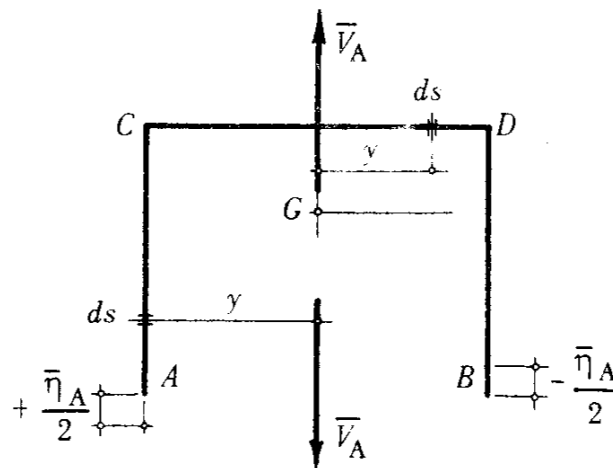


Fig. 50.7

La fig. 50.7 rappresenta la curva delle pressioni della struttura.

Valgono considerazioni analoghe alle precedenti, con l'avvertenza però di notare che in questo caso ci si trova in condizioni d'antisimmetria.

La soluzione dei due casi particolari è stata ottenuta utilizzando quella del caso generale. Si poteva anche procedere direttamente e, naturalmente, si sarebbe giunti ai medesimi risultati.

51. - Risolvere il telaio a croce di fig. 51.1, costituito dalle due aste ortogonali AB e CD , solidali nel nodo O , ed ivi soggette al carico verticale P , normale al piano della struttura.

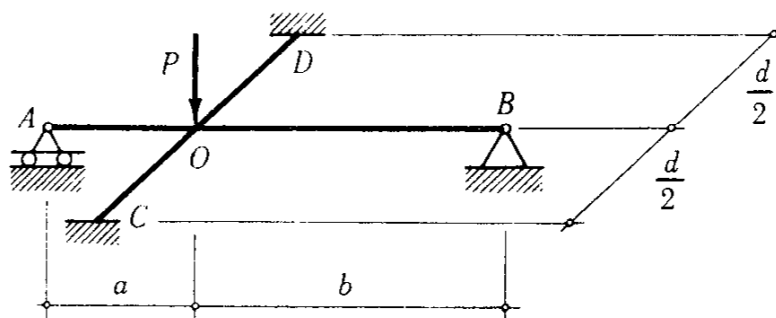


Fig. 51.1

Eseguiamo un breve computo dei vincoli.

Il carrello A è un vincolo doppio: esso impedisce due traslazioni, una secondo la direzione CD contenuta nel piano della struttura, l'altra in direzione normale al piano medesimo. La cerniera B è un vincolo triplo, poiché impedisce tutte e tre le possibili traslazioni nello spazio. Gli incastri C e D vietano qualunque movimento di rotazione e traslazione e sono pertanto dei vincoli sestupli.

Poiché un corpo rigido di un sol pezzo ha nello spazio 6 libertà di movimento, la struttura assegnata risulta 11 volte iperstatica. Tuttavia il suo grado di indeterminazione statica è notevolmente inferiore.

Infatti la struttura è simmetrica rispetto al piano verticale definito dalla retta d'azione del carico e dall'asse geometrico della trave AB . Pertanto le reazioni degli incastri sono simmetriche rispetto a questo piano e quelle dei vincoli A e B sono contenute nel piano stesso.

Inoltre il carico P agisce normalmente al piano della struttura e, se questo contiene un asse principale d'inerzia delle sezioni rette, i punti dell'asse geometrico si spostano solo normalmente ad esso, dimodoché rimane invariata la proiezione della struttura deformata sul piano stesso. In particolare il nodo O si abbassa verticalmente in O_1 , e la sua distanza dai vincoli non varia. Pertanto le reazioni degli incastri e della cerniera non hanno componenti orizzontali, contenute nel piano della struttura (vedi applicazioni del teorema di Maxwell).

Da questa indagine preliminare risulta che le componenti distinte delle reazioni dei vincoli sono in totale 5, e cioè:

carrello A :	reazione verticale V_A
cerniera B :	reazione verticale V_B
incastri C e D :	$\left\{ \begin{array}{l} \text{reazione verticale } V \\ \text{momento flettente } M \\ \text{momento torcente } M_t. \end{array} \right.$
(eguali per la	
simmetria)	

Le equazioni d'equilibrio non sfruttate nelle precedenti considerazioni e ancora disponibili sono solo due:

- traslazione in direzione verticale, normale al piano della struttura;
- rotazione rispetto ad un punto qualunque del piano, cioè rispetto ad un asse normale al piano.

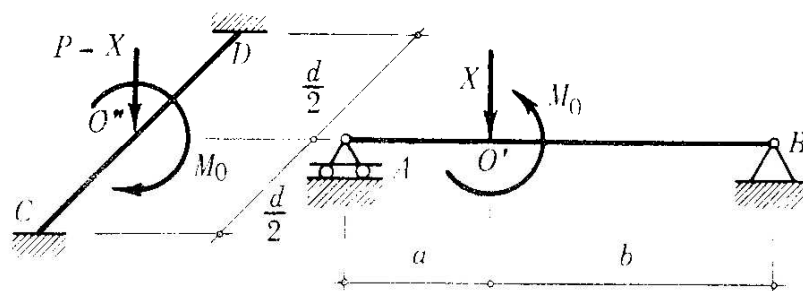


Fig. 51.2

Sezioniamo ora la struttura in O in modo da separare le due travi AB e CD (fig. 51.2).

Il carico P si ripartisce su di esse secondo due aliquote incognite X e $(P-X)$; $(P-X)$ è applicato alla sezione di mezzaria della trave CD e non provoca in essa alcuna rotazione; X agisce invece in una sezione generica della trave AB e, nell'ipotesi che sia $a < b$, tende a farla ruotare in senso orario.

Per effetto della solidarietà angolare esistente tra le due aste, la trave CD contrasta, mediante il momento flettente antiorario M_0 , la rotazione della sezione O' della trave AB , e la limita; questa, mutuamente, trasmette all'asta CD la propria tendenza alla rotazione oraria per mezzo del momento torcente M_0 .

Se si osserva infine che la trave AB è isostatica e la CD , 3 volte iperstatica, è soggetta a condizioni di carico staticamente note, si deduce che il problema proposto è due sole volte staticamente indeterminato.

Le condizioni di congruenza da imporre per la determinazione delle due incognite X ed M_0 sono:

$$\begin{cases} \eta_{O'} = \eta_{O''} \\ \varphi_{O'} = \theta_{O''} \end{cases}$$

Esplicitando i vari termini:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{X a^2 b^2}{3 E J_1 l} - \frac{M_0 a b (b - a)}{3 E J_1 l} = \frac{(P - X) d^3}{192 E J_2} \\ \frac{X a b (b - a)}{3 E J_1 l} - \frac{M_0 (l^2 - 3 a b)}{3 E J_1 l} = K \frac{\frac{M_0}{2} \cdot \frac{d}{2}}{G J p_2} \end{array} \right.$$

(il coefficiente K al secondo membro della seconda equazione rappresenta il fattore di torsione, il cui valore dipende dal tipo di sezione della trave CD).

SOLUZIONE NUMERICA E VERIFICA DI RESISTENZA.

Si supponga che la struttura sia interamente realizzata con profilato a I PN 28, avente le caratteristiche:

$$A = 61 \text{ cm}^2; \quad I = 7587 \text{ cm}^4; \quad W = 542 \text{ cm}^3.$$

In fig. 51.3 sono indicate le dimensioni della sezione del profilato (schematizzata, per semplicità, a spigoli esterni vivi).

Si abbia:

$$P = 10\,000 \text{ kg}; \quad d = 6,00 \text{ m}; \quad a = 2,00 \text{ m}; \quad b = 4,00 \text{ m}.$$

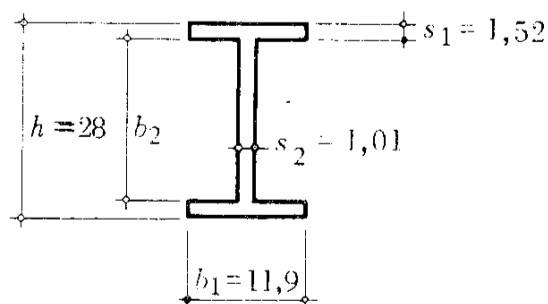


Fig. 51.3

Per la sezione del profilato l'angolo di rotazione di torsione si esprime,

$$\theta_{0''} = \frac{\frac{M_0}{2} \cdot \frac{d}{2}}{G \cdot \left(1,3 \sum \frac{bs^3}{3}\right)}$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene per le due incognite:

$$X = 2470 \text{ kg}, \quad M_0 = 354 \text{ kgm.}$$

Osserviamo che la trave incastrata CD ha una rigidezza flessionale notevolmente maggiore della trave AB , semplicemente appoggiata; è però poco rigida torsionalmente a causa del tipo di sezione con cui è realizzata. Si spiega in tal modo il piccolo valore di X in confronto a $(P - X)$ e il piccolo valore di M_0 in grado di soddisfare la congruenza angolare.

La sezione più sollecitata dell'asta AB è quella immediatamente prima del carico, nella quale si ha,

$$M_{\max} = X \frac{ab}{l} + M_0 \frac{a}{l} = 3410 \text{ kgm}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{341000}{542} \cong 630 \text{ kg/cm}^2 < K_F.$$

Nell'asta CD sono egualmente sollecitate la sezione di mezzaria e quelle d'incastro ove si ha:

$$M = \frac{(P - X)d}{8} = 5650 \text{ kgm}; \quad M_i = \frac{M_0}{2} = 177 \text{ kgm.}$$

Occorre procedere ad una verifica della σ ideale.

Procedendo con il criterio di Grashof (o della massima dilatazione) si calcola:

$$\sigma_{\max} = \frac{565000}{542} = 1040 \text{ kg/cm}^2.$$

La $\tau_{\max}$ si manifesta anch'essa al lembo dell'ala perché è $s_1 > s_2$ nella sezione del profilato.

$$\tau_{\max} = \frac{M_t \cdot s_1}{1,3 \sum \frac{bs^3}{3}} = \frac{17700 \cdot 1,52}{1,3 \cdot 36,4} = 563 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\sigma_{\text{id max}} = 0,35 \sigma_{\max} + 0,65 \sqrt{\sigma_{\max}^2 + 4 \tau_{\max}^2} = 1360 \text{ kg/cm}^2 < K_F$$

Applicando invece il criterio di Mises, che è il più usato per materiali metallici, si ha nel nostro caso:

$$\sigma_{\text{id}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \cong 1425 \text{ kg/cm}^2.$$

CASO PARTICOLARE. $a = b = \frac{l}{2}$ (fig. 51.4).

In questo caso le due travi AB e CD si trasmettono solo l'azione mutua verticale X ; è nullo il momento M_0 perché le sezioni O' e O'' non tendono a ruotare per ragioni di simmetria.

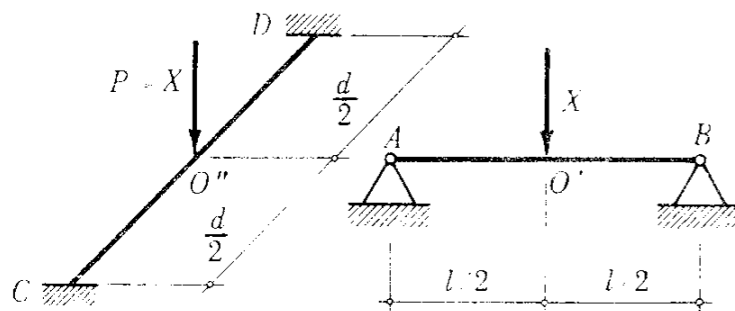


Fig. 51.4

Sussiste solo l'equazione di congruenza agli spostamenti verticali, che ha la forma:

$$\frac{X l^3}{48 E J_1} = \frac{(P - X) d^3}{192 E J_2}$$

Con i valori prima assegnati ($J_1 = J_2$, $l = d$) risulta:

$$\frac{X}{48} = \frac{P-X}{192} \quad \text{cioè} \quad X = \frac{P}{5} = 2000 \text{ kg.}$$

* * *

52. - Risolvere il telaio incastrato simmetrico di fig. 52.1, soggetto a due distinte condizioni di carico:

a) due forze P applicate ai nodi C e D , normali al piano della struttura;

b) una forza P applicata alla mezzaria della trave CD , normale al piano della struttura.

CASO *a)* fig. 52.1.

La struttura pur essendo 6 volte iperstatica è staticamente determinata.

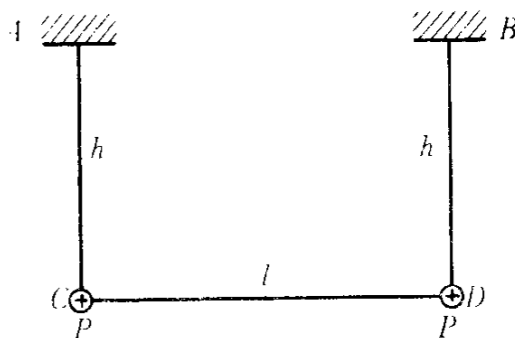


Fig. 52.1

Infatti in questo caso le sezioni d'estremità dei piedritti all'attacco dei nodi C e D si abbassano e ruotano della stessa quantità:

$$\varphi_{C,A} = \varphi_{D,B} = \frac{Ph^2}{2EJ}$$

$$\eta_{C,A} = \eta_{D,B} = \frac{Ph^3}{3EJ}$$

La trave CD non è sollecitata; essa ruota rigidamente in senso torsionale e s'abbassa della stessa quantità, senza deformarsi.

Le reazioni degli incastri valgono ovviamente:

$$V_A = V_B = P \quad M_A = M_B = Pl \quad (\text{momenti flettenti})$$

CASO *b*) fig. 52.2.

Sezioniamo il telaio in *E*; per ragioni di simmetria in questa sezione esiste solo il momento flettente M_E avente il senso prevedibile di fig. 52.3, mentre il carico esterno P si suddivide egualmente sulle due metà strutture.

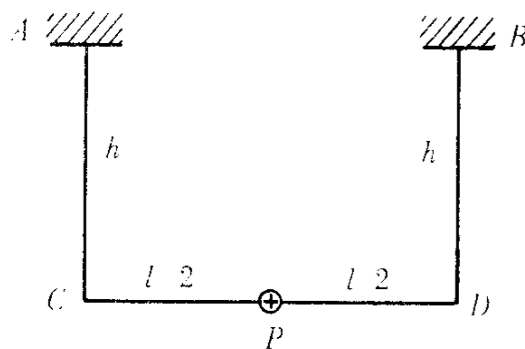


Fig. 52.2

La struttura è pertanto una sola volta staticamente indeterminata e la condizione di congruenza che determina l'incognita M_E è:

$$\varphi_E = 0. \quad (\text{rotazione flessionale})$$

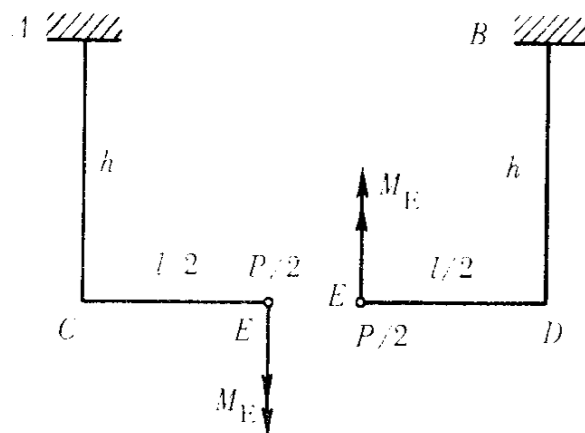


Fig. 52.3

Poiché trave e piedritti hanno direzione tra loro normale, esprimendo i vari contributi si ha semplicemente:

$$\varphi_E = \varphi_{E,C} + \theta_{C,A} = 0$$

Ossia:

$$\left[\frac{P}{2} \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2EJ} - \frac{M_E \frac{l}{2}}{EJ} \right] + \left[K \left(\frac{P}{2} \frac{l}{2} - M_E \right) \frac{h}{GJ_p} \right] = 0$$

K è il fattore di torsione che caratterizza la deformabilità del piedritto avente sezione non circolare; J e J_p i momenti d'inerzia e polare baricentrici.

Si ottiene:

$$M_E = \frac{Pl}{4} \frac{\frac{l}{4EJ} + K \frac{h}{GJ_p}}{\frac{l}{2EJ} + K \frac{h}{GJ_p}} = \frac{Pl}{4} \left[1 - \frac{1}{2 \left(1 + K \frac{h}{GJ_p} \frac{2EJ}{l} \right)} \right]$$

L'abbassamento della sezione E vale:

$$\eta_E = \eta_{E,C} + \eta_{C,A} + \theta_{C,A} \frac{l}{2} = \left[\frac{P}{2} \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3EJ} - M_E \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2EJ} \right] + \frac{P}{2} \cdot \frac{h^3}{3EJ} + \left[K \left(\frac{P}{2} \frac{l}{2} - M_E \right) \frac{h}{GJ_p} \right] \frac{l}{2}.$$

53. - Risolvere il telaio incastrato di fig. 53.1, soggetto, sulla metà trave ED , a carico uniforme verticale, perpendicolare al piano della struttura,

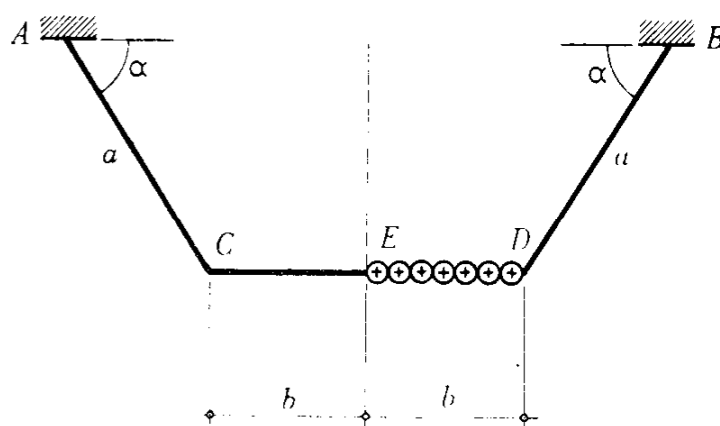


Fig. 53.1

La struttura non tende a deformarsi nel proprio piano, se questo contiene un asse principale d'inerzia delle sezioni rette (vedi esercizio 51). Pertanto sono nulle le componenti orizzontali delle reazioni e i momenti d'incastro aventi l'asse momento verticale.

Le reazioni dei vincoli sono costituite dalle componenti verticali V , e dai momenti i cui assi sono contenuti nel piano della struttura, definiti, rispettivamente, i torcenti, dalla direzione delle aste AC e BD , e i flettenti, dalla direzione normale.

I parametri delle reazioni sono in totale 6 (V_A , U_A , U_{tA} , e V_B , U_B ed U_{tB}); le equazioni d'equilibrio che debbono essere verificate sono però solamente tre: la traslazione in senso verticale e le rotazioni attorno a due assi ortogonali contenuti nel piano della struttura. Questa pertanto, pur essendo sei volte iperstatica, risulta tre sole volte staticamente indeterminata.

Procediamo con lo stesso metodo adottato nell'esercizio 27 in modo da sfruttare la simmetria geometrica esistente. Sdoppiamo cioè il carico assegnato in due condizioni parziali: la prima simmetrica costituita

N. B. - Indichiamo con i simboli:

⊗ forza entrante nel piano della figura;

⊙ forza uscente dal piano della figura;

↑ vettore momento, il cui senso sia definito dalla regola del cavatappi.

da un carico $+\frac{q}{2}$ esteso a tutta l'asta CD , la seconda antisimmetrica, costituita da $+\frac{q}{2}$ agente sul tratto ED e $-\frac{q}{2}$ sul tratto EC .

In questo modo il problema iniziale viene suddiviso nello studio di due casi più semplici, senza che, naturalmente, abbia a variare il grado di indeterminazione complessivo.

1^a CONDIZIONE: Carico simmetrico $+\frac{q}{2}$ su tutta l'asta CD .

Sezioniamo il telaio in E e assumiamo come struttura principale la mensola ad asse spezzato ACE (o, indifferentemente, BDE).

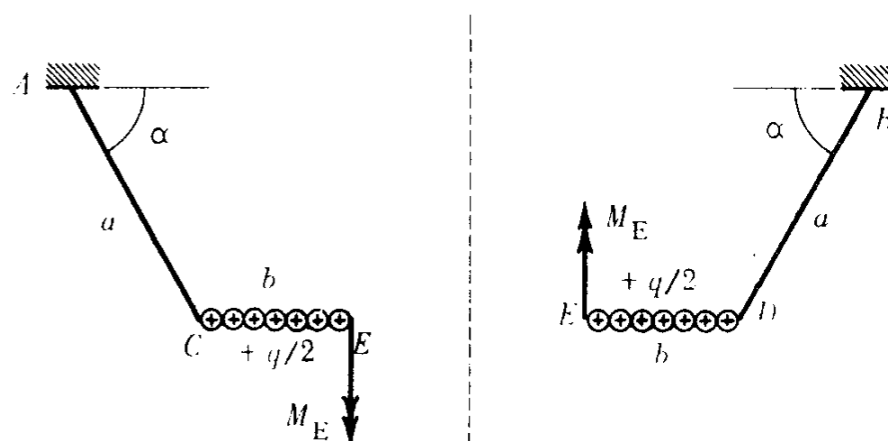


Fig. 53.2

Per ragioni di simmetria, in E esiste solo l'azione interna di momento flettente M_E , il cui senso prevedibile è quello di fig. 53.2. Indichiamo con il simbolo φ la rotazione flessionale delle sezioni, e con θ quella torsionale.

La sezione E può traslare verticalmente e ruotare torsionalmente ma non flessionalmente; la condizione di congruenza pertanto è:

$$\varphi_E = 0.$$

Componendo cinematicamente le rotazioni delle sezioni terminali C ed E delle due aste AC e CE si ha:

$$\varphi_E = \varphi_{E,C} + \varphi_{C,A} \cos \alpha + \theta_{C,A} \sin \alpha = 0.$$

Esplicitando i vari termini l'equazione di congruenza diviene:

$$\left[\frac{\frac{q}{2} b^3}{6 EJ} - \frac{M_E b}{EJ} \right] + \left[\frac{\left(\frac{q}{2} b \right) a^2}{2 EJ} + \frac{\left(q \frac{b^2}{4} - M_E \right) \cos \alpha}{EJ} a \right] \cos \alpha +$$

$$+ K \left[\frac{\left(q \frac{b^2}{4} - M_E \right) \sin \alpha}{GJ_p} a \right] \sin \alpha = 0$$

il coefficiente K indica il fattore di torsione, nel caso di struttura avente sezione non circolare.

2^a CONDIZIONE: Carico antisimmetrico: $-\frac{q}{2}$ su CE e $+\frac{q}{2}$ su ED .

In E vi sono solo le azioni interne che hanno caratteristiche di antisimmetria, e cioè taglio T_E e momento torcente M_{tE} .

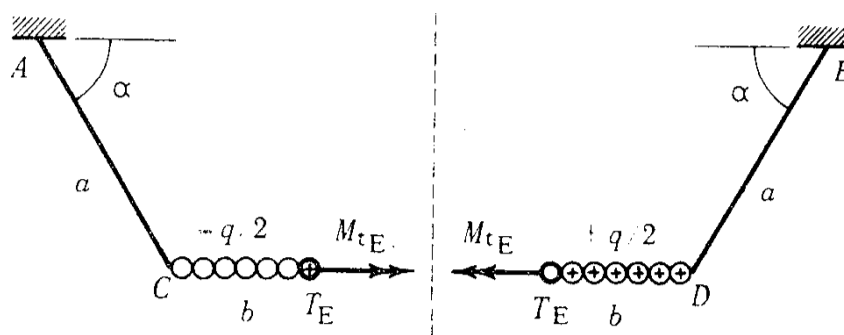


Fig. 53.3

La sezione E compie una rotazione flessionale φ_E , non trasla verticalmente e non ruota in senso torsionale. Le due condizioni di congruenza che consentono la determinazione di T_E ed M_E sono:

$$\begin{cases} \theta_E = 0 \\ \eta_E = 0. \end{cases}$$

Ossia:

$$\begin{cases} \theta_E = \theta_{E,C} + \varphi_{C,A} \operatorname{sen} \alpha + \theta_{C,A} \cos \alpha = 0 \\ \eta_E = \eta_{E,C} + \eta_{C,A} + \varphi_{C,A} b \cos \alpha + \theta_{C,A} b \operatorname{sen} \alpha = 0. \end{cases}$$

EsPLICITANDO I VARI TERMINI:

$$\left\{ \begin{aligned} & K \frac{M_{tE} b}{GJ_p} + \left[\frac{\left(q \frac{b}{2} - T_E \right)}{2 EJ} a^2 + \frac{\left[\left(q \frac{b^2}{4} - T_E b \right) \cos \alpha - M_{tE} \operatorname{sen} \alpha \right]}{EJ} a \right] \operatorname{sen} \alpha + \\ & \quad + K \left[\frac{\left[\left(q \frac{b^2}{4} - T_E b \right) \operatorname{sen} \alpha + M_{tE} \cos \alpha \right]}{GJ_p} a \right] \cos \alpha = 0 \\ & \left[\frac{q}{2} \frac{b^4}{8 EJ} - \frac{T_E b^3}{3 EJ} \right] + \left[\frac{\left(q \frac{b}{2} - T_E \right)}{3 EJ} a^3 - \frac{\left[\left(q \frac{b^2}{4} - T_E b \right) \cos \alpha - M_{tE} \operatorname{sen} \alpha \right]}{2 EJ} a^2 \right] + \\ & \quad + \left[\frac{\left(q \frac{b}{2} - T_E \right)}{2 EJ} a^2 + \frac{\left[\left(q \frac{b^2}{4} - T_E b \right) \cos \alpha - M_{tE} \operatorname{sen} \alpha \right]}{EJ} a \right] b \cos \alpha + \\ & \quad + K \left[\frac{\left[\left(q \frac{b^2}{4} - T_E b \right) \operatorname{sen} \alpha + M_{tE} \cos \alpha \right]}{GJ_p} a \right] b \operatorname{sen} \alpha = 0. \end{aligned} \right.$$

Risolvendo il sistema e sovrapponendo gli effetti dovuti alle due condizioni di carico si determina il regime statico complessivo della struttura assegnata.