

$$\begin{cases} V_C \cdot l - (Pa + M_C) = 0 \\ \frac{Pa(l^2 - a^2)}{6 EJ_t \cdot l} - \frac{M_C l}{3 EJ_t} - \frac{\eta_C}{l} = \frac{\eta'_A}{R} \\ \xi''_A + \eta'_A = 0. \end{cases}$$

Sostituendo le espressioni prima trovate:

$$\begin{cases} V_C = \frac{Pa}{l} + \frac{M_C}{l} \\ \frac{Pa(l^2 - a^2)}{6 EJ_t \cdot l} - \frac{M_C l}{3 EJ_t} - \left(\frac{3\pi - 8}{8} - \frac{1}{2\pi} \right) \frac{V_C R^3}{EJ_a \cdot l} = \\ = \frac{3\pi - 8}{8} \cdot \frac{M_C R}{EJ_a} - \frac{10 - 3\pi}{8} \cdot \frac{H_C R^2}{EJ_a} \\ \left(- \frac{M_C R^2}{4 EJ_a} + \frac{\pi - 2}{8} \frac{H_C R^3}{EJ_a} \right) + \left(\frac{3\pi - 8}{8} \cdot \frac{M_C R^2}{EJ_a} - \frac{10 - 3\pi}{8} \cdot \frac{H_C R^3}{EJ_a} \right) = 0. \end{cases}$$

Dalla terza equazione si ottiene:

$$H_C = \frac{M_C}{R} \frac{10 - 3\pi}{4(\pi - 3)}.$$

Sostituendo nella seconda equazione le espressioni di V_C e H_C :

$$\begin{aligned} \frac{Pa(l^2 - a^2)}{6 EJ_t \cdot l} - \left(\frac{3\pi - 8}{8} - \frac{1}{2\pi} \right) \frac{PaR^3}{EJ_a \cdot l^2} = \\ = \frac{M_C R}{EJ_a} \left[\left(\frac{3\pi - 8}{8} - \frac{1}{2\pi} \right) \frac{R^2}{l^2} + \left(\frac{3\pi - 8}{8} \right) \left(\frac{(10 - 3\pi)^2}{32(\pi - 3)} \right) \right] + \frac{M_C l}{3 EJ_t}. \end{aligned}$$

Risolvendo questa equazione si ottiene M_C in funzione di P e delle caratteristiche della trave e dell'arco. Successivamente si determinano H_C , V_C e H' .

Riportiamo, a titolo d'ulteriore chiarimento, la curva delle pressio-

ni dell'arco, separatamente, per le tre condizioni di carico H_C , M_C e V_C (fig. 34.7).

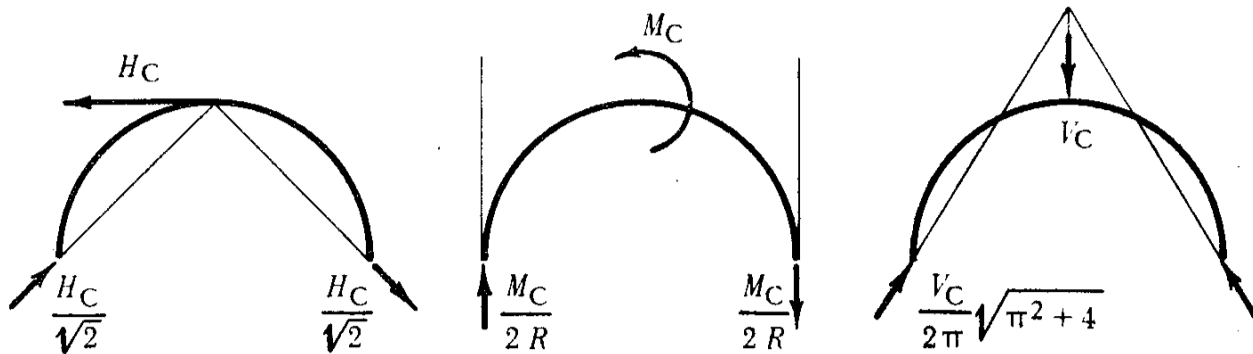
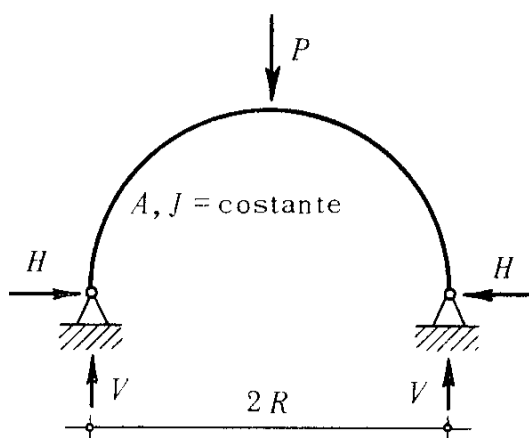


Fig. 34.7

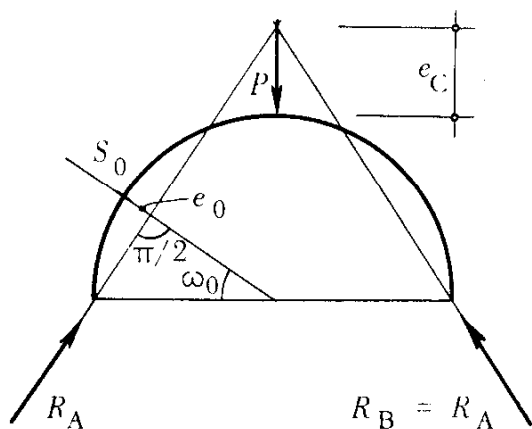
ARCO SEMICIRCOLARE A DUE CERNIERE: carico concentrato verticale in colmo.



Reazioni vincolari

$$V = \frac{P}{2} \quad H = \frac{P}{\pi}$$

$$R_A = R_B = P \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2}} \cong 0,59 P$$



Curva delle pressioni

$$e_C = \frac{\pi-2}{2} R \cong 0,57 R$$

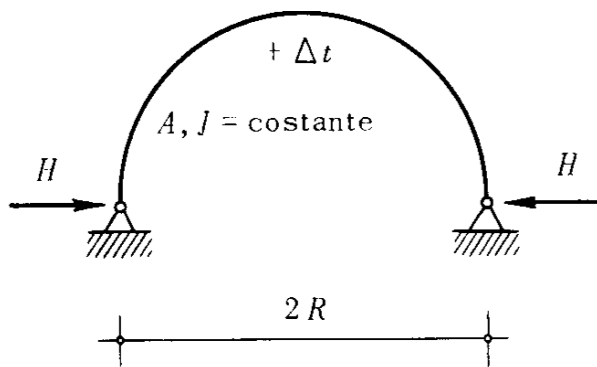
$$e_0 = R(1 - \cos \omega_0) \cong 0,155 R$$

$$\omega_0 \cong 32^\circ, 30'$$

$$M_C = \frac{\pi-2}{2\pi} PR = 0,182 PR$$

$$M_{S_0} = R_A \cdot e_0 = 0,091 PR$$

ARCO SEMICIRCOLARE A DUE CERNIERE: variazione termica uniforme $+\Delta t$ su tutto l'arco.



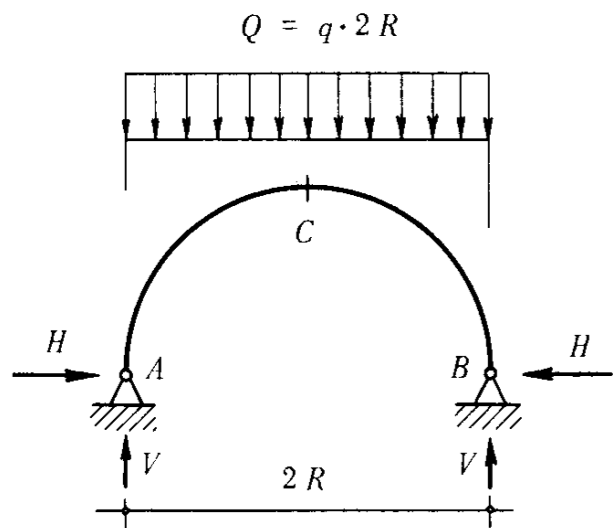
Reazioni vincolari

$$V = 0$$

$$H = \frac{4}{\pi} \frac{EJ \alpha \Delta t}{R^2}$$

La curva delle pressioni coincide con la retta d'azione delle H .

ARCO SEMICIRCOLARE A DUE CERNIERE: carico uniformemente distribuito sulla corda.



Reazioni vincolari

$$V = \frac{Q}{2}$$

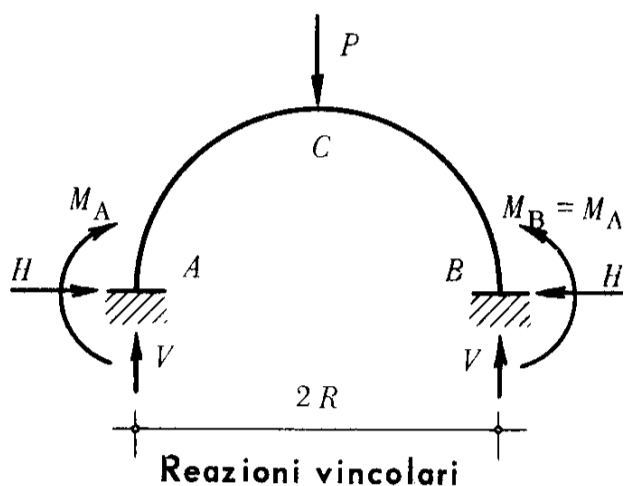
$$H = \frac{2}{3\pi} Q$$

$$R_A = R_B \cong 0,54 Q$$

$$M_C = \frac{3\pi - 8}{12\pi} QR = 0,038 QR$$

$$e_C = \frac{M_C}{H} \cong 0,178 R$$

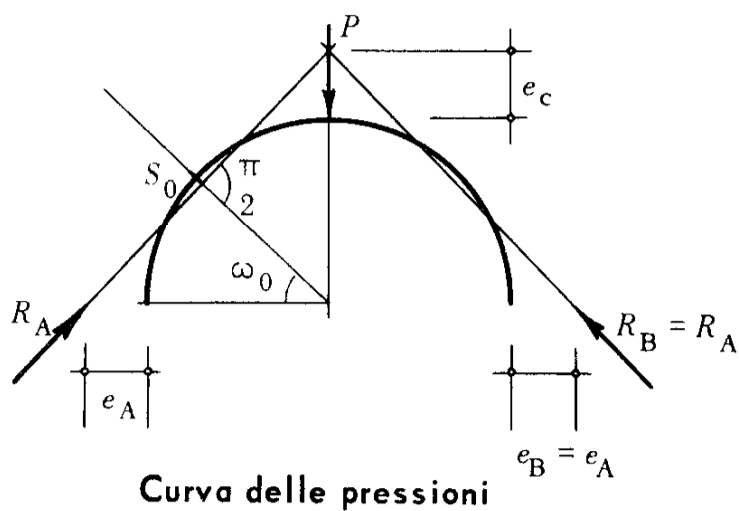
ARCO SEMICIRCOLARE A DUE INCASTRI: carico concentrato verticale in colmo.



$$V = \frac{P}{2}$$

$$H = \frac{4-\pi}{\pi^2-8} P$$

$$M_A = \frac{PR}{4} \left(\frac{4\pi-\pi^2}{\pi^2-8} - 1 \right) \cong \cong 0,11 PR$$



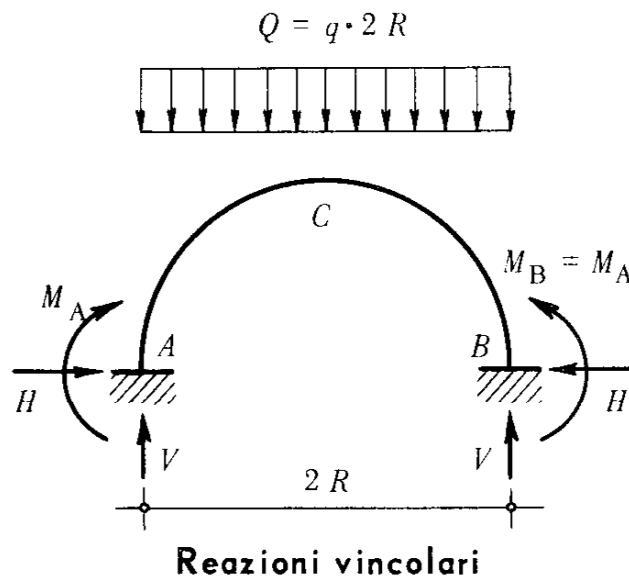
$$M_C = PR \frac{2\pi-6}{\pi^2-8} \cong 0,15 PR$$

$$e_A = \frac{R}{2} \left(\frac{4\pi-\pi^2}{\pi-8} - 1 \right) = 0,22 R$$

$$e_C = \frac{2\pi-6}{4-\pi} R \cong 0,325 R$$

$$\omega_0 \cong 42^\circ 30'$$

ARCO SEMICIRCOLARE A DUE INCASTRI: carico uniformemente distribuito sulla proiezione orizzontale.



$$V = \frac{Q}{2}$$

$$H = \frac{\pi}{6(\pi^2 - 8)} Q$$

$$M_A = \frac{32 - 3\pi^2}{24(\pi^2 - 8)} QR \cong$$

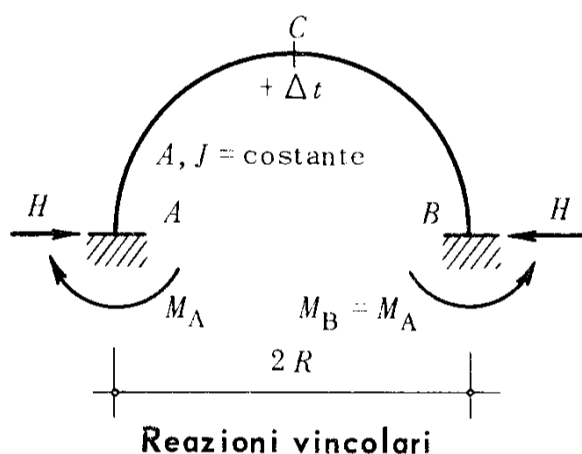
$$\cong 0,053 QR$$

$$M_C = 0,023 QR$$

$$e_A = \frac{M_A}{V} = 0,107 R$$

$$e_C = \frac{M_C}{H} = 0,082 R$$

ARCO SEMICIRCOLARE A DUE INCASTRI: variazione termica uniforme $+\Delta t$ su tutto l'arco.

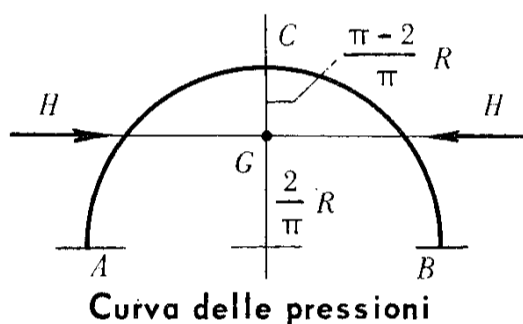


$$V = 0$$

$$H = \frac{4\pi}{\pi^2 - 8} \cdot \frac{EJ\alpha\Delta t}{R^2}$$

$$M_A = \frac{2}{\pi} R \cdot H =$$

$$= \frac{8}{\pi^2 - 8} \cdot \frac{EJ\alpha\Delta t}{R}$$



La curva delle pressioni è costituita dalla retta d'azione delle reazioni vincolari e passa per il baricentro G dell'arco.

$$M_C = \frac{\pi - 2}{\pi} R \cdot H =$$

$$= \frac{4\pi - 8}{\pi^2 - 8} \cdot \frac{EJ\alpha\Delta t}{R}$$

* * *

35. - Risolvere l'arco circolare di fig. 35.1, incastrato alle imposte A e B , e soggetto a carico radiale uniforme.

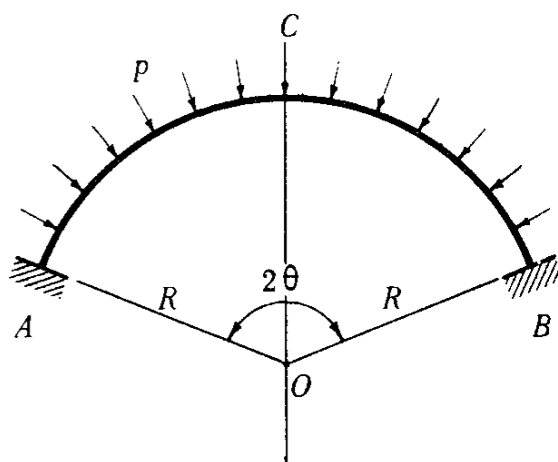


Fig. 35.1

La struttura è tre volte iperstatica ma la simmetria riduce a due il grado d'indeterminazione. Infatti sono note le componenti verticali delle reazioni:

$$V_A = V_B = V = \frac{Q}{2} = pR \sin \theta.$$

Sono incognite le spinte H e i momenti M_A d'incastro.

Naturalmente è opportuno procedere ad uno svincolamento che sfrutti la simmetria; ad esempio sostituendo gli incastrati con due carrelli a piano di scorrimento radiale. La struttura principale così ottenuta, una volta labile ma equilibrata per ragioni di simmetria, offre il particolare vantaggio di essere l'esatta funicolare dei carichi esterni. Le reazioni dei carrelli sono dirette tangenzialmente all'asse geometrico e valgono:

$$S = \frac{Q}{2 \sin \theta} = pR;$$

la curva delle forze è un arco di cerchio e il suo raggio pR rappresenta il valore dell'azione interna, costante e di solo sforzo normale, esistente in ogni sezione (fig. 35.2).

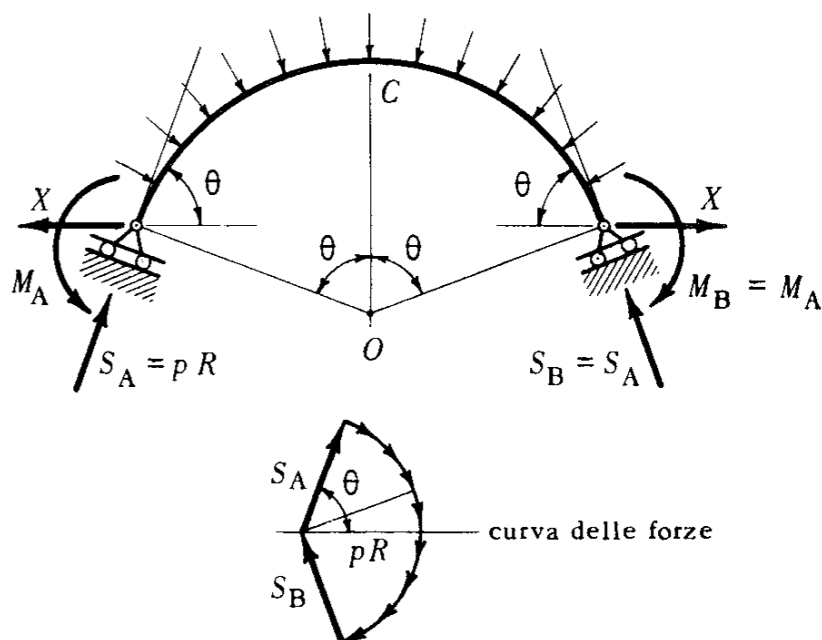


Fig. 35.2

L'asse geometrico della struttura principale uniformemente compressa subisce un accorciamento per effetto del quale i carrelli A e B tenderebbero a traslare lungo il loro piano di scorrimento verso il centro O dell'arco. Questo spostamento è impedito dalle altre componenti delle reazioni degli incastri, X e M_A , esplicitate dallo svincolamento, che devono assicurare il rispetto dei vincoli soppressi.

Per esprimere le condizioni di congruenza si può, per semplicità di calcolo, prendere in esame solo metà struttura e riferire gli spostamenti della sezione A , totalmente svincolata, alla sezione di chiave C che, per ragioni di simmetria, non ruota né si sposta orizzontalmente (fig. 35.3).

Le condizioni di congruenza sono:

$$\begin{cases} \varphi_A = 0 \\ \xi_A = 0. \end{cases}$$

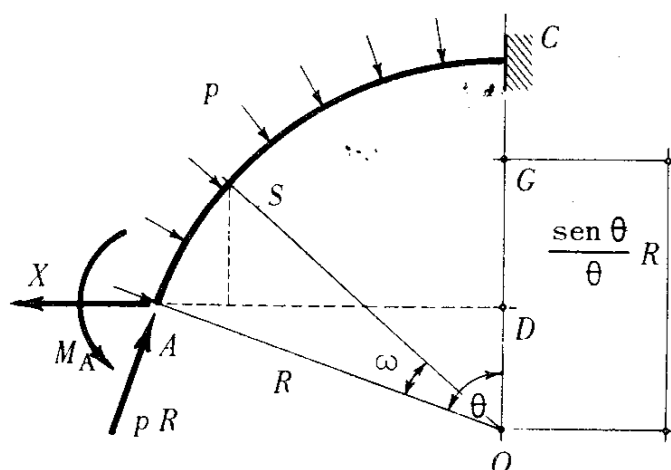


Fig. 35.3

Per quanto riguarda la prima equazione si può osservare che il carico radiale p e la reazione pR del carrello, determinano solo una traslazione della sezione A in direzione radiale.

Si deduce allora, con ragionamento analogo a quello svolto diffusamente nell'esercizio 39, che la risultante di X e M_A ha retta d'azione baricentrica. Infatti anche X e M_A non devono fare ruotare la sezione A ; inoltre il momento flettente da esse generato è il solo agente nell'arco e l'area complessiva del diagramma di M deve essere nulla (supposto che l'arco sia a sezione costante; in caso contrario ci si deve riferire alla curvatura M/EJ). Si ricava direttamente la relazione tra X e M_A :

$$\left| \frac{M_A}{X} \right| = GD = R \frac{\text{sen } \theta}{\theta} - \cos \theta$$

La seconda equazione di congruenza si esprime annullando lo spostamento orizzontale di A per effetto della deformazione assiale generata dalla pressione esterna e dalla reazione del carrello, e di quella flessionale, provocata dalle reazioni incognite X e M_A .

Assumiamo positivi gli spostamenti verso l'interno dell'arco. È:

$$N = pR \quad dx = ds \cos (\theta - \omega) \quad ds = R d\omega$$

$$\begin{aligned}
 M &= XR \left[\cos(\theta - \omega) - \cos \theta \right] - XR \left[\frac{\sin \theta}{\theta} - \cos \theta \right] = \\
 &= XR \left[\cos(\theta - \omega) - \frac{\sin \theta}{\theta} \right] \\
 \xi_A &= \int_0^\theta \frac{N ds}{EA} \cos(\theta - \omega) - \int_0^\theta \frac{M ds}{EJ} R \left[\cos(\theta - \omega) - \cos \theta \right] = 0.
 \end{aligned}$$

Sostituendo si ottiene:

$$\frac{pR^2}{EA} \int_0^\theta \cos(\theta - \omega) d\omega - \frac{XR^3}{EJ} \int_0^\theta \left[\cos(\theta - \omega) - \frac{\sin \theta}{\theta} \right] \left[\cos(\theta - \omega) - \cos \theta \right] d\omega = 0$$

Integrando:

$$\frac{pR^2}{EA} \sin \theta - \frac{XR^3}{EJ} \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin \theta \cos \theta}{2} - \frac{\sin^2 \theta}{\theta} \right) = 0.$$

E risolvendo per X si ottiene infine:

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{1}{\left(\frac{\theta}{2 \sin \theta} + \frac{\cos \theta}{2} - \frac{\sin \theta}{\theta} \right)} \cdot \frac{p}{R} \cdot \frac{J}{A} = \\
 &= \frac{1}{\left(\frac{\theta}{2 \sin \theta} + \frac{\cos \theta}{2} - \frac{\sin \theta}{\theta} \right)} p R \left(\frac{\rho}{R} \right)^2.
 \end{aligned}$$

La reazione X è denominata *spinta addizionale*; essa rappresenta la variazione della componente orizzontale della reazione del vincolo rispetto al valore esistente nella struttura principale, funicolare dei carichi esterni. Logicamente X ha un valore molto piccolo rispetto a pR

perché agisce sulla struttura, alterata dalla deformazione assiale, imponendo il rispetto del vincolo mediante una deformazione di tipo flessionale.

Volendo fare un confronto tra le azioni interne esistenti nella sezione di chiave e in quella d'imposta, si ha:

$$N_A = pR - X \cos \theta$$

$$T_A = X \sin \theta$$

$$M_A = X \cdot \overline{GD} = -XR \left(\frac{\sin \theta}{\theta} - \cos \theta \right)$$

$$N_C = pR - X$$

$$T_C = 0$$

$$M_C = X \cdot \overline{GC} = XR \left(1 - \frac{\sin \theta}{\theta} \right)$$

Poiché in un arco circolare è $\overline{GD} > \overline{GC}$ (cioè il baricentro si trova sempre ad una quota, rispetto l'imposta, maggiore della metà freccia) se ne deduce che è più sollecitata la sezione A.

La *curva delle pressioni* ha l'andamento di fig. 35.4. Essa si discosta pochissimo dall'asse geometrico; la sua eccentricità vale:

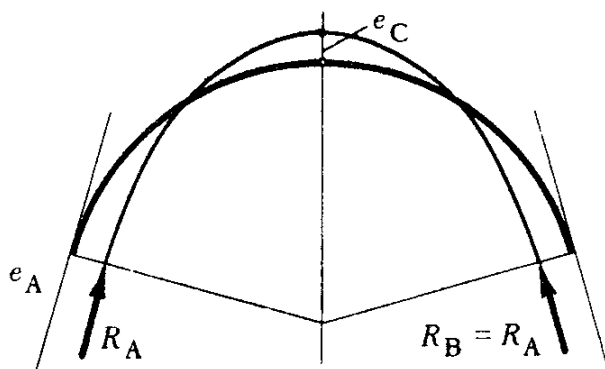


Fig. 35.4

All'iposta:

$$e_A = \frac{M_A}{N_A}$$

$$e_A = \frac{XR \left(\frac{\sin \theta}{\theta} - \cos \theta \right)}{pR - X \cos \theta} \cong \frac{XR \left(\frac{\sin \theta}{\theta} - \cos \theta \right)}{pR} =$$

$$= \frac{\left(\frac{\sin \theta}{\theta} - \cos \theta \right)}{\left(\frac{\theta}{2 \sin \theta} + \frac{\cos \theta}{2} - \frac{\sin \theta}{\theta} \right)} \cdot \frac{p^2}{R}.$$

In chiave:

$$e_C = \frac{M_C}{N_C} = \frac{XR \left(1 - \frac{\sin \theta}{\theta} \right)}{pR - X} \cong \frac{XR \left(1 - \frac{\sin \theta}{\theta} \right)}{pR} =$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{\sin \theta}{\theta} \right)}{\left(\frac{\theta}{2 \sin \theta} + \frac{\cos \theta}{2} - \frac{\sin \theta}{\theta} \right)} \cdot \frac{p^2}{R}.$$

RISOLUZIONE NUMERICA E CALCOLO DI RESISTENZA.

Si abbia:

$$R = 10,00 \text{ m}; \quad \theta = \frac{\pi}{3}; \quad p = 10\,000 \text{ kg/m}^2$$

Si voglia realizzare la struttura in cemento armato; eseguiamo il calcolo per una striscia di larghezza $b = 1,00 \text{ m}$. Assumiamo per il calcestruzzo, in questo caso, $K_C = 40 \text{ kg/cm}^2$; dimensioniamo dapprima la struttura per lo sforzo principale $N = pR$, usando $\sigma_C < K_C$.

$$N = pR = 100\,000 \text{ kg/m.}$$

Fissando lo spessore:

$$s = 30 \text{ cm} \quad \text{è} \quad \sigma_C = 33 \text{ kg/cm}^2 < K_F.$$

Si ha:

$$J = \frac{100}{12} 30^3 = 22,5 \cdot 10^4 \text{ cm}^4/\text{m}$$

$$W = \frac{100}{6} 30^2 = 15\,000 \text{ cm}^3/\text{m}$$

$$A = 30 \cdot 100 = 3\,000 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$\rho^2 = \frac{J}{A} = 75 \text{ cm}^2$$

Si ottiene:

$$X \cong 280 \text{ kg/m;} \quad M_A \cong -92\,000 \text{ kg cm/m;} \quad e_A \cong 0,92 \text{ cm.}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{100\,000}{3\,000} + \frac{92\,000}{15\,000} = 39 \text{ kg/cm}^2 < K_C.$$

Si è usata per la $\sigma_{C_{\max}}$ la formula binomia perché il centro di pressione è interno al nocciolo della sezione.

In una sezione qualunque il materiale è tutto compresso e non sarebbe indispensabile l'impiego dell'armatura metallica; tuttavia è bene disporre egualmente una doppia stesura di ferri, all'intradosso e all'estradosso dell'arco. (Per gli aspetti pratici del problema si rimanda alle materie specialistiche. La struttura esaminata corrisponde ad un elemento di diga o di serbatoio circolare soggetto alla pressione dell'acqua).

Si noti anche che questa struttura andrebbe risolta facendo uso della macchina calcolatrice, per ottenere una buona approssimazione nei risultati numerici.

SPOSTAMENTO DELLA SEZIONE DI CHIAVE.

La sezione di chiave compie, per ragioni di simmetria, solo uno spostamento verticale η_C . Nel semiarco AC la sezione C , supposta incastrata, rimane fissa, e la sezione A d'imposta, completamente svincolata, trasla, relativamente ad essa, della stessa quantità. Calcoliamo questo spostamento valutando separatamente i contributi della deformazione assiale e flessionale (fig. 35.5). Assumiamo positivi gli spostamenti di C verso il basso e, conseguentemente, quelli di A verso l'alto:

$$\downarrow \eta_C = \uparrow \eta_A = \int_0^\theta \frac{N ds}{EA} \sin \omega + \int_0^\theta \frac{M ds}{EJ} R \sin \omega.$$

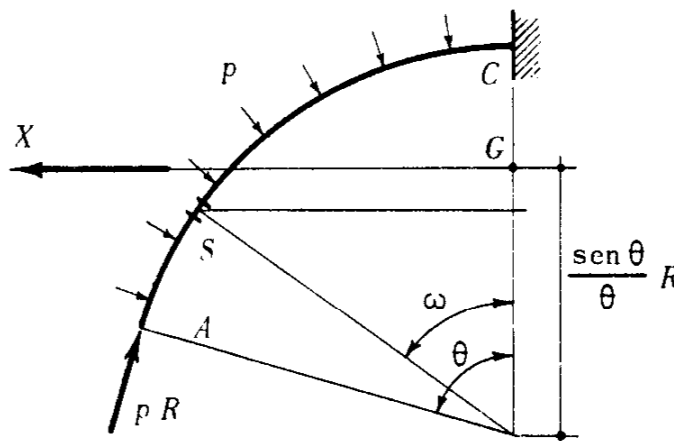


Fig. 35.5

È:

$$N = pR; \quad ds \cdot \sin(\theta - \omega) = dy; \quad ds = R d\omega; \quad M = XR \left[\cos(\theta - \omega) - \frac{\sin \theta}{\theta} \right]$$

Sostituendo:

$$\eta_C = \int_0^\theta \frac{pR^2}{EA} \sin(\theta - \omega) d\omega +$$

$$+ \int_0^\theta \frac{\chi R^3}{EJ} \left[\cos(\theta - \omega) - \frac{\sin \theta}{\theta} \right] \left[\sin \theta - \sin(\theta - \omega) \right] d\omega$$

Integrando si ottiene:

$$\eta_C = \frac{pR^2}{EA} (1 - \cos \theta) + \frac{\chi R^3}{EJ} \left(\frac{\sin \theta}{\theta} - \frac{\sin \theta \cos \theta}{2} - \frac{\sin^2 \theta}{2} \right)$$

Con i valori numerici prima assegnati e fissando per il calcestruzzo $E = 2 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$, è:

$$\eta_C = 0,083 + 1,48 = 1,563 \text{ cm.}$$

CASO PARTICOLARE: $\theta = \frac{\pi}{2}$ (arco semicircolare) (fig. 35.6).

In questo caso è:

$$Q = 2pR; \quad V = pR.$$

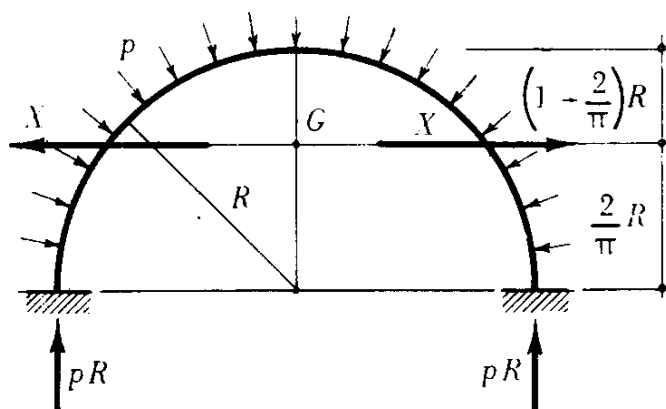


Fig. 35.6

La componente orizzontale della reazione dell'incastro è data dalla sola X che vale:

$$X = \frac{4\pi}{\pi^2 - 8} \frac{p}{R} \frac{J}{A} = \frac{4\pi}{\pi^2 - 8} pR \left(\frac{\rho}{R} \right)^2$$

$$M_A = -\frac{2}{\pi} R \cdot X = -\frac{8}{\pi^2 - 8} p \frac{J}{A} = -\frac{8}{\pi^2 - 8} p \rho^2$$

$$M_C = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) R \cdot X = \frac{4\pi - 8}{\pi^2 - 8} p \frac{J}{A} = \frac{4\pi - 8}{\pi^2 - 8} p \rho^2.$$

L'abbassamento della sezione di chiave vale:

$$\eta_C = \frac{pR^2}{EA} + \frac{4 - \pi}{2\pi} \frac{XR^3}{EJ}$$

Con i valori numerici precedenti si ha:

$$\eta_C = 0,166 + 0,855 = 1,021 \text{ cm}$$

36. - Risolvere la struttura di fig. 36.1 soggetta a pressione radiale uniforme su tutto l'arco CED.

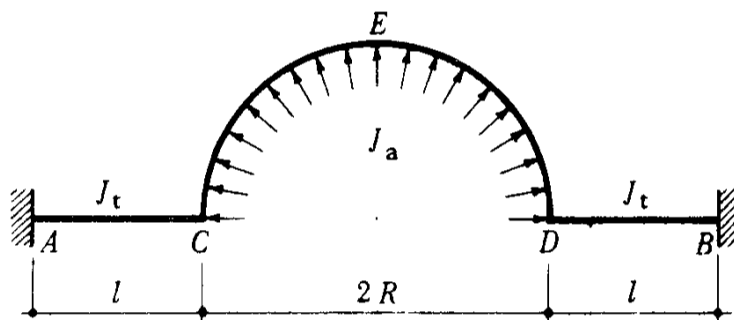


Fig. 36.1

La struttura è tre volte iperstatica; la simmetria rispetto l'asse mediano verticale riduce però a due il grado di indeterminazione.

Sezioniamo completamente la struttura in C e in D ; questo svincolamento presenta il duplice vantaggio di sfruttare la simmetria esistente, e di separare le parti aventi caratteristiche e comportamento diverso.

Indichiamo con H , V ed M_C le azioni interne esplicitate dallo svincolamento, eguali, per ragioni di simmetria, nelle due sezioni (fig. 36.2).

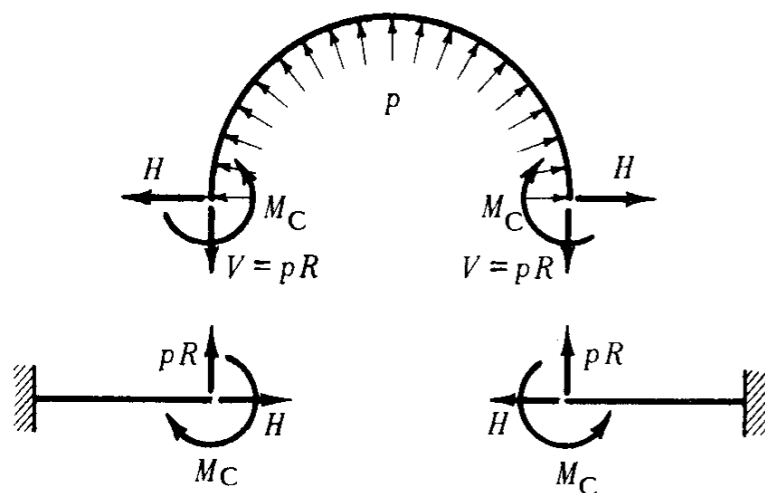


Fig. 36.2

Le reazioni verticali sono note: per l'equilibrio alla traslazione verticale dell'arco è $V = pR$. Sono incognite H ed M_C .

L'arco è l'esatta funicolare della pressione radiale e delle reazioni V ; è facile pertanto calcolarne le deformazioni complessive valutando separatamente quelle generate dallo stato di uniforme compressione pR , e quelle provocate dal regime flessionale indotto da H e da M_C .

Poiché, all'evidenza, è trascurabile la deformazione assiale delle due mensole, le condizioni di congruenza, in simboli, risultano:

$$\begin{cases} \varphi_{C \text{ mensola}} = \varphi_{C \text{ arco}} \\ \xi_{C \text{ arco}} = 0. \end{cases}$$

La congruenza degli spostamenti verticali è sempre soddisfatta, qualunque sia la freccia degli estremi liberi delle due mensole, mediante un moto rigido di traslazione dell'arco.

Osserviamo inoltre che le mensole si comportano nei riguardi dell'arco come incastri angularmente cedevoli, e tanto maggiore è la loro deformabilità flessionale, tanto più il regime statico nell'arco si discosta da quello di uniforme compressione.

Pertanto se l è dello stesso ordine di grandezza di R (o comunque non piccolo rispetto ad esso) la curva delle pressioni si discosta senz'altro dall'asse geometrico dell'arco ed è lecito trascurare la deformazione assiale provocata da pR in confronto a quella flessionale generata da H ed M_C .

L'inverso accade se l è piccolo rispetto ad R . Al limite, se $l = 0$, la struttura si riduce all'arco CED incastrato alle imposte perfettamente rigido se non si tenesse conto della deformazione assiale.

Esplicitiamo ora le equazioni di congruenza; giacché la sezione di chiave dell'arco non ruota né trasla orizzontalmente, fissiamola con un incastro e valutiamo le deformazioni del solo quadrante CE (fig. 36.3).

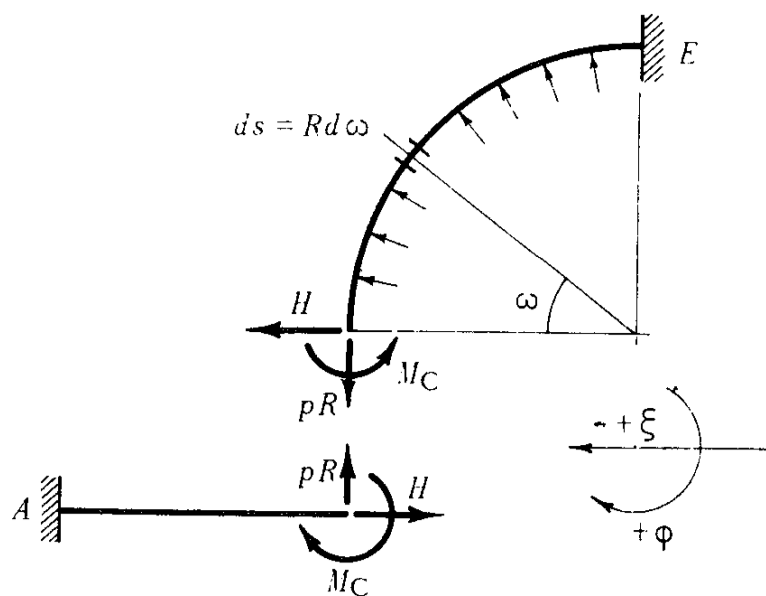


Fig. 36.3

In una sezione generica dell'arco è:

$$M_S = HR \sin \omega - M_C.$$

Con i sensi positivi indicati in fig. 36.3 si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{M_C l}{E J_t} - \frac{(pR) l^2}{2 E J_t} = \int_0^{\pi/2} \frac{(HR \sin \omega - M_C)}{E J_a} R d\omega \\ \int_0^{\pi/2} \frac{(HR \sin \omega - M_C)}{E J_a} R d\omega \cdot R \sin \omega + \frac{p R^2}{E A_a} = 0 \end{array} \right.$$

Nel caso particolare di $J_t = J_a$ si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_C \left(l + \frac{\pi}{2} R \right) - HR^2 - pR \frac{l^2}{2} = 0 \\ -M_C + \frac{\pi}{4} R \cdot H + p \rho^2 = 0. \end{array} \right.$$

Risolvendo:

$$M_C = \frac{\pi}{4} R \cdot H + p \rho^2$$

$$H = pR \cdot \frac{\frac{l}{2R} - \left(\frac{\rho}{R} \right)^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{R}{l} + 1 \right)}{\frac{\pi^2 - 8}{8} \frac{R}{l} + \frac{\pi}{4}}.$$

Qualora si trascuri la deformazione assiale dell'arco la precedenti espressioni diventano:

$$M_C = \frac{\pi}{4} R \cdot H$$

$$H = \frac{p l}{\frac{\pi^2 - 8}{4} \frac{R}{l} + \frac{\pi}{2}}.$$

Nel caso particolare di $l = 0$ (arco semicircolare CED incastrato alle imposte) si ottiene:

$$M_C = -\frac{8}{\pi^2 - 8} p \rho^2$$

$$H = -\frac{4\pi}{\pi^2 - 8} p \frac{\rho^2}{R}.$$

Il segno negativo sta ad indicare che il momento M_C trasmesso all'arco ha senso orario, e la spinta H è diretta verso l'interno. Questi risultati coincidono, a meno del segno, a causa del senso di p , con quelli dell'es. 35 ottenuti per $\theta = \frac{\pi}{2}$.

* * *

37. - Risolvere l'arco parabolico a due cerniere di fig. 37.1, soggetto a carico verticale uniforme su tutta la luce.

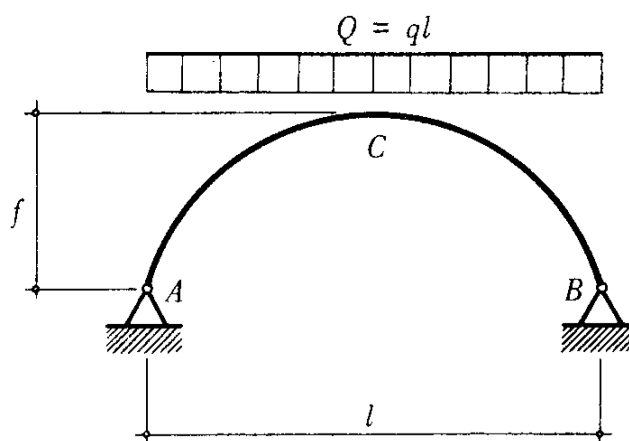


Fig. 37.1

La curva delle pressioni è una parabola del secondo ordine e si discosta, molto poco dall'asse geometrico dell'arco. È necessario pertanto tener conto, nella risoluzione del problema iperstatico, anche della deformazione assiale.

Individuiamo una struttura principale che sia l'esatta funicolare dei carichi esterni, in modo da potere suddividere il procedimento risolutivo in due distinte fasi: la prima, in cui l'arco sia sollecitato solo assialmente ed il regime statico in esso esistente e gli spostamenti dei punti dell'asse geometrico, siano funzioni note dei soli carichi esterni; la seconda, costituita dal regime flessionale generato dalla reazione iperstatica esplicitata dallo svincolamento.

Osserviamo al proposito che la struttura assegnata è una sola volta iperstatica e staticamente indeterminata. Le componenti verticali delle reazioni delle cerniere sono note e valgono entrambe $V = \frac{Q}{2}$, per ragioni di simmetria.

Svincoliamo in A sostituendo alla cerniera un carrello a piano di scorrimento orizzontale e indichiamo con H la componente orizzontale incognita esplicitata (fig. 37.2). Naturalmente è $H_A = H_B = H$ per l'equilibrio dell'arco alla traslazione orizzontale.

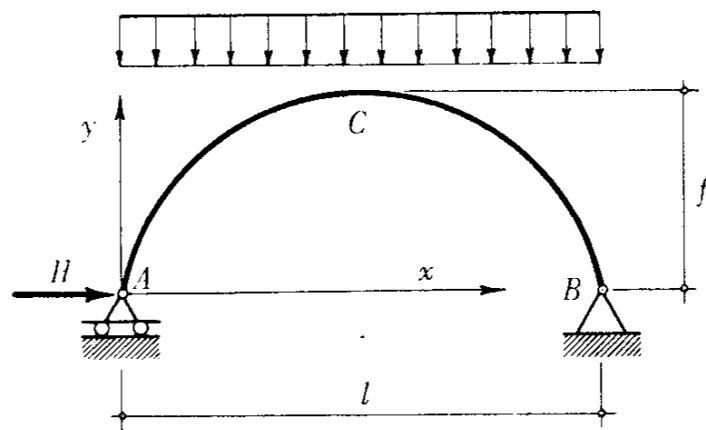


Fig. 37.2

L'equazione della parabola riferita agli assi x ed y di figura è:

$$y = \frac{4f}{l} \left(x - \frac{x^2}{l} \right).$$

La tangente all'origine A vale:

$$y'(A) = \frac{4f}{l}.$$

Il valore della spinta che rende la reazione della cerniera tangente all'arco è:

$$H_0 = \frac{Q/2}{4f/l} = \frac{Ql}{8f}.$$

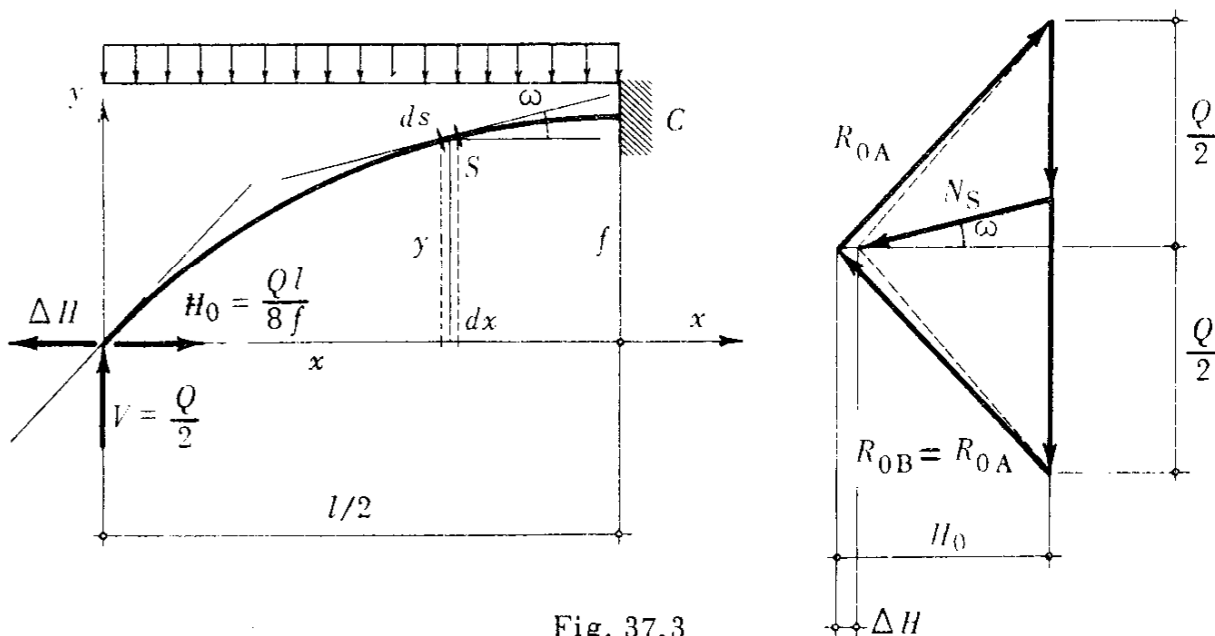
(Come è noto $\frac{Ql}{8f}$ è il valore della spinta nell'arco isostatico a tre cerniere A, B, C , il cui asse geometrico coincide esattamente con la funicolare del carico uniforme).

Esprimiamo la spinta H dell'arco iperstatico nella forma $H = H_0 - \Delta H$. Con ciò si realizza il procedimento indicato in partenza: il sistema di carichi $V = \frac{Q}{2}$; $H_0 = \frac{Ql}{8f}$ e $Q = ql$ genera nella struttura lo stato di uniforme compressione; l'aliquota ΔH è la «spinta addizionale». Essa si manifesta quale conseguenza dell'accorciamento dell'asse dell'arco e, mediante una deformazione flessionale impone alla struttura il rispetto del vincolo soppresso. Ovviamente ΔH ha senso opposto ad H_0 , come indica il segno negativo.

La condizione di congruenza è:

$$\xi_A = 0.$$

Possiamo limitare lo studio delle deformazioni a metà struttura, riferendo lo spostamento orizzontale di A , anziché all'imposta B , alla sezione di chiave C , che per ragioni di simmetria non ruota, né trasla orizzontalmente (fig. 37.3).



La condizione di congruenza si esprime nella forma:

$$\int_{AC} \frac{N_S ds}{EA} \cos \omega - \int_{AC} \frac{M_S ds}{EJ} y = 0.$$

Applicando il criterio già adottato in precedenti esercizi, si può trascurare, nel calcolo della deformazione assiale, il contributo dello sforzo secondario generato da ΔH .

Si pone cioè:

$$N_S = \frac{H_0 - \Delta H}{\cos \omega} \cong \frac{H_0}{\cos \omega}.$$

Inoltre è:

$$M_S = \Delta H \cdot y; \quad ds = \frac{dx}{\cos \omega}; \quad \cos \omega = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Sostituendo, se l'arco ha sezione costante, gli integrali assumono la forma:

$$\frac{H_0}{EA} \int_0^{l/2} \frac{1}{\cos \omega} dx - \frac{\Delta H}{EJ} \int_0^{l/2} \frac{y^2}{\cos \omega} dx = 0.$$

La risoluzione di questi integrali si presenta alquanto laboriosa; essa risulta notevolmente semplificata se la sezione retta dell'arco è variabile secondo la relazione:

$$A = \frac{A_C}{\cos \omega}; \quad J = \frac{J_C}{\cos \omega}$$

(A_C e J_C sono l'area e il momento d'inerzia della sezione di colmo C).

In questo caso si ottiene:

$$\frac{H_0}{EA_C} \int_0^{l/2} dx - \frac{\Delta H}{EJ_C} \int_0^{l/2} y^2 dx = 0.$$

Eseguendo le integrazioni e risolvendo:

$$\Delta H = \frac{Ql}{8f} \cdot \frac{1}{1 + \frac{8}{15} \frac{A_C}{J_C} f^2}.$$

La spinta H complessivamente vale:

$$H = \frac{Ql}{8f} - \Delta H = \frac{Ql}{8f} \cdot \frac{1}{1 + \frac{15}{8} \cdot \frac{J_C}{A_C} \cdot \frac{1}{f^2}}.$$

Il **momento flettente nell'arco** è dovuto alla sola spinta addizionale; varia con legge parabolica ($M_S = \Delta H \cdot y$), ed è graficamente rappresentato dallo stesso asse geometrico riferito alla corda AB , retta d'azione della ΔH .

La **curva delle pressioni** si discosta leggermente dall'asse dell'arco per effetto della ΔH ; essa è interamente esterna all'asse geometrico, giacché il momento flettente tende ovunque le fibre all'intradosso e comprime quelle all'estradosso.

Il valore massimo dell'eccentricità della risultante delle azioni interne si verifica nella sezione di chiave:

$$e_C = \frac{M_C}{N_C} = \frac{\Delta H \cdot f}{H_0} = \frac{f}{1 + \frac{8}{15} \frac{A_C}{J_C} f^2}.$$

ABBASSAMENTO DELLA SEZIONE DI CHIAVE.

L'abbassamento della sezione di chiave è eguale, in valore assoluto, all'innalzamento dell'estremo libero A della struttura principale a mensola.

$$\downarrow \eta_C = \uparrow \eta_A = \int_{AC} \frac{N_S ds}{EA} \sin \omega + \int_{AC} \frac{M_S ds}{EJ} x.$$

Se l'arco ha sezione costante:

$$\eta_c = \frac{H_0}{EA} \int_0^{l/2} \frac{\sin \omega}{\cos^2 \omega} dx + \frac{\Delta H}{EJ} \int_0^{l/2} \frac{yx}{\cos \omega} dx.$$

E se la sezione dell'arco varia secondo la relazione precedente:

$$\eta_c = \frac{H_0}{EA_c} \int_0^{l/2} y' dx + \frac{\Delta H}{EJ_c} \int_0^{l/2} yx dx.$$

Eseguendo queste integrazioni, si ottiene:

$$\eta_c = \frac{Ql}{8EA_c} \frac{2 + \frac{25}{128} \cdot \frac{l^2}{f^2}}{1 + \frac{15}{8} \cdot \frac{J_c}{A_c f^2}}.$$

RISOLUZIONE NUMERICA E CALCOLO DI RESISTENZA.

Si verifichi un arco in cemento armato di luce $l = 20,00$ m; freccia $f = 3,00$ m, sottoposto al carico uniforme $q = 1000$ kg/m.

L'arco abbia sezione variabile secondo la relazione:

$$A = \frac{A_c}{\cos \omega}, \quad J = \frac{J_c}{\cos \omega}.$$

La sezione di chiave ha dimensioni 15×40 cm ($b = 15$) ed è armata con $4\phi 12$ dritti, 2 superiori e 2 inferiori. Escludendo per il momento il contributo dell'armatura metallica (che è inferiore al 2 %) si ottiene:

$$A_c = 600 \text{ cm}^2, \quad J_c = 80\,000 \text{ cm}^4.$$

Alle imposte si ha:

$$y'_{(A)} = \frac{4f}{l} = 0,6 \quad \omega_A = 30^\circ 58''$$

$$\cos \omega_A = 0,85747 \quad A_A \cong 700 \text{ cm}^2 \quad J_A \cong 93\,500 \text{ cm}^4.$$

Si ottiene:

$$V = 10\,000 \text{ kg}$$

$$H_0 = \frac{20\,000 \cdot 20}{8 \cdot 3} = 16\,667 \text{ kg}$$

$$\Delta H = 16\,667 \cdot \frac{1}{1 + 360} \cong 47 \text{ kg}$$

$$H = 16\,620 \text{ kg}$$

Nella sezione di chiave risulta:

$$N_C = 16\,620 \text{ kg}$$

$$M_C = 47 \cdot 300 = 14\,100 \text{ kg cm}$$

$$e_C = \frac{14\,100}{16\,620} \cong \frac{14\,100}{16\,667} = 0,85 \text{ cm.}$$

Nella sezione d'imposta invece:

$$N_A = \sqrt{10\,000^2 + 16\,620^2} \cong \sqrt{10\,000^2 + 16\,667^2} = 19\,400 \text{ kg.}$$

Tenendo ora conto anche del contributo dell'armatura metallica nel calcolo di verifica di resistenza si ottiene:

- per la sezione di chiave:

$$A_{C \text{ totale}} = 600 + 45,2 \cong 645 \text{ cm}^2$$

$$J_{C \text{ totale}} = 80\,000 + 45,2 \cdot 18^2 = 94\,600 \text{ cm}^4$$

$$W = \frac{94\,600}{20} = 4\,730 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_{\max (C)} = \frac{16\,620}{645} + \frac{14\,100}{4730} = 25,8 + 3 \cong 29 \text{ kg/cm}^2;$$

- per la sezione d'imposta:

$$A_{C \text{ totale}} = \frac{600}{0,85747} + 45,2 \cong 745 \text{ cm}^2$$

$$\sigma_{(A)} = \frac{19\,400}{745} \cong 26 \text{ kg/cm}^2.$$

L'abbassamento della sezione di chiave vale:

$$\eta_c = \frac{20\,000 \cdot 2000}{8 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 645} \cdot \frac{2 + 8,7}{1 + 0,0305} \cong 0,4 \text{ cm}.$$

38. - Risolvere il portale ad arco parabolico di fig. 38.1, incernierato alle imposte A e B , e soggetto a carico verticale uniforme su tutta la luce.

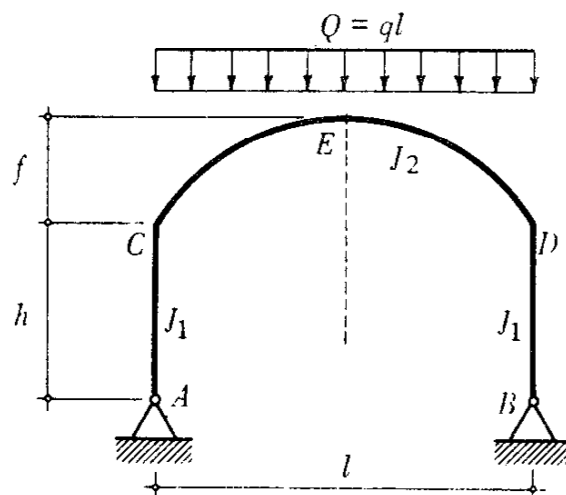


Fig. 38.1

La struttura è una volta iperstatica ed una volta staticamente indeterminata.

La curva delle pressioni è costituita per l'arco CD da una parabola del secondo ordine avente per tangenti nei punti estremi A e B le ret-

te d'azione inclinate delle reazioni delle cerniere, e da queste stesse rette per i piedritti. Si discosta pertanto notevolmente dall'asse geometrico, ed è lecito trascurare, nella risoluzione del problema iperstatico, la deformazione dovuta allo sforzo normale in confronto a quella provocata dal momento flettente.

Sfruttiamo la simmetria esistente, limitando lo studio al mezzo portale ACE . Fissiamo con un incastro la sezione di chiave E che, per ragioni di simmetria, non ruota né si sposta orizzontalmente, e sezioniamo totalmente la struttura in C , separando il piedritto dall'arco (fig. 38.2)..

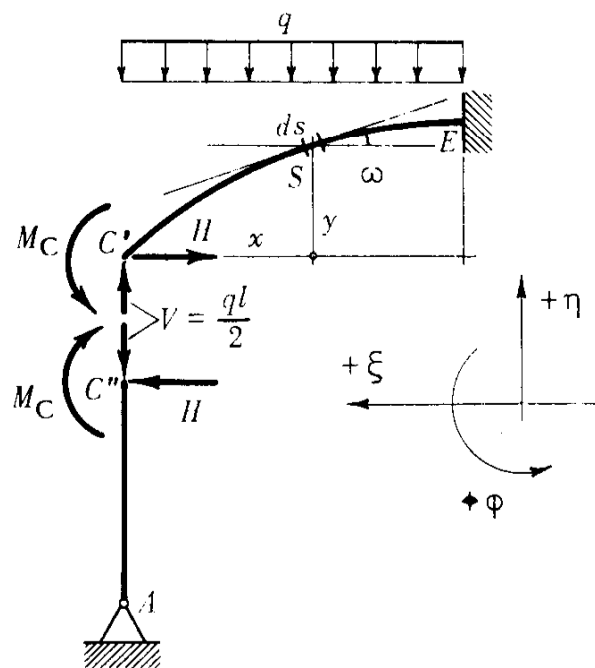


Fig. 38.2

La struttura principale è costituita dall'arco a mensola EC' e dal piedritto labile AC'' .

Il nodo C del portale assegnato compie solo una rotazione ed uno spostamento orizzontale; lo spostamento verticale è nullo per effetto della indeformabilità assiale del piedritto.

Nella struttura principale la congruenza degli spostamenti orizzontali è soddisfatta, qualunque sia il valore di ξ_C , dell'estremo libero dell'arco, mediante un moto rigido del piedritto di rotazione attorno alla cerniera A . Per quanto riguarda la congruenza degli spostamenti vertica-

li l'innalzamento η_C , dell'estremo della mensola corrisponde in realtà all'abbassamento η_E del colmo, giacché la configurazione dell'arco della struttura principale differisce da quella effettiva del portale per un moto di traslazione rigida verticale $|\eta_C| = |\eta_E|$:

Pertanto l'unica condizione di congruenza da imporre è:

$$\varphi_{C'} = \varphi_{C''}$$

in accordo col fatto che la struttura è una sola volta staticamente indeterminata. Infatti le azioni mutue verticali valgono $V = q \frac{l}{2}$ (come si deduce immediatamente dall'equilibrio alla traslazione verticale dell'intera struttura) e M_C ed H sono legate dalla relazione d'equilibrio alla rotazione del piedritto:

$$M_C = Hh.$$

Con i sensi positivi di fig. 38.2 è:

$$\varphi_{C'} = \varphi_{C''} = \frac{\xi_{C'}}{h} - \frac{M_C h}{3 EJ}.$$

Si noti che se si esprime M_C in funzione di H e se si moltiplicano tutti i termini per h , si giunge alla relazione:

$$-\varphi_{C'} \cdot h + \xi_{C'} - \frac{Hh^3}{3 EJ} = 0.$$

Questa è l'espressione dell'equazione di congruenza $\xi_A = 0$, nel caso in cui si assuma la struttura principale a mensola di fig. 38.3.

Procediamo ad una composizione cinematica delle deformazioni dell'arco allo scopo d'esprimere $\varphi_{C'}$ e $\xi_{C'}$:

L'equazione della parabola, riferita agli assi orizzontale e verticale con origine in C' , è:

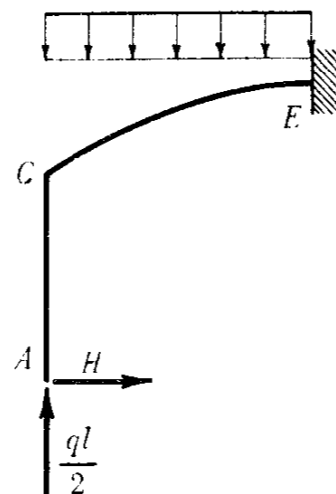


Fig. 38.3

$$y = \frac{4f}{l^2} (l - x) x$$

inoltre:

$$y' = \frac{4f}{l^2} (l - 2x); \quad ds = \frac{dx}{\cos \omega} = dx \sqrt{1 + y'^2}$$

Nella sezione generica S è:

$$M_S = \frac{q}{2} (l - x) x - H (h + y).$$

L'equazione di congruenza diviene:

$$\int_0^{l/2} \frac{M_S}{EJ_a} \frac{dx}{\cos \omega} = \frac{1}{h} \int_0^{l/2} \frac{M_S}{EJ_a} \frac{y}{\cos \omega} dx - \frac{Hh^2}{3 EJ_p}.$$

Se l'arco e i piedritti hanno sezione costante:

$$\frac{1}{EJ_a} \int_0^{l/2} \frac{M_S}{\cos \omega} dx = \frac{1}{EJ_a \cdot h} \int_0^{l/2} M_S \frac{y}{\cos \omega} dx - \frac{Hh^2}{3 EJ_p}.$$

Si ottiene in questo caso:

$$H = \frac{Ql^2}{8h^2} \cdot \frac{J_p}{J_a} \left(1 + \frac{4}{5} \frac{f}{h} \right) \frac{1}{K}$$

ove la costante K vale:

$$K = 8 \left[1 + \frac{f}{h} \left(\frac{3}{2} + 2 \frac{J_p}{J_a} \cdot \frac{l}{h} + \frac{4}{5} \left(\frac{J_p}{J_a} \cdot \frac{l}{h} \right)^2 \right) \right].$$

Naturalmente la spinta H risulta minore di quella del corrispondente arco a due cerniere fisse, a causa della deformabilità flessionale dei piedritti che consentono un cedimento orizzontale delle imposte C e D della volta.

Se nell'espressione di H si pone $h = 0$ si ottiene

$$H = \frac{Ql^2}{8f},$$

cioè il valore della spinta dell'arco a tre cerniere.

Questo fatto è dovuto all'aver trascurato la deformazione assiale nella risoluzione del problema iperstatico. Di conseguenza la struttura allorché si riduce all'arco CED diviene la funicolare dei carichi e rimane indeformata.

È buona norma costruttiva realizzare il portale a volta munito di catena CD (fig. 38.4), in modo da assorbire la spinta alle imposte della volta e trasmetterla solo in minima parte ai piedritti. Infatti H_2 è di solito molto piccola rispetto ad H_1 ; il suo valore dipende dalla deformabilità assiale della catena (fig. 38.5).

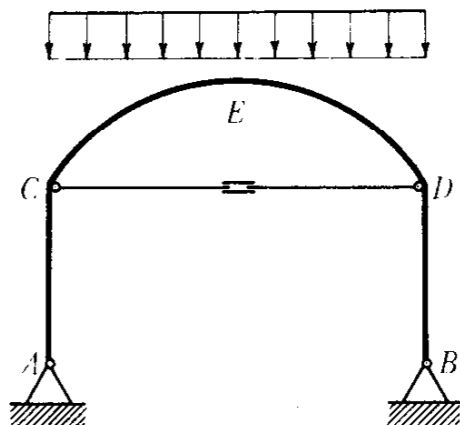


Fig. 38.4

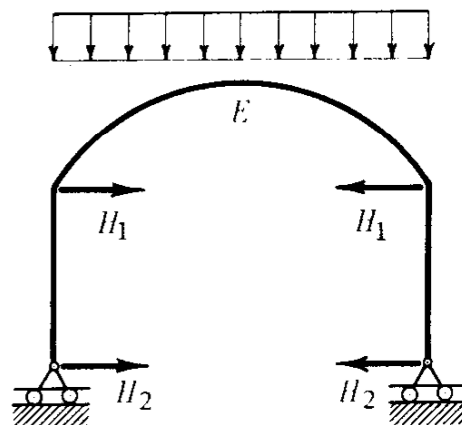


Fig. 38.5

Si noti inoltre che il portale a volta di fig. 38.4 ammette la struttura principale di fig. 38.6 quale esatta funicolare dei carichi: in essa i carrelli A e B reagiscono con le forze verticali $V = q \frac{l}{2}$ e le spinte H_1 sono le stesse del corrispondente arco CED a tre cerniere.

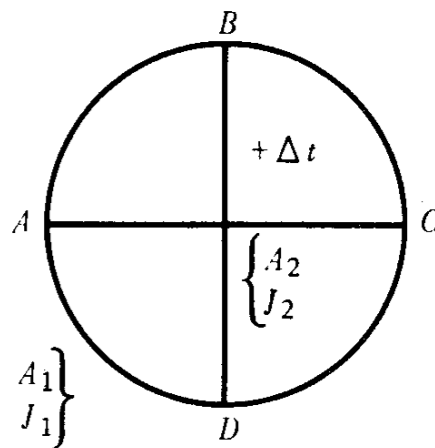


Fig. 39.1

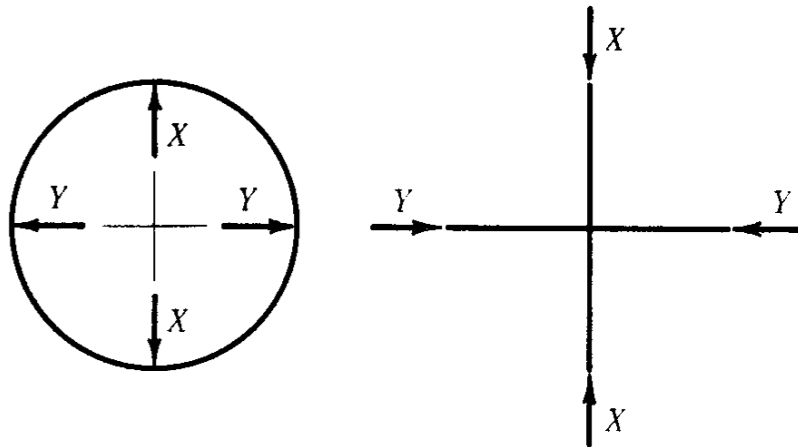


Fig. 39.2

AC e BD , sono costituite da forze X e Y radiali (fig. 39.2). Il loro senso è facilmente prevedibile: per effetto dell'aumento di temperatura $+\Delta t$ l'asta BD preme contro l'anello esterno con le forze X ; sotto l'azione di queste l'anello si deformerebbe in modo da subire un aumento del diametro BD e una diminuzione del diametro AC ; l'asta AC della croce si oppone a questa deformazione reagendo in A e in C con le forze Y , dirette esse pure verso l'esterno. Le X e Y non sono eguali perché è diversa la condizione di carico rispetto ai due diametri: $\Delta t = 0$ lungo AC , $\Delta t \neq 0$ lungo BD .

A causa della simmetria rispetto ai diametri AC e BD , ciascun quadrante risulta soggetto alle medesime azioni interne: le forze X e Y si

ripartiscono internamente all'anello in parti eguali $\frac{X}{2}$ e $\frac{Y}{2}$, ed inoltre è $M_A = M_C$ e $M_B = M_D$.

Si vede quindi come la struttura dodici volte iperstatica risulta, per le condizioni di carico assegnate, solo tre volte staticamente indeterminata: si hanno le due incognite X e Y quali azioni mutue tra croce e anello, e una sola incognita tra le azioni interne dell'anello; ad esempio M_A (M_B si determina in funzione di M_A , X e Y con relazione d'equilibrio).

Per la risoluzione del problema limitiamo lo studio al quadrante AB : supponiamo incastrata la sezione B , che non ruota, e imponiamo le condizioni di congruenza alla sezione A , completamente svincolata (fig. 39.3).

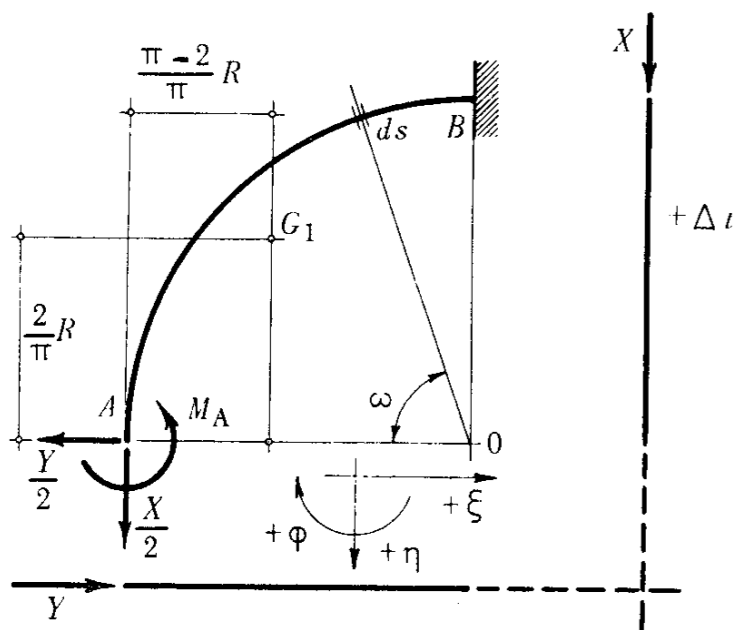


Fig. 39.3

Esse esprimono la rotazione e gli spostamenti della sezione A rispetto alla B :

$$\begin{cases} \varphi_A = 0 \\ \xi_A = \frac{YR}{EA_2} \\ \eta_A = \alpha R \Delta t - \frac{XR}{EA_2} \end{cases}$$

Con i sensi positivi di fig. 39.3 esplicitando i vari termini, si ottiene:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{EJ_1} \int_0^{\pi/2} \left[-M_A + \frac{Y}{2} R \sin \omega - \frac{X}{2} R (1 - \cos \omega) \right] R d\omega = 0 \\ & - \frac{1}{EJ_1} \int_0^{\pi/2} \left[-M_A + \frac{Y}{2} R \sin \omega - \frac{X}{2} R (1 - \cos \omega) \right] R \sin \omega R d\omega = \frac{YR}{EA_2} \\ & - \frac{1}{EJ_1} \int_0^{\pi/2} \left[-M_A + \frac{Y}{2} R \sin \omega - \frac{X}{2} R (1 - \cos \omega) \right] R (1 - \cos \omega) R d\omega = \\ & \qquad \qquad \qquad = \alpha R \Delta t - \frac{XR}{EA_2} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} & -\frac{\pi}{2} \frac{M_A R}{EJ_1} + \frac{1}{2} \frac{YR^2}{EJ_1} - \frac{\pi-2}{4} \frac{XR^2}{EJ_1} = 0 \\ & + \frac{M_A R^2}{EJ_1} - \frac{\pi}{8} \frac{YR^3}{EJ_1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{XR^3}{EJ_1} = \frac{YR}{EA_2} \\ & + \frac{\pi-2}{2} \frac{M_A R^2}{EJ_1} - \frac{1}{4} \frac{YR^3}{EJ_1} + \frac{3\pi-8}{8} \frac{XR^3}{EJ_1} = \alpha R \Delta t - \frac{XR}{EA_2} \end{aligned} \right.$$

la prima equazione del sistema si può scrivere nella forma:

$$\left[-M_A + \frac{Y}{2} \left(\frac{2}{\pi} R \right) - \frac{X}{2} \left(\frac{\pi-2}{\pi} R \right) \right] = 0$$

e sta ad indicare che la risultante F_A delle azioni interne $\frac{X}{2}$, $\frac{Y}{2}$ e M_A della sezione A , passa per il baricentro G_1 del quadrante. Infatti, poiché le sezioni terminali A e B non ruotano deve essere (fig. 39.4).

$$\varphi_A = \int_0^{\pi/2} \frac{M ds}{EJ_1} = \int_0^{\pi/2} \frac{(F_A y)}{EJ_1} ds = \frac{F_A}{EJ_1} \int_0^{\pi/2} y ds = 0$$

e da queste espressioni si vede come risultano nulli sia l'area del diagramma del momento, che il momento statico del sistema di masse (quadrante AB) rispetto alla retta d'azione della F_A .

La deformazione a sforzo normale della croce è generalmente trascurabile in confronto a quella flessionale dell'anello. Infatti i rispettivi coefficienti elastici, a parte il fattore numerico, valgono:

$$\text{deformazione assiale della croce: } \frac{R}{EA_2}$$

$$\text{deformazione flessionale dell'anello: } \frac{R^3}{EJ_1}.$$

Confrontandole si ha:

$$\frac{R^3}{EJ_1} : \frac{R}{EA_2} = \frac{R^2}{\left(\frac{J_1}{A_2}\right)}.$$

Questo rapporto ha valori molto elevati se le dimensioni della sezione della croce sono eguali o dello stesso ordine di grandezza di quelle della sezione dell'anello. È pertanto lecito, in questa ipotesi, pensare che gli effetti provocati dalla variazione termica nell'asta BD , siano compensati dalla sola deformazione flessionale dell'anello, e scrivere il sistema di equazioni di congruenza nella forma più semplice:

$$\left\{ \begin{array}{l} - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{M_A R}{EJ_1} + \frac{1}{2} \frac{YR^2}{EJ_1} - \frac{\pi-2}{4} \frac{XR^2}{EJ_1} = 0 \\ + \frac{M_A R^2}{EJ_1} - \frac{\pi}{8} \frac{YR^3}{EJ_1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{XR^3}{EJ_1} = 0 \\ + \frac{\pi-2}{2} \frac{M_A R^2}{EJ_1} - \frac{1}{4} \frac{YR^3}{EJ_1} + \frac{3\pi-8}{8} \frac{XR^3}{EJ_1} = \alpha R \Delta t. \end{array} \right.$$

(Naturalmente non è più lecito introdurre questa semplificazione se la sezione della croce è piccola in confronto a quella dell'anello).

RISOLUZIONE NUMERICA.

Si abbia $+\Delta t = 200\text{ }^{\circ}\text{C}$.

La struttura sia di ferro: $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}$.

Raggio (medio) dell'anello $= 2,00 \text{ m} = 200 \text{ cm}$.

Anello: spessore $= 2 \text{ cm}$
 sezione $= 200 \text{ cm}^2/\text{m}$
 $J_1 = 66,7 \text{ cm}^4/\text{m}$.

Croce: spessore $= 1 \text{ cm}$
 sezione $= 100 \text{ cm}^2/\text{m}$
 $J_2 = 8,33 \text{ cm}^4/\text{m}$.

Si esegue il calcolo, per il Δt e le dimensioni trasversali assegnate, su di un elemento di struttura lungo, convenzionalmente, $1,00 \text{ m}$.

Risolvendo il sistema si ottiene:

$$X \cong 955 \text{ kg/m} \quad Y \cong 900 \text{ kg/m} \quad M_A = 22650 \text{ kgcm/m}.$$

Scrivendo per il quadrante AB l'equazione (non ancora sfruttata) di equilibrio alla rotazione, per esempio rispetto al punto B , si ha:

$$-M_A + M_B + (Y - X) \frac{R}{2} = 0$$

da cui:

$$M_B = 28150 \text{ kgcm/m}.$$

CURVA DELLE PRESSIONI.

La curva delle pressioni (fig. 39.4) è un rombo i cui lati passano per i baricentri dei singoli quadranti e i cui vertici hanno una eccentricità:

$$e_1 = \overline{AA'} = \overline{CC'} = \frac{M_A}{X/2} = 47,5 \text{ cm}$$

$$e_2 = \overline{BB'} = \overline{DD'} = \frac{M_B}{Y/2} = 62,5 \text{ cm}.$$

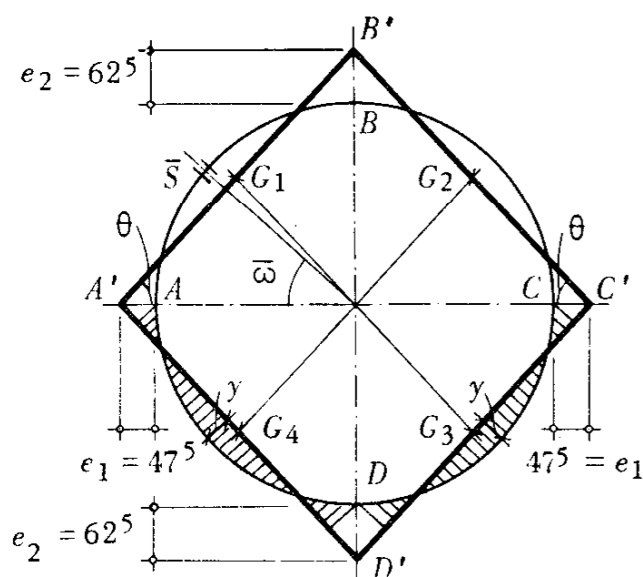


Fig. 39.4

L'inclinazione dei lati della curva delle pressioni si ottiene dal rapporto:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{X}{Y} = 1,06 \quad \theta^{\circ} = 46^{\circ} 80'.$$

Il piano della sezione $\bar{S}$, definita dall'angolo al centro $\bar{\omega} = 90^{\circ} - \theta = \cong 43^{\circ} 10'$, è normale alla curva delle pressioni. In $\bar{S}$ si ha:

$$T_{\bar{S}} = 0 \quad N_{\bar{S}} = F_A = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{2} = 655 \text{ kg/m} = N_{\max}$$

$$M_{\bar{S}} = 13\,000 \text{ kg cm/m} = M_{\max \text{ positivo}}.$$

Il **diagramma del momento flettente** è rappresentato dallo stesso asse geometrico riferito alla curva delle pressioni, con ordinate y valutate normalmente alla retta, a meno del valore della risultante F_A e della scala del disegno.

La **verifica di resistenza** deve essere eseguita per la sezione B che è la più sollecitata.

$$\sigma_{\max} = \frac{Y/2}{A_1} + \frac{M_B}{W_1} = \frac{450}{200} + \frac{28\,150}{66,7} = 2 + 423 = 425 \text{ kg/cm}^2 < K_F.$$

(per le fibre esterne tese dell'anello).

A causa del notevole valore della eccentricità della risultante delle azioni interne in confronto alle dimensioni della sezione, la flessione composta si discosta pochissimo da una flessione semplice.

CASO DI VARIAZIONE TERMICA Δt , COSTANTE ED UNIFORME, IN ENTRAMBE LE ASTE AC E BD DELLA CROCE INTERNA.

In questo caso evidentemente si ha $X = Y$ perché le condizioni di carico lungo i due diametri sono le medesime (fig. 39.5).

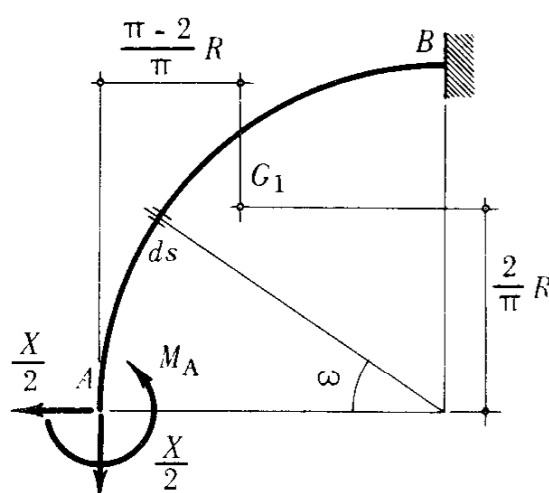


Fig. 39.5

Le incognite iperstatiche si riducono a due (X e M_A) e le condizioni di congruenza, per la medesima struttura principale del caso precedente, sono:

$$\begin{cases} \varphi_A = 0 \\ \eta_A = \alpha R \Delta t - \frac{XR}{E I_2} \end{cases}$$

Per quanto riguarda lo spostamento orizzontale di A è:

$$\xi_A = \eta_A.$$

Esplicitando i vari termini:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{EJ_1} \int_0^{\pi/2} \left[-M_A + \frac{X}{2} R (\sin \omega + \cos \omega - 1) \right] R d\omega = 0 \\ -\frac{1}{EJ_1} \int_0^{\pi/2} \left[-M_A + \frac{X}{2} R (\sin \omega + \cos \omega - 1) \right] R (1 - \cos \omega) R d\omega = \\ = \alpha R \Delta t - \frac{XR}{EA_2}. \end{array} \right.$$

Da cui:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{M_A R}{EJ_1} + \frac{4 - \pi}{4} \cdot \frac{XR^2}{EJ_1} = 0 \\ \frac{\pi - 2}{2} \frac{M_A R^2}{EJ_1} + \frac{3\pi - 10}{8} \frac{XR^3}{EJ_1} = \alpha R \Delta t - \frac{XR}{EA_2}. \end{array} \right.$$

La prima equazione esprime ancora la condizione che la risultante delle azioni interne agenti nella sezione A passi per il baricentro G_1 del quadrante.

Naturalmente anche in questo caso si possono fare le stesse considerazioni svolte in precedenza riguardo la lecita trascurabilità della deformazione a sforzo normale della croce.

La curva delle pressioni diviene un quadrato con i lati inclinati di 45° rispetto ai diametri AC e BD ; le sezioni A , B , C e D dell'anello sono egualmente sollecitate a tensoflessione e taglio.

OSSERVAZIONI. - Nel caso più generale in cui le due aste della croce interna siano sottoposte a variazione termica di diverso valore, ad esempio:

nell'asta AC : $\Delta_1 t$

nell'asta BD : $\Delta_2 t > \Delta_1 t$

si procede sempre con lo stesso criterio fissato in precedenza.

Le equazioni di congruenza diventano:

$$\begin{cases} \varphi_A = 0 \\ \xi_A = \alpha R \Delta_1 t - \frac{YR}{EA_2} \\ \eta_A = \alpha R \Delta_2 t - \frac{XR}{EA_2} \end{cases}$$

Questo caso si può considerare anche come la somma dei due precedentemente trattati: variazione termica $\Delta t = \Delta_2 t - \Delta_1 t$ nella sola asta BD , e variazione termica $\Delta_1 t$ in tutta la croce.

40. - Risolvere il telaio quadrato di fig. 40.1, soggetto al sistema di carichi esterni equilibrato P e Q .

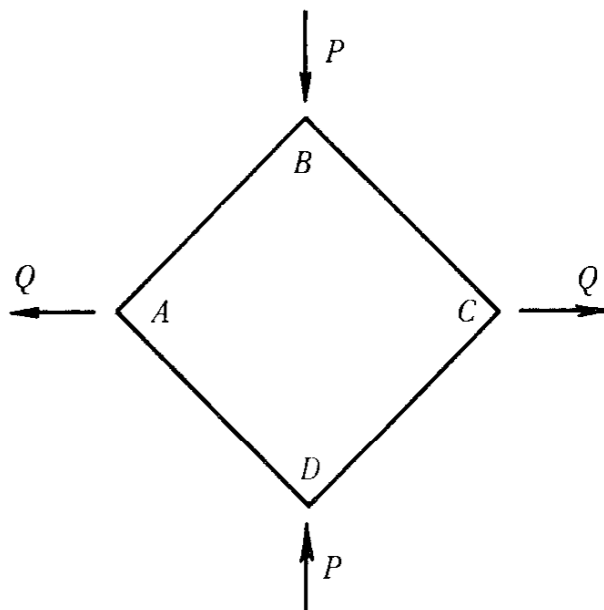


Fig. 40.1

Il telaio, esternamente non vincolato, è all'interno 3 volte iperstatico; tuttavia la simmetria della struttura e del carico rispetto alle diagonali riduce ad uno il grado di indeterminazione (vedi anche l'es. 39).

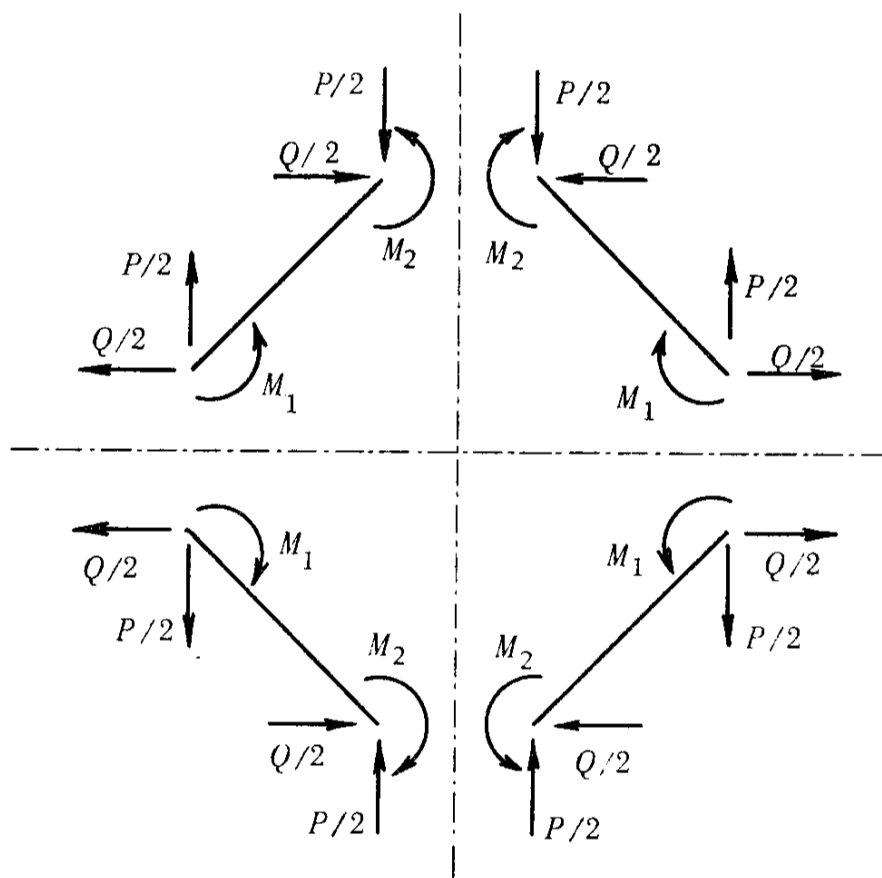


Fig. 40.2

Per comprendere meglio il funzionamento del telaio sezioniamolo in corrispondenza dei 4 vertici, separando le aste; ovviamente il regime statico in ciascuna di esse è il medesimo.

I carichi esterni P e Q si ripartiscono a metà per ragioni di simmetria.

Le azioni mutue interne orizzontali e verticali che le aste si trasmettono valgono ancora $P/2$ e $Q/2$ per ragioni sia di simmetria che di equilibrio alla traslazione nelle due direzioni. Rimangono da definire i momenti mutui; è chiaro tuttavia che è $M_A = M_C = M_1$ ed $M_B = M_D = M_2$.

Le coppie M_1 ed M_2 devono equilibrare alla rotazione il momento

generato dalle $P/2$ e $Q/2$ in ciascuna asta, quindi una sola di esse è l'incognita iperstatica, in accordo con quanto prima enunciato.

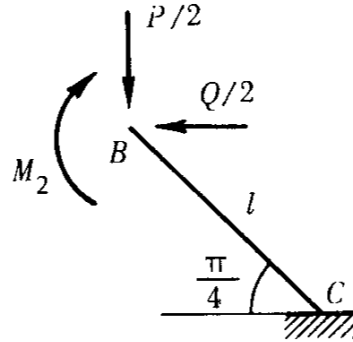


Fig. 40.3

Per esprimere la condizione di congruenza che consente la determinazione dell'incognita M_1 o M_2 , ricordiamo che i nodi A , B , C e D del telaio non ruotano. Pertanto limitiamo il nostro studio ad una sola asta (ad esempio la BC), considerandola incastrata ad un estremo (ad esempio C) ed imponendo all'altro, completamente libero, la condizione:

$$\varphi_B = 0.$$

Ossia:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{P}{2} \frac{l^2}{2EJ} + \frac{Q}{2} \frac{l^2}{2EJ} \right) - M_2 \frac{l}{EJ} = 0$$

da cui:

$$M_2 = \left(\frac{Q}{2} + \frac{P}{2} \right) \frac{l\sqrt{2}}{4}$$

Dall'equazione di equilibrio alla rotazione

$$\Sigma M_C = \left(\frac{P}{2} + \frac{Q}{2} \right) \frac{l\sqrt{2}}{2} - (M_1 + M_2) = 0$$

si ricava poi il valore di M_1 .

Si noti inoltre che nella struttura principale a mensola BC , così adottata, l'estremo libero B compie sia uno spostamento verticale, verso il basso, che orizzontale, verso sinistra. Infatti nel telaio $ABCD$ i nodi A e C subiscono un allontanamento relativo e i nodi B e D un avvicinamento relativo.

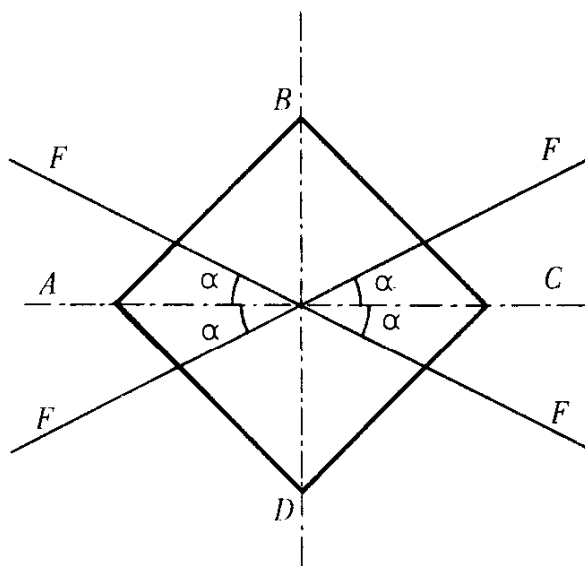


Fig. 40.4

La *curva delle pressioni* (fig. 40.4) ha l'andamento di figura. Essa è costituita per ciascuna asta dalla retta d'azione della risultante $F = \sqrt{\frac{P^2}{4} + \frac{Q^2}{4}}$, passante, per ragioni di simmetria, per il centro del quadrato, e inclinata, rispetto all'orizzontale, dell'angolo

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{P}{Q}.$$

Se $P = Q$ risulta anche $M_1 = M_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} P \cdot \frac{l}{2} \right)$.

La F vale $\frac{\sqrt{2}}{2} P$, passa per il punto di mezzo di ciascuna asta ed

ha la direzione perpendicolare.

* * *

41. - Risolvere il telaio chiuso di fig. 41.1, vincolato isostaticamente all'esterno con cerniera e carrello, e soggetto a carico orizzontale uniforme su tutta l'asta AC .

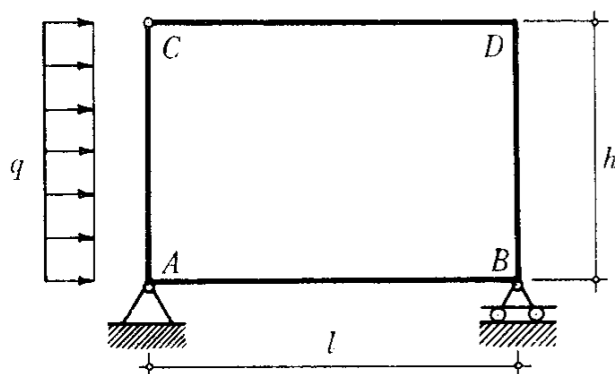


Fig. 41.1

Le reazioni dei vincoli esterni si determinano con le equazioni generali d'equilibrio:

$$\begin{aligned}\Sigma X &= 0 & H_A &= Q \\ \Sigma Y &= 0 & V_A &= V_B = V \\ \Sigma M_{(B)} &= 0 & V &= \frac{Qh}{2l}\end{aligned}$$

All'interno la struttura è due sole volte iperstatica e staticamente indeterminata, poiché la cerniera interna C consente la rotazione relativa delle due facce vincolate ad essa.

Rendiamo isostatico il telaio mediante l'introduzione di due cerniere nei nodi B e D e, allo scopo di poter prevedere l'esatto senso dei momenti mutui M_B ed M_D , esplicitati dallo svincolamento, valutiamo qualitativamente la deformata della struttura principale generata dal solo carico esterno q (fig. 41.2).

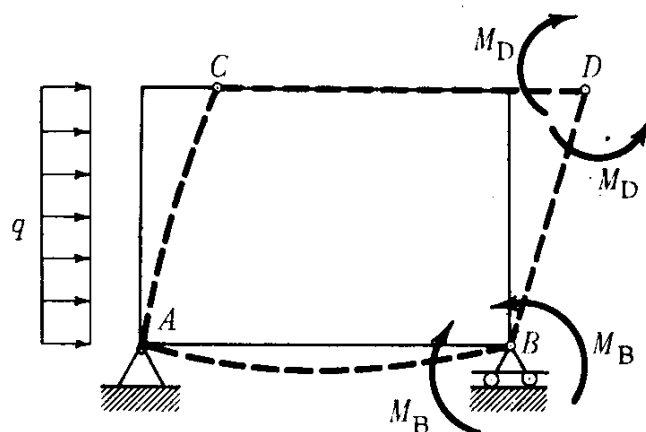


Fig. 41.2

L'asta AC si comporta come una mensola incastrata cedevolmente in A ; l'asta inferiore AB , solidale angularmente ad essa, è una trave rigidamente appoggiata soggetta nel suo estremo A alla coppia esterna $\frac{Qh}{2}$.

Le aste CD e BD sono bielle scariche e rimangono indeformate: la prima trasla orizzontalmente senza contrastare la freccia dell'estremo superiore della mensola AC , e la seconda ruota rigidamente attorno a B .

È facile constatare come in questa fase l'angolo in D diminuisce e quello in B aumenta. Le coppie mutue M_B ed M_D hanno pertanto il senso indicato in fig. 41.2; questo è a maggior ragione giustificato se si osserva che ciascuna di esse agisce in modo da ripristinare la congruenza dell'angolo cui è direttamente applicata, e, contemporaneamente, da incrementare ulteriormente la variazione dell'angolo adiacente provocata dal carico.

La fig. 41.3 pone in evidenza l'equilibrio delle aste CD e BD , completamente svincolate, e le azioni mutue trasmesse alla trave isostatica CAB .

È:

$$X = \frac{M_B + M_D}{h} \quad \text{e} \quad Y = \frac{M_D}{l}$$

X è l'azione di sostentamento con cui le aste CD e BD agiscono sulla mensola AC .

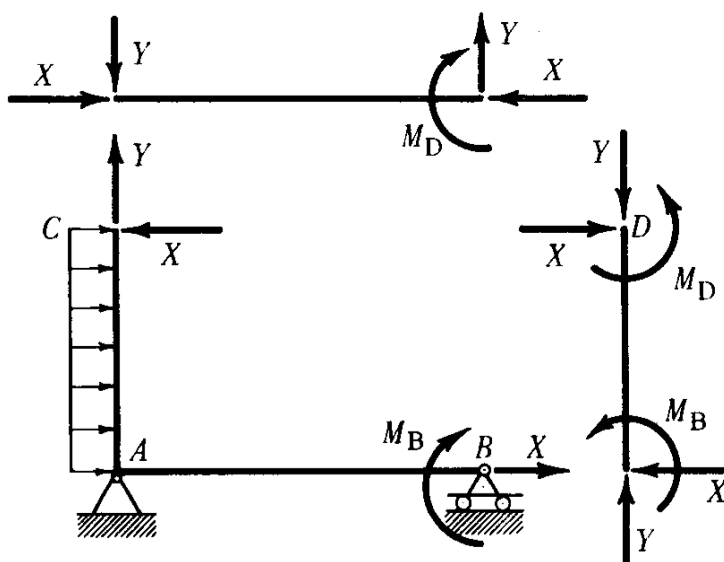


Fig. 41.3

Le due condizioni di congruenza da imporre alla struttura principale a tre cerniere sono:

$$\begin{cases} \Delta\varphi_B = 0 \\ \Delta\varphi_D = 0. \end{cases}$$

Poiché, all'evidenza, è lecito trascurare, nella risoluzione del problema iperstatico, la deformazione provocata da N in confronto a quella generata da M , i vertici superiori C e D del telaio compiono solo uno spostamento orizzontale ξ , eguale, verso destra.

Assumiamo positive le variazioni in aumento degli angoli e indichiamo con β la rotazione della sezione terminale sull'appoggio B della trave AB .

Esplicitando parzialmente i termini si ha:

$$\begin{cases} \left(\beta + \frac{\xi}{h} \right) - \left[\frac{h}{6 EJ} (2M_B - M_D) \right] = 0 \\ -\frac{\xi}{h} + \left[\frac{M_D \cdot l}{3 EJ} + \frac{h}{6 EJ} (2M_D - M_B) \right] = 0. \end{cases}$$

Esprimendo:

$$\beta = \frac{l}{6 EJ} \left[\left(\frac{Qh}{2} - Xh \right) - 2M_B \right]$$

$$\xi = \frac{l}{6 EJ} \left[2 \left(\frac{Qh}{2} - Xh \right) - M_B \right] h + \frac{Qh^3}{8 EJ} - \frac{Xh^3}{3 EJ},$$

e sostituendo nelle due equazioni, si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{l}{6 EJ} \left[\left(\frac{Qh}{2} - Xh \right) - 2M_B \right] + \frac{l}{6 EJ} \left[2 \left(\frac{Qh}{2} - Xh \right) - M_B \right] + \\ \quad + \frac{Qh^2}{8 EJ} - \frac{Xh^2}{3 EJ} - \left[\frac{h}{6 EJ} (2M_B - M_D) \right] = 0 \\ - \left[\frac{l}{6 EJ} \left[2 \left(\frac{Qh}{2} - Xh \right) - M_B \right] + \frac{Qh^2}{8 EJ} - \frac{Xh^2}{3 EJ} \right] + \\ \quad + \left[\frac{M_D \cdot l}{3 EJ} + \frac{h}{6 EJ} (2M_D - M_B) \right] = 0 \end{cases}$$

Sostituendo ad X la sua espressione, moltiplicando tutti i termini per il fattore costante EJ , e separando le due incognite dai termini noti, risulta:

$$\begin{cases} M_B \cdot l + \frac{1}{2} M_D (l + h) = \frac{Qh}{4} \left(l + \frac{h}{2} \right) \\ \frac{1}{2} M_B \left(l + \frac{h}{3} \right) + \frac{2}{3} M_D (l + h) = \frac{Qh}{2} \left(\frac{l}{3} + \frac{h}{4} \right) \end{cases}$$

Questo sistema, risolto, fornisce i valori delle incognite iperstatiche M_B ed M_D in funzione del carico e delle caratteristiche geometriche del telaio.

Nelle figg. 41.4, 41.5, 41.6 sono rappresentati qualitativamente il diagramma del momento flettente, la deformata della struttura e la curva delle pressioni.

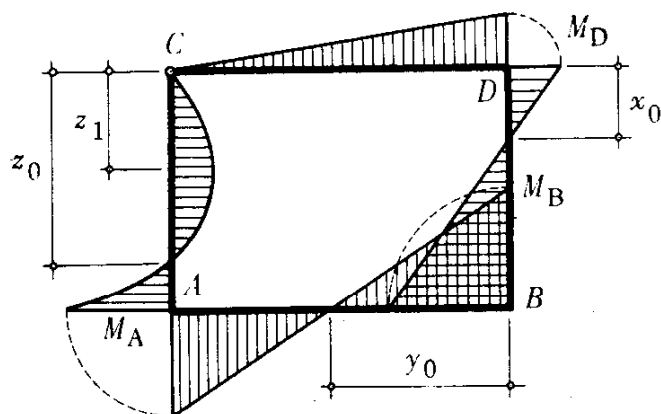
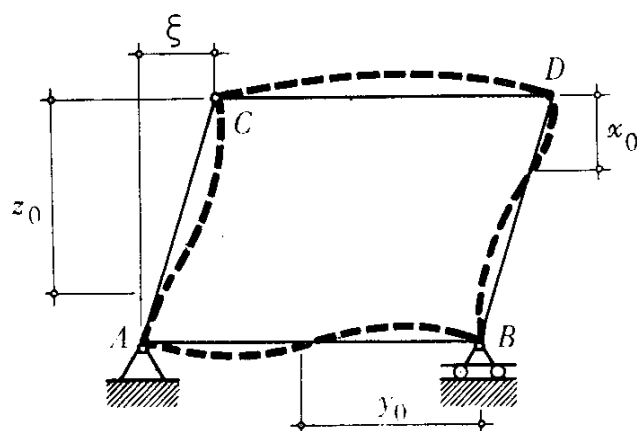


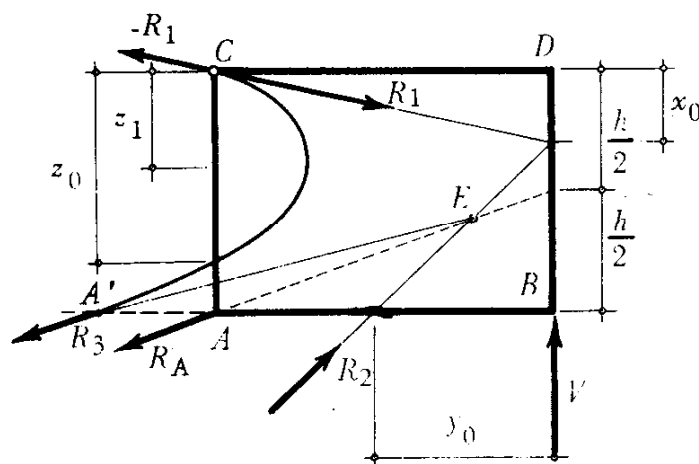
Diagramma M

Fig. 41.4



Deformata

Fig. 41.5



Curva delle pressioni

Fig. 41.6

Si può osservare che R_1 , azione interna trasmessa attraverso la cerniera C dalla parte di struttura che precede, risultante di X ed Y , deve senz'altro incontrare in un punto l'asse geometrico del piedritto BD .

Questo infatti è soggetto alle coppie antiorarie M_B ed M_D , applicate ai suoi estremi, e presenta una inversione di segno nel diagramma M e un flesso nella deformata.

Lo stesso dicasi per la R_2 , risultante di R_1 e V , che interseca l'asse della trave AB .

Il piedritto AC si comporta come una trave appoggiata cedevolmente in C ed incastrata elasticamente in A . La R_3 , risultante di R_2 ed R_A , passa per il loro punto comune E , ed è tangente in A' , sulla orizzontale per A , alla parabola funicolare del carico uniforme.

42. - Risolvere il telaio chiuso di fig. 42.1, vincolato isostaticamente all'esterno con cerniera e carrello, e soggetto a carico orizzontale uniforme su tutta l'asta AC .

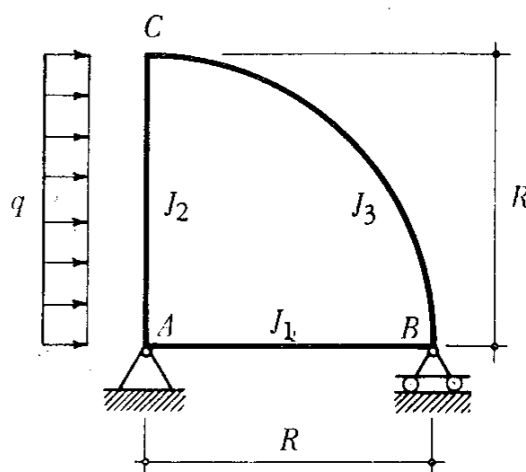


Fig. 42.1

La struttura presenta una certa analogia con quella dell'esercizio precedente, pur avendosi in questo caso un grado di iperstaticità interna pari a tre.

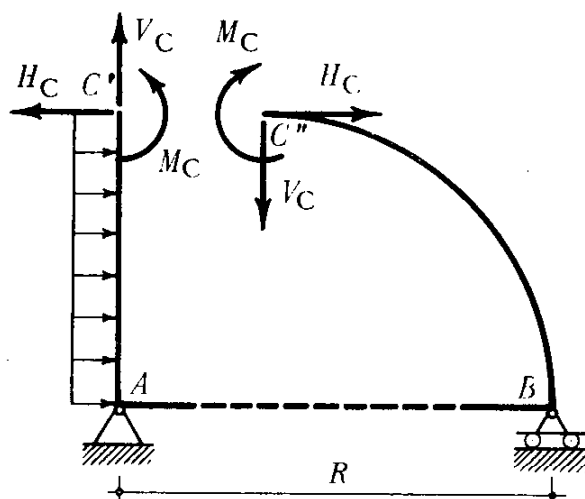


Fig. 42.2

Procediamo ad uno svincolamento diverso da quello adottato in precedenza; sezioniamo cioè il telaio in C e assumiamo quale struttura principale la trave appoggiata AB , soggetta al carico q e alle azioni mutue interne H_C , V_C ed M_C , esplicitate dallo svincolamento e applicate agli estremi C' e C'' degli sbalzi. Notiamo che il senso della H_C è facilmente prevedibile; non altrettanto quello della V_C ed M_C .

Le condizioni di congruenza da imporre esprimono il rispetto della solidarietà materiale in C ; cioè le due facce C' e C'' , pur separate, devono compiere la medesima rotazione e gli stessi spostamenti.

In simboli:

$$\begin{cases} \varphi_{C'} = \varphi_{C''} \\ \xi_{C'} = \xi_{C''} \\ \eta_{C'} = \eta_{C''} \end{cases}$$

Se si osserva che la curva delle pressioni è costituita, all'evidenza, da due rette inclinate per le aste CB e AB , e da un arco di parabola

per l'asta AC , se ne deduce che è trascurabile, nella risoluzione del problema iperstatico, la deformazione dovuta ad N in confronto a quella provocata da M . Pertanto l'estremo C' non tende a spostarsi verticalmente, e la terza equazione si esprime:

$$\eta_{C''} = 0.$$

Si ha:

$$\begin{cases} \varphi_A + \varphi_{C', A} = \varphi_B + \varphi_{C'', B} \\ \varphi_A \cdot R + \xi_{C', A} = \varphi_B \cdot R + \xi_{C'', B} \\ \varphi_B \cdot R + \eta_{C'', B} = 0. \end{cases}$$

Ricorriamo ai coefficienti elastici delle travi appoggiate per l'asta AB , e delle mensole per l'asta AC ; effettuiamo la composizione cinematica delle deformazioni elementari per l'arco BC .

Indichiamo con M_A ed M_B i momenti flettenti esistenti nelle sezioni sugli appoggi della trave AB (fig. 42.3); è:

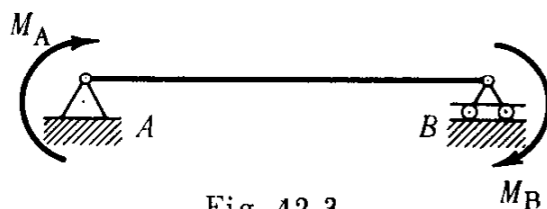


Fig. 42.3

$$M_A = \frac{qR^2}{2} - H_C R - M_C$$

$$M_B = (H_C - V_C) R + M_C$$

Nella sezione generica S dell'arco BC'' , definita dall'angolo ω , il momento vale (fig. 42.4):

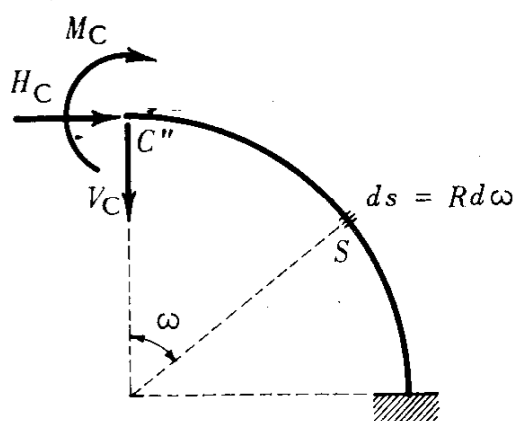


Fig. 42.4

$$M_S = M_C + H_C R (1 - \cos \omega) - V_C R \sin \omega;$$

Esplicitando i vari termini le equazioni di congruenza risultano:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{R}{6EJ_1} (2M_A - M_B) + \left(\frac{qR^3}{6EJ_2} - \frac{M_C R}{EJ_2} - \frac{H_C R^2}{2EJ_2} \right) &= \frac{R}{6EJ_1} (2M_B - M_A) + \\ &+ \int_0^{\pi/2} [M_C + H_C R (1 - \cos \omega) - V_C R \sin \omega] \frac{R d\omega}{EJ_3} \\ \frac{R^2}{6EJ_1} (2M_A - M_B) + \left(\frac{qR^4}{8EJ_2} - \frac{M_C R^2}{2EJ_2} - \frac{H_C R^3}{3EJ_2} \right) &= \frac{R^2}{6EJ_1} (2M_B - M_A) + \\ &+ \int_0^{\pi/2} [M_C + H_C R (1 - \cos \omega) - V_C R \sin \omega] R (1 - \cos \omega) \frac{R d\omega}{EJ_3} \\ \frac{R^2}{6EJ_1} (2M_B - M_A) + \int_0^{\pi/2} [M_C + H_C R (1 - \cos \omega) - \\ &- V_C R \sin \omega] R \sin \omega \frac{R d\omega}{EJ_3} = 0. \end{aligned} \right.$$

Nel caso che tutte le aste abbiano lo stesso momento d'inerzia, risolvendo gli integrali e sostituendo ad M_A ed M_B le loro espressioni, si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{\pi+1}{2} R \cdot H_C - \frac{3}{2} R V_C + \frac{\pi+4}{2} M_C = \frac{5}{12} q R^2 \\ \frac{9\pi-8}{12} R \cdot H_C - R V_C + \frac{\pi+1}{2} M_C = \frac{3}{8} q R^2 \\ R \cdot H_C - \frac{3\pi+4}{12} R \cdot V_C + \frac{3}{2} M_C = \frac{1}{12} q R^2. \end{cases}$$

Risulta:

$$H_C = +0,345 q R$$

$$V_C = +0,280 q R$$

$$M_C = +0,035 q R^2.$$

I valori positivi ottenuti per le incognite indicano che erano esatti i sensi previsti.

Inoltre si ricava:

$$M_A = +0,120 q R^2 \quad M_B = +0,100 q R^2.$$

43. - Risolvere il portale simmetrico incernierato di fig. 43.1, soggetto alle forze orizzontali P nei nodi C ed E .

Poiché, all'evidenza, è lecito trascurare, nella risoluzione del problema iperstatico, la deformazione provocata dallo sforzo normale in confronto a quella generata dal momento flettente, il carico applicato si comporta come esattamente antisimmetrico.

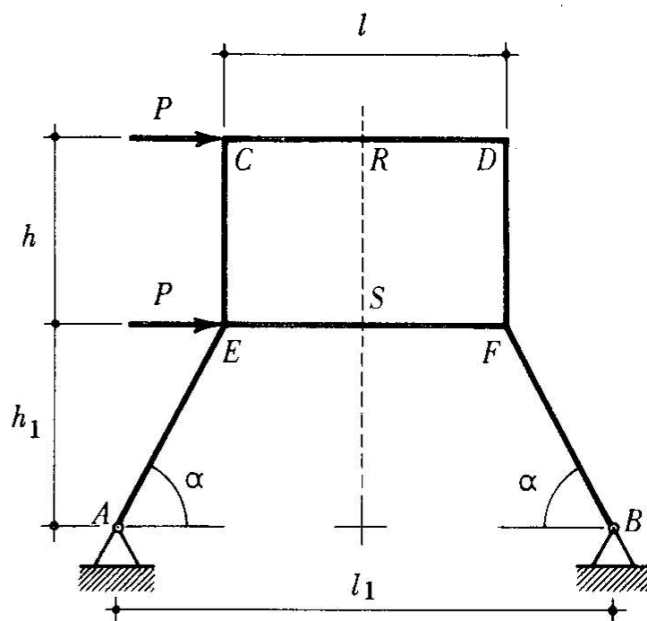


Fig. 43.1

Infatti l'invariabilità assiale delle aste CD ed EF fa sì che non abbia influenza l'effettivo punto d'applicazione, lungo il loro asse, dei carichi P ; questi, in particolare, si possono pensare sdoppiati e agenti antisimmetricamente agli estremi delle aste medesime (fig. 43.2).

Valgono allora le considerazioni già svolte sull'antisimmetria: si può limitare lo studio a metà struttura e schematizzare il comportamento delle sezioni R ed S vincolandole con due carrelli a piano di scorrimen-

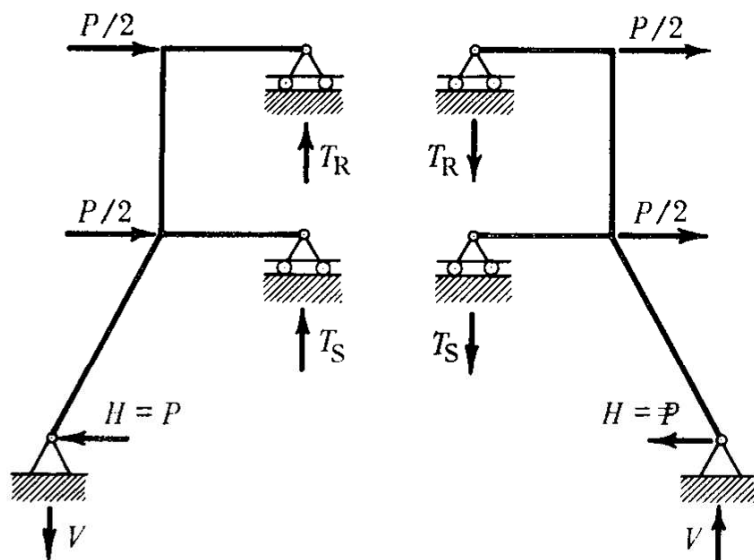


Fig. 43.2

to orizzontale, per rispettare le caratteristiche dei loro spostamenti ($\eta = 0$; $\xi \neq 0$; $\varphi \neq 0$) e delle azioni interne esistenti in esse ($F \neq 0$; $N = 0$; $M = 0$).

Si vede in tal modo come la struttura sia staticamente determinata all'esterno, e una sola volta indeterminata all'interno, perché i due sforzi taglienti T_R e T_S sono legati da una condizione d'equilibrio.

Si ha:

$$\begin{aligned}\Sigma X &= 0 & H &= P \\ \Sigma M_{(S)} &= 0 & V &= P \frac{h + 2h_1}{l_1} \\ \Sigma Y &= 0 & T_R + T_S &= V.\end{aligned}$$

Risolviamo il problema per via cinematica svincolando completamente in R e assumiamo quale struttura principale il mezzo telaio vincolato isostaticamente con cerniera A e carrello S (fig. 43-3-a).

La condizione di congruenza è:

$$\eta_R = 0.$$

Ossia:

$$\eta_R = \eta_{R,C} + \varphi_{C,E} \cdot \frac{l}{2} + \eta_E + \varphi_E \cdot \frac{l}{2} = 0.$$

Esplicitando i primi due termini che esprimono l'influenza della deformazione della mensola RCE , con i sensi positivi indicati in fig. 43.3-a, si ha:

$$\eta_R = -\frac{T_R \left(\frac{l}{2}\right)^3}{3 EJ} + \left[\frac{\frac{P}{2} h^2}{2 EJ} - \frac{\left(T_R \frac{l}{2}\right) h}{EJ} \right] \frac{l}{2} + \eta_E + \varphi_E \frac{l}{2} = 0.$$

Per valutare η_E e φ_E (spostamento verticale e rotazione assoluta del vertice E) procediamo in maniera analoga a quanto fatto nell'eser-