

\*\*\*

26. - Risolvere il portale a due cerniere dell'esercizio 24, soggetto al carico verticale  $P$ , agente sul vertice  $C$  (fig. 26.1).

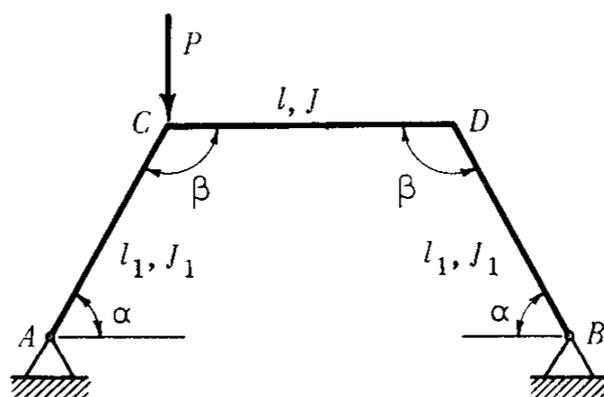


Fig. 26.1

In questo caso la curva delle pressioni è una bilatera avente come lati le rette d'azione delle reazioni delle cerniere.

Queste, dovendo equilibrare il carico  $P$ , si incontrano in un punto della sua retta d'azione e sono pertanto diversamente inclinate. Infatti le componenti orizzontali  $H$ , staticamente indeterminate, sono eguali e contrarie (per la condizione  $\sum X = 0$ ), mentre le componenti verticali, staticamente determinate, valgono:

$$V_A = P \frac{l + l_1 \cos \alpha}{l + 2l_1 \cos \alpha} \quad V_B = P \frac{l_1 \cos \alpha}{l + 2l_1 \cos \alpha}$$

Pertanto la curva delle pressioni può al massimo coincidere con l'asse geometrico di un solo piedritto (o scostarsi poco da esso).

Di conseguenza è lecito trascurare la deformazione assiale di tutta la struttura in confronto a quella generata dal momento flettente.

Si potrebbe risolvere il problema con il procedimento dell'esercizio 18, in questo caso particolarmente semplice perché le due cerniere  $A$  e  $B$  sono a livello, e la rotazione rigida  $\bar{\varphi}_B$ , attorno a  $B$ , non provoca

spostamenti orizzontali di  $A$ . Con procedimento analogo si può bloccare, anziché la sezione estrema  $B$ , una sezione intermedia qualunque, per esempio la  $C$ , cui è applicato il carico, e svincolare completamente in  $A$  e in  $B$ .

Si ottiene così la struttura principale costituita dalle due mensole  $AC$  e  $BDC$ , incastrate in  $C$  (fig. 26.2), e soggette in corrispondenza degli estremi alle componenti delle reazioni delle cerniere soppresse (le  $V$  note e la  $H$  incognita).

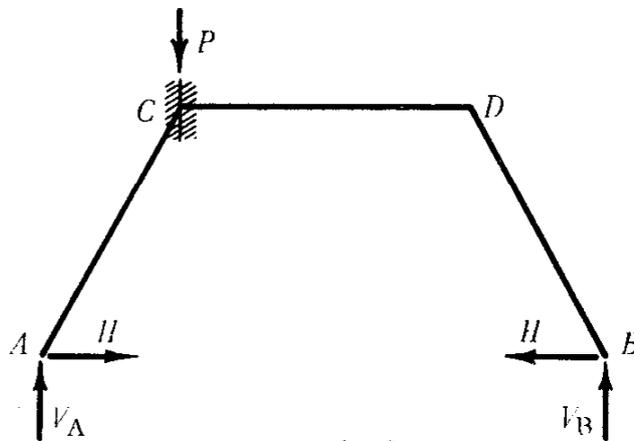


Fig. 26.2

Il procedimento è giustificato dal fatto che in  $C$  la continuità materiale costituisce un incastrato relativo per le due parti di struttura, quella che precede e quella che segue, e le due facce a contatto non compiono movimenti l'una rispetto all'altra. Inoltre gli spostamenti assoluti del nodo  $C$ , sia di rotazione che di traslazione, possono essere compiuti dalla struttura mediante moti rigidi che non influenzano la posizione relativa degli estremi liberi  $A$  e  $B$ .

Pertanto, agli effetti della determinazione dell'incognita  $H$ , è necessario e sufficiente esprimere la condizione di spostamento orizzontale relativo nullo dei punti  $A$  e  $B$ , e poiché questi nella realtà sono due punti fissi (a differenza di quanto accade nella struttura principale) è poi sempre possibile riportarli a coincidere con le loro posizioni iniziali mediante moti rigidi di tutto il telaio, di traslazione o di rotazione attorno a  $C$ .

In simboli è:

$$\xi_{A, B} = 0.$$

Esplicitando i vari termini, assumendo positivi quelli che tendono a far diminuire la distanza orizzontale tra  $A$  e  $B$ :

$$2 \frac{(H \operatorname{sen} \alpha) \cdot l_1^3}{3 EJ_1} \operatorname{sen} \alpha + \frac{(H l_1 \operatorname{sen} \alpha) l}{EJ} l_1 \operatorname{sen} \alpha - \frac{[(V_A + V_B) \cos \alpha] l_1^3}{3 EJ_1} \operatorname{sen} \alpha - \\ - \frac{(V_B l_1 \cos \alpha) l}{EJ} l_1 \operatorname{sen} \alpha - \frac{V_B \cdot l^2}{2 EJ} l_1 \operatorname{sen} \alpha = 0.$$

Ricordando che  $V_A + V_B = P$  e sostituendo  $V_B = P \frac{l_1 \cos \alpha}{l + 2l_1 \cos \alpha}$ :

$$2 \frac{H l_1^3}{3 EJ_1} \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{H l_1^2 l}{EJ} \operatorname{sen}^2 \alpha - \frac{P l_1^3}{3 EJ_1} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - \frac{P l_1^2 l}{2 EJ} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 0.$$

Dividendo per  $(\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha)$  e raccogliendo i termini simili:

$$2 H \operatorname{tg} \alpha \left( \frac{l_1^3}{3 EJ_1} + \frac{l_1^2 l}{2 EJ} \right) = P \left( \frac{l_1^3}{3 EJ_1} + \frac{l_1^2 l}{2 EJ} \right).$$

Da cui:

$$H = \frac{P}{2 \operatorname{tg} \alpha}.$$

A questo stesso risultato si giungeva sdoppiando il carico assegnato in due condizioni: una antisimmetrica e una simmetrica (fig. 26.3).

Il **caso antisimmetrico** è staticamente determinato: le componenti orizzontali  $H$  delle reazioni delle cerniere sono nulle per ragioni di antisimmetria; le verticali, dovendo costituire una coppia equilibrante quella formata dalle forze esterne, valgono:

$$V' = \frac{Pl}{2} \cdot \frac{1}{(l + 2l_1 \cos \alpha)},$$

ed hanno il senso di figura.

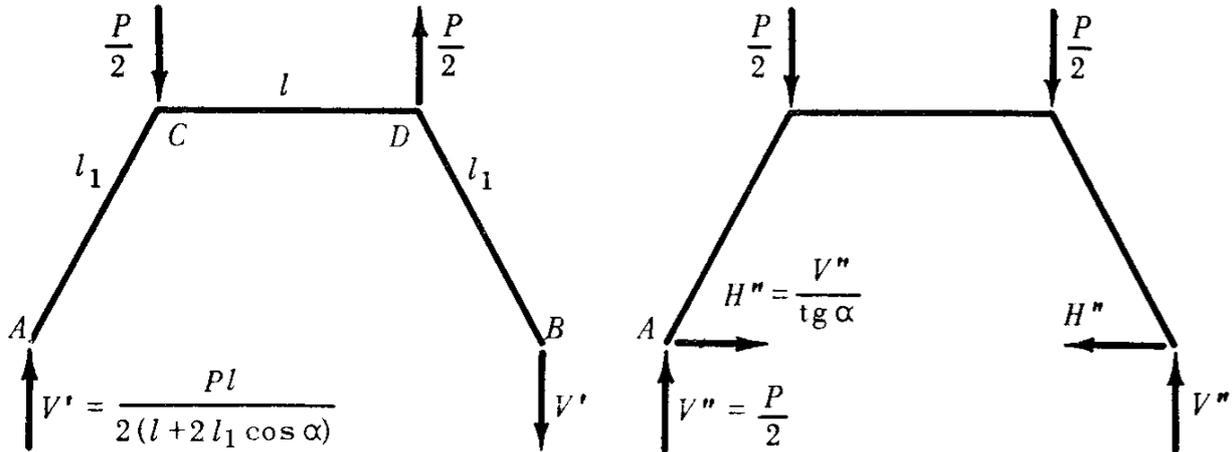


Fig. 26.3

Il **caso simmetrico** è quello stesso svolto nell'esercizio 24. Tuttavia se si considera che la struttura assegnata è complessivamente soggetta alla forza  $P$  in  $C$ , per effetto della quale trascuriamo la deformazione assiale, il medesimo criterio va seguito anche nello studio dei due singoli casi parziali secondo cui è stato decomposto il carico iniziale, Pertanto nel caso simmetrico ci si riconduce a calcolare le reazioni della struttura principale indeformata a quattro cerniere  $A, C, D, B$ .

Ricordando i risultati precedenti è:

$$V'' = \frac{P}{2} \quad \text{e} \quad H'' = \frac{V''}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Sovrapponendo gli effetti si ottiene:

$$V_A = V' + V'' = \frac{P}{2} \left( 1 + \frac{l}{l + 2l_1 \cos \alpha} \right) = P \frac{l + l_1 \cos \alpha}{l + 2l_1 \cos \alpha}$$

$$V_B = -V' + V'' = \frac{P}{2} \left( 1 - \frac{l}{l + 2l_1 \cos \alpha} \right) = P \frac{l_1 \cos \alpha}{l + 2l_1 \cos \alpha}$$

$$H = H'' = \frac{P}{2 \operatorname{tg} \alpha}.$$

Pertanto la struttura assegnata, pur essendo una volta iperstatica, risulta egualmente staticamente determinata. Infatti la legittimità di poter trascurare, nella risoluzione di un problema iperstatico, la deformazione assiale in confronto a quella flessionale, dipende dalle caratteristiche del regime statico della struttura e dall'influenza che su di esso esercitano le due diverse azioni deformanti. L'eventuale variazione del grado di indeterminazione della struttura non inficia la validità di questo criterio semplificativo.

### RISOLUZIONE NUMERICA E CALCOLO DI RESISTENZA.

Si abbia, come nell'esercizio 24:

$$l = 4,00 \text{ m}; \quad l_1 = 3,00 \text{ m}; \quad \alpha = 45^\circ; \quad P = 10\,000 \text{ kg}.$$

Si ottiene:

$$V_A = 7440 \text{ kg}; \quad V_B = 2560 \text{ kg}; \quad H = 5000 \text{ kg};$$

$$M_C = V_A \cdot l_1 \cos \alpha - H l_1 \sin \alpha = +5200 \text{ kgm}$$

$$M_D = V_B \cdot l_1 \cos \alpha - H l_1 \sin \alpha = -5060 \text{ kgm}.$$

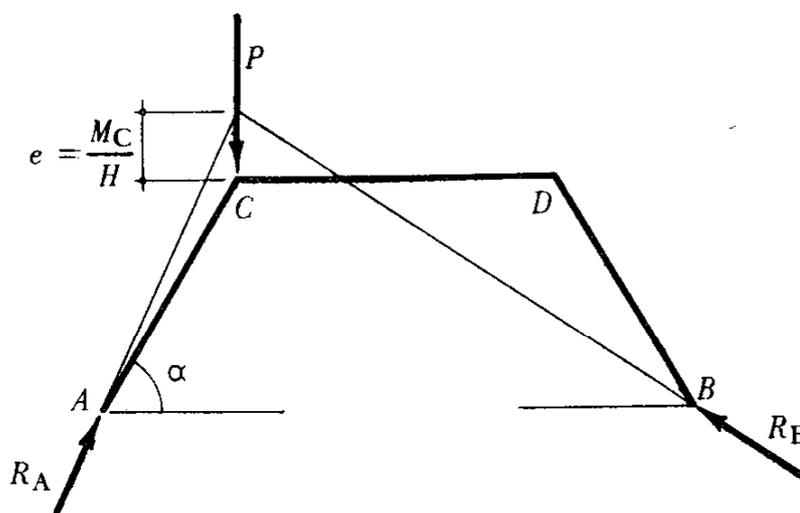


Fig. 26.4

La sezione più sollecitata è quella di sommità del piedritto  $AC$ , nella quale si ha:

$$M = M_C = 5200 \text{ kgm}$$

$$N = H \cos \alpha + V_A \cdot \sin \alpha = 8800 \text{ kg.}$$

Realizziamo la struttura con un profilato normale a I ( $K_F = 1600$ ). Progettiamo dapprima la sezione a flessione semplice per un valore  $\sigma_F = 1400 \text{ kg/cm}^2$ . Si ha:

$$W = \frac{M}{\sigma_F} = \frac{520000}{1400} = 372 \text{ cm}^3$$

il profilato I PN 24 ha caratteristiche

$$\begin{cases} A = 46,1 \text{ cm}^2 \\ W = 353 \text{ cm}^3. \end{cases}$$

Verificando ora a pressoflessione:

$$\sigma_{\max} = \frac{520000}{353} + \frac{8800}{46,1} = 1470 + 190 = 1660 \text{ kg/cm}^2$$

per le fibre esterne, compresse. (La  $\sigma_{\max}$  è un po' superiore al carico di sicurezza).

**OSSERVAZIONI.** - Appare evidente come ci si può regolare se la struttura è soggetta a due carichi verticali  $P_1$  e  $P_2$ , applicati in  $C$  e in  $D$  (fig. 26.5).

Se è  $P_1 > P_2$ , si valuta la differenza  $\Delta P = P_1 - P_2$  e si confronta con  $P_2$ .

Se  $\Delta P$  è piccolo rispetto a  $P_2$ , allora ci si trova fundamentalmente nelle condizioni dell'esercizio 24, ed è bene tenere presente, nella risoluzione del problema iperstatico anche la deformazione assiale. Se  $\Delta P$  è

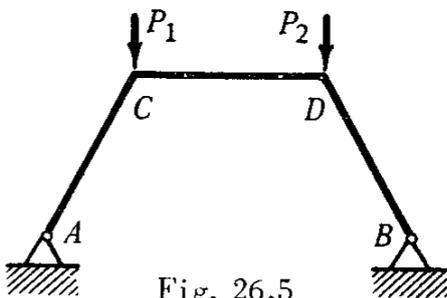


Fig. 26.5

maggiore, o anche semplicemente dello stesso ordine di grandezza di  $P_2$ , allora gli effetti flessionali che esso genera consentono di trascurare senz'altro la deformazione dovuta ad  $N$ , e ci si ritrova così nelle condizioni del presente esercizio.

TELAIO SEMPLICE A DUE CERNIERE: carico concentrato in mezzaria della trave.

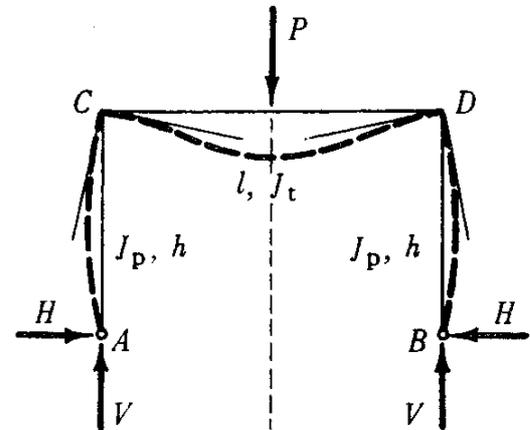
$$V = \frac{P}{2}; \quad H = \frac{M_C}{h}$$

$$M_C = \frac{\bar{M}}{\left(1 + \frac{Z_t}{Z_p}\right)} = \frac{Pl}{8} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{J_t}{J_p} \cdot \frac{h}{l}\right)}$$

$$M_{\text{max positivo}} = M_{1/2 (C-D)} = \left(\frac{Pl}{4} - M_C\right).$$

$$\varphi_C = \frac{Pl^2}{16 EJ_t} - \frac{M_C l}{2 EJ_t} = \frac{M_C h}{3 EJ_p} = \frac{Pl \cdot h}{24 EJ_p} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{J_t}{J_p} \cdot \frac{h}{l}\right)}$$

$$\eta_{1/2 (C-D)} = \frac{1}{48} \frac{Pl^3}{EJ_t} - \frac{M_C l^2}{8 EJ_t} = \frac{1}{48} \frac{Pl^3}{EJ_t} \left[1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{J_t}{J_p} \cdot \frac{h}{l}\right)}\right]$$



Deformata

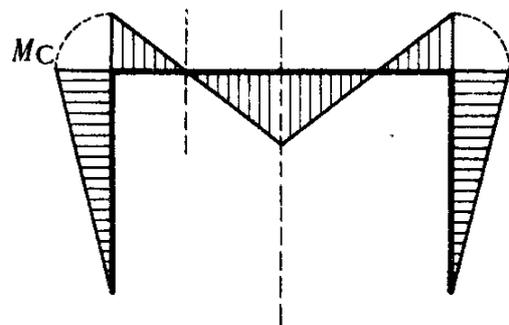
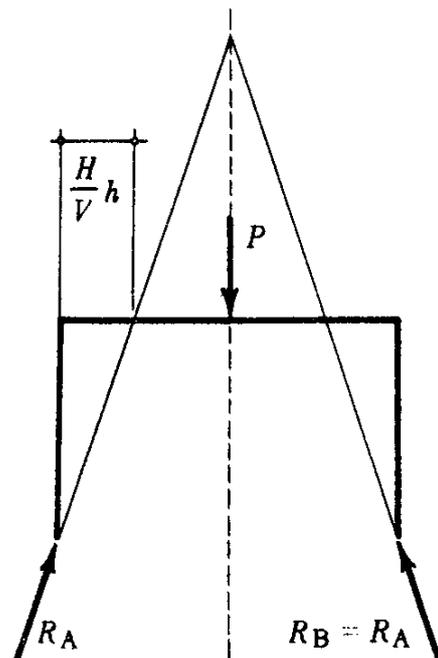
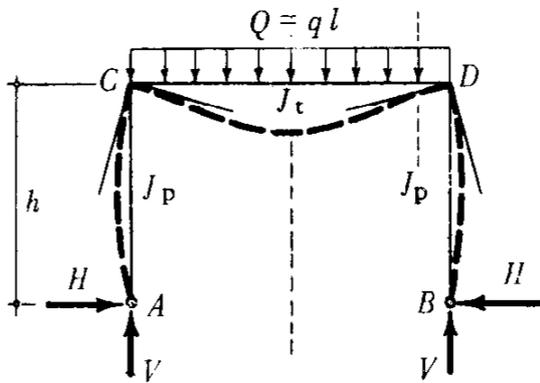


Diagramma M



Curva delle pressioni

TELAIO SEMPLICE A DUE CERNIERE: carico uniforme sulla trave.



Deformata

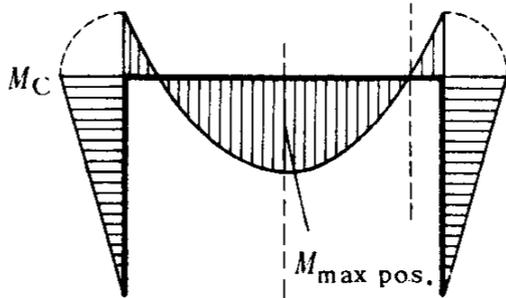
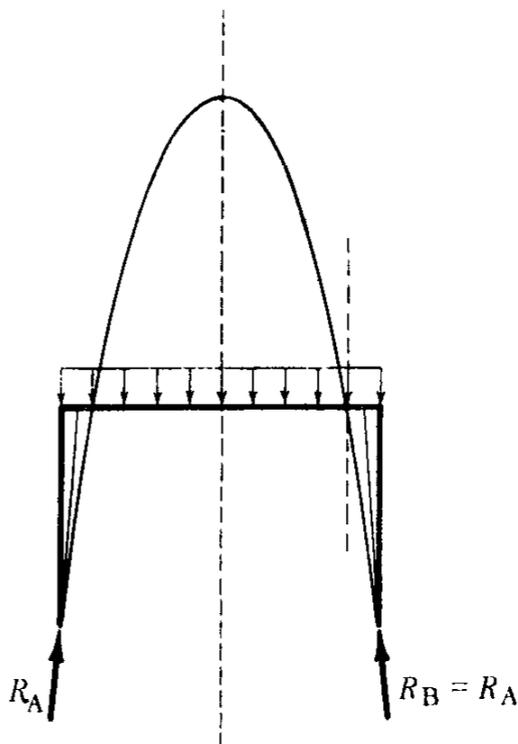


Diagramma M



Curva delle pressioni

$$V = \frac{Q}{2}; \quad H = \frac{M_C}{h}$$

$$M_C = \frac{\bar{M}}{\left(1 + \frac{Z_t}{Z_p}\right)} = \frac{ql^2}{12} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{J_t}{J_p} \cdot \frac{h}{l}\right)}$$

$$M_{\max \text{ positivo}} = M_{1/2 (C-D)} = \left(\frac{ql^2}{8} - M_C\right)$$

$$\varphi_C = \frac{ql^3}{24 EJ_t} - \frac{M_C l}{2 EJ_t} = \frac{M_C h}{3 EJ_p} = \frac{ql^2 \cdot h}{36 EJ_p} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{J_t}{J_p} \cdot \frac{h}{l}\right)}$$

$$\eta_{1/2 (C-D)} = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EJ_t} - \frac{M_C l^2}{8 EJ_t} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ_t} \left[1 - \frac{4}{5} \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{J_t}{J_p} \cdot \frac{h}{l}\right)}\right]$$

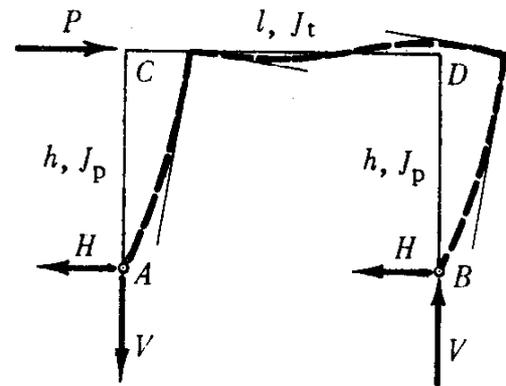
TELAIO SEMPLICE A DUE CERNIERE: carico concentrato orizzontale applicato al nodo C.

$$H = \frac{P}{2}; \quad V = \frac{Ph}{l}$$

$$M_C = \frac{Ph}{2}$$

$$\varphi_C = \frac{M_C l}{6 EJ_t} = \frac{Ph \cdot l}{12 \cdot EJ_t}$$

$$\begin{aligned} \xi_C &= \varphi_C \cdot h + \frac{Hh^3}{3 EJ_p} = \\ &= \frac{Ph^3}{6 EJ_p} \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{J_p}{J_t} \cdot \frac{l}{h} \right) \end{aligned}$$



Deformata

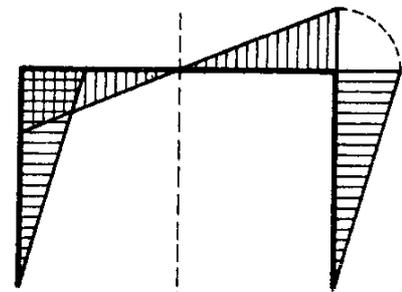
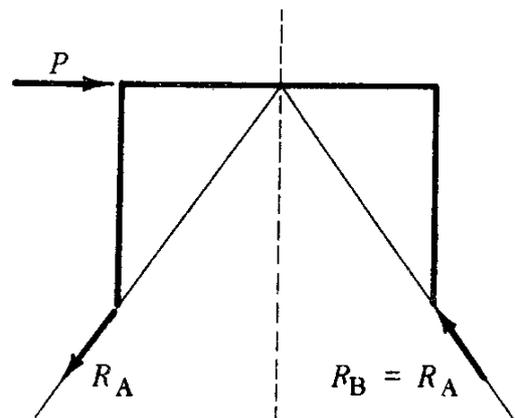
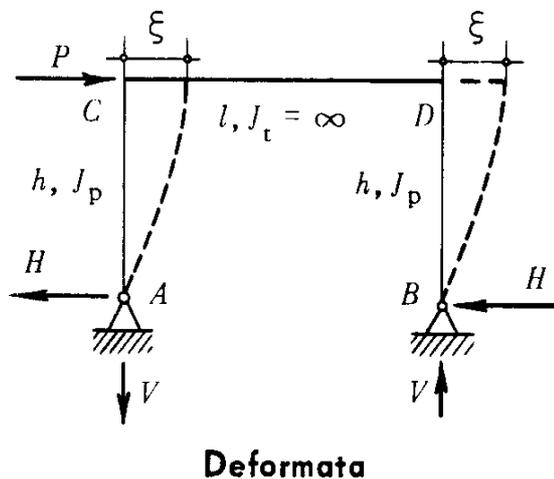


Diagramma M



Curva delle pressioni

TELAIO SEMPLICE A DUE CERNIERE CON TRAVE INFINITAMENTE RIGIDA: carico concentrato orizzontale applicato al nodo C.



$$H = \frac{P}{2} \quad V = \frac{Ph}{l}$$

$$M_C = \frac{Ph}{2}$$

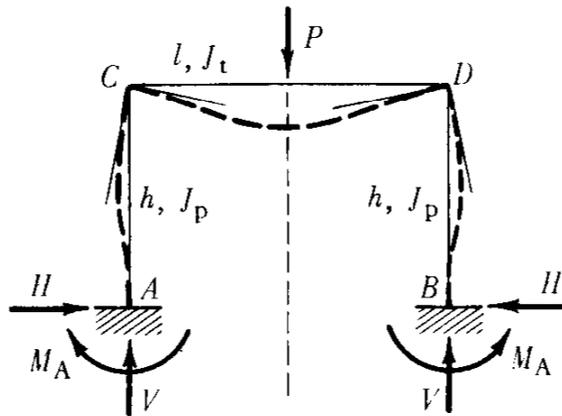
$$\varphi_C = 0$$

$$\xi_C = \left(\frac{P}{2}\right) \frac{h^3}{3EJ_p}$$

**Nota:** I piedritti si comportano come due mensole perfettamente incastrate in sommità e soggette alla base ad uno sforzo di taglio  $H = \frac{P}{2}$ .

Questi risultati sono applicabili con buona approssimazione anche ad un telaio avente  $J_t \cong (2 \div 3)J_p$ .

TELAIO SEMPLICE A DUE INCASTRI: carico concentrato in mezzaria della trave.



Deformata

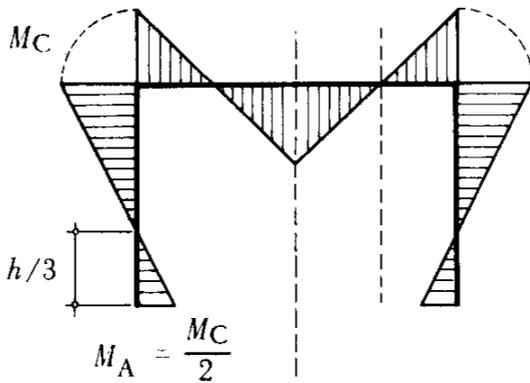
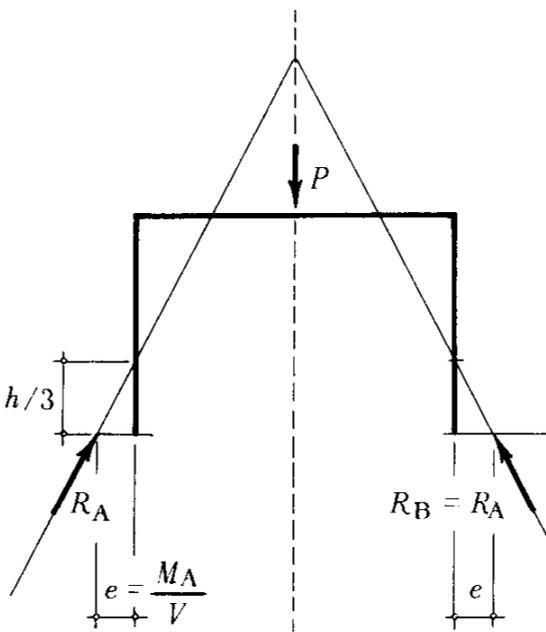


Diagramma M



Curva delle pressioni

$$V = \frac{P}{2}; \quad H = \frac{3}{2} \frac{M_C}{h}$$

$$M_C = \frac{\bar{M}}{\left(1 + \frac{Z_t}{Z_p}\right)} = \frac{Pl}{8} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{J_t}{J_p} \cdot \frac{h}{l}\right)}$$

$$M_{\max \text{ positivo}} = M_{1/2 (C-D)} = \frac{Pl}{4} - M_C$$

$$M_A = \frac{M_C}{2}$$

$$\begin{aligned} \varphi_C &= \frac{Pl^2}{16 EJ_t} - \frac{M_C l}{2 EJ_t} = \\ &= \frac{M_C h}{4 EJ_p} = \frac{Pl \cdot h}{32 EJ_p} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{J_t}{J_p} \cdot \frac{h}{l}\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_{1/2 (C-D)} &= \frac{1}{48} \cdot \frac{Pl^3}{EJ_t} - \frac{M_C l^2}{8 EJ_t} \\ &= \frac{1}{48} \cdot \frac{Pl^3}{EJ_t} \left[ 1 - \frac{3}{4} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{J_t}{J_p} \cdot \frac{h}{l}\right)} \right] \end{aligned}$$

TELAIO SEMPLICE A DUE INCASTRI: carico uniforme sulla trave.

$$V = \frac{Q}{2}; \quad H = \frac{3}{2} \frac{M_C}{h}$$

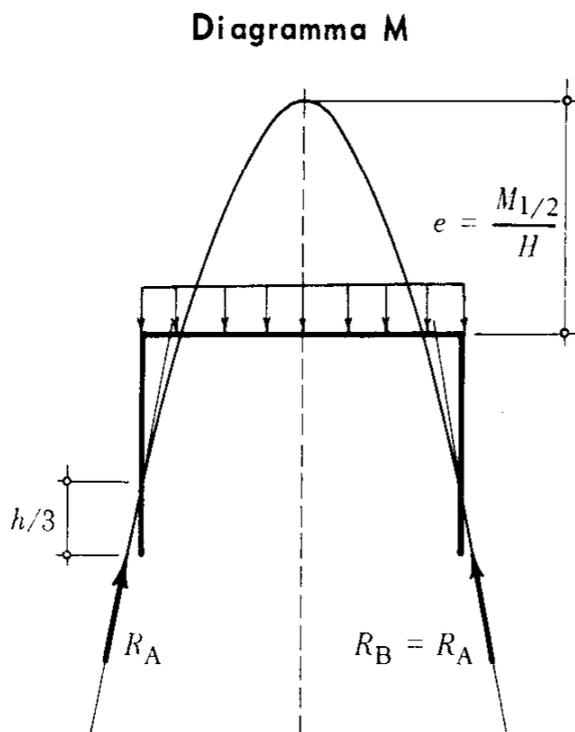
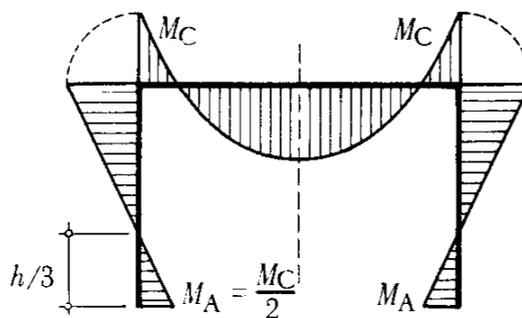
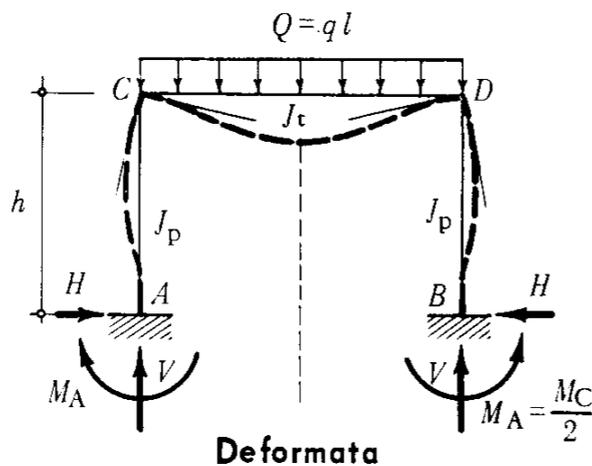
$$M_C = \frac{\bar{M}}{\left(1 + \frac{Z_t}{Z_p}\right)} = \frac{ql^2}{12} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{J_t}{J_p} \cdot \frac{h}{l}\right)}$$

$$M_{\text{max positivo}} = M_{1/2 (C-D)} = \frac{ql^2}{8} - M_C$$

$$M_A = \frac{M_C}{2}$$

$$\varphi_C = \frac{ql^3}{24 EJ_t} - \frac{M_C l}{2 EJ_t} = \frac{M_C h}{4 EJ_p} = \frac{ql^2 \cdot h}{48 EJ_p} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2} \frac{J_t}{J_p} \cdot \frac{h}{l}\right)}$$

$$\eta_{1/2 (C-D)} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ_t} - \frac{M_C l^2}{8 EJ_t} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ_t} \left[ 1 - \frac{4}{5} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2} \frac{J_t}{J_p} \cdot \frac{h}{l}\right)} \right]$$



TELAIO SEMPLICE A DUE INCASTRI: carico concentrato orizzontale applicato al nodo C.

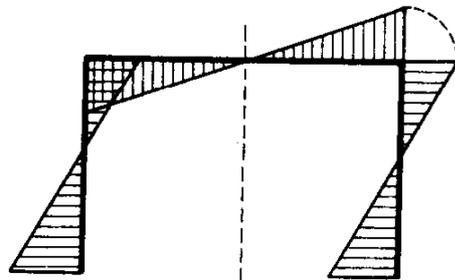
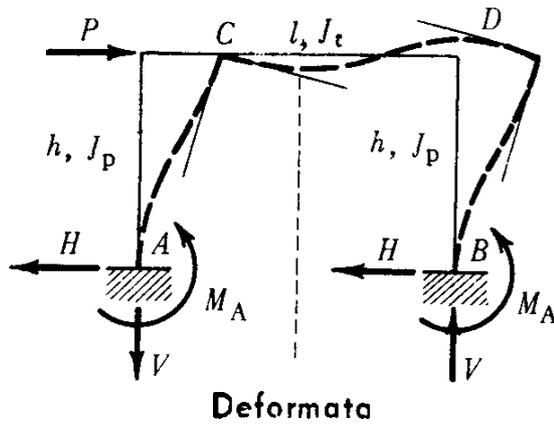
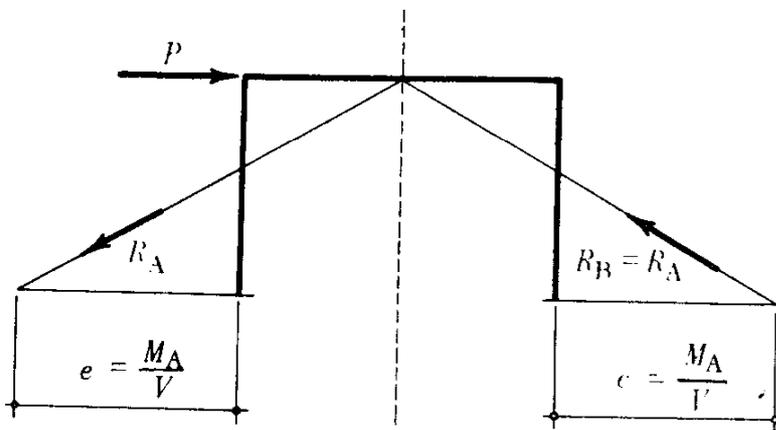


Diagramma M



Curva delle pressioni

$$H = \frac{P}{2}, \quad V = 2 \frac{M_C}{l}$$

$$M_A = \frac{Ph}{2} \cdot \frac{1 + 3k}{1 + 6k}$$

$$M_C = \frac{Ph}{2} \cdot \frac{3k}{1 + 6k}$$

(dove  $k = \frac{J_t}{J_p} \cdot \frac{h}{l}$ )

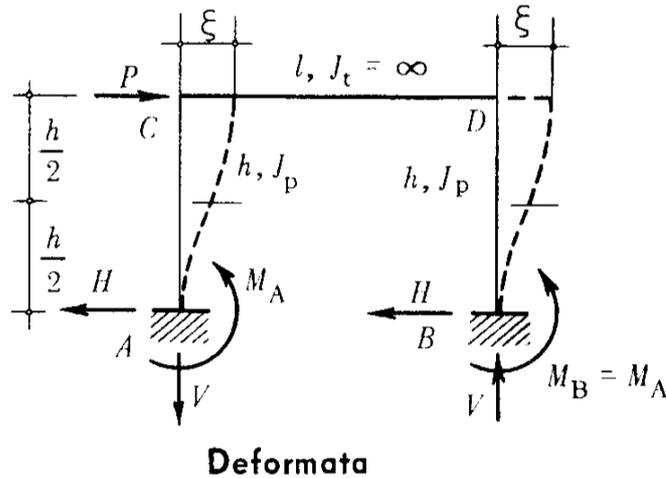
$$\varphi_C = \frac{M_C l}{6 E J_t} =$$

$$= \frac{Ph \cdot l}{12 E J_t} \cdot \frac{3k}{1 + 6k}$$

$$\xi_C = \varphi_C \cdot h + \frac{H h^3}{3 E J_p} - \frac{M_A h^2}{2 E J_p} =$$

$$= \frac{Ph^3}{12 E J_p} \cdot \frac{2 + 3k}{1 + 6k}$$

TELAIO SEMPLICE A DUE INCASTRI CON TRAVE INFINITAMENTE RIGIDA: carico concentrato orizzontale applicato al nodo C.



$$H = \frac{P}{2}$$

$$V = \frac{Ph}{2l}$$

$$M_A = H \frac{h}{2} = \frac{Ph}{4} = M_C$$

$$\varphi_C = 0$$

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{Hh^3}{3EJ_p} - \frac{M_A h^2}{2EJ_p} = \\ &= \frac{Hh^3}{12EJ_p} = \frac{Ph^3}{24EJ_p} \end{aligned}$$

**Nota:** I piedritti si comportano come due travi vincolate agli estremi con due incastri, di cui quello superiore cedevole orizzontalmente.

Nel caso abbiano sezione costante il punto di flesso della deformata è a metà altezza.

Questi risultati sono applicabili con buona approssimazione anche ad un telaio avente  $J_t \cong (2\div 3) J_p$ .

\*\*\*

27. - Risolvere il portale doppio simmetrico a tre cerniere di fig. 27.1, soggetto a carico uniforme  $q$  su tutta la campata  $DE$ .

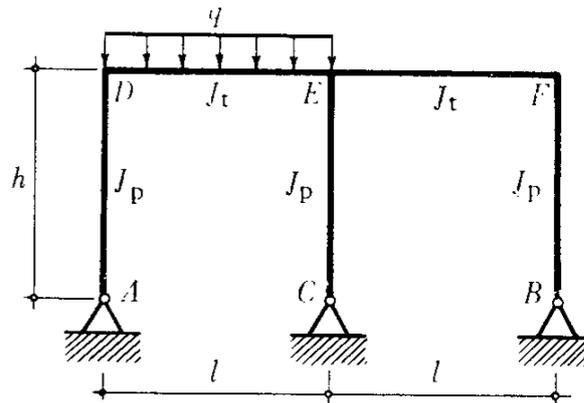


Fig. 27.1

La struttura è tre volte iperstatica e tre volte staticamente indeterminata.

Volendo risolvere il problema con metodo cinematico si può adottare una via che utilizzi la simmetria geometrica della struttura: per esempio, sdoppiare il carico dato in due condizioni, una simmetrica e una antisimmetrica. Così procedendo si scinde il complesso problema iniziale nello studio di due casi più semplici, senza che, naturalmente, abbia a variare il grado totale di indeterminazione statica.

È ovvio inoltre come si possa prescindere dalla deformazione provocata da  $N$  nella risoluzione del problema iperstatico.

**1. Condizione simmetrica di carico:**  $+\frac{q}{2}$  su tutta la travata  $DEF$ .

La struttura è sempre tre volte iperstatica.

Assumiamo una struttura principale che sfrutti la simmetria, sezionando il piedritto centrale nella sezione di sommità  $E$ : si ottiene il telaio semplice  $ADFB$ , ancora una volta iperstatico, e l'asta centrale labile  $EC$ . L'azione mutua che le due parti si trasmettono in  $E$  è solamen-

te una forza verticale  $X$ , per evidenti ragioni di simmetria (fig. 27.2).

Il punto  $E$  si comporta come un incastro perfetto, perché a causa della indeformabilità assiale del piedritto  $EC$  non si sposta verticalmente e per la simmetria del telaio  $ADFB$  non subisce né rotazione, né spostamento orizzontale.

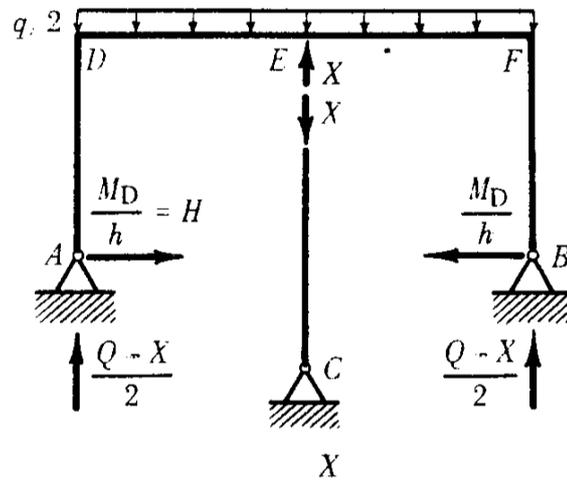


Fig. 27.2

Possiamo pertanto limitare il nostro studio al mezzo portale  $ADE$ , incastrato in  $E$ . Per ricondurci poi ad una struttura principale staticamente nota è sufficiente sopprimere la solidarietà angolare in  $D$  e considerare piedritto e trave quivi singolarmente e rigidamente appoggiati e soggetti alle coppie mutue  $M_D$  (anche il nodo  $D$  non si sposta, per ragioni di simmetria e di indeformabilità assiale) (fig. 27.3).

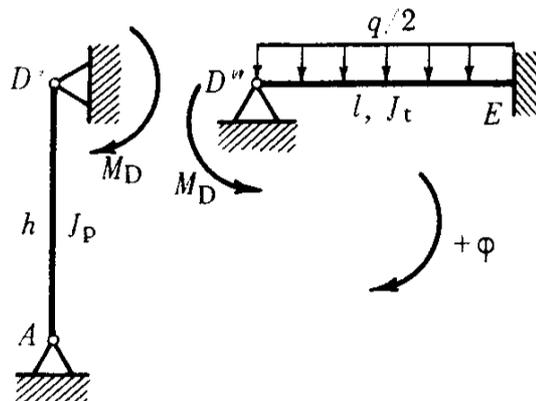


Fig. 27.3

Della trave  $D''E$  è noto il momento d'incastro  $M_E$  in funzione dei carichi applicati; prevedendolo già con il giusto verso orario, vale:

$$M_E = \frac{1}{2} \frac{Ql}{8} - \frac{M_D}{2}.$$

La condizione di congruenza cui deve soddisfare la struttura principale, in simboli è:

$$\varphi_{D'} = \varphi_{D''}.$$

Con i sensi positivi indicati per le forze e le rotazioni si ha:

$$\frac{M_D \cdot h}{3 EJ_p} = \frac{1}{2} \frac{Ql^2}{24 EJ_t} - \frac{l}{6 EJ_t} \left[ 2M_D + \left( \frac{1}{2} \frac{Ql}{8} - \frac{M_D}{2} \right) \right].$$

Risulta:

$$M_D = \frac{1}{2} \cdot \frac{Ql}{12} \cdot \frac{Z_p}{Z_p + Z_t} = \frac{Ql}{24} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4}{3} \frac{J_t \cdot h}{J_p \cdot l}} \quad \begin{cases} Z_p = \frac{3 J_p}{h} E \\ Z_t = \frac{4 J_t}{l} E. \end{cases}$$

Le reazioni dei vincoli valgono:

$$H_A = H_E = \frac{M_D}{h} \quad (\text{dirette verso l'interno})$$

$$V_E = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} Q - \frac{3}{2} \frac{M_D}{l} \quad \left( = \frac{X}{2} \right) \quad (\text{la forza esterna } X \text{ si ripartisce all'interno a metà per ragioni di simmetria}).$$

$$V_A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} Q + \frac{3}{2} \frac{M_D}{l} \quad \left( = \frac{Q}{2} - \frac{X}{2} \right)$$

2) **Condizione antisimmetrica di carico:**  $\begin{cases} + q/2 \text{ sulla trave } DE \\ - q/2 \text{ sulla trave } EF. \end{cases}$   
La struttura è sempre tre volte iperstatica.

Sfruttiamo le caratteristiche simmetriche della struttura e antisim-

metriche del carico, sezionando anche in questo caso il piedritto centrale in  $E$  e riportandoci alla stessa struttura principale del caso precedente (fig. 27.4).

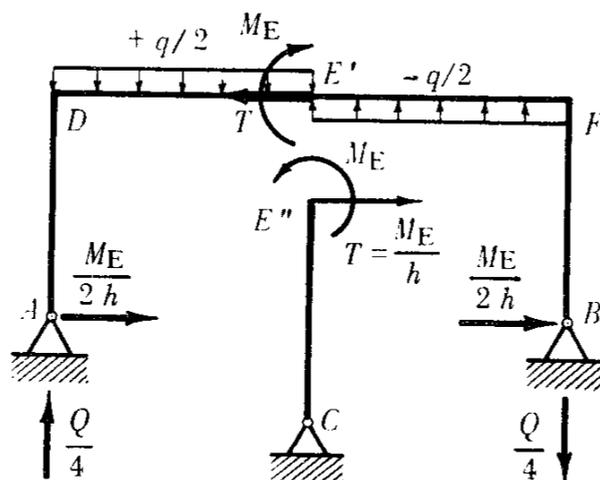


Fig. 27.4

L'azione mutua che le due parti si trasmettono in  $E$  deve essere antisimmetrica ed è costituita da una coppia  $M$  e da una forza  $T$  orizzontale. La sezione  $E$  del portale, per effetto del carico, ruota in senso antiorario e trasmette questa sua tendenza al piedritto con la coppia  $M_E$  del medesimo senso; il verso e il valore della forza  $T$  risultano determinati, in funzione della  $M_E$ , in base alla condizione d'equilibrio alla rotazione dell'asta labile  $CE''$  attorno a  $C$ .

Risulta:

$$T = \frac{M_E}{h}$$

con il senso indicato in fig. 27.4.

Il telaio  $ADFB$ , una volta iperstatico, è staticamente determinato in funzione dei carichi antisimmetrici  $\pm q/2$ ,  $M_E$  e  $T$ , ad esso applicati.

Si ha infatti:

$$H_A = H_B = \frac{T}{2} = \frac{M_E}{2h} \quad (\text{per ragioni di antisimmetria e per } \Sigma X = 0)$$

$$V_A = V_B = \frac{Q}{4} \quad (\text{per } \Sigma Y = 0, \Sigma M = 0 \text{ e antisimmetria}).$$

Il punto  $E'$  del telaio, per effetto dei carichi antisimmetrici, non si sposta verticalmente, ruota e si sposta orizzontalmente.

Per quanto riguarda il piedritto si può osservare che non è sollecitato assialmente e che la congruenza agli spostamenti orizzontali è sempre soddisfatta con un moto rigido di rotazione attorno alla cerniera  $C$ . Rimane da soddisfare la congruenza alla rotazione e questo si compie mediante un'equazione che permette di determinare  $M_E$ :

$$\varphi_{E'} (\text{telaio}) = \varphi_{E''} (\text{piedritto})$$

Per la determinazione di  $\varphi_E$ , ci si può limitare allo studio della sola trave  $DEF$ , appoggiata in  $D$  e in  $F$ , e soggetta ai carichi esterni antisimmetrici e alle azioni interne trasmesse dai piedritti (fig. 27.5-a).

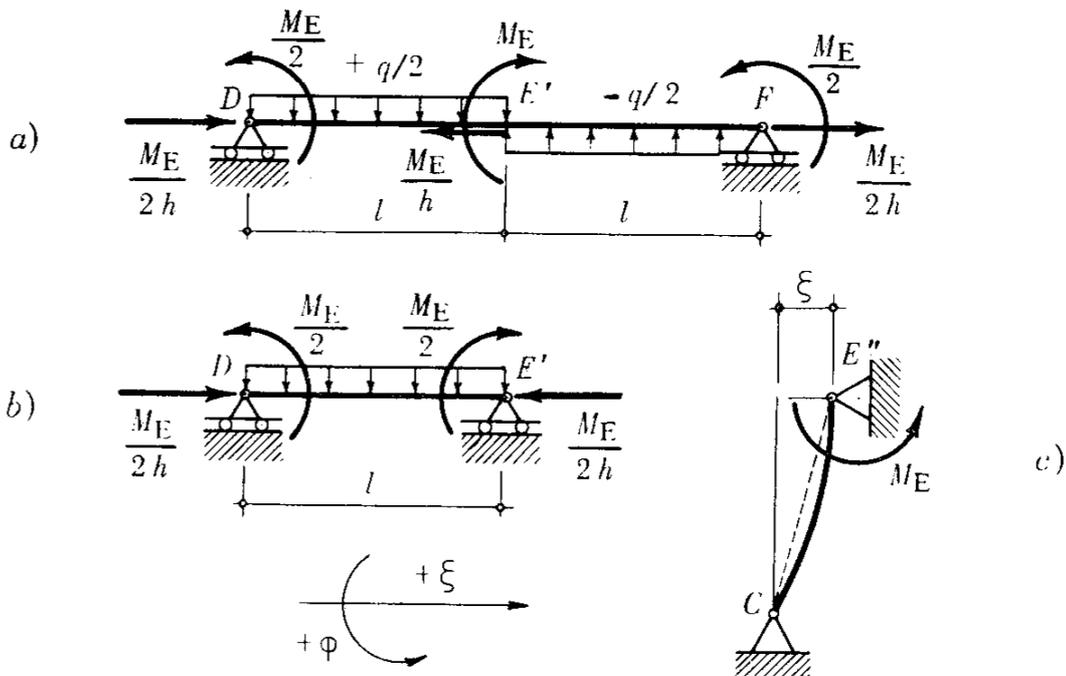


Fig. 27.5

La rotazione  $\varphi'_E$  della sezione di mezzaria della trave  $DE'F$  è eguale a quella della sezione terminale  $E'$  della metà trave  $DE'$ , caricata come in fig. 27.5-*b*.

Si ha:

$$\varphi'_E = \frac{1}{2} \left( \frac{Ql^2}{24 EJ_t} - \frac{M_E l}{2 EJ_t} \right)$$

La rotazione  $\varphi_{E''}$  è influenzata sia dalla deformazione elastica del piedritto  $E''C$  sia dallo spostamento  $\xi$  della travata.

In simboli:

$$\varphi_{E''} = \frac{M_E h}{3 EJ_p} - \frac{\xi}{h} \quad (\text{fig. 27.5-c}).$$

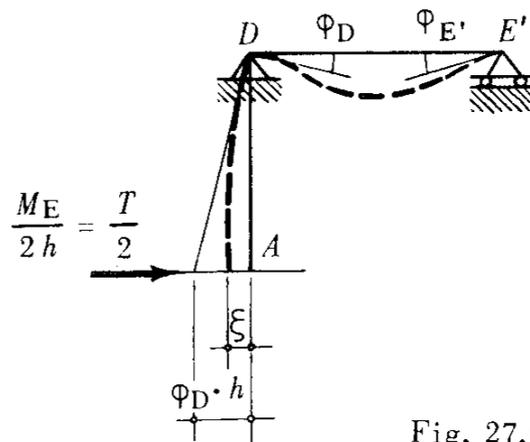


Fig. 27.6

Per quanto riguarda  $\xi$  (vedi anche esercizio 16) si ha:

$$\xi = \varphi_D \cdot h - \frac{1}{2} \cdot \frac{Th^3}{3 EJ_p} = \varphi_{E'} \cdot h - \frac{M_E \cdot h^2}{6 EJ_p}.$$

Sostituendo:

$$\begin{aligned} \varphi_{E''} &= \frac{M_E h}{3 EJ_p} - \frac{1}{h} \left( \varphi_{E'} \cdot h - \frac{M_E h^2}{6 EJ_p} \right) \\ &= \frac{M_E h}{2 EJ_p} - \varphi_{E'} \end{aligned}$$

Eguagliando le due espressioni di  $\varphi_E$  e  $\varphi_{E^*}$  si ottiene:

$$\frac{M_E h}{2 E J_p} = 2 \left( \frac{Q l^2}{48 E J_t} - \frac{M_E l}{4 E J_t} \right)$$

da cui, risolvendo:

$$M_E = \frac{Q l}{12} \cdot \frac{1}{\left( 1 + \frac{J_t}{J_p} \cdot \frac{h}{l} \right)} = \frac{Q l}{12 (1 + \gamma_1 \gamma_2)}$$

Sovrapponendo ora gli effetti si ottengono le reazioni totali dei vincoli esterni.

I sensi delle reazioni risultano quelli indicati in fig. 27.7.

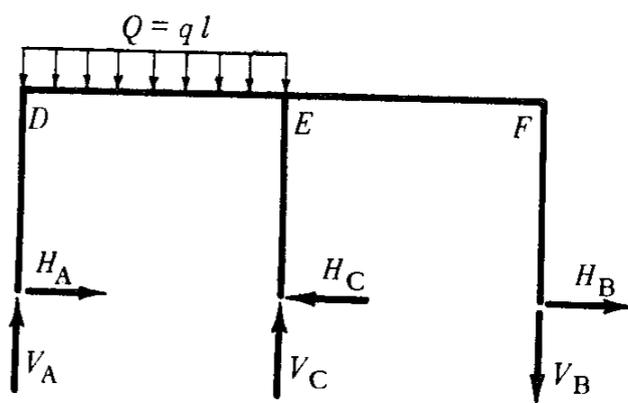


Fig. 27.7

$$V_A = \frac{Q - X}{2} + \frac{Q}{4} = \frac{Q}{16} \left( 7 + \frac{3}{3 + 4 \gamma_1 \gamma_2} \right) \quad (\text{verso l'alto})$$

$$V_C = X = \frac{Q}{16} \left( 10 - \frac{6}{3 + 4 \gamma_1 \gamma_2} \right) \quad (\text{verso l'alto})$$

$$V_B = \frac{Q}{4} - \frac{Q - X}{2} = \frac{Q}{16} \left( 1 - \frac{3}{3 + 4 \gamma_1 \gamma_2} \right) \quad (\text{verso il basso})$$

$$H_A = \frac{M_D}{h} + \frac{M_E}{2h} = \frac{Ql}{8h} \left( \frac{1}{3 + 4\gamma_1\gamma_2} + \frac{1}{3(1 + \gamma_1\gamma_2)} \right) \quad (\text{verso destra})$$

$$H_C = \frac{M_E}{h} = \frac{Ql}{12h} \cdot \frac{1}{1 + \gamma_1\gamma_2} \quad (\text{verso sinistra})$$

$$H_B = \frac{M_E}{2h} - \frac{M_D}{h} = \frac{Ql}{8h} \left( \frac{1}{3(1 + \gamma_1\gamma_2)} - \frac{1}{3 + 4\gamma_1\gamma_2} \right) \quad (\text{verso destra})$$

ove nelle precedenti espressioni si è posto, per semplicità:

$$\gamma_1 = \frac{J_t}{J_p} \quad \gamma_2 = \frac{h}{l} .$$

## RISOLUZIONE NUMERICA E CALCOLO DI RESISTENZA.

Si abbia:

$$l = 6,00; \quad h = 4,00 \text{ m}; \quad q = 3,00 \text{ t/m};$$

è

$$\gamma_2 = 0,667.$$

Si voglia realizzare il telaio in cemento armato; sia assegnata per la trave la sezione rettangolare di dimensioni cm  $30 \times 60$  ( $H = 60$ ) e per i piedritti la sezione quadrata di cm  $30 \times 30$ . Prevedendo che l'armatura metallica sia inferiore al 2% dell'area del calcestruzzo, si può calcolare semplicemente il momento d'inerzia delle sezioni nella forma:

$$J_t = \frac{30 \cdot 60^3}{12} = 54 \cdot 10^4 \text{ cm}^4; \quad J_p = \frac{30^4}{12} = 6,75 \cdot 10^4 \text{ cm}^4; \quad \gamma_1 = \frac{J_t}{J_p} \cong 8.$$

Eseguendo i calcoli si ottiene:

$$\begin{array}{lll} V_A = 8000 \text{ kg}; & V_C = 11000 \text{ kg}; & V_B = 1000 \text{ kg} \\ H_A = 315 \text{ «} & H_C = 355 \text{ «} & H_B = 40 \text{ «} \end{array}$$

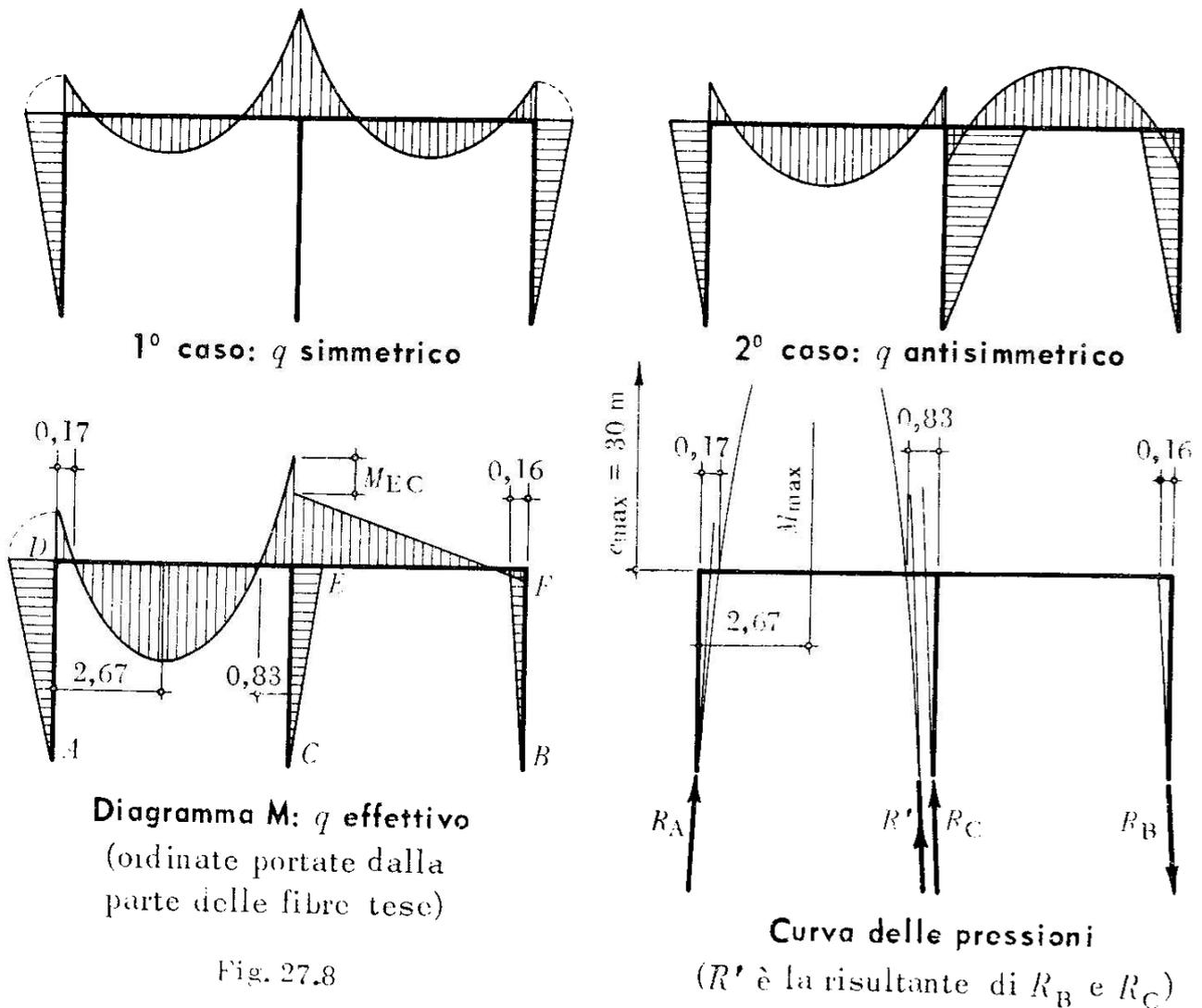
Ed inoltre:

$$\begin{aligned} M_D &= 1260 \text{ kgm} & M_{EC} &= 1420 \text{ kgm} \\ M_F &= 160 \text{ «} & M_{EF} &= 5840 \text{ «} \\ & & M_{ED} &= 7260 \text{ «} \end{aligned}$$

- nella trave  $EF$  è:  $M = 0$  per  $x = \frac{160}{1000} = 0,16 \text{ m}$ ;

- nella trave  $DE$  è:  $M = \frac{3000}{2} x^2 - 8000 x + 1260$  e si annulla per  $x = 0,17 \text{ m}$  e  $x = 5,17 \text{ m}$ . Inoltre è  $T = 0$  per  $x = 2,67 \text{ m}$  e in questa sezione si ha:  $M_{\text{max positivo}} = 9440 \text{ kgm}$ .

Si riportano in fig. 27.8 i diagrammi qualitativi  $M$  dei due casi parziali di carico simmetrico e antisimmetrico e il diagramma  $M$  e la curva delle pressioni per la condizione di carico effettiva.



## CALCOLO DEL PILASTRO.

Il pilastro più sollecitato è quello centrale in corrispondenza della sezione di sommità  $E$  in cui si ha:

$$N = 11000 \text{ kg}; \quad M = 1420 \text{ kgm}; \quad e = \frac{M}{N} = 13 \text{ cm}$$

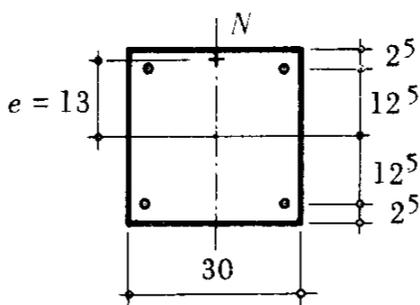
(il centro di pressione è esterno al nocciolo).

Assumiamo:

$$K_F = 1600 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{e} \quad K_C = 60 \text{ kg/cm}^2.$$

Fissiamo di tentativo l'armatura metallica: 4/12 (pari a circa lo 0,8 % dell'area di calcestruzzo necessaria a compressione semplice per  $K_C = 45 \text{ kg/cm}^2$ , secondo regolamento).

Si devono verificare  $\sigma_C$  e  $\sigma_F$ .



$$A_F = A'_F = 2 \phi 12 = 2,26 \text{ cm}^2$$

$$H = 30 \text{ cm} \quad e = 13 \text{ cm}$$

$$h = 27,5 \text{ «} \quad d = 25,5 \text{ «}$$

$$h' = 2,5 \text{ «} \quad d' = -2 \text{ «}$$

$$b = 30 \text{ «} \quad m = 10 \text{ «}$$

$$x^3 + 3\left(e - \frac{H}{2}\right)x^2 + \frac{12m}{b} A_F \cdot e \cdot x - \frac{6m}{b} A_F (d'h' + dh) = 0 \quad x = 14 \text{ cm};$$

$$\sigma_{C_{\max}} = \frac{N}{\frac{bx}{2} + mA_F\left(2 - \frac{H}{x}\right)} = 53 \text{ kg/cm}^2 < K_C$$

$$\sigma_F = m \sigma_C \frac{h - x}{x} = 515 \text{ kg/cm}^2 < K_F$$

## CALCOLO DELLA TRAVE.

La sezione più sollecitata dell'intera travata è quella soggetta al massimo  $M$  positivo. Poiché  $N$  nella trave è molto piccolo e l'eccentricità  $e = \frac{9440}{315} = 30 \text{ m}$  è molto grande rispetto alle dimensioni della sezione, si può correttamente eseguire un calcolo a solo  $M$ . Assumiamo  $K_F = 1600 \text{ kg/cm}^2$  e  $K_C = 70 \text{ kg/cm}^2$ .

Il calcolo da eseguirsi è di verifica per il calcestruzzo e di progetto per l'armatura metallica.

Si ha:

$$M = 9440 \text{ kgm}; \quad h = 57,5 \text{ cm}; \quad b = 30 \text{ cm}.$$

$$C_h = \frac{h}{\sqrt{\frac{M}{b}}} = 0,327 \quad \text{per} \quad K_F = 1600 \quad \text{è} \quad \sigma_C = 69 \text{ kg/cm}^2 < K_C.$$

Risulta:

$$A_F = C_F \sqrt{M \cdot b} = 11,3 \text{ cm}^2.$$

Il calcolo della trave deve poi essere completato, estendendolo alle sezioni  $D$ ,  $E$  ed  $F$  soggette ad  $M$  negativo, e agli sforzi taglianti.

\*\*\*

**28. - Risolvere la struttura di fig. 28.1: trave a doppio ginocchio vincolata con due cerniere e soggetta a 2 coppie  $M_0$  nei nodi  $C$  e  $D$ .**

1° CASO: coppie equiverse (fig. 28.1)

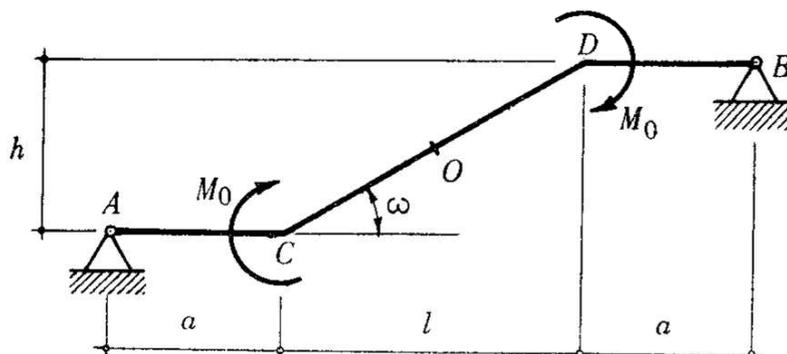


Fig. 28.1

La struttura è dotata di una simmetria radiale rispetto ad  $O$ , sia per quanto riguarda l'asse geometrico e i vincoli esterni, sia per i carichi applicati.

Naturalmente le proprietà di questa simmetria sono soddisfatte anche dalla curva delle pressioni e dalla deformata della struttura, in modo che due sezioni qualunque  $S_1$  e  $S_1'$ , egualmente distanti da  $O$ , sono soggette alle stesse azioni interne e compiono componenti di spostamento e rotazione eguali e simmetriche. Per il verificarsi di queste condizioni, nel centro  $O$  di simmetria è:

$$M = 0; \quad \xi_0 = 0; \quad \eta_0 = 0.$$

Si può allora considerare al posto della trave a doppio ginocchio assegnata, solamente metà struttura, ad esempio la  $ODB$ , vincolata in  $O$  con una cerniera fissa, perché  $O$  ruota solamente senza traslare e non è soggetto ad alcuna azione interna di momento flettente (fig. 28.2).

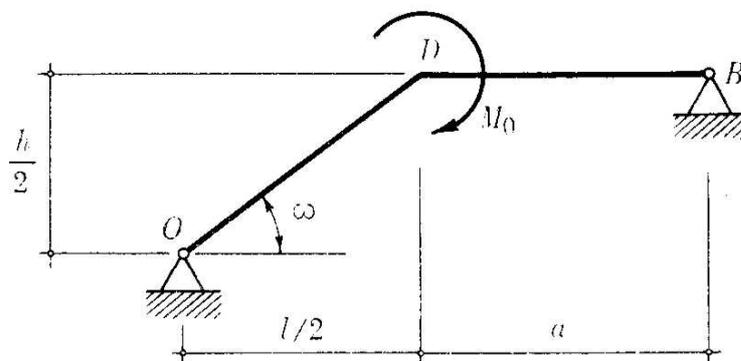


Fig. 28.2

Ci si è così ricondotti allo studio di una trave ad asse spezzato il cui comportamento flessionale è il medesimo di trave continua ad appoggi rigidi  $O$ ,  $D$ ,  $B$ , in quanto la condizione di carico assegnata consente di trascurare la deformazione dovuta allo sforzo normale in confronto a quella provocata dal momento flettente.

Sopprimiamo la solidarietà a rotazione in  $D$  (fig. 28.3); ricordando gli esercizi 11 e 12 si ha:

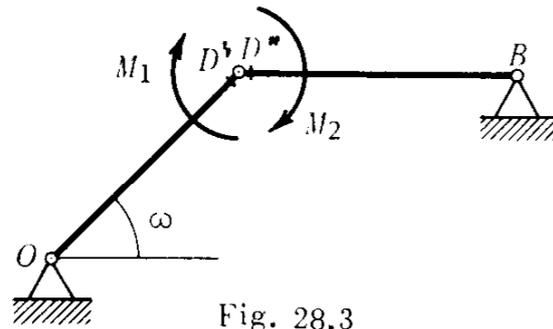


Fig. 28.3

$$\begin{cases} \Sigma M_D = 0 & \text{equilibrio alla rotazione del nodo } D. \\ \varphi_{D'} = \varphi_{D''} & \text{condizione di congruenza.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_1 + M_2 = M_0 \\ \frac{M_1 l}{6 E J_1 \cos \omega} = \frac{M_2 a}{3 E J_2} \end{cases}$$

Si ottiene:

$$M_1 = M_0 \frac{1}{1 + \frac{J_2}{J_1} \frac{l}{2a \cos \omega}}$$

$$M_2 = M_0 \frac{1}{1 + \frac{J_1}{J_2} \frac{2a \cos \omega}{l}}$$

Si ottengono ora, nel modo solito, gli sforzi di taglio equilibrando alla rotazione le singole aste, e gli sforzi normali equilibrando alla traslazione il nodo  $D$  (fig. 28.4).

Con i sensi di figura, che sono quelli esatti:

$$T_1 = \frac{2 M_1 \cos \omega}{l}$$

$$T_2 = \frac{M_2}{a}$$

$$N_1 \cos \omega - N_2 + T_1 \sin \omega = 0$$

$$N_1 \sin \omega - T_1 \cos \omega + T_2 = 0.$$

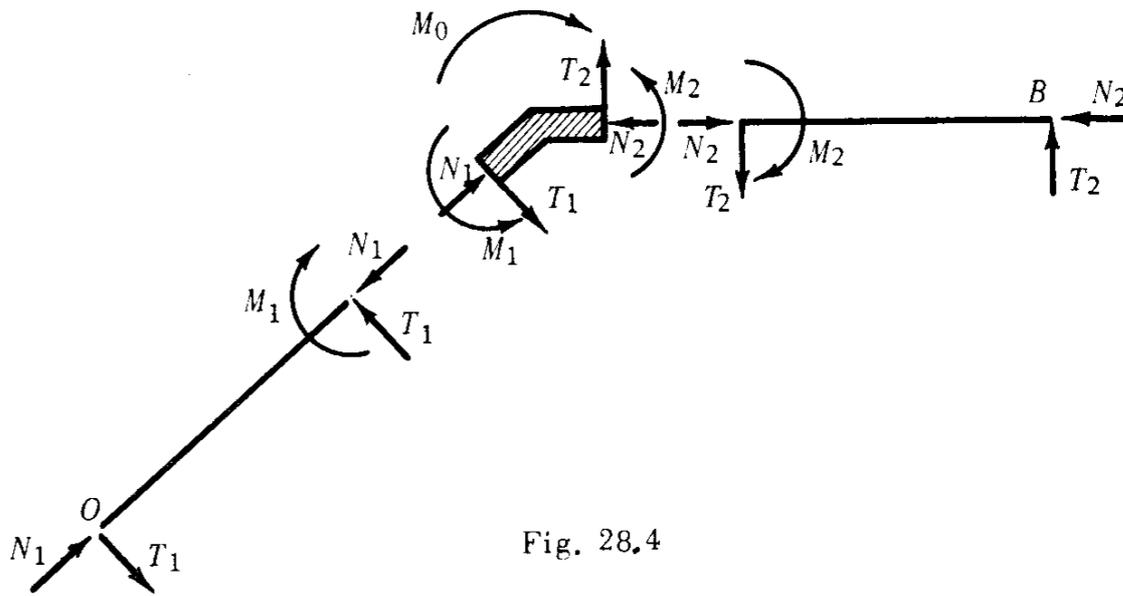


Fig. 28.4

La curva delle pressioni (fig. 28.5) è costituita dalla retta d'azione della  $R_B$  per il tratto  $BD$  e dalla parallela  $r'$  passante per  $O$ , per il restante tratto  $DO$ . Simmetricamente per l'altra mezza struttura  $ACO$ .

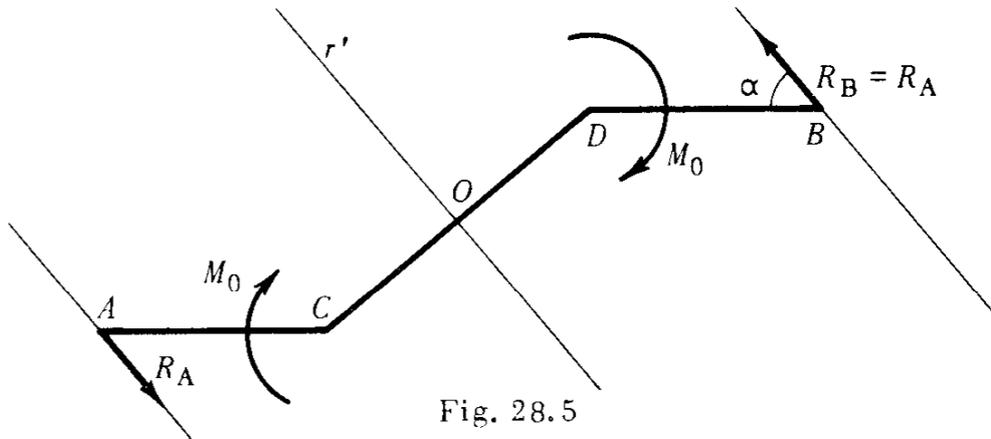


Fig. 28.5

2° CASO: coppie  $M_0$  di verso opposto (fig. 28.6)

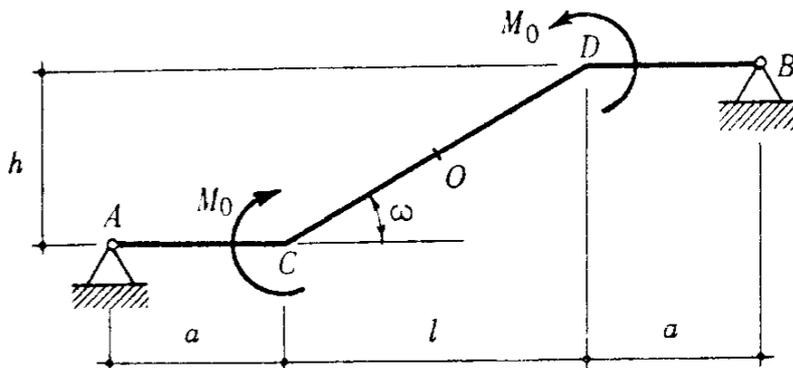


Fig. 28.6

In questo caso la struttura è caricata antisimmetricamente rispetto al centro  $O$  di simmetria geometrica. Le due coppie  $M_o$  costituiscono un sistema equilibrato; di conseguenza anche le reazioni delle cerniere devono autoequilibrarsi ed assumere la direzione comune della congiungente  $AB$  con valore eguale e verso opposto. In questo modo però le reazioni risultano simmetriche rispetto ad  $O$ , in contrasto con le caratteristiche del carico applicato; se ne deduce che esse devono avere valore nullo per soddisfare contemporaneamente le condizioni di antisimmetria e di equilibrio.

Pertanto i due tratti  $AC$  e  $BD$  risultano scarichi; essi ruotano ri-

gidamente attorno alle cerniere esterne dell'angolo  $\varphi = \frac{M_o l}{2EJ \cos \omega}$ , che è quello di cui ruotano le sezioni iniziale e terminale dell'asta  $CD$  sollecitata unicamente dal momento flettente costante  $M_o$ .

In fig. 28.7 è indicata qualitativamente la configurazione deformata assunta dalla struttura.

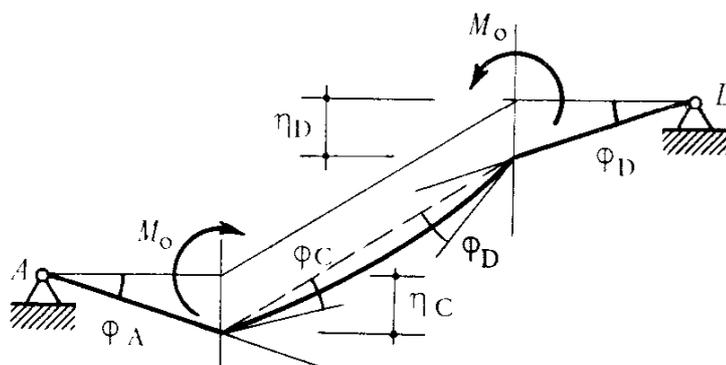


Fig. 28.7

Risulta:

$$\varphi_A = \varphi_C = \varphi_D = \varphi_B = \frac{M_o l}{2EJ \cos \omega}$$

$$\eta_C = \eta_D = \frac{M_o l}{2EJ \cos \omega} a.$$

\* \* \*

29. - Risolvere la trave a doppio ginocchio di fig. 29.1 perfettamente incastrata agli estremi e soggetta ad un carico uniforme verticale su tutta la luce.

La struttura è tre volte iperstatica e tre volte staticamente indeterminata.

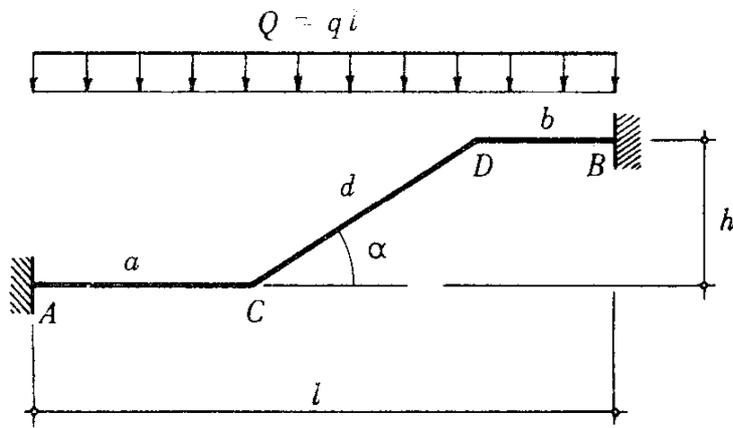


Fig. 29.1

Si può risolvere il problema sopprimendo uno dei due incastri (ad esempio  $B$ ), ed assumere quale struttura principale la trave a mensola, incastrata in  $A$ , soggetta al carico  $q$  e alla reazione  $R_B$ , decomposta nelle sue tre componenti  $H$ ,  $V_B$  e  $M_B$ . Le condizioni di congruenza sono quelle che impongono il rispetto del vincolo soppresso (fig. 29.2):

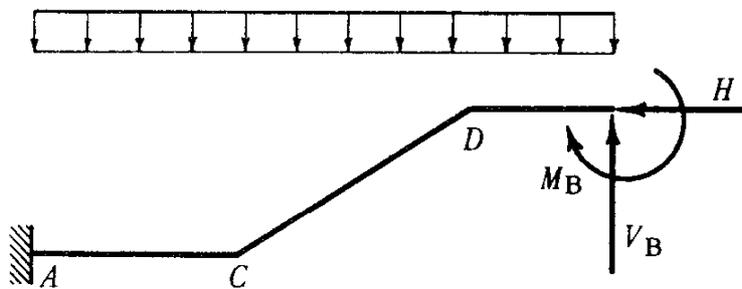


Fig. 29.2

$$\begin{cases} \varphi_B = 0 \\ \xi_B = 0 \\ \eta_B = 0. \end{cases}$$

Si ottiene così un sistema di tre equazioni, ciascuna delle quali contiene tutte e tre le incognite  $H$ ,  $V_B$  e  $M_B$ .

È preferibile però procedere ad uno svincolamento più aderente al comportamento fisico della struttura, per tener conto delle considerazioni svolte nell'esercizio 7 a proposito dei criteri che debbono governare la scelta della struttura principale.

Poiché all'evidenza si può trascurare la deformazione dovuta ad  $N$  in confronto a quella generata da  $M$  (la curva delle pressioni è infatti un arco di parabola e si discosta notevolmente dall'asse geometrico) i nodi  $C$  e  $D$  compiono solo uno spostamento verticale  $\eta$  (verso il basso) eguale e di senso concorde.

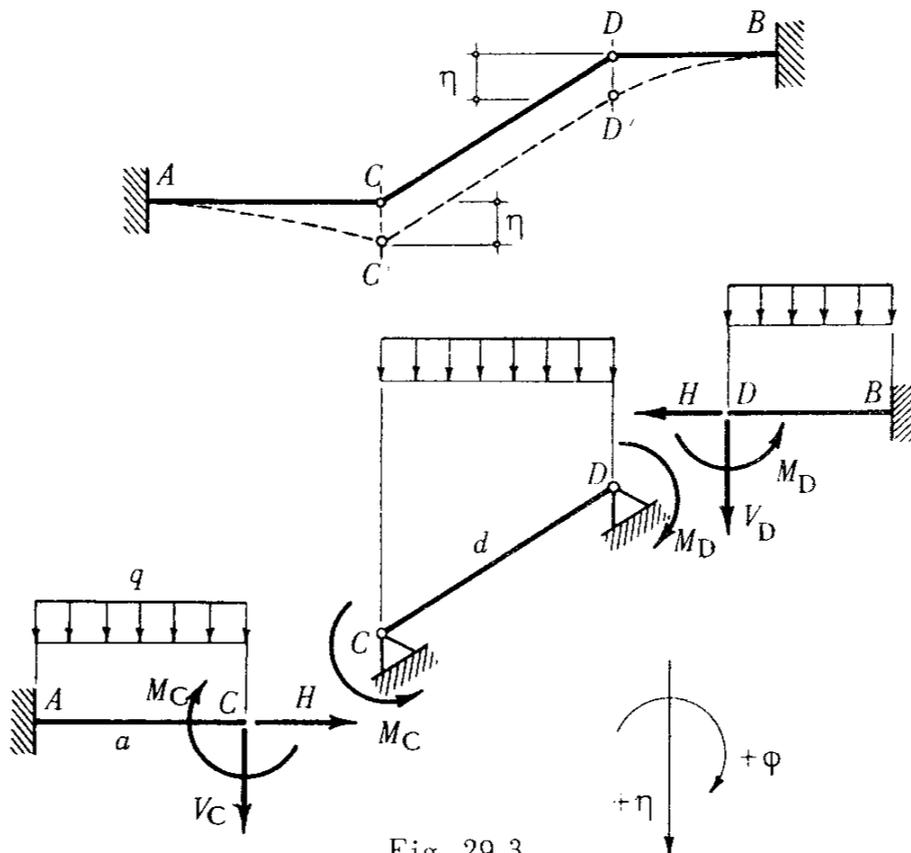


Fig. 29.3

Sopprimiamo la solidarietà angolare nei nodi  $C$  e  $D$  e osserviamo come è possibile portarli a coincidere con le loro posizioni finali  $C'$  e  $D'$  (per il momento incognite poiché non è noto  $\eta$ ) mediante un moto rigido

di traslazione verticale dell'asta centrale, deformando solo le aste laterali  $AC$  e  $BD$  (fig. 29.3).

Si può pensare allora di assumere la struttura principale costituita dalle due mensole  $AC$  e  $BD$  e dalla trave  $CD$  rigidamente appoggiata in  $C'$  e  $D'$ . Delle azioni mutue che i vari pezzi di struttura si trasmettono figurano totalmente esplicitate quelle applicate alle mensole; all'asta  $CD$ , incernierata, sono applicati esplicitamente solo i momenti  $M_C$  e  $M_D$ .

Per l'equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale di quest'ultima asta è:

$$H_C = H_D = H \quad \text{e} \quad V_D = qd \cos \alpha - V_C.$$

Le condizioni di congruenza impongono l'eguaglianza dell'abbassamento degli estremi liberi delle due mensole e il rispetto della solidarietà angolare nei nodi  $C$  e  $D$ .

In simboli:

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_C = \eta_D \\ \varphi_{C \text{ sinistra}} = \varphi_{C \text{ destra}} \\ \varphi_{D \text{ sinistra}} = \varphi_{D \text{ destra}} \end{array} \right.$$

Si ottiene così un sistema di tre equazioni nelle tre incognite  $V_C$ ,  $M_C$  e  $M_D$  (le spinte  $H$  non intervengono nei calcoli di deformazione e  $V_D$  è nota in funzione di  $V_C$ ) col duplice vantaggio, però, di dovere esprimere delle relazioni più semplici di quelle che si sarebbero ottenute col precedente svincolamento, e di operare su una struttura principale il cui regime statico è abbastanza prossimo a quello della struttura assegnata.

Esplicitando i vari termini, nell'ipotesi che sia  $J = \text{costante}$  per tutta la struttura, e con i sensi positivi per rotazioni e spostamenti indicati in fig. 29.3, si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{qa^4}{8EJ} + \frac{V_C a^3}{3EJ} + \frac{M_C a^2}{2EJ} = \frac{qb^4}{8EJ} + \frac{(qd \cos \alpha - V_C) b^3}{3EJ} + \frac{M_D b^2}{2EJ} \\ \frac{qa^3}{6EJ} + \frac{V_C a^2}{2EJ} + \frac{M_C a}{EJ} = \frac{q \cos^2 \alpha d^3}{24EJ} - (2M_C + M_D) \frac{d}{6EJ} \\ - \frac{q \cos^2 \alpha d^3}{24EJ} + (2M_D + M_C) \frac{d}{6EJ} = - \left[ \frac{qb^3}{6EJ} + \frac{(qd \cos \alpha - V_C) b^2}{2EJ} + \frac{M_D b}{EJ} \right] \end{array} \right.$$

Semplificando per il fattore comune  $EJ$  e raccogliendo membro a membro incognite e termini noti, si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{V_C}{3} (a^3 + b^3) + \frac{M_C}{2} a^2 - \frac{M_D}{2} b^2 = q \left[ \frac{\cos \alpha db^3}{3} - \left( \frac{a^4 - b^4}{8} \right) \right] \\ \frac{V_C}{2} a^2 + M_C \left( a + \frac{d}{3} \right) + M_D \frac{d}{6} = q \left[ \frac{\cos^2 \alpha d^3}{24} - \frac{a^3}{6} \right] \\ - \frac{V_C}{2} b^2 + M_C \frac{d}{6} + M_D \left( b + \frac{d}{3} \right) = -q \left[ \frac{\cos \alpha db^2}{2} - \frac{\cos^2 \alpha d^3}{24} + \frac{b^3}{6} \right] \end{array} \right.$$

#### CASO PARTICOLARE $a = b$ .

In questo caso la struttura è dotata di simmetria radiale rispetto al punto di mezzo  $O$  dell'asta  $CD$ . Il carico uniforme è invece antisimmetrico rispetto al centro della simmetria, come mette più chiaramente in evidenza la fig. 29.4 in cui  $q$  è stato scisso nelle due parti agenti a sinistra e a destra di  $O$ .

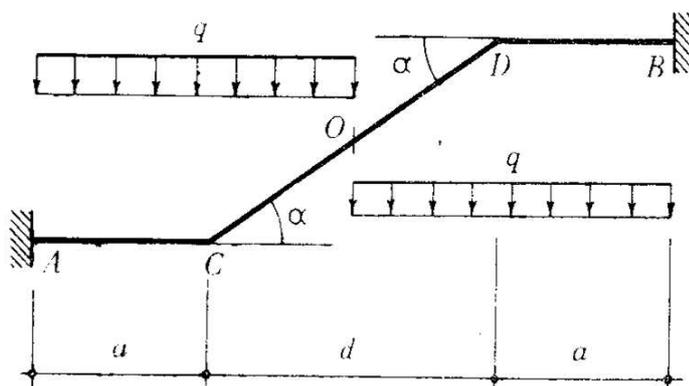


Fig. 29.4

Per ragioni d'antisimmetria le azioni mutue nei nodi  $C$  e  $D$  risultano:

$$V_C = V_D \quad (\text{di senso concorde})$$

$$M_C = M_D \quad (\text{di senso opposto})$$

$$H = 0 \quad (\text{infatti le spinte } H \text{ sono componenti simmetriche di reazione}).$$

Ponendo nelle tre equazioni del sistema risolutivo  $a = b$ , si ottiene infatti:

$$V_C = V_D = \frac{qd \cos \alpha}{2}$$

$$M_C = M_D = \frac{q}{2a + d} \left[ \left( \frac{d^2}{6} - a^2 \right) \frac{d \cos \alpha}{2} - \frac{a^3}{3} \right]$$

$M_C$  può invertirsi di segno, come risulta dalla sua espressione analitica, a seconda dei valori di  $a$ ,  $d$ ,  $\alpha$ .

Il senso previsto nello svincolamento iniziale è, all'evidenza, esatto per valori di  $a$  piccoli rispetto a  $d$ . In questa ipotesi le mensole  $AC$  e  $BD$  risultano notevolmente più rigide dell'asta centrale e agiscono nei suoi confronti come incastri, seppure cedevoli, trasmettendole dei momenti che contrastano la rotazione generata da  $q$ .

\* \* \*

30. - Risolvere il telaio chiuso simmetrico di fig. 30.1, soggetto alla forza  $P$  verticale agente nel vertice  $C$ .

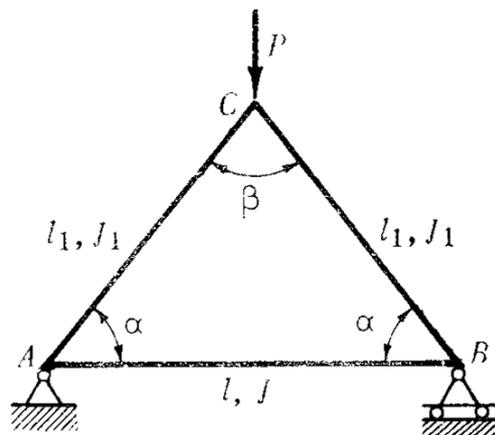


Fig. 30.1

Internamente la struttura è tre volte iperstatica giacché si tratta di un telaio chiuso a maglia semplice; la simmetria però riduce a due il grado di indeterminazione.

All'esterno è isostatica; le reazioni dei vincoli sono verticali e valgono entrambe  $\frac{P}{2}$ .

Al solito è conveniente svincolare in modo da sfruttare la simmetria; sopprimiamo pertanto la solidarietà angolare nei nodi  $A$ ,  $B$  e  $C$ : otteniamo quale struttura principale una comune maglia triangolare reticolare, soggetta nei nodi ai carichi esterni e alle coppie mutue esplicitate dallo svincolamento (fig. 30.2).

L'asse geometrico è l'esatta funicolare dei carichi esterni; occorre pertanto tener conto della deformazione provocata da  $N$ , altrimenti la struttura rimarrebbe totalmente indeformata (vedi esercizi 14 e 24).

Gli sforzi principali nelle aste valgono:

- aste  $AC$  e  $BC$ : 
$$S_1 = \frac{-P}{2 \operatorname{sen} \alpha} \quad (\text{compressione})$$

- asta  $AB$ : 
$$S = \frac{P}{2 \operatorname{tg} \alpha} \quad (\text{trazione}).$$

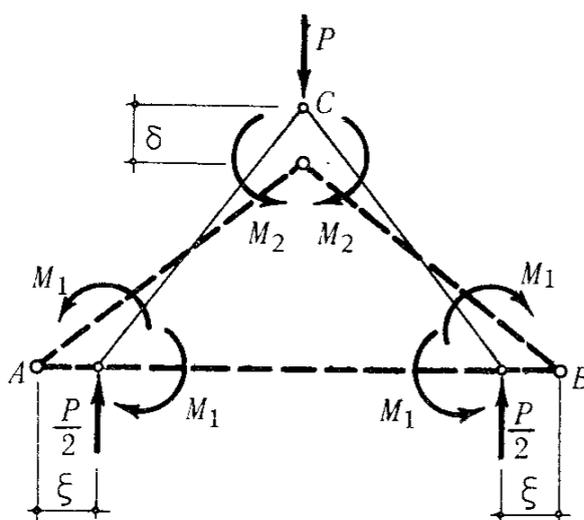


Fig. 30.2

Per effetto dei soli carichi la struttura principale si deforma come indicato in fig. 30.2: il nodo  $C$  si abbassa (il lavoro esterno è sempre

positivo); i punti  $A$  e  $B$  subiscono un allontanamento relativo; gli angoli in  $A$  e in  $B$  diminuiscono e quello in  $C$  aumenta. Le coppie mutue hanno il compito di assicurare il rispetto dei vincoli soppressi e il loro valore si determina in base alle condizioni di congruenza:

$$\begin{cases} \Delta \alpha = 0 \\ \Delta \beta = 0. \end{cases}$$

Il senso di  $M_1$  e  $M_2$  è senz'altro quello indicato in figura: infatti  $M_1$  si oppone alla diminuzione di  $\alpha$ , ed  $M_2$  all'aumento di  $\beta$  provocato dai carichi  $P$  e da  $M_1$ .

Calcoliamo dapprima le variazioni angolari generate dalla deformazione assiale delle aste.

Si ha:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2h}{l}; \quad \operatorname{tg}(\alpha + \Delta \alpha) \cong \frac{\operatorname{tg} \alpha + \Delta \alpha}{1 - \Delta \alpha \operatorname{tg} \alpha} = \frac{h - \delta}{\frac{l}{2} + \xi}.$$

Sostituendo l'espressione di  $\operatorname{tg} \alpha$ , è:

$$\frac{\frac{2h}{l} + \Delta \alpha}{1 - \frac{2h}{l} \Delta \alpha} = \frac{h - \delta}{\frac{l}{2} + \xi}.$$

Si ottiene per  $\Delta \alpha$ , trascurando gli infinitesimi del secondo ordine:

$$\Delta \alpha = - \frac{\frac{2\delta}{l} + \frac{4h}{l^2} \xi}{1 + \frac{4h^2}{l^2}}.$$

Il segno negativo sta ad indicare che si tratta di una diminuzione di  $\alpha$ .

Nell'espressione di  $\Delta \alpha$  compaiono

$$\xi = \frac{Sl}{2EA} = \frac{Pl}{4EA \operatorname{tg} \alpha}$$

e  $\delta$ , il cui valore è espresso dalla relazione:

$$\delta \operatorname{sen} \alpha - \xi \cos \alpha = \frac{S_1 l_1}{E A_1}$$

sostituendo e risolvendo, si ha:

$$\delta = \frac{P}{2 \operatorname{sen}^2 \alpha} \left[ \frac{l_1}{E A_1} + \frac{l}{2 E A} \cos^2 \alpha \right].$$

Per ragioni di simmetria è:

$$\Delta \beta = -2 \Delta \alpha \quad (\beta \text{ aumenta}).$$

Esplicitando i vari termini le equazioni di congruenza risultano:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{M_1 l}{2 E J} + \frac{(2 M_1 - M_2) l_1}{6 E J_1} \right) - \frac{\frac{2 \delta}{l} + \frac{4 h}{l^2} \xi}{1 + \frac{4 h^2}{l^2}} = 0 \\ - \frac{(2 M_2 - M_1) l_1}{6 E J_1} + \frac{\frac{2 \delta}{l} + \frac{4 h}{l^2} \xi}{1 + \frac{4 h^2}{l^2}} = 0. \end{array} \right.$$

Sottraendo la seconda equazione dalla prima, si ottiene:

$$M_1 = \frac{3 E J}{\left( 1 + \frac{J}{4 J_1 \cos \alpha} \right) l} \cdot \frac{\frac{2 \delta}{l} + \frac{4 h}{l^2} \xi}{1 + \frac{4 h^2}{l^2}}$$

$$M_2 = \left( 1 + 2 \frac{J_1}{J} \cos \alpha \right) M_1$$

La fig. 30.3 pone in evidenza il regime statico generato dalle coppie  $M_1$  ed  $M_2$  nella struttura principale. Lo sforzo secondario  $H$ , trascurato

rabile in confronto agli sforzi principali  $S$  ed  $S_1$ , vale:

$$H = \frac{2(M_1 + M_2)}{l \cdot \operatorname{tg} \alpha}.$$

Le coppie mutue provocano un leggero scostamento della curva delle pressioni dall'asse geometrico (fig. 30.4). L'eccentricità è costante nell'asta  $AB$ , e vale:

$$e = \frac{M_1}{S - H} \approx \frac{M_1}{S}.$$

In corrispondenza del vertice  $C$  si ha:

$$d = \frac{e_1}{\cos \alpha} = \frac{M_2}{(S_1 - H \cos \alpha) \cos \alpha} = \frac{M_2}{S_1 \cos \alpha}$$

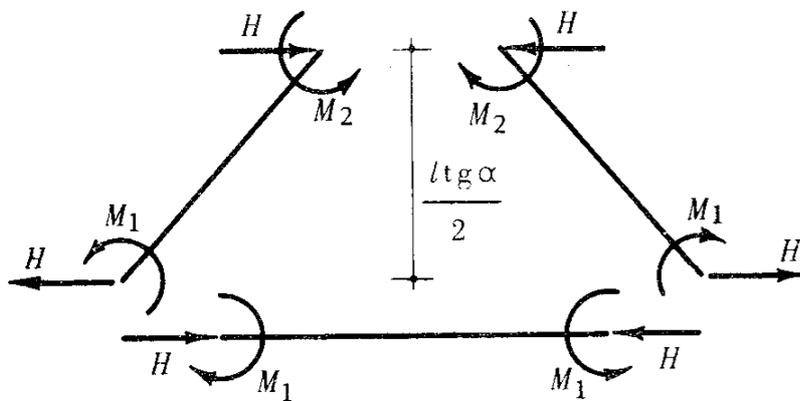


Fig. 30.3

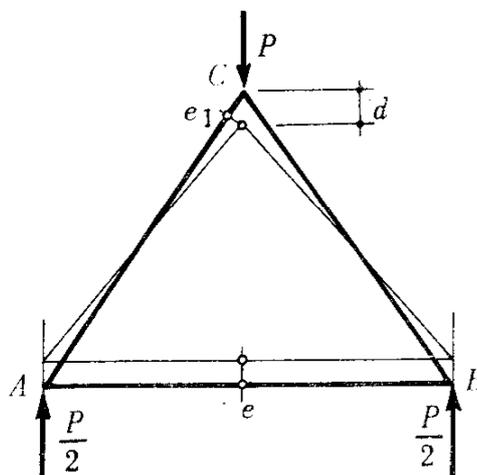


Fig. 30.4

## RISOLUZIONE NUMERICA E CALCOLO DI RESISTENZA.

Si abbia:

$$l = 8,00; \quad \alpha = 30^\circ; \quad \beta = 120^\circ; \quad P = 10\,000 \text{ kg.}$$

Risulta:

$$l_1 = 4,62 \text{ m}; \quad h = 2,31 \text{ m.}$$

Si voglia realizzare il telaio con profilato tubolare di ferro omogeneo tipo Aq 37 ( $K_F = 1400 \text{ kg/cm}^2$ ).

Date le caratteristiche del materiale impiegato le aste risulteranno senz'altro snelle e in quelle compresse si farà sentire l'effetto del carico di punta. Pertanto è bene adottare, tenuto conto che l'azione di  $N$  prevale di gran lunga su quella di  $M$ , un profilato a sezione quadrata avente eguale  $J$  in tutte le direzioni.

Progettiamo la struttura in base agli sforzi principali per un valore della tensione ammissibile  $\sigma_F < K_F$  (per tener conto dell'ulteriore incremento provocato dal momento flettente), e applichiamo il metodo  $\omega$  per le aste compresse.

Si procede di tentativo, consultando l'apposita tabella dei ferri tubolari. Ad esempio per il profilato  $10 \times 10$  si ha:

Dimensioni	$10 \times 10 \text{ cm}$	$J = 261,9 \text{ cm}^4$
Spessore	$0,40 \text{ cm}$	$W = 52,37 \text{ cm}^3$
Sezione	$17,19 \text{ cm}^2$	$\rho = 3,90 \text{ cm}$

Le aste  $AC$  e  $BC$  si comportano come incastrate elasticamente agli estremi, adottiamo allora per esse  $\lambda = \frac{0,75 \cdot l_1}{\rho} = 89$  corrispondente ad una condizione intermedia tra quella di asta doppiamente incastrata oppure doppiamente incernierata.

Si ha:

- sforzi principali:

$$S_1 = - \frac{10\,000}{2 \operatorname{sen} 30^\circ} = -10\,000 \text{ kg}$$

$$S = \frac{10\,000}{2 \operatorname{tg} 30^\circ} = 8\,650 \text{ kg}$$

$$\omega = 2,16 \quad \sigma_F = 2,16 \frac{10\,000}{17,19} = 1260 \text{ kg/cm}^2 < K_F.$$

Si ottiene:

$$\xi = 0,0965 \text{ cm} \quad \text{e} \quad \delta = 0,423 \text{ cm}$$

e per le incognite iperstatiche:

$$W_1 = 1440 \text{ kg cm} \quad W_2 = 3920 \text{ kg'cm}.$$

Si verifica ora la struttura a flessione composta.

- asta *AB*:

$$\sigma_{\max} = \frac{8650}{17,19} + \frac{1440}{52,37} = 504 + 28 = 532 \text{ kg/cm}^2 < K_F$$

• aste *AC* e *CB*:

$$\sigma_{\max} = 2,16 \cdot \frac{10\,000}{17,19} + \frac{3920}{52,37} = 2,16 \cdot 582 + 75 = 1335 \text{ kg/cm}^2 < K_F.$$

Lo sforzo secondario è:

$$H = \frac{2(1440 + 3920)}{0,578 \cdot 800} = 23 \text{ kg}$$

l'eccentricità della curva delle pressioni vale:

$$e = \frac{1440}{8650} = 0,17 \text{ cm} \quad d = \frac{3920}{10\,000 \cdot 0,865} = 0,45 \text{ cm}.$$

## OSSERVAZIONI.

1) Se il telaio  $ABC$  è vincolato esternamente con due cerniere esterne fisse (fig. 30.5), l'asta  $AB$  non può variare di lunghezza, e pertanto il suo sforzo principale è nullo. Si calcolano allora le variazioni di  $\alpha$  e  $\beta$  provocate dalla deformazione assiale delle aste  $AC$  e  $BC$  e si ripristina poi la congruenza nel modo solito, mediante l'azione flessionale delle coppie mutue agenti nei nodi.

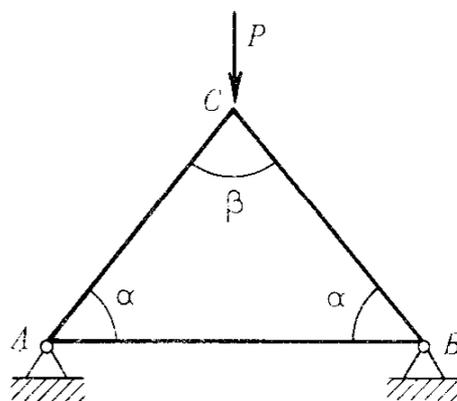


Fig. 30.5

2) Se, nel caso del telaio precedente a due cerniere, la forza  $P$  agisce secondo una direzione qualunque (fig. 30.6) la si può decomporre nelle due componenti verticale e orizzontale e studiare il telaio per le due distinte condizioni di carico:  $P_v$  simmetrica e  $P_0$  antisimmetrica.

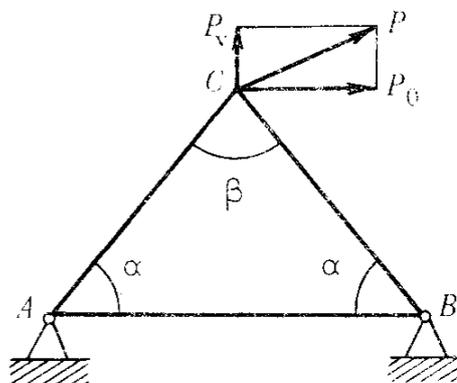


Fig. 30.6

Naturalmente in entrambi i casi si deve tener conto della deformazione assiale.

Si ha però il vantaggio di scindere il problema originario, tre volte staticamente indeterminato, in due casi più semplici: quello simmetrico, due volte indeterminato e quello antisimmetrico, una sola volta indeterminato.

\* \* \*

**31. - Risolvere la struttura dell'esercizio precedente soggetta ad una coppia  $M_0$  nel vertice  $C$  (fig. 31.1).**

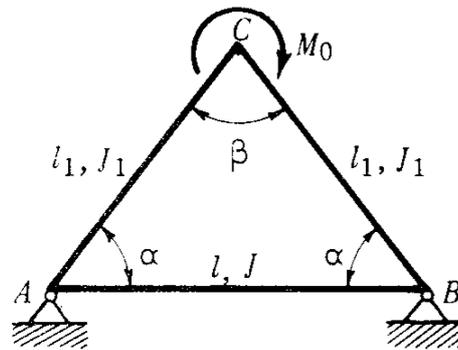


Fig. 31.1

La condizione di carico assegnata è antisimmetrica. Le reazioni dei vincoli esterni sono staticamente determinate; esse sono verticali e valgono  $\frac{M_0}{l}$  con i sensi indicati in fig. 31.2.

Il vertice  $C$  compie solo una rotazione  $\varphi_C$ ; non subisce spostamento verticale per ragioni d'antisimmetria, né orizzontale per effetto della lecita trascurabilità della deformazione assiale.

Assumiamo quale struttura principale il telaio isostatico incernierato nei nodi; per antisimmetria la coppia esterna  $M_0$  si ripartisce in due parti uguali sulle due aste  $AC$  e  $BC$  che si comportano come travi semplici rigidamente appoggiate.

In fig. 31.2 è indicata con tratteggio la deformazione della struttura principale per effetto di  $M_0$ . Le due aste  $AC$  e  $BC$  si inflettono anti-

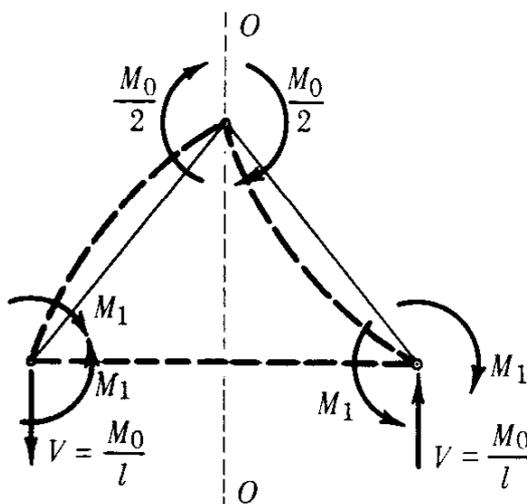


Fig. 31.2

simmetricamente rispetto all'asse verticale  $O-O$ , dimodoché  $\beta$  rimane invariato; l'asta  $AB$  non si deforma e gli angoli  $\alpha$  subiscono una variazione di eguale valore assoluto:

$$\Delta \alpha = \frac{M_0 l_1}{12 EJ_1} \quad \begin{array}{l} \text{(aumento per l'angolo in } A, \\ \text{diminuzione per quello in } B). \end{array}$$

I momenti mutui  $M_1$ , esplicitati dallo svincolamento, hanno il compito di assicurare il rispetto della solidarietà angolare nei nodi  $A$  e  $B$ . Naturalmente sono antisimmetrici e il loro senso rotatorio è facilmente prevedibile. Essi annullano i  $\Delta \alpha$  causati da  $M_0$  senza provocare una variazione dell'angolo  $\beta$  e quindi senza alterare l'azione di momento flettente  $\frac{M_0}{2}$  esistente all'interno del nodo  $C$ .

Pertanto la struttura assegnata, pur essendo tre volte iperstatica, è una sola volta staticamente indeterminata. La condizione di congruenza che determina l'incognita  $M_1$  è, in simboli:

$$\Delta \alpha = 0.$$

Esplicitando i vari termini:

$$\frac{M_0 l_1}{12 EJ_1} - M_1 \left( \frac{l_1}{3 EJ_1} + \frac{l}{6 EJ} \right) = 0$$

da cui:

$$M_1 = \frac{M_0}{4} \cdot \frac{1}{1 + \frac{l}{2l_1} \cdot \frac{J_1}{J}}$$

Per ragioni d'antisimmetria le singole aste si trasmettono solo delle azioni mutue verticali (fig. 31.3).

Si ha:

$$T = \frac{\frac{M_0}{2} + M_1}{l_1 \cos \alpha}$$

$$T_1 = \frac{2 M_1}{l}$$

naturalmente è:

$$T - T_1 = V = \frac{M_0}{l}$$

per le condizioni generali d'equilibrio dell'intera struttura.

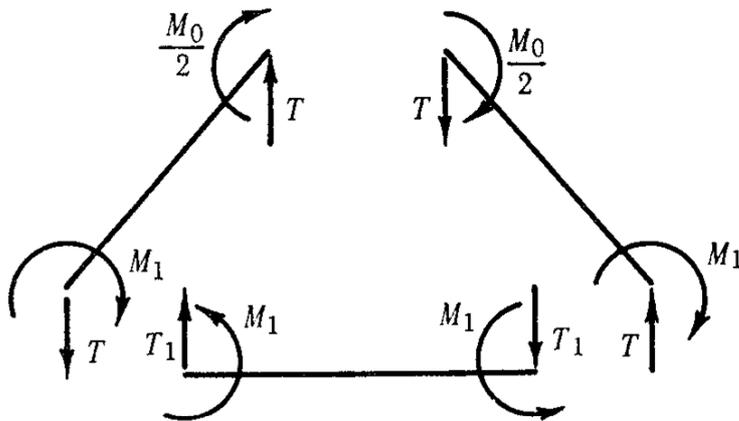


Fig. 31.3

### CURVA DELLE PRESSIONI (fig. 31.4).

È costituita dalle rette d'azione delle risultanti  $R$  di  $\frac{M_0}{2}$  e  $T$ , ed  $R_1$  di  $M_1$  e  $T_1$ . Riferita all'asse geometrico essa fornisce il diagramma del momento flettente, a meno di  $T$  per le aste  $AC$  e  $BC$ , e di  $T_1$  per l'asta  $AB$ .

È

$$d = \frac{M_0}{2T} = \frac{M_0}{M_0 + 2M_1} \cdot \frac{l}{2}$$

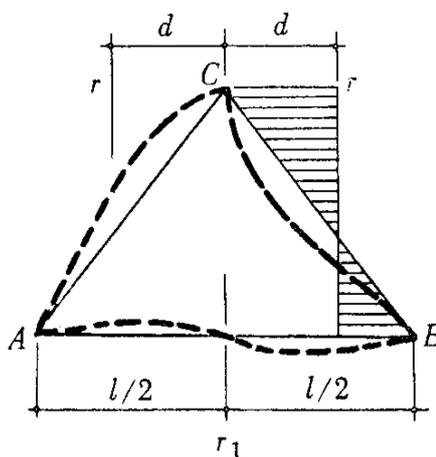


Fig. 31.4

### DEFORMATA DELLA STRUTTURA.

È indicata in fig. 31.4 con tratteggio: l'asta  $AB$  si inflette sotto l'azione delle coppie  $M_1$  antisimmetriche; le aste  $AC$  e  $BC$  per effetto delle coppie  $M_1$  e  $\frac{M_0}{2}$ .

### ROTAZIONE DEL NODO C.

Avviene naturalmente nel senso della coppia  $M_0$  perché il lavoro esterno deve essere positivo.

Si ha:

$$\varphi_C = \frac{M_0 l_1}{6 EJ_1} - \frac{M_1 l_1}{6 EJ_1} = \frac{M_0 l_1}{6 EJ_1} \left( 1 - \frac{1}{4 \left( 1 + \frac{l}{2l_1} \cdot \frac{J_1}{J} \right)} \right)$$

Per i nodi  $A$  e  $B$  risulta:

$$\varphi_A = \varphi_B = \frac{M_1 l}{6 EJ} = \frac{M_0 l}{24 EJ} \cdot \frac{1}{\left( 1 + \frac{l}{2l_1} \cdot \frac{J_1}{J} \right)}$$

$\varphi_A$  e  $\varphi_B$  hanno senso opposto a  $\varphi_C$ .

#### CALCOLO DI RESISTENZA.

In questo caso il calcolo di resistenza (verifica o progetto) si esegue a flessione semplice. La sezione più sollecitata è quella in corrispondenza del nodo  $C$ , nella quale si ha  $M = \frac{M_0}{2}$ .

Il valore massimo che potrebbe assumere  $M_1$  è  $\frac{M_0}{4}$ , qualora l'asta  $AB$  fosse tanto rigida da rappresentare un incastro perfetto per le altre due aste  $AC$  e  $BC$ .

\*\*\*

**32. - Risolvere la struttura di fig. 32.1, soggetta ad un carico concentrato  $P$ , verticale, agente sull'estremo libero dello sbalzo.**

Si studia l'azione del carico esterno sulla capriata  $ACB$ , una volta iperstatica, considerando le azioni che esso trasmette al vertice  $C$ : coppia ( $Pa$ ) e forza concentrata  $P$ .

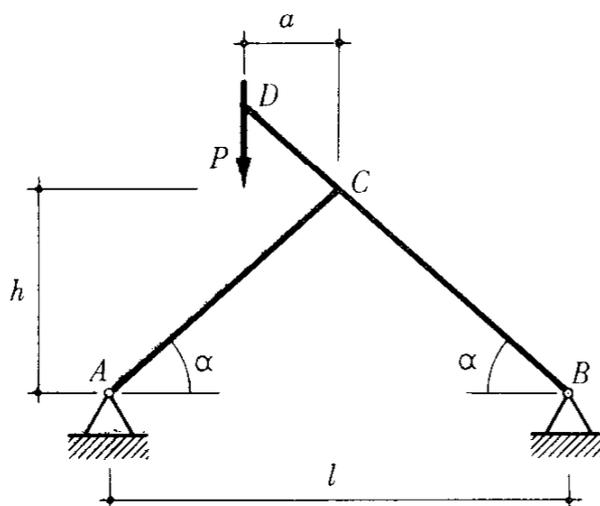


Fig. 32.1

1) **Coppia ( $Pa$ ).** - È una condizione di carico antisimmetrica. La struttura è staticamente determinata: sono infatti nulle per ragioni di antisimmetria le componenti orizzontali delle reazioni delle cerniere, mentre quelle verticali costituiscono una coppia eguale e contraria a quella esterna, e valgono  $V' = \frac{Pa}{l}$ .

2) **Carico  $P$  verticale.** - È una condizione di carico simmetrica la cui risoluzione specifica impone di valutare gli effetti della deformazione assiale.

Occorre però tener presente la condizione di carico così come era stata inizialmente assegnata. Al proposito osserviamo che la curva delle pressioni è la bilatera costituita dalle rette d'azione delle reazioni  $R_A$  e  $R_B$ : esse si incontrano in uno stesso punto della retta d'azione di  $P$ , e si discostano poco dall'asse geometrico della struttura solo se l'eccentricità del carico dal vertice  $C$  è molto piccola. In caso contrario (eccentricità di  $P$  da  $C$  grande rispetto alle dimensioni della sezione, ed eventualmente dello stesso ordine di grandezza di  $f$  o di  $l$ ) la curva delle pressioni è nettamente discosta dall'asse geometrico.

Pertanto, a seconda del valore dell'eccentricità  $a$ , è lecito trascurare

rare o meno la deformazione provocata dallo sforzo normale in confronto a quella generata dal momento flettente. Nell'ipotesi di eccentricità grande e di deformazione assiale trascurabile, anche la seconda parziale condizione di carico risulta staticamente determinata: l'asse della capriata è l'esatta funicolare del carico  $P$  e rimane rigidamente indeformato (vedi anche esercizio 26). Le reazioni valgono:

- componenti verticali:

$$V^* = \frac{P}{2} \quad (\text{per simmetria})$$

- componenti orizzontali:

$$H = \frac{Pl}{4f} \quad (\text{asse funicolare di } P).$$

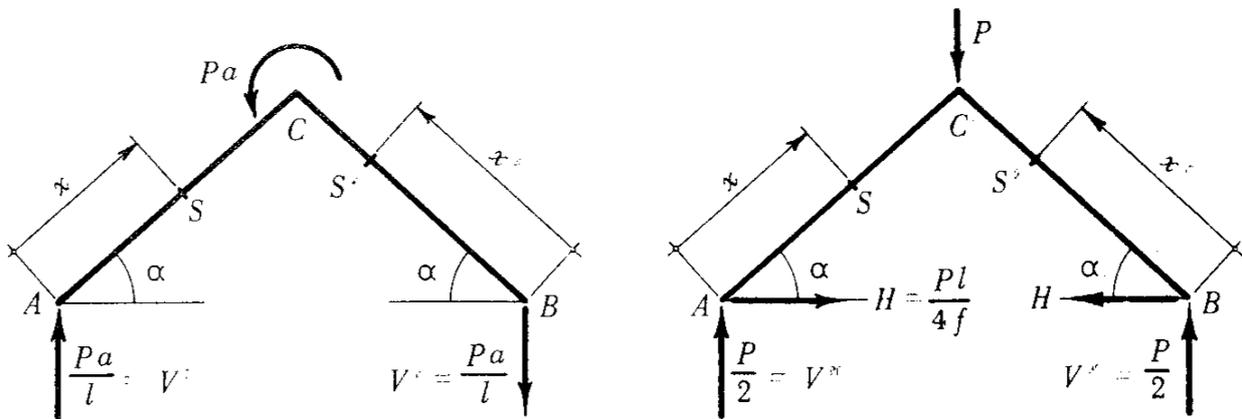


Fig. 32.2

Sovrapponendo gli effetti si ottengono le reazioni e le azioni interne totali:

$$V_A = \frac{Pa}{l} + \frac{P}{2} = \frac{2a + l}{2l} P$$

$$V_B = -\frac{Pa}{l} + \frac{P}{2} = \frac{l - 2a}{2l} P$$

$$H = \frac{Pl}{4f}$$

In una sezione  $S$  dell'asta  $AC$  si ha:

$$N_S = \frac{2a+l}{2l} P \operatorname{sen} \alpha + \frac{Pl}{4f} \cos \alpha \quad (\text{costante, compressione})$$

$$T_S = \frac{2a+l}{2l} P \cos \alpha - \frac{Pl}{4f} \operatorname{sen} \alpha \quad (\text{costante, positivo})$$

$$M_S = \left( \frac{Pa}{l} \cos \alpha \right) \cdot x \quad (\text{tese le fibre interne; da notare che il momento flettente è generato solo dal carico antisimmetrico}).$$

### CURVA DELLE PRESSIONI.

Per quanto prima visto è chiaro che la  $R_A$  ha una retta d'azione inclinata di  $(\alpha + \Delta\alpha)$  sulla orizzontale, e la  $R_B$  inclinata di  $(\alpha - \Delta\alpha)$  (fig. 32.3), tali da definire eguali segmenti  $\delta$  sulla verticale per  $C$ . Il loro punto  $O$  d'incontro ha ordinata:

$$y_0 = \left( \frac{l}{2} - a \right) \operatorname{tg} (\alpha + \Delta\alpha) = \left( 1 - \frac{4a^2}{l^2} \right) f.$$

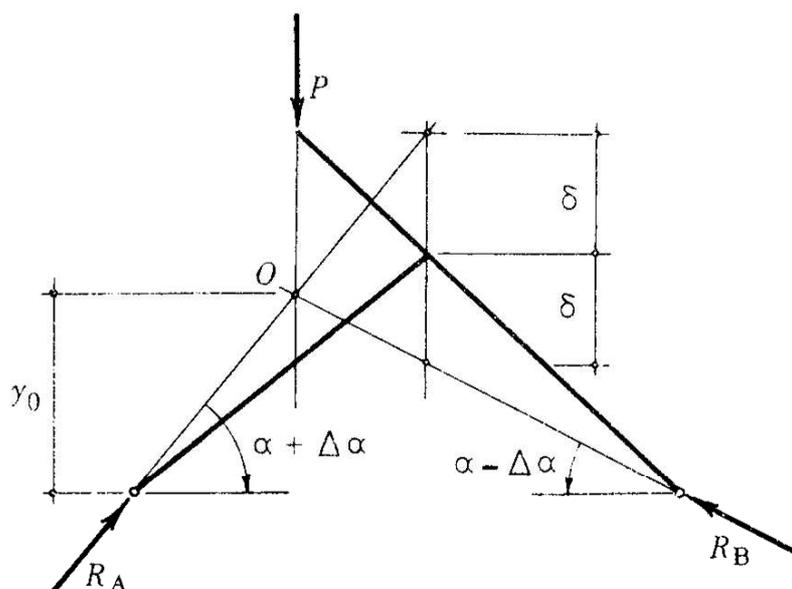


Fig. 32.3

## CALCOLO DELL'ABBASSAMENTO DELL'ESTREMO LIBERO.

In simboli si ha:

$$\eta_D = \varphi_C \cdot a + \eta_{D-C}$$

dove  $\eta_{D-C}$  rappresenta l'abbassamento dell'estremo libero  $D$  rispetto a  $C$  dovuto alla deformazione della mensola, e  $\varphi_C$  è la rotazione del nodo  $C$  generata dalla condizione di carico antisimmetrica ( $Pa$ ). (Il carico  $P$  simmetrico non deforma la struttura, secondo il criterio prima adottato).

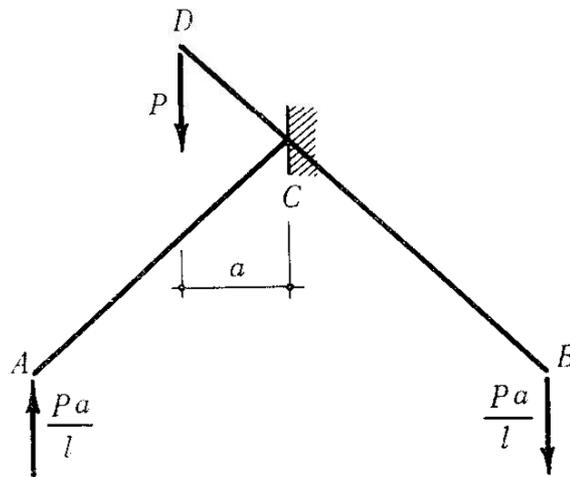


Fig. 32.4

Pensando momentaneamente incastrato il vertice  $C$ , e riferendo ad esso la deformazione delle due aste, risulta (fig. 32.4):

$$\varphi_C = \frac{\eta_{AC}}{l/2} = \frac{2}{l} \cdot \frac{\left(\frac{Pa}{l} \cos \alpha\right)}{3 EJ} \left(\frac{l}{2 \cos \alpha}\right)^3 \cdot \cos \alpha = \frac{Pal}{12 EJ \cos \alpha}$$

Per la mensola  $DC$ :

$$\eta_{DC} = \frac{(P \cos \alpha)}{3 EJ} \cdot \left(\frac{a}{\cos \alpha}\right)^3 \cdot \cos \alpha = \frac{Pa^3}{3 EJ \cos \alpha}$$

Quindi in totale:

$$\eta_D = \frac{Pa^2l}{12 EJ \cos \alpha} + \frac{Pa^3}{3 EJ \cos \alpha} = \frac{Pa^2}{3 EJ \cos \alpha} \left( a + \frac{l}{4} \right).$$

L'espressione di  $\eta_D$  si può anche ottenere facilmente eguagliando il lavoro esterno al lavoro interno di deformazione, giacché in questo caso lo spostamento cercato è proprio quello del punto d'applicazione dell'unica forza agente nella direzione della forza stessa:

$$\frac{1}{2} P \eta_D = 2 \int_0^{\frac{l}{2 \cos \alpha}} \left( \frac{Pa}{l} \cos \alpha \right)^2 \frac{x^2}{2 EJ} dx + \int_0^{\frac{a}{\cos \alpha}} (P \cos \alpha)^2 \frac{x^2}{2 EJ} dx$$

(vedi cap. III).

#### VERIFICA DI RESISTENZA.

La sezione maggiormente sollecitata è la sezione d'incastro della mensola  $DC$ , nella quale si ha:

$$N = P \operatorname{sen} \alpha \quad M = Pa.$$

Se si adotta per la capriata una sezione diversa di quella fissata per la mensola, si deve verificare anche la sezione d'attacco dell'asta  $AC$  con il nodo, nella quale si ha:

$$N = \left( \frac{2a+l}{2l} P \operatorname{sen} \alpha + \frac{Pl}{4f} \cos \alpha \right) \quad \text{e} \quad M = \frac{Pa}{2}.$$

CASO PARTICOLARE  $a = l/2$  (fig. 32.5).

Ci si può riferire al caso generale precedente.

Le reazioni evidentemente valgono:

$$V_A = P \quad V_B = 0 \quad H = \frac{Pl}{4f} .$$

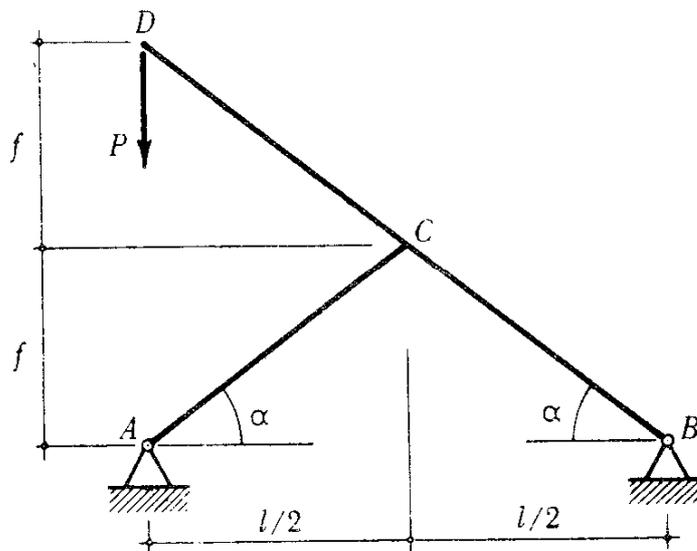


Fig. 32.5

\* \* \*

**33. - Risolvere l'arco ad asse circolare di fig. 33.1 sottoposto in tutta la sua lunghezza ad una variazione termica uniforme  $+\Delta t$ , considerato termicamente estensibile ma elasticamente indeformabile, ad esclusione della cerniera interna  $C$  di costante flessionale nota  $k$ .**

L'arco è una volta iperstatico ed anche una volta staticamente indeterminato.

In assenza di carichi esterni il sistema di reazioni vincolari deve essere autoequilibrato; in questo caso è costituito dalle due spinte  $H$ , eguali ed opposte, dirette, all'evidenza, verso l'interno.

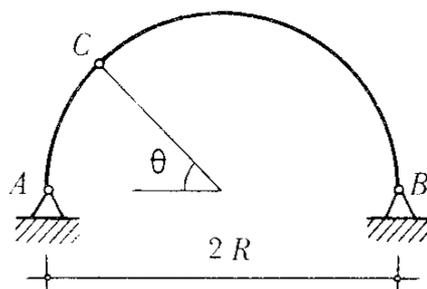


Fig. 33.1

La deformazione della struttura è concentrata nella cerniera elastica  $C$ , che si comporta in modo analogo ad un tronco generico  $ds$  di materia. La deformazione flessionale di questo è espressa dalla nota relazione  $d\varphi = \frac{M ds}{EJ}$  e quindi ha per costante la quantità  $\frac{EJ}{ds}$ , direttamente legata alle caratteristiche fisiche della materia e geometriche della struttura. Nel caso assegnato la cerniera elastica è un elemento avente caratteristiche proprie, già tutte conglobate in  $k$ , per cui è  $M_c = k \cdot \varphi_c, \text{rel.}$

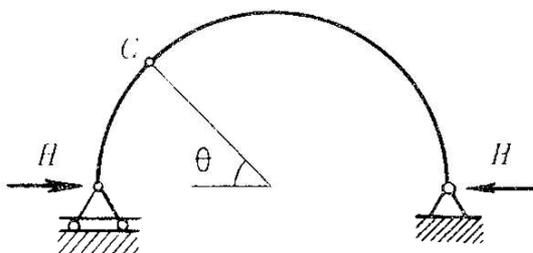


Fig. 33.2

Consideriamo quale struttura principale l'arco isostatico vincolato in  $A$  con carrello a piano di scorrimento orizzontale. La condizione di congruenza è ovviamente:

$$\delta_A = 0$$

Ossia:

$$\delta_{A(\Delta t)} - \delta_{A(C)} = 0$$

Esplicitando:

$$2\alpha R\Delta t - \varphi_{C, \text{rel.}} \cdot R \operatorname{sen} \theta = 0$$

$$2\alpha R\Delta t - \left( \frac{HR \operatorname{sen} \theta}{k} \right) \cdot R \operatorname{sen} \theta = 0$$

Si ottiene

$$H = \frac{2k\alpha\Delta t}{R \operatorname{sen}^2 \theta}$$

$H$  assume il valore minimo quando la cerniera  $C$  è in chiave all'arco ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ):

$$H_{\min} = \frac{2k\alpha\Delta t}{R}$$

NOTA. - Se l'arco è tutto elasticamente deformabile, anziché un suo solo elemento, si studia il comportamento di un tronchetto  $ds$  generico. Pertanto la precedente equazione di congruenza al finito, si trasforma in una espressione differenziale, che va poi estesa, tramite un'integrazione, a tutta la struttura.

\*\*\*

**34. - Risolvere la struttura di fig. 34.1 costituita dall'arco semicircolare  $ACB$  collegato solidalmente alla trave  $DC$  in corrispondenza della sezione di chiave. La trave è soggetta al carico concentrato verticale  $P$ .**

La struttura, vincolata con tre cerniere fisse, è tre volte iperstatica.

È opportuno sezionare in  $C$  in modo da separare le due parti di struttura aventi caratteristiche e comportamento diversi: la trave  $CD$  e l'arco  $ACB$  (fig. 34.2).

Indichiamo con  $V_C$ ,  $H_C$  ed  $M_C$  le azioni mutue esplicitate dallo svincolamento; il loro senso è facilmente prevedibile.

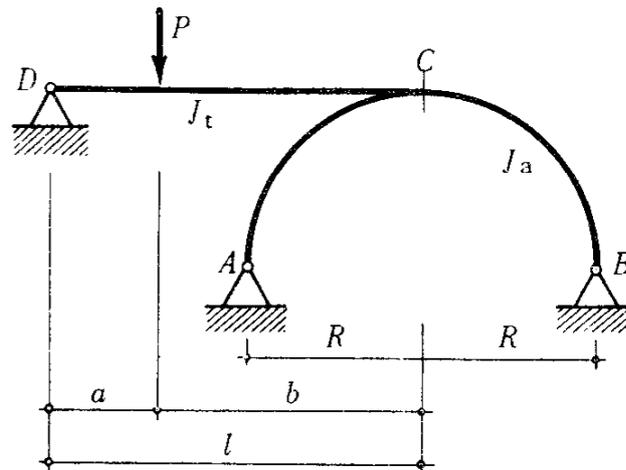


Fig. 34.1

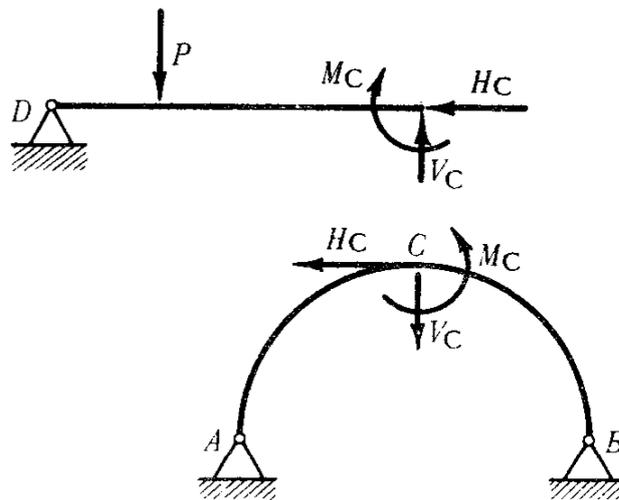


Fig. 34.2

La trave è sostenuta in  $C$  dall'arco e riceve la  $V_C$  diretta verso l'alto. La sezione terminale della trave (appoggiata rigidamente in  $D$  e cedevolmente in  $C$ ) ruota, per effetto del carico, in senso antiorario e trasmette all'arco il momento  $M_C$  del medesimo senso.

La lecita trascurabilità della deformazione generata dallo sforzo normale, in confronto a quella dovuta al momento flettente, fa sì che il nodo  $C$ , in virtù della invariabilità assiale dell'asta  $CD$ , non si sposti orizzontalmente. Il carico simmetrico  $V_C$  provoca solo un abbassamento

della sezione  $C$  dell'arco, ma la coppia antisimmetrica  $M_C$  determinerebbe uno spostamento orizzontale verso destra. Questo è impedito dalla cerniera  $D$  che fornisce una spinta  $H$ , diretta verso sinistra e trasmessa inalterata dalla trave all'arco.

$V_C$  ed  $M_C$  sono legati dalla relazione d'equilibrio alla rotazione dell'asta labile  $CD$  attorno alla cerniera  $D$ , dimodoché due sole delle azioni interne esplicitate dallo svincolamento,  $H_C$  e  $V_C$  (oppure  $M_C$ ) sono incognite indipendenti.

La terza incognita è compresa nelle reazioni orizzontali delle cerniere  $A$  e  $B$  dell'arco una volta iperstatico.

Pertanto si hanno tre condizioni di congruenza: due sono relative al sezionamento effettuato in  $C$  ed esprimono l'eguaglianza in questo punto della rotazione e dello spostamento orizzontale della trave e dell'arco; la terza equazione interessa il solo arco, a causa di come è vincolato, ed impone l'annullarsi dello spostamento di  $A$  e  $B$  (assoluto e relativo).

In simboli si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_C \text{ arco} = \varphi_C \text{ trave} \\ \xi_C \text{ arco} = 0 \\ \xi_{A, B} = 0. \end{array} \right.$$

La congruenza degli spostamenti verticali, in  $C$  è sempre soddisfatta, qualunque sia l'abbassamento della chiave dell'arco, mediante un moto rigido di rotazione della trave  $CD$  attorno alla cerniera  $D$ .

L'arco  $ACD$  è staticamente determinato per la condizione antisimmetrica di carico,  $H_C$  e  $M_C$ ; indeterminato per il carico simmetrico  $V_C$  (fig. 34.3). In questo secondo caso sono incognite le spinte  $H'$ : esse costituiscono un sistema di forze autoequilibrato e sono ovviamente dirette verso l'interno. (Infatti il momento flettente dovuto alle forze verticali tende ovunque le fibre all'intradosso e la deformazione da esso generata provocherebbe un allontanamento relativo delle imposte, qualora si sostituissero le cerniere con carrelli).

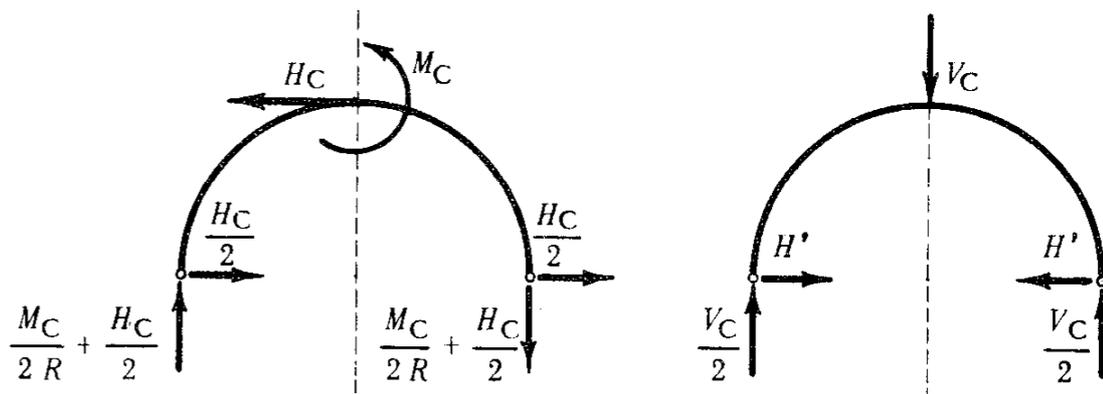


Fig. 34.3

Risolviamo dapprima la terza equazione in modo da determinare l'arco in funzione dei carichi ad esso applicati.

Sfruttiamo la simmetria studiando solo metà struttura. Fissiamo con un incastro la sezione  $C$  che non ruota e assumiamo quale struttura principale la mensola  $AC$ , completamente svincolata in  $A$  e ivi soggetta alle reazioni  $\frac{V_C}{2}$  e  $H'$  (fig. 34.4). Procediamo mediante una composizione cinematica delle deformazioni elementari:

$$M_S = \frac{V_C}{2} R(1 - \cos \omega) - H' R \sin \omega$$

$$\xi_A = \int_0^{\pi/2} \left( \frac{M ds}{EJ_a} \right) R \sin \omega = 0.$$

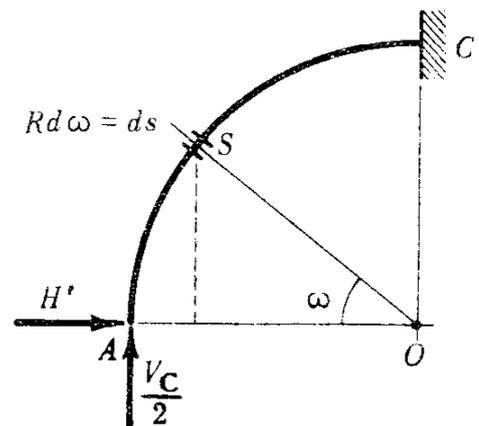


Fig. 34.4

Supponiamo che l'arco abbia sezione costante; sostituendo e sviluppando si ottiene:

$$\frac{R^3}{EJ_a} \left\{ \frac{V_C}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos \omega) \sin \omega d\omega - H' \int_0^{\pi/2} \sin^2 \omega d\omega \right\} = 0$$

Da cui integrando e risolvendo:

$$\frac{V_C}{4} - H' \frac{\pi}{4} = 0 \quad \text{ossia} \quad H' = \frac{V_C}{\pi}$$

$\xi_{C \text{ arco}}$  e  $\varphi_{C \text{ arco}}$  sono influenzati solo dai carichi antisimmetrici.

Operiamo sullo stesso semiarco  $AC$  considerato in precedenza. Indichiamo con  $\xi'_A$  e  $\eta'_A$  gli spostamenti di  $A$  rispetto a  $C$  dovuti alla deformazione elastica dell'arco. Facendo compiere successivamente alla struttura due moti rigidi di rotazione attorno a  $C$  e di traslazione orizzontale, si impone ad  $A$  il rispetto della cerniera fissa e si ottiene per  $C$ , con i sensi positivi indicati in fig. 34.5:

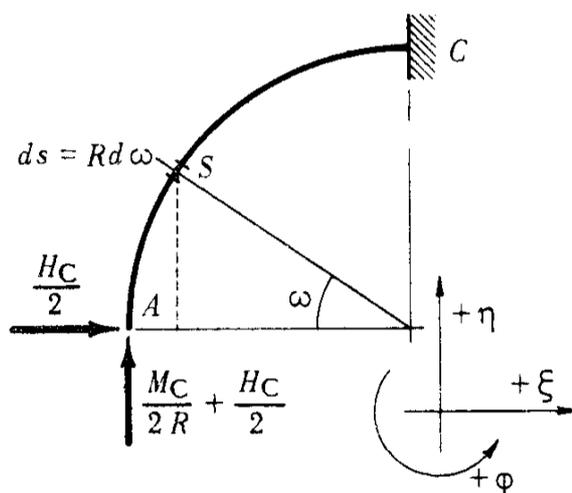


Fig. 34.5

$$\varphi_C = + \frac{\eta'_A}{R}$$

$$\xi_C = -\xi_A = -(\xi''_A + \varphi_C R) = -(\xi'_A + \eta'_A)$$

È:

$$\begin{aligned} M_S &= \left( \frac{M_C}{2R} + \frac{H_C}{2} \right) R (1 - \cos \omega) - \frac{H_C}{2} R \sin \omega = \\ &= \frac{M_C}{2} (1 - \cos \omega) - \frac{H_C R}{2} \left[ \sin \omega - (1 - \cos \omega) \right] \end{aligned}$$

Procedendo mediante la composizione cinematica delle deformazioni elementari, si ha:

$$\begin{aligned}\eta'_A &= + \int_0^{\pi/2} \left( \frac{M_S ds}{EJ_a} \right) R (1 - \cos \omega) = \\ &= \frac{M_C R^2}{2EJ_a} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos \omega)^2 d\omega - \frac{H_C R^3}{2EJ_a} \left\{ \int_0^{\pi/2} \sin \omega (1 - \cos \omega) d\omega - \int_0^{\pi/2} (1 - \cos \omega)^2 d\omega \right\} = \\ &= \frac{3\pi - 8}{8} \cdot \frac{M_C R^2}{EJ_a} - \frac{10 - 3\pi}{8} \frac{H_C R^3}{EJ_a}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi'_A &= - \int_0^{\pi/2} \left( \frac{M_S ds}{EJ_a} \right) R \sin \omega = \\ &= - \frac{M_C R^2}{2EJ_a} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos \omega) \sin \omega d\omega + \\ &\quad + \frac{H_C R^3}{2EJ_a} \left\{ \int_0^{\pi/2} \sin^2 \omega d\omega - \int_0^{\pi/2} (1 - \cos \omega) \sin \omega d\omega \right\} = \\ &= - \frac{1}{4} \cdot \frac{M_C R^2}{EJ_a} + \frac{\pi - 2}{8} \cdot \frac{H_C R^3}{EJ_a}.\end{aligned}$$

Rimane da esprimere  $\varphi_{C \text{ trave}}$ ; esso è influenzato sia dalla deformazione elastica della trave  $CD$  che dal cedimento verticale di  $C$ .

In simboli è:

$$\varphi_{C \text{ trave}} = \frac{Pa(l^2 - a^2)}{6EJ_t l} - \frac{M_C l}{3EJ_t} - \frac{\eta_C}{l} \quad (\text{positive le rotazioni antiorarie})$$

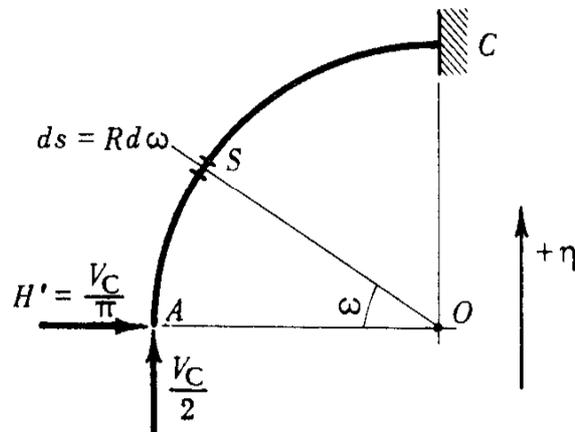


Fig. 34.6

Operiamo ancora nella struttura principale a mensola  $AC$  (fig. 34.6):

$$M_S = \frac{V_C}{2} R (1 - \cos \omega) - \frac{V_C}{\pi} R \sin \omega = V_C R \left[ \frac{1}{2} (1 - \cos \omega) - \frac{1}{\pi} \sin \omega \right].$$

È:

$$|\eta_A| = |\eta_C|.$$

Lo spostamento verso l'alto di  $A$  nella struttura principale è eguale, in valore assoluto, a quello effettivo di  $C$ , che avviene verso il basso.

$$\begin{aligned} \eta_A &= \int_0^{\pi/2} \left( \frac{M_S ds}{EJ_a} \right) R (1 - \cos \omega) = \\ &= \frac{V_C R^3}{EJ_a} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos \omega)^2 d\omega - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos \omega) \sin \omega d\omega \right\} = \\ &= \left( \frac{3\pi - 8}{8} - \frac{1}{2\pi} \right) \frac{V_C R^3}{EJ_a}. \end{aligned}$$

Siamo ora in grado di scrivere le due prime equazioni di congruenza. Associando ad esse l'equazione d'equilibrio alla rotazione della trave  $CD$  attorno alla cerniera  $D$ , si ottiene il sistema: