

\* \* \*

16. - Risolvere il portale zoppo a due cerniere di fig. 16.1. La trave  $CD$  è soggetta a carico uniforme  $q$  su metà luce.

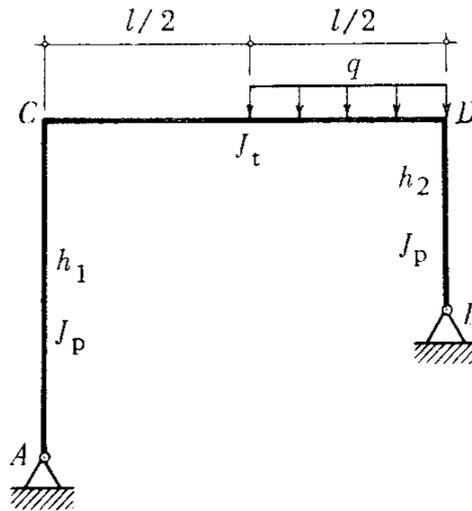


Fig. 16.1

La struttura è una volta iperstatica ed una volta staticamente indeterminata.

All'evidenza, la curva delle pressioni è costituita da un tratto parabolico per la zona di trave soggetta al carico  $q$ , e dalle rette d'azione inclinate delle reazioni delle cerniere  $A$  e  $B$ , tangenti ai punti estremi della parabola, per la restante parte del telaio. Pertanto si discosta in maniera sostanziale dall'asse geometrico della struttura, ed è lecito, nello studio del problema iperstatico, trascurare la deformazione prodotta dallo sforzo normale in confronto a quella dovuta al momento flettente.

Il modo più spontaneo di risolvere questo portale è di sostituire una cerniera (ad esempio la  $A$ ) con un carrello a piano di scorrimento orizzontale e applicarvi la reazione incognita  $H$ . Il valore di questa si determina imponendo la condizione che le forze esterne e la stessa  $H$ , agenti sulla struttura principale, diano spostamento orizzontale complessivamente nullo per il carrello  $A$ . Volendo seguire questa via si potrebbe convenientemente applicare il principio dei lavori virtuali.

Si può anche usare il seguente procedimento di tipo cinematico che

consente una rapida soluzione.

Per effetto della trascurabilità della deformazione assiale i nodi  $C$  e  $D$  compiono solo spostamenti orizzontali eguali ed equiversi. Si può quindi pensare di svincolare completamente il portale in corrispondenza delle cerniere  $A$  e  $B$  e di fissarlo isostaticamente con cerniera e carrello in  $C$  e  $D$ . In tal modo ci si riconduce allo studio, dapprima, della trave superiore  $CD$ , appoggiata, soggetta ai carichi agenti su di essa e alle reazioni delle cerniere  $A$  e  $B$  soppresse, e poi, a quello dei piedritti solidali ad essa e sottoposti, negli estremi svincolati, alle reazioni medesime. I valori che si usano per queste sono quelli che si ottengono imponendo le condizioni generali d'equilibrio sulla struttura incernierata assegnata, e sono tali da generare in quella principale, insieme ai carichi, la deformazione elastica effettiva. Tuttavia la configurazione assunta dalla struttura principale deformata non coincide con quella reale perché si sono fissati i nodi  $C$  e  $D$  e lasciati liberi di spostarsi gli estremi  $A$  e  $B$ , all'inverso di quello che effettivamente accade (fig. 16.2).

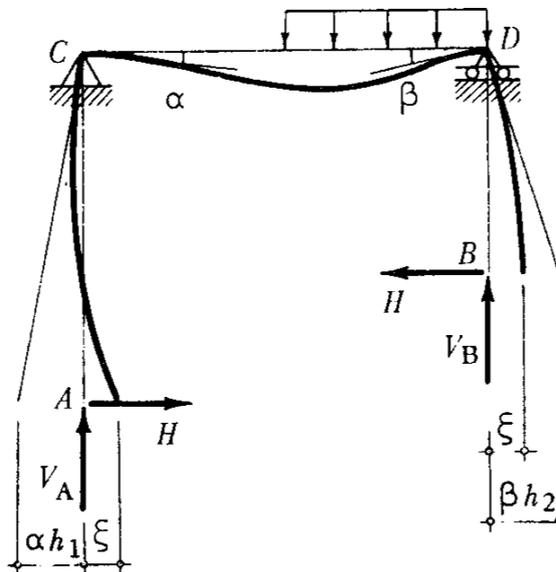


Fig. 16.2

Indipendentemente da ciò, la condizione di congruenza che si applica alla struttura principale è che non vari la distanza orizzontale tra  $A$  e  $B$ , imponendo cioè che i due punti abbiano lo stesso spostamento assoluto orizzontale  $\xi$ .

Con un moto rigido di traslazione orizzontale è poi possibile fare coincidere esattamente la struttura principale deformata con quella effettiva, riportando  $A$  e  $B$  nelle loro posizioni iniziali e attribuendo alla travata  $CD$  lo spostamento  $\xi$ .

La deformata della struttura principale è quella riportata in fig. 16.2; la trave  $CD$  si comporta come incastrata elasticamente in  $C$  e  $D$ ; i piedritti come mensole angolarmente solidali alla trave superiore e soggetti agli estremi liberi alle reazioni orizzontali delle cerniere.

Le equazioni generali d'equilibrio sono:

$$\Sigma X = 0 \quad H_A = H_B = H \quad (\text{sensò prevedibile delle spinte verso l'interno})$$

$$\Sigma Y = 0 \quad V_A + V_B = \frac{ql}{2} \quad (\text{sensò prevedibile delle } V \text{ verso l'alto})$$

$$\Sigma M_B = 0 \quad V_A \cdot l - H(h_1 - h_2) - \frac{ql^2}{8} = 0 \quad (\text{relazione tra } V \text{ e } H).$$

La condizione di congruenza è:

$$\xi_{AB} = 0.$$

Assumendo positivi gli allontanamenti relativi di  $A$  e  $B$ , con i sensi di fig. 16.2 per le forze e le rotazioni, si ha; in simboli:

$$(\alpha h_1 + \beta h_2) - \left( \frac{Hh_1^3}{3 EJ_p} + \frac{Hh_2^3}{3 EJ_p} \right) = 0.$$

Sostituendo:

$$\left[ \frac{7}{384} \frac{ql^3}{EJ_t} - \frac{H(2h_1 + h_2)}{6 EJ_t} l \right] h_1 + \left[ \frac{9}{384} \frac{ql^3}{EJ_t} - \frac{H(h_1 + 2h_2)}{6 EJ_t} l \right] h_2 - \frac{H}{3 EJ_p} (h_1^3 + h_2^3) = 0.$$

Ponendo:

$$\gamma_1 = \frac{J_t}{J_p} \quad \text{e} \quad \gamma_2 = \frac{h_2}{h_1},$$

risulta:

$$H = \frac{ql^3}{128 h_1} \cdot \frac{7 + 9 \gamma_2}{[l(1 + \gamma_2 + \gamma_2^2) + h_1 \gamma_1 (1 + \gamma_2^3)]}$$

DIAGRAMMI DELLE AZIONI INTERNE.

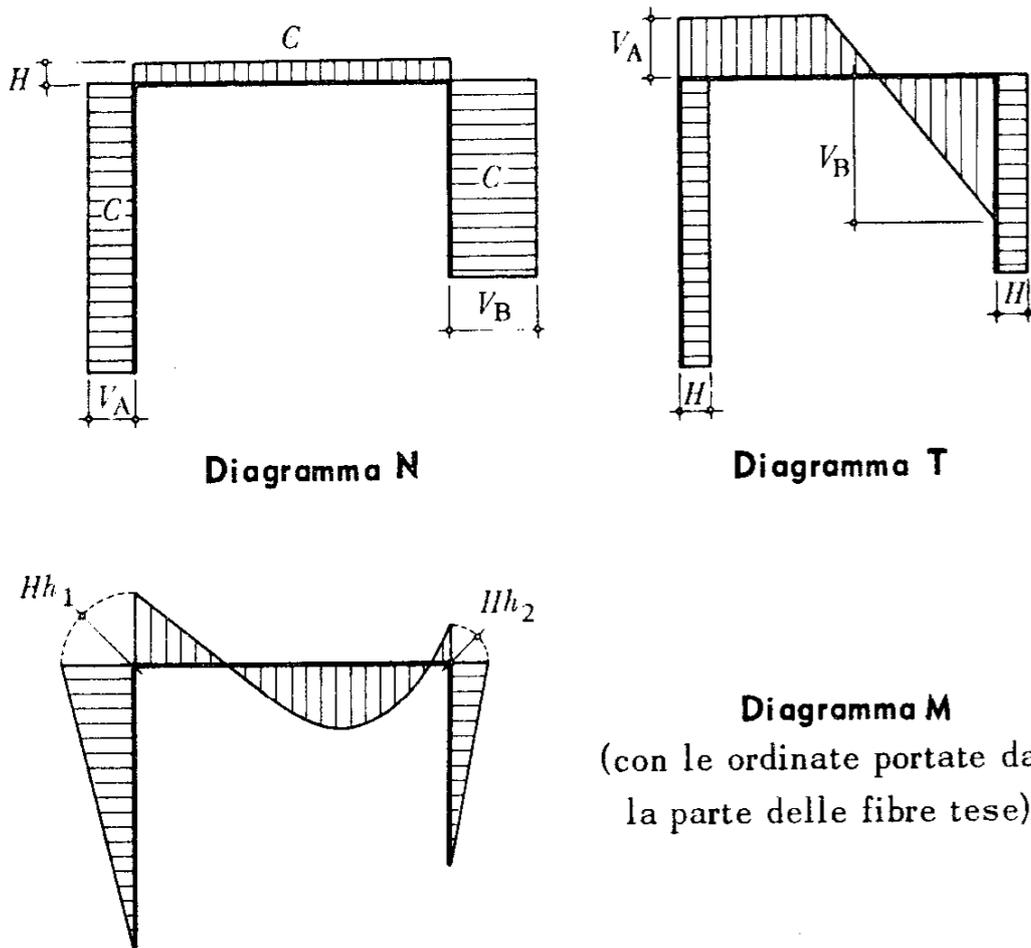


Fig. 16.3

**RISOLUZIONE NUMERICA.**

Si abbia:

$$l = 6,00 \text{ m}; \quad h_1 = 5,00 \text{ m}; \quad h_2 = 3,00 \text{ m}; \quad q = 4 \text{ t/m}; \quad J_t = J_p;$$

si ottiene:

$$H = 0,94 \text{ t}; \quad V_A = 3,32 \text{ t}; \quad V_B = 8,68 \text{ t}$$

nei nodi:

$$M_C = 4,7 \text{ tm}; \quad M_D = 2,82 \text{ tm}$$

nella travata si ha:

$$M = 0 \quad \text{per} \quad \begin{cases} x = \frac{Hh_1}{V_A} = 1,41 \text{ m} \\ x = 5,65 \text{ m} \end{cases}$$

$$\text{per } x = 3,83 \text{ m} \quad T = 0 \quad \text{e} \quad M_{\max} = 6,64 \text{ tm.}$$

CURVA DELLE PRESSIONI (fig. 16.4).

Le rette d'azione delle reazioni  $R_A$  e  $R_B$  sono tangenti all'arco di parabola relativo alla mezza campata soggetta al carico, e si incontrano

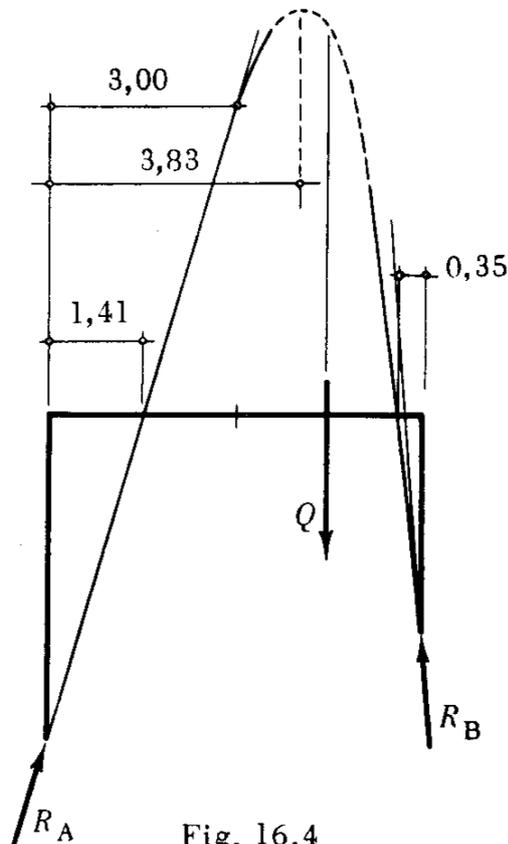


Fig. 16.4

in un punto della risultante  $Q$ .

La curva delle pressioni incontra l'asse geometrico nei punti di momento nullo e questo avviene per le due sezioni della trave di ascissa  $x = 1,41$  e  $x = 5,65$  m.

Nella sezione di ascissa  $x = 3,83$  m è  $T = 0$  e  $M = M_{\max \text{ pos.}}$ , e la curva delle pressioni ha tangente orizzontale ed eccentricità  $e = \frac{M_{\max}}{H} = \frac{6640}{940} = 7,07$  m.

### CALCOLO DI RESISTENZA.

Se la struttura iperstatica ha  $J = \text{costante}$ , la soluzione fornisce una espressione della incognita iperstatica funzione delle sole caratteristiche geometriche e del carico.

Si può allora eseguire il calcolo senza fissare preventivamente le dimensioni della sezione, e progettare poi la struttura, a flessione composta, oppure a flessione semplice, nel caso in cui lo sforzo normale influenzi poco anche il valore delle tensioni.

Nel nostro caso la sezione più sollecitata è quella soggetta al massimo momento positivo. Se si assume  $K_F = 1600 \text{ kg/cm}^2$ , si ha:

$$W = \frac{664000}{1600} = 415 \text{ cm}^3.$$

Si adotta il profilato a I PN 26 le cui caratteristiche sono:

$$A = 53,3 \text{ cm}^2; \quad J = 5744 \text{ cm}^4; \quad W = 442 \text{ cm}^3.$$

Eseguendo la verifica a pressoflessione dei piedritti si ottiene:

$$\text{Sezione C: } \sigma_{\max} = \frac{3320}{53,3} + \frac{470000}{442} = 62 + 1065 = 1127 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\text{Sezione D: } \sigma_{\max} = \frac{8680}{53,3} + \frac{282000}{442} = 163 + 640 = 803 \text{ « .}$$

### DETERMINAZIONE DELLO SPOSTAMENTO ORIZZONTALE DELLA TRAVATA.

Si ha:

$$\xi_A = \alpha h_1 - \frac{Hh_1^3}{3EJ_p}$$

Con le convenzioni prima fatte sui segni, se questa espressione risulta positiva, lo spostamento fittizio del punto  $A$  nella struttura principale avviene verso sinistra. Ciò vuol dire che lo spostamento reale della travata è diretto verso destra:

$$\xi_C = -\xi_A$$

Con la sezione fissata, si ha:

$$\xi_C = -1,55 \text{ cm}$$

(la travata si sposta verso sinistra).

1° CASO PARTICOLARE:  $h_1 = h_2$  (fig. 16.5).

In questo caso le reazioni  $V$  risultano staticamente determinate e si ricavano direttamente con condizioni d'equilibrio. È:

$$V_A = \frac{Q}{4} \quad V_B = \frac{3}{4} Q$$

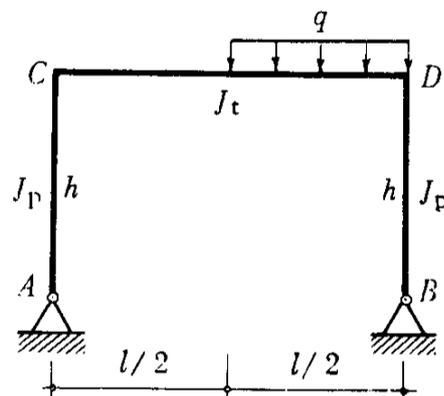


Fig. 16.5

Le reazioni  $H$  costituiscono un sistema di forze autoequilibrato.

Per risolvere la struttura si può ripetere il ragionamento precedente e adottare la medesima struttura principale.

La condizione di congruenza è sempre:

$$\xi_{AB} = 0.$$

In simboli:

$$(\alpha + \beta)h - 2 \frac{Hh^3}{3 EJ_p} = 0$$

$$\left[ \left( \frac{7}{384} \frac{ql^3}{EJ_t} - \frac{(Hh)l}{2 EJ_t} \right) + \left( \frac{9}{384} \frac{ql^3}{EJ_t} - \frac{(Hh)l}{2 EJ_t} \right) \right] h - 2 \frac{Hh^3}{3 EJ_p} = 0.$$

Si ottiene:

$$H = \frac{ql^3}{8h} \cdot \frac{1}{3l + 2\gamma_1 h}$$

come risulta anche dall'espressione precedente ponendo  $\gamma_2 = 1$ .

#### SPOSTAMENTO ORIZZONTALE DELLA TRAVATA.

$$\xi_C = \alpha h - \frac{Hh^3}{3 EJ_p}$$

è diretto verso destra se risulta positivo.

In questo caso il senso dello spostamento  $\xi_C$  è facilmente prevedibile. Infatti nella trave è  $\alpha < \beta$  e nei piedritti l'effetto di deformazione flessionale dovuto alle  $H$  è il medesimo. Pertanto, affinché sia rispettata la condizione di congruenza  $\xi_{AB} = 0$ , nel punto  $A$  della struttura principale lo spostamento orizzontale verso destra provocato dalla  $H$  prevale su quello verso sinistra causato dalla rotazione rigida  $\alpha$  del piedritto  $AC$  attorno a  $C$ . (L'inverso accade per il punto  $B$ ). Se ne deduce che nel-

la struttura principale i punti  $A$  e  $B$  si spostano verso destra e quindi, nella struttura data, la trave si sposta verso sinistra.

2° CASO PARTICOLARE:  $h_2 = 0$  (fig. 16.6).

Volendo applicare il procedimento precedente (telaio completamente svincolato in  $A$  e appoggiato convenzionalmente in  $C$ ), l'equazione di congruenza diviene:

$$\xi_A = 0$$

cioè:

$$\alpha h - \frac{Hh^3}{3EI_p} = 0$$

$$\left[ \frac{7}{384} \frac{ql^3}{EI_t} - \frac{(Hh)l}{3EI_t} \right] h - \frac{Hh^3}{3EI_p} = 0 \quad H = \frac{7}{128} \cdot \frac{ql^2}{h(1 + \gamma_1 \gamma_2)}$$

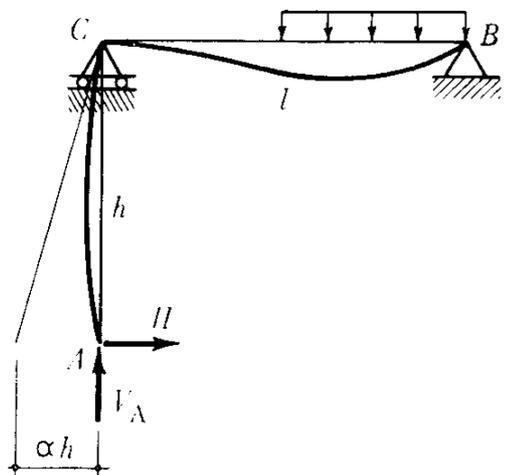


Fig. 16.6

Tuttavia si può osservare che l'indefornabilità assiale della struttura mantiene fisso il nodo  $C$ . Ricordando allora l'esercizio II (e seguenti) si può, con metodo più spontaneo, sopprimere la solidarietà angolare in  $C$  e assumere come struttura principale il telaio a tre cerniere fisse

A, C, B (fig. 16.7). La condizione di congruenza è:

$$\varphi_{CB} = \varphi_{CA}$$

cioè:

$$\frac{7}{384} \frac{ql^3}{EI_t} - \frac{M_C l}{3 EI_t} = \frac{M_C h}{3 EI_p}$$

da cui si ottiene  $M_C$  (e, naturalmente, è  $M_C = Hh$ ).

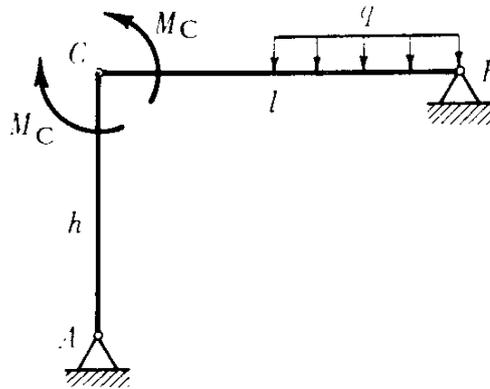


Fig. 16.7

La struttura si comporta come una trave continua ad asse spezzato: fungono da appoggi i punti A, C, B.

\* \* \*

**17. - Risolvere il portale zoppo a due cerniere dell'esercizio precedente soggetto a carico  $q$  uniforme orizzontale su tutto il piedritto AC (fig. 17.1).**

Valgono le considerazioni svolte nell'esercizio 16: è lecito trascurare la deformazione a sforzo normale in confronto a quella provocata dal momento flettente. Si può adottare il precedente metodo di tipo cinematico assumendo come struttura principale il telaio vincolato isostaticamen-

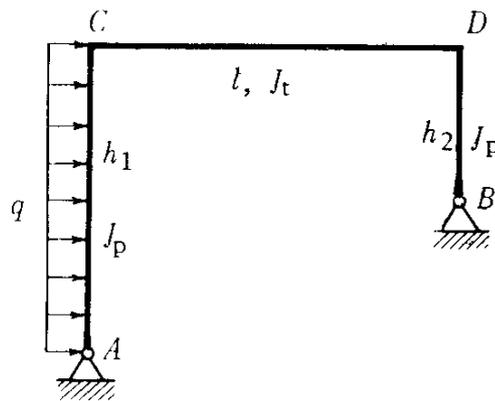


Fig. 17.1

te con cerniera e carrello in  $C$  e  $D$ , e completamente libero in  $A$  e  $B$ , ivi sottoposto alle reazioni delle cerniere (fig. 17.2).

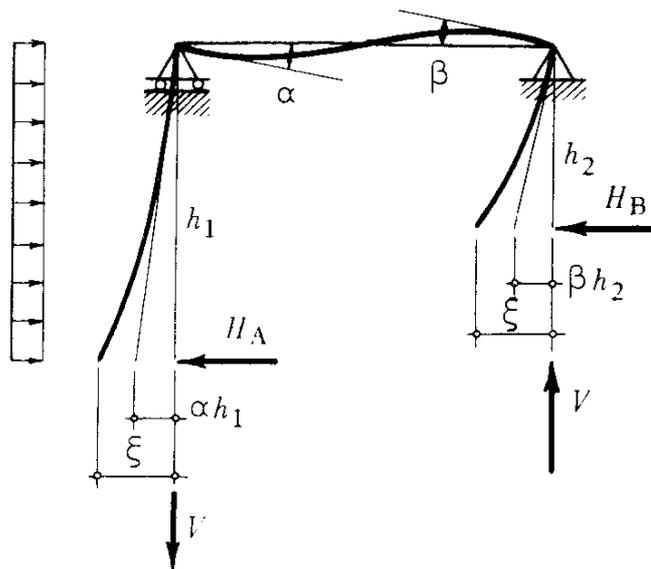


Fig. 17.2

Le equazioni generali d'equilibrio sono:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0 & H_A + H_B &= Q \\ \sum Y &= 0 & V_A = V_B &= V \\ \sum M_B &= 0 & H_A (h_1 - h_2) - Vl + Q \left( \frac{h_1}{2} - h_2 \right) &= 0. \end{aligned}$$

La condizione di congruenza è sempre:

$$\xi_{AB} = 0$$

In questo caso la flessione del piedritto  $AC$  è provocata sia dalla spinta  $H$  che dal carico.

Assumendo positivi gli avvicinamenti relativi dei punti  $A$  e  $B$ :

$$(-\alpha h_1 + \beta h_2) - \left[ \left( \frac{H_A h_1^3}{3 EJ_p} - \frac{Qh_1^3}{8 EJ_p} \right) - \frac{H_B h_2^3}{3 EJ_p} \right] = 0.$$

Sviluppando:

$$\begin{aligned} \frac{l}{6 EJ_t} \left\{ \left[ 2 \left( \frac{Qh_1}{2} - H_A h_1 \right) + H_B h_2 \right] h_1 + \left[ \left( \frac{Qh_1}{2} - H_A h_1 \right) + 2 H_B h_2 \right] h_2 \right\} = \\ = \frac{1}{EJ_p} \left\{ \frac{H_A h_1^3}{3} - \frac{Qh_1^3}{8} - \frac{H_B h_2^3}{3} \right\} \end{aligned}$$

Sostituendo  $H_B = Q - H_A$  e ponendo  $\gamma_1 = \frac{J_t}{J_p}$ ;  $\gamma_2 = \frac{h_2}{h_1}$  risulta:

$$H_A = \frac{Q}{2} \cdot \frac{(1 + 1,5 \gamma_2 + 2 \gamma_2^2) + \frac{h_1}{l} \left[ 2 \gamma_1 \left( \frac{3}{8} + \gamma_2^3 \right) \right]}{(1 + \gamma_2 + \gamma_2^2) + \frac{h_1}{l} \left[ \gamma_1 (1 + \gamma_2^3) \right]}.$$

## RISOLUZIONE NUMERICA E VERIFICA DI RESISTENZA.

Si abbiano sempre le dimensioni assegnate nell'esercizio 16:

$$l = 6,00 \text{ m}; \quad h_1 = 5,00 \text{ m}; \quad h_2 = 3,00 \text{ m} \quad \text{e} \quad J_t = J_p = \text{costante.}$$

Sia in questo caso  $q = 2000 \text{ kg/m}$ .

Si ottiene:

$$H_A = 6050 \text{ kg} \quad H_B = 3950 \text{ kg} \quad V = 2850 \text{ kg.}$$

Nei nodi:

$$M_C = H_A \cdot h_1 - \frac{Qh_1}{2} = + 5250 \text{ kgm} \quad (\text{orario})$$

$$M_D = -H_B \cdot h_2 = -11850 \text{ kgm} \quad (\text{orario; ma con le forze che seguono}).$$

Nel piedritto  $AC$  per  $x = \frac{H_A}{q} = 3,025 \text{ m}$  è  $T = 0$  e

$$M = M_{\text{max pos.}} = \frac{H_A^2}{2q} = +9150 \text{ kgm} \quad (\text{orario}).$$

Il momento flettente lungo il piedritto non si annulla mai; prevale sempre il contributo di  $H_A$  su quello dei carichi.

Nella travata  $CD$  il momento si annulla per  $x = \frac{H_B \cdot h_2}{V_B} = 4,15 \text{ m}$

I carichi agenti orizzontalmente generano sforzi normali più elevati nella trave  $CD$ , ad essi parallela, che non nei piedritti verticali  $AC$  e  $BC$ . La sezione più sollecitata di tutto il portale è quella della trave all'attacco con il nodo  $D$ , per la quale si ha:

$$M = -11850 \text{ kgm}; \quad N = 3950 \text{ kg};$$

Progettando a flessione semplice:

$$W = \frac{M}{K_F} = \frac{1185000}{1600} = 740 \text{ cm}^3.$$

Si adotta il profilato a I ad ali larghe (tipo Differdingen) N 22 cm avente le caratteristiche:

$$A = 91,1 \text{ cm}^2; \quad I = 8050 \text{ cm}^4; \quad W = 732 \text{ cm}^3.$$

Il calcolo di verifica a pressoflessione della sezione così dimensionata dà:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{3950}{91,1} + \frac{1185000}{732} = 43 + 1620 = 1663 \text{ kg/cm}^2$$

per le fibre interne, compresse. La  $\sigma_{\max}$  è un po' superiore al carico di sicurezza  $K_F = 1600 \text{ kg/cm}^2$ , tuttavia si può ritenere egualmente accettabile.

### DIAGRAMMI DELLE AZIONI INTERNE.

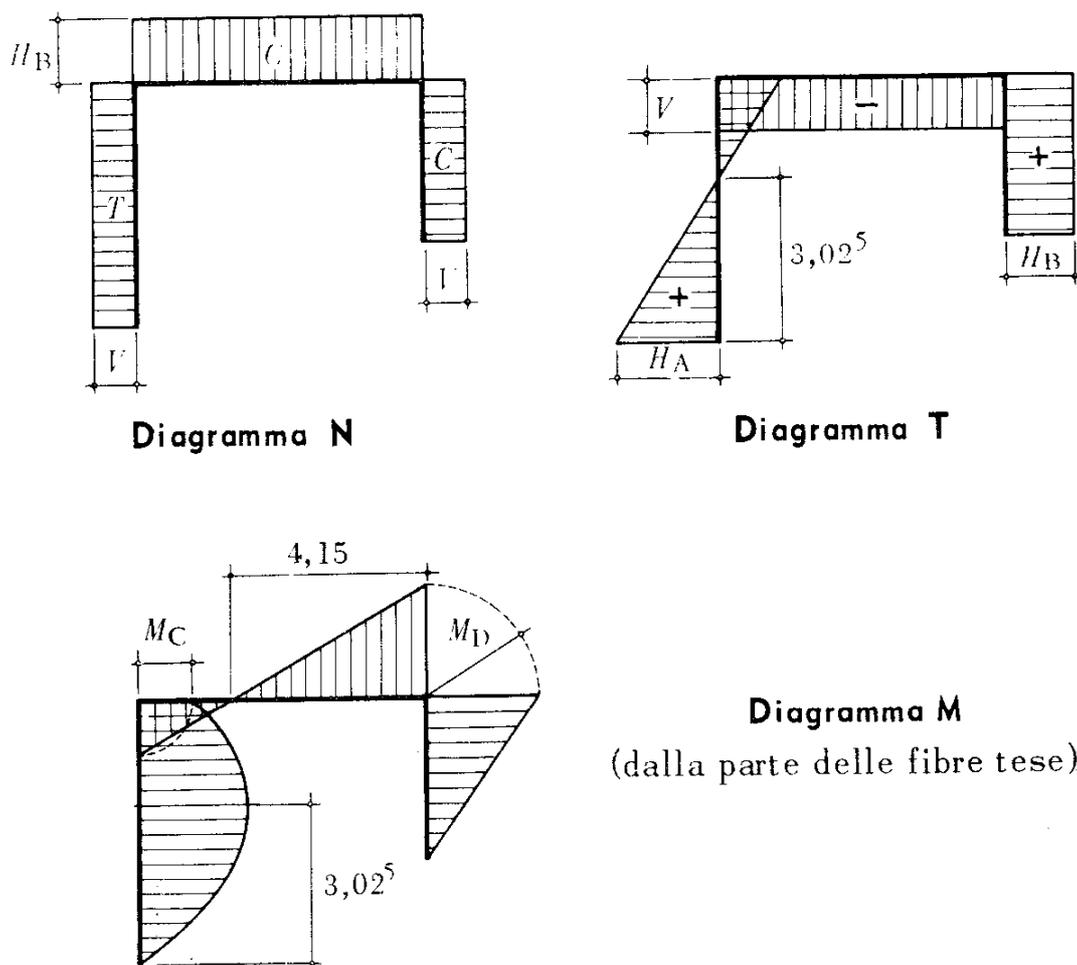


Fig. 17.3

### CURVA DELLE PRESSIONI (fig. 17.4).

Per il piedritto  $AC$ , sottoposto al carico, la curva delle pressioni è un arco di parabola, tangente nei punti estremi  $A$  e  $C'$  (sull'orizzontale per  $C$ ) alle rette d'azione delle reazioni  $R_A$  e  $R_B$ . Per la parte di struttura  $CDB$  è invece costituita dalla retta d'azione di  $R_B$ .

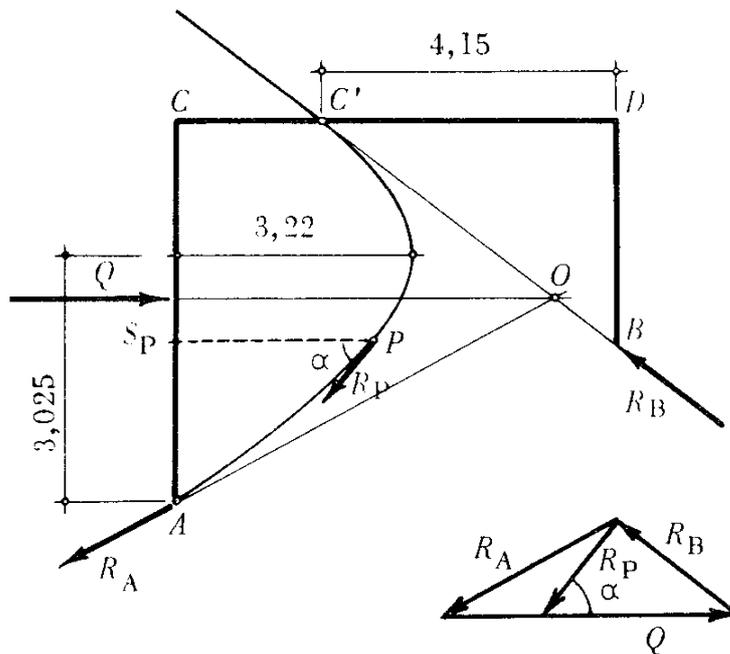


Fig. 17.4

Sono inoltre indicati in fig. 17.4: il punto d'incontro O della risultante dei carichi con le reazioni dei vincoli, la sezione di  $M_{\max}$  nel piedritto AC e quella di momento nullo nella trave CD.

A una sezione generica  $S_p$  corrisponde il punto P della curva delle pressioni (sulla stessa retta d'azione del carico, orizzontale). Nota dalla curva la direzione della risultante delle azioni interne, l'intensità  $R_p$  si ricava dal poligono delle forze.

### DETERMINAZIONE DELLO SPOSTAMENTO ORIZZONTALE DELLA TRAVE.

Si può calcolare riferendosi per maggior semplicità al piedritto BD, che non è soggetto ai carichi esterni ( $\xi_C = \xi_D = \xi$ ):

$$\begin{aligned} \xi &= \beta h_2 + \frac{H_B \cdot h_2^3}{3 E J_p} = \\ &= \frac{l}{6 E J_t} \left[ \left( \frac{Q h_1}{2} - H_A h_1 \right) + 2 H_B \cdot h_2 \right] \cdot h_2 + \frac{H_B \cdot h_2^3}{3 E J_p} = 3,06 \text{ cm.} \end{aligned}$$

\*\*\*

18. - Risolvere il portale zoppo a due cerniere di fig. 18.1, caricato uniformemente su tutta la trave  $CD$ , ed avente il piedritto  $AC$  non verticale.

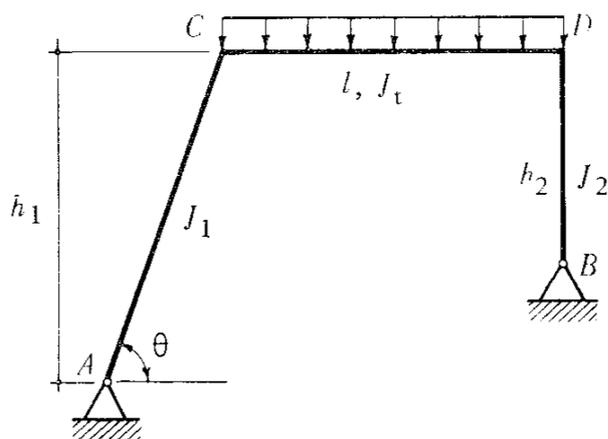


Fig. 18.1

La struttura è una volta iperstatica e una volta staticamente indeterminata.

Per il prevedibile andamento della curva delle pressioni è lecito trascurare la deformazione assiale in confronto a quella flessionale.

Per analogia con l'esercizio 16 si può osservare come anche in questo caso il modo più spontaneo di risolvere il portale sia quello di sostituire una cerniera con un carrello a piano di scorrimento orizzontale ed esplicitare la reazione incognita  $H$ .

Non è invece più applicabile il procedimento dell'esercizio precedente, basato sul presupposto di spostamenti verticali nulli dei nodi  $C$  e  $D$ .

Infatti in questo caso il punto  $D$  compie solo uno spostamento orizzontale  $\xi = \overline{DD'}$  mentre  $C$  si sposta in direzione normale ad  $AC$  di una quantità  $\overline{CC'} = \frac{\overline{DD'}}{\text{sen } \theta}$ . (fig. 18.2).

Si può tuttavia adottare questo particolare procedimento di tipo cinematico: si svincola completamente in corrispondenza di una cerniera (esempio la  $A$ ), applicando le reazioni incognite  $H_A$  e  $V_A$  e imponendo anzitutto, sulla struttura labile così ottenuta le relazioni generali d'e-

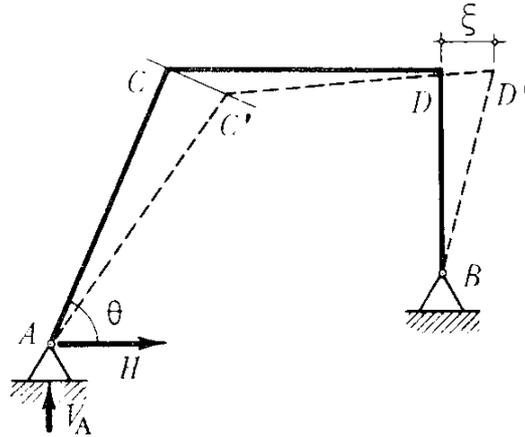


Fig. 18.2

quilibrio. Si ottiene (con i sensi delle forze indicate in figura):

$$\Sigma X = 0 \quad H_A = H_B = H \quad (\text{senso prevedibile verso l'interno})$$

$$\Sigma Y = 0 \quad V_A = Q - V_B \quad (\text{senso prevedibile verso l'alto})$$

$$\Sigma M_B = 0 \quad V_A \cdot (l + h_1 \cotg \theta) - \frac{Ql}{2} - H(h_1 - h_2) = 0 \quad (\text{relazione tra } V_A \text{ e } H).$$

Si assume ora come struttura principale la mensola libera in  $A$  e provvisoriamente incastrata in  $B$ ; la deformazione elastica di questa è identica a quella del telaio a due cerniere assegnato, perché in essa si considerano le azioni interne effettive.

Le condizioni cui il punto  $A$  deve soddisfare sono quelle imposte dal vincolo soppresso (cerniera fissa):

$$\xi_A = 0 \quad \eta_A = 0.$$

Tuttavia il calcolo della deformazione elastica della struttura principale dà per il punto  $A$  delle quantità  $\xi_A'$  e  $\eta_A'$  diverse da zero; ciò significa che la configurazione assunta da tale struttura differisce da quel-

la effettiva per un moto rigido di rotazione  $\bar{\varphi}_B$ , attorno a  $B$ , che si ottiene sbloccando l'incastro fittizio e consentendo alla cerniera  $B$  di compiere la propria rotazione. Pertanto il punto  $A$  soddisfa le due condizioni di congruenza grazie alla somma dei contributi della deformazione elastica e del moto rigido.

Così procedendo si introduce una terza incognita:  $\bar{\varphi}_B$  che rende il problema analitico determinato; si hanno infatti tre quantità  $V_B$ ,  $H$  e  $\bar{\varphi}_B$  legate da tre relazioni, due di congruenza e una di equilibrio ( $\sum W_B = 0$ ).

In simboli si ha:

$$\begin{cases} \xi_A = \xi'_A + \bar{\varphi}_B (h_1 - h_2) = 0 \\ \eta_A = \eta'_A + \bar{\varphi}_B (l + h_1 \cotg \theta) = 0. \end{cases}$$

$\xi'_A$  e  $\eta'_A$  si calcolano con procedimento di composizione cinematica considerando la deformazione estesa successivamente ai vari tronchi rettilinei ( $AC$ ,  $CD$  e  $DB$ ) che compongono la struttura e che si comportano come mensole in serie incastrate l'una all'altra per effetto della continuità materiale.

(per semplicità d'espressione,  $M_D$  è stato computato con le forze che seguono).

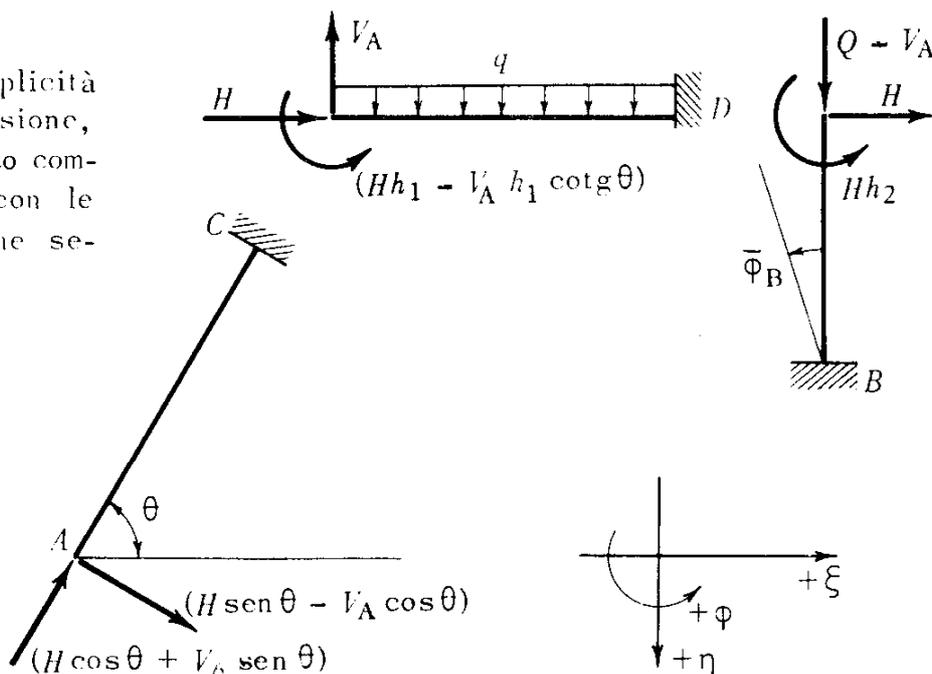


Fig. 18.3

Con i sensi positivi di fig. 18.3 si ha:

$$\begin{cases} \xi_A = (\xi_{DB} + \varphi_{DB} \cdot h_1 + \varphi_{CD} \cdot h_1 + \xi_{AC}) + \bar{\varphi}_B (h_1 - h_2) = 0 \\ \eta_A = [(l + h_1 \cotg \theta) \varphi_{DB} + \eta_{CD} + \varphi_{CD} \cdot h_1 \cotg \theta + \eta_{AC}] + \\ + \bar{\varphi}_B (l + h_1 \cotg \theta) = 0. \end{cases}$$

Esplicitando i vari termini ed eguagliando le due espressioni che si ottengono per  $\bar{\varphi}_B$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_1 - h_2} & \left\{ \left[ \frac{Hh_2^3}{3EJ_2} - \frac{(Hh_2)h_2^2}{2EJ_2} \right] + \left[ \frac{(Hh_2)h_2}{EJ_2} - \frac{Hh_2^2}{2EJ_2} \right] h_1 + \left[ \frac{(Hh_1 - V_A h_1 \cotg \theta)}{EJ_t} l - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{V_A l^2}{2EJ_t} + \frac{ql^3}{6EJ_t} \right] h_1 + \left[ \frac{(H \sen \theta - V_A \cos \theta)}{3EJ_1} \left( \frac{h_1}{\sen \theta} \right)^3 \sen \theta \right] \right\} = \\ & = \frac{1}{l + h_1 \cotg \theta} \left\{ \left[ \frac{(Hh_2)h_2}{EJ_2} - \frac{Hh_2^2}{2EJ_2} \right] (l + h_1 \cotg \theta) + \right. \\ & + \left[ \frac{(Hh_1 - V_A h_1 \cotg \theta)}{2EJ_t} l^2 - \frac{V_A l^3}{3EJ_t} + \frac{ql^4}{8EJ_t} \right] + \\ & + \left[ \frac{(Hh_1 - V_A h_1 \cotg \theta)}{EJ_t} l - \frac{V_A l^2}{2EJ_t} + \frac{ql^3}{6EJ_t} \right] h_1 \cotg \theta + \\ & \left. + \left[ \frac{(H \sen \theta - V_A \cos \theta)}{3EJ_1} \left( \frac{h_1}{\sen \theta} \right)^3 \cos \theta \right] \right\}. \end{aligned}$$

Sostituendo poi l'espressione di  $V_A$  in funzione  $H$  e risolvendo si ottiene:

$$H = \frac{ql^2}{4h_1} \cdot \frac{2rK_1 + m + n}{K_2}$$

dove le costanti valgono:

$$t_1 = \frac{J_t}{J_1} \frac{h_1}{l \operatorname{sen} \theta}; \quad t_2 = \frac{J_t}{J_2} \frac{h_2}{l}; \quad n = \frac{h_2}{h_1};$$

$$r = \frac{h_1 \operatorname{cotg} \theta}{l + h_1 \operatorname{cotg} \theta}; \quad s = \frac{l}{l + h_1 \operatorname{cotg} \theta}; \quad m = rn + s;$$

$$K_1 = 2m(t_1 + 1) + n; \quad K'_1 = m + 2n(1 + t_2); \quad K_2 = mK_1 + nK'_1.$$

DIAGRAMMI DELLE AZIONI INTERNE.

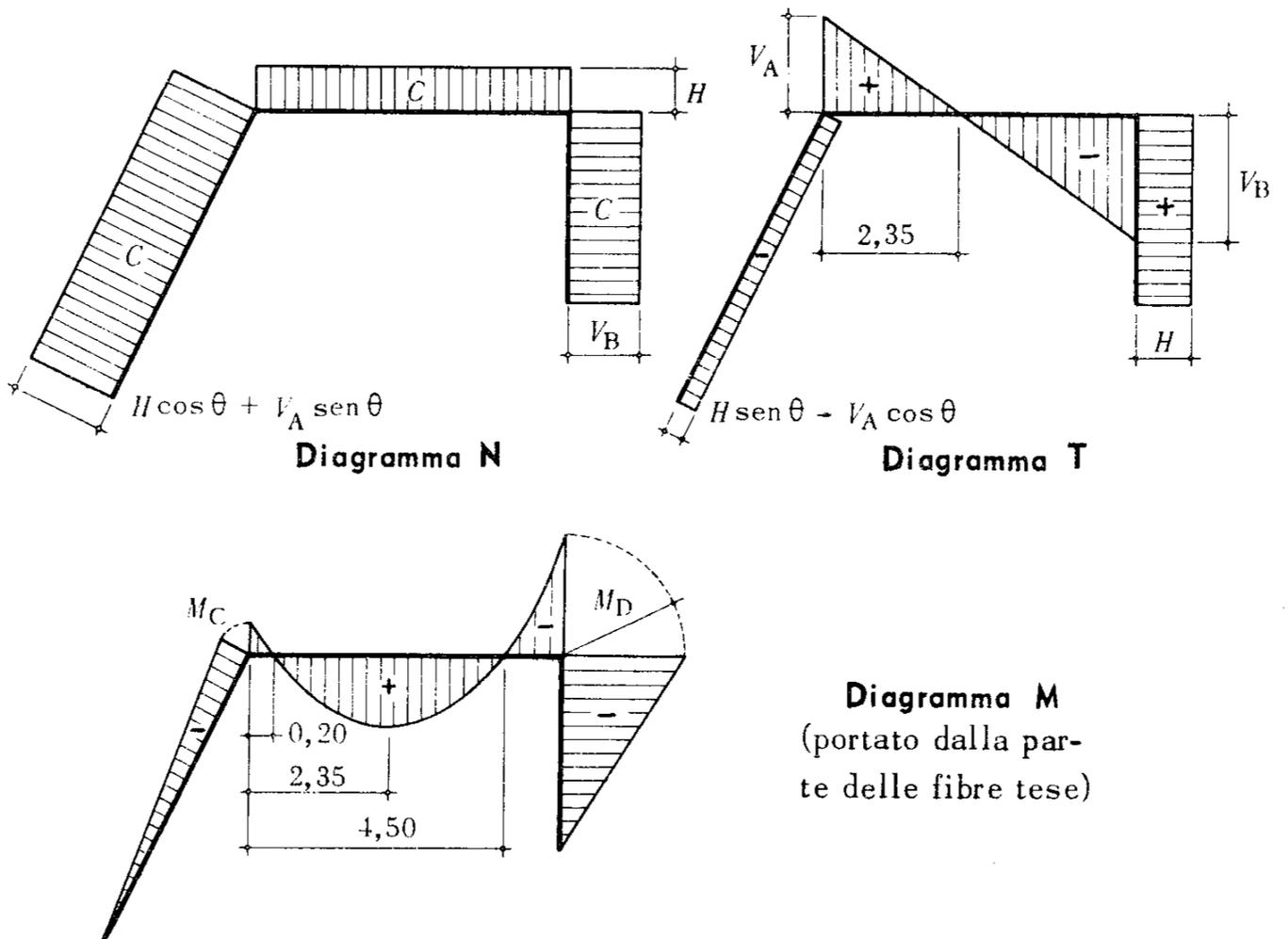


Fig. 18.4

## CURVA DELLE PRESSIONI.

È costituita dalle rette d'azione delle reazioni per i piedritti, e dall'arco di parabola  $C'B$  per la trave (fig. 18.5).  $P$  è il punto della curva corrispondente alla sezione generica  $S_p$ .

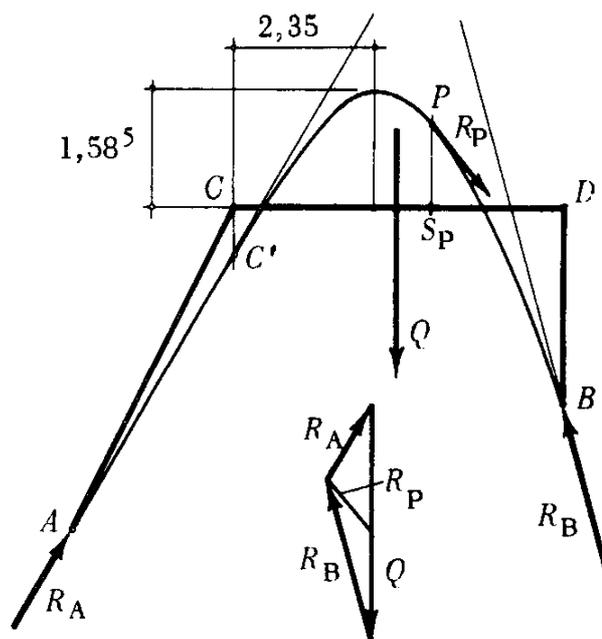


Fig. 18.5

## RISOLUZIONE NUMERICA E CALCOLO DI RESISTENZA.

Si abbia:

$$l = 6,00 \text{ m}; \quad h_1 = 5,00 \text{ m}; \quad h_2 = 3,00 \text{ m}; \quad \theta = 60^\circ;$$

$$J_1 = J_2 = J_t = \text{costante}; \quad q = 2000 \text{ kg/m}.$$

Si ottiene:

$$H = 2900 \text{ kg}; \quad V_A = 4700 \text{ kg}; \quad V_B = 7300 \text{ kg};$$

$$M_C = -900 \text{ kgm}; \quad M_D = -8700 \text{ kgm}.$$

nella trave  $CD$ :  $M_{\max} = 4600 \text{ kgm}$   
 nella sezione d'ascissa  $x = 2,35 \text{ m}$

CASO PARTICOLARE:  $h_1 = h_2$  (fig. 18.6).

In questo caso le reazioni verticali sono staticamente determinate; il loro valore si ricava direttamente mediante condizioni d'equilibrio.

Le spinte  $H$  sono incognite e costituiscono un sistema di forze autoequilibrato.

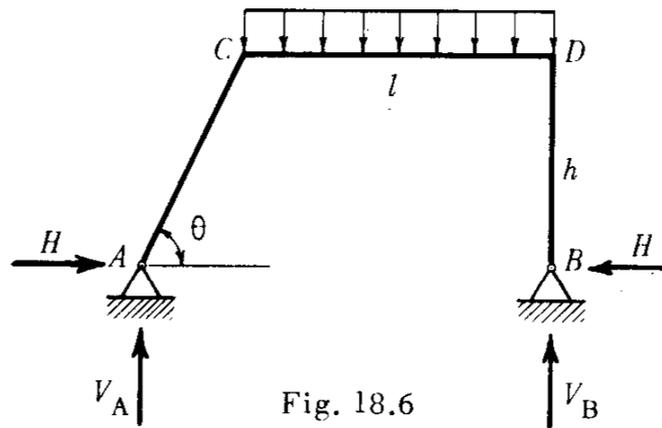


Fig. 18.6

Si può applicare sempre il metodo precedente assumendo la struttura principale a mensola, convenzionalmente incastrata in  $B$  e libera in  $A$ , e ivi soggetta alle reazioni della cerniera soppressa ( $V_A$  nota e  $H$  incognita).

Si deve però osservare che una rotazione rigida  $\varphi_B$  dell'intera struttura attorno a  $B$  non genera uno spostamento orizzontale di  $A$ , a meno di infinitesimi del secondo ordine, perché le due cerniere sono a livello. Pertanto la condizione  $\xi_A = 0$  è soddisfatta grazie al solo contributo della deformazione elastica e costituisce l'equazione di congruenza che consente di determinare l'incognita  $H$  del problema. Le reazioni  $H$  e  $V$  non dipendono da un eventuale cedimento verticale  $\eta_A$  della cerniera  $A$  che è compiuto dalla struttura con un semplice moto di rotazione attorno a  $B$ .

Le relazioni d'equilibrio sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma X = 0 \\ \Sigma Y = 0 \\ \Sigma M_B = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} H_A = H_B = H \\ V_A = Q - V_B \\ V_A (l + h \cotg \theta) = \frac{Ql}{2}. \end{array}$$

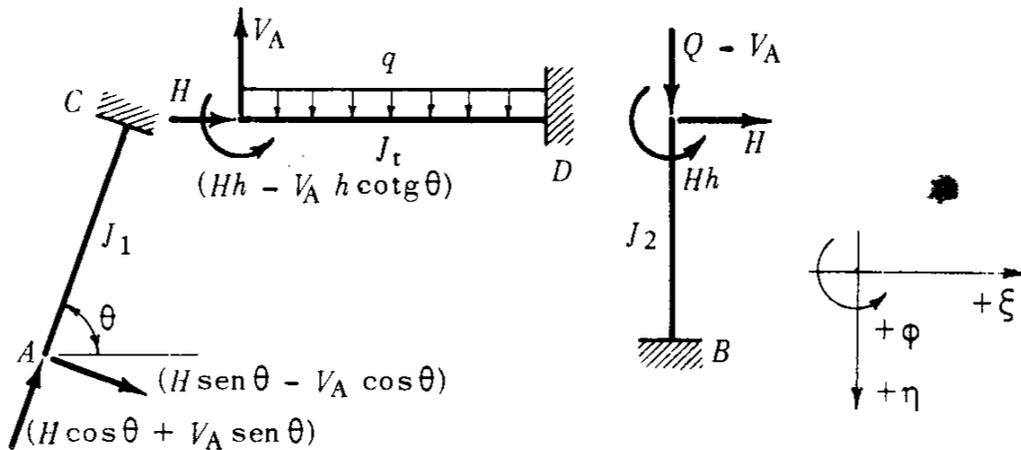


Fig. 18.7

In simboli l'equazione è:

$$(\varphi_{DB} \cdot h + \xi_{DB} + \varphi_{CD} \cdot h + \xi_{AC}) = 0.$$

Esplicitando i vari termini (fig. 18.7):

$$\left[ \frac{(Hh)h}{EJ_2} - \frac{Hh^2}{2EJ_2} \right] h + \left[ \frac{Hh^3}{3EJ_2} - \frac{(Hh)h^2}{2EJ_2} \right] + \left[ \frac{Hh - V_A h \cotg \theta}{EJ_t} l - \frac{V_A l^2}{2EJ_t} + \frac{ql^3}{6EJ_t} \right] h + \left[ \frac{H \text{ sen } \theta - V_A \text{ cos } \theta}{3EJ_1} \left( \frac{h}{\text{sen } \theta} \right)^3 \text{ sen } \theta \right] = 0.$$

Risulta:

$$H = \frac{ql^2}{2h} \cdot \frac{rK_1 + 1}{K_2}$$

(il valore delle costanti si ottiene ponendo  $h_1 = h_2$  nelle espressioni precedenti).

\* \* \*

19. - Risolvere la trave ad asse spezzato di fig. 19.1, soggetta a carico verticale uniforme su tutta l'asta centrale  $CD$ .

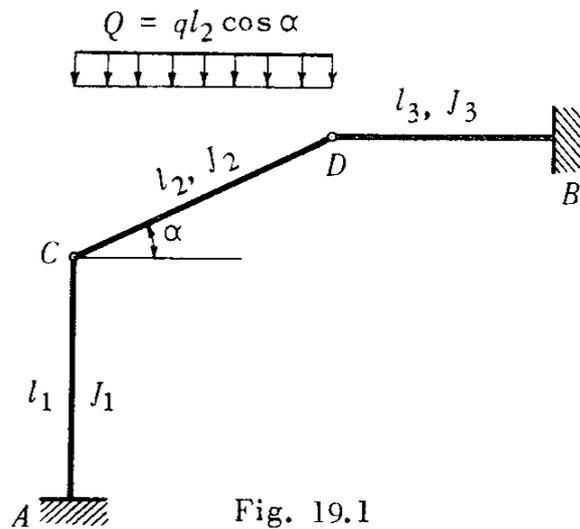


Fig. 19.1

Ai tre gradi di vincolo sovrabbondanti esterni fanno riscontro i due gradi di libertà concessi dalle cerniere interne  $C$  e  $D$ , dimodoché, complessivamente, la struttura è una sola volta iperstatica. Non esistendo particolari condizioni di simmetria, essa è anche una volta staticamente indeterminata.

La curva delle pressioni è all'evidenza costituita per l'asta centrale da un arco di parabola passante per le cerniere, ed avente quivi per tangenti estreme le rette d'azione inclinate delle reazioni degli incastri. Pertanto si discosta nettamente dall'asse geometrico, ed è lecito trascurare, nella risoluzione del problema iperstatico, la deformazione dovuta ad  $N$  in confronto a quella provocata da  $M$ .

Ne segue che i due nodi  $C$  e  $D$  si spostano solo in direzione normale alle rispettive aste:  $C$  orizzontalmente e  $D$  verticalmente. Inoltre devono essere eguali ed equiverse le proiezioni del loro spostamento nella direzione dell'asta  $CD$ , a causa della sua invariabilità assiale. È questa la condizione geometrica che rende il problema analiticamente determinato.

Sezioniamo completamente in  $C$  e  $D$  e assumiamo la struttura principale costituita dalle tre aste separate: le due mensole laterali  $AC$  e  $BD$  e l'asta centrale  $CD$  completamente svincolata, soggetta al carico e alle azioni mutue (fig. 19.2).

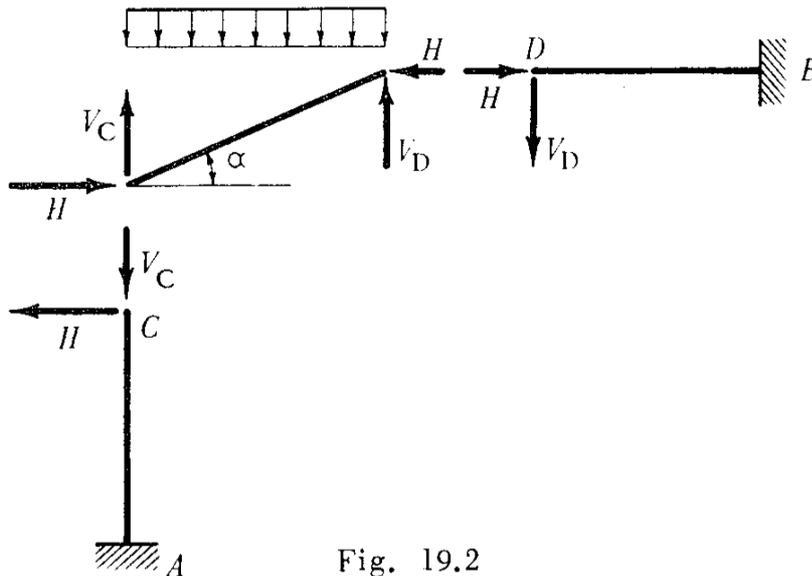


Fig. 19.2

Il senso di queste è facilmente prevedibile: l'asta  $CD$  si comporta come una trave appoggiata e trasmette alle altre due le azioni verticali  $V_C$  e  $V_D$  aventi il medesimo senso del carico;  $V_D$  inflette la mensola  $BD$  e provoca un abbassamento del suo estremo libero, mentre  $V_C$  non deforma la mensola  $AC$ . Questo fatto determinerebbe un avvicinamento relativo dei punti  $C$  e  $D$  in contrasto con l'invariabilità assiale dell'asta  $CD$ . Se ne deduce che questa esercita su  $AC$  anche un'azione orizzontale  $H_C$  diretta verso sinistra. Per ragioni d'equilibrio alla traslazione orizzontale dell'asta  $CD$  è poi  $H_C = H_D = H$ , con il senso esatto indicato in figura 19.2.

In simboli la condizione di congruenza è:

$$\xi_C \cos \alpha = \eta_D \sin \alpha.$$

Esplicitando i vari termini si ha:

$$\frac{Hl_1^3}{3EJ_1} \cos \alpha = \frac{V_D \cdot l_3^3}{3EJ_3} \sin \alpha.$$

$H$  e  $V_D$  sono tra loro legati da una relazione d'equilibrio alla rotazione dell'asta  $CD$  attorno a  $C$ :

$$\Sigma M_{C(CD)} = 0 \quad Hl_2 \operatorname{sen} \alpha + V_D l_2 \cos \alpha - \frac{Ql_2}{2} \cos \alpha = 0.$$

Da cui si ottiene:

$$V_D = \frac{Q}{2} - H \operatorname{tg} \alpha.$$

Sostituendo:

$$\frac{Hl_1^3}{3EJ_1} \cos \alpha + \frac{Hl_3^3}{3EJ_3} \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \alpha = \frac{Ql_3^3}{6EJ_3} \operatorname{sen} \alpha.$$

Risolvendo si ottiene per  $H$ :

$$H = \frac{Q}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\left[ \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{J_3}{J_1} \cdot \frac{l_1^3}{l_3^3} \right]}.$$

Le due mensole  $AC$  e  $BD$  sono pressoinflesse; l'asta centrale  $CD$  può essere parzialmente tensoinflessa in relazione ai valori di  $H$  e  $V_D$ .

La fig. 19.3 pone in evidenza le condizioni d'equilibrio dell'asta centrale in funzione delle azioni di taglio e assiali esistenti nelle sue sezioni estreme  $C$  e  $D$ .

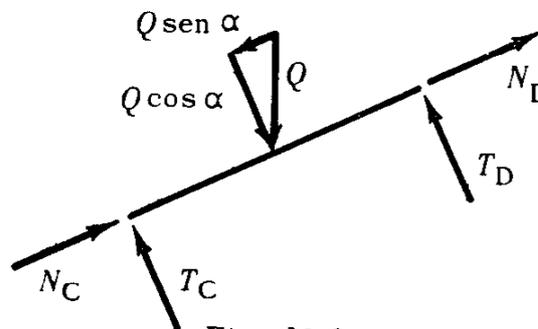


Fig. 19.3

Evidentemente è:

$$T_C = T_D = \frac{1}{2} Q \cos \alpha \quad N_C + N_D = Q \operatorname{sen} \alpha.$$

Riportiamo nelle figg. 19.4 e 19.5 l'andamento qualitativo del diagramma del momento e della curva delle pressioni.

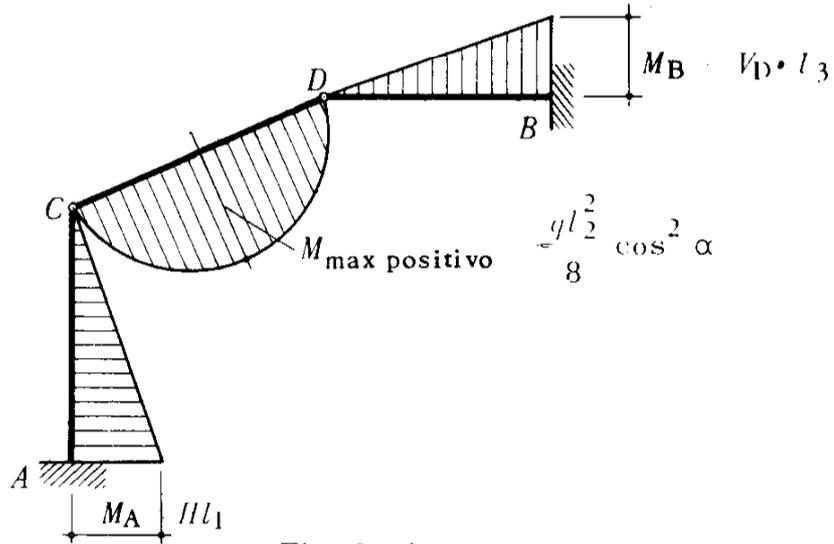


Fig. 19.4

Diagramma M (con le ordinate dalla parte delle fibre tese):

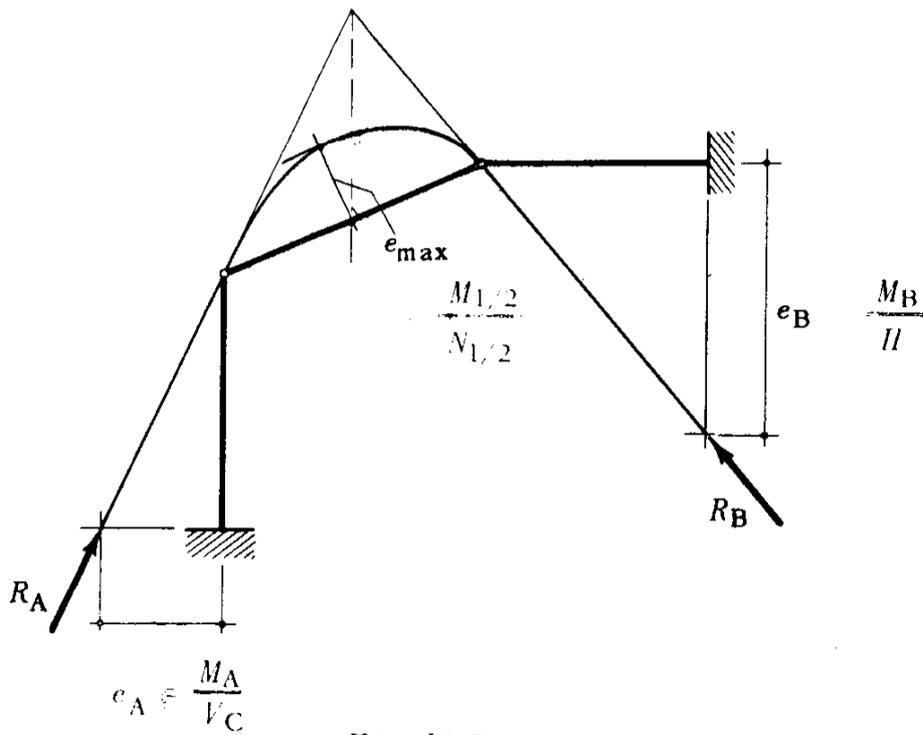


Fig. 19.5

\*\*\*

20. - Risolvere il portare di fig. 20.1 soggetto a pressione idrostatica lungo tutto il piedritto  $AC$ .

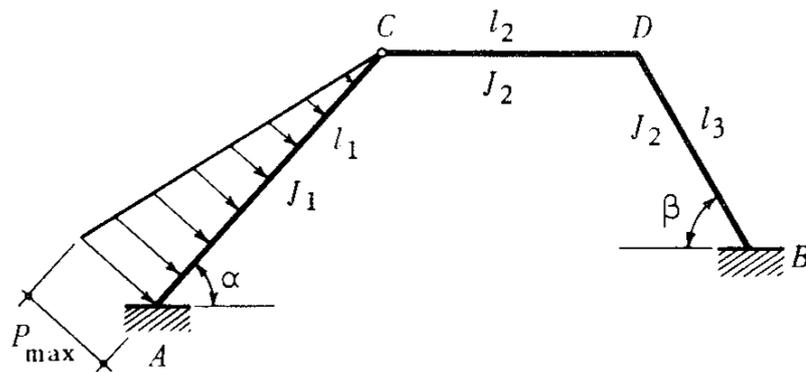


Fig. 20.1

La struttura, vincolata esternamente con due incastrati e dotata di cerniera interna  $C$ , è due volte iperstatica.

È conveniente sezionare totalmente in  $C$  e assumere come struttura principale le due mensole  $AC$  e  $BDC$ , soggette al carico assegnato e alle azioni mutue  $H_C$  e  $V_C$  esplicitate dallo svincolamento (fig. 20.2).

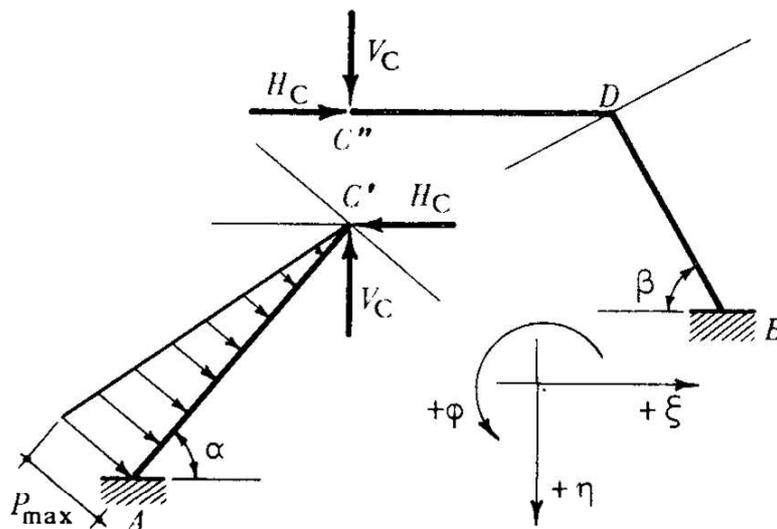


Fig. 20.2

Se si trascura, com'è lecito, la deformazione assiale in confronto a quella generata dal momento flettente, il punto  $C$  si sposta solo in direzione normale all'asta  $AC$ , verso il basso e verso destra, per effetto del carico esterno; la mensola  $BDC$  contrasta questa tendenza e la limita, in virtù della propria rigidezza, comportandosi nei riguardi della  $AC$  come un appoggio elasticamente cedevole.

Le condizioni di congruenza sono:

$$\begin{cases} \xi_{C'} = \xi_{C''} \\ \eta_{C'} = \eta_{C''} \end{cases}$$

Esprimendo in forma simbolica le due equazioni, e tenendo presente che  $C''$  non si sposta orizzontalmente rispetto a  $D$ , si ha:

$$\begin{cases} f_{C'} \operatorname{sen} \alpha = f_D \operatorname{sen} \beta \\ f_{C'} \operatorname{cos} \alpha = f_D \operatorname{cos} \beta + \varphi_D \cdot l_2 + f_{C'',D} \end{cases}$$

Il regime statico all'interno dell'asta  $AC$  può essere di tensoflessione o di pressoflessione, a seconda delle caratteristiche geometriche della struttura, e ciò anche se il senso di  $H_C$  e  $V_C$  indicato nel precedente svincolamento rimane invariato.

Ad esempio nel caso limite di  $\alpha = 0$  (asta  $AC$  orizzontale) e  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$  (fig. 20.3) le due condizioni di congruenza sono:

$$\begin{cases} \xi_{C''} = 0 \\ \eta_{C'} = \eta_{C''} \end{cases}$$

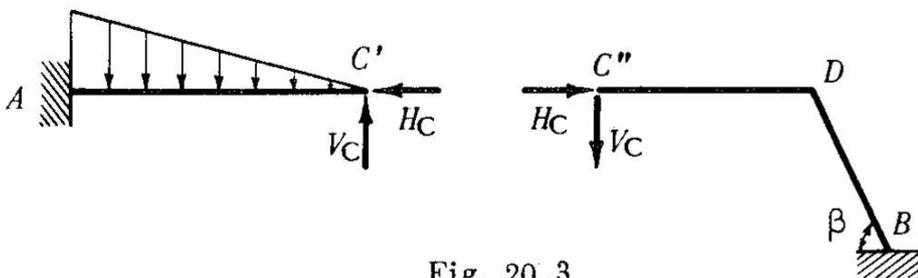


Fig. 20.3

La mensola  $BDC''$  sostiene la  $AC''$  con lo sforzo tagliante  $V_C$  e riceve la  $H_C$  diretta verso destra.

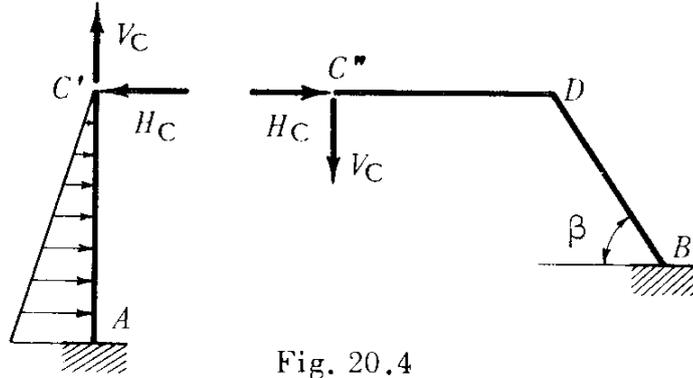


Fig. 20.4

Se è  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  (fig. 20.4) le due condizioni di congruenza diventano:

$$\begin{cases} \xi_{C'} = \xi_{C''} \\ \eta_{C''} = 0 \end{cases}$$

e in questo caso la mensola  $BDC''$  sostiene orizzontalmente la  $AC''$  mediante la  $H_C$  e riceve la  $V_C$  diretta verso il basso.

La curva delle pressioni ha nei due precedenti casi particolari l'andamento qualitativo rappresentato in fig. 20.5.

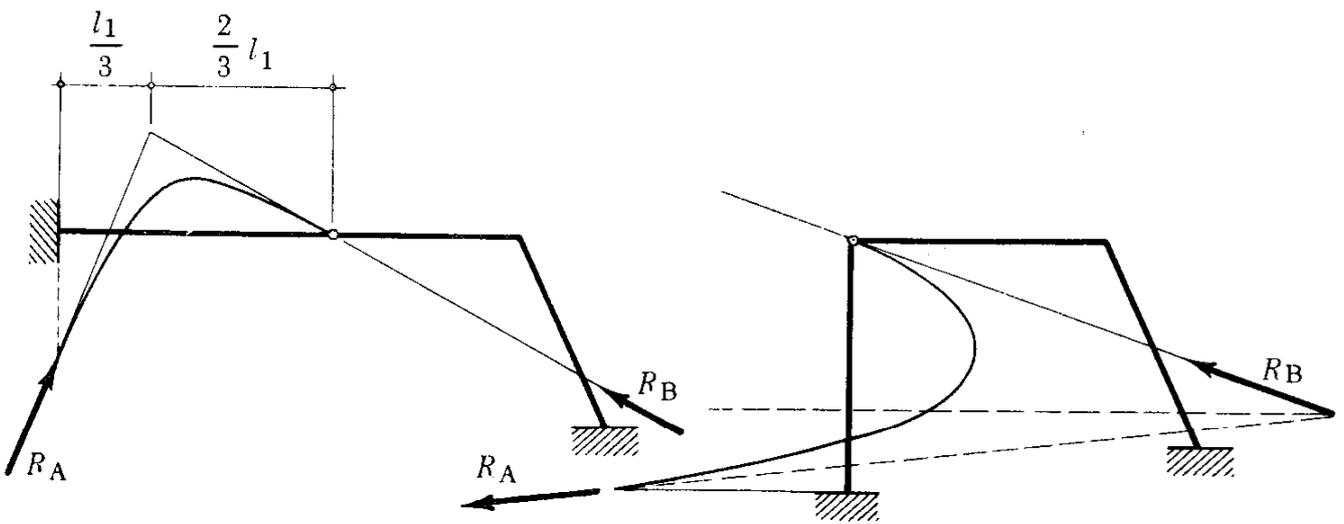


Fig. 20.5

\*\*\*

21. - Risolvere la struttura a shed di fig. 21.1 soggetta a carico uniforme verticale su tutta l'asta  $AC$ .

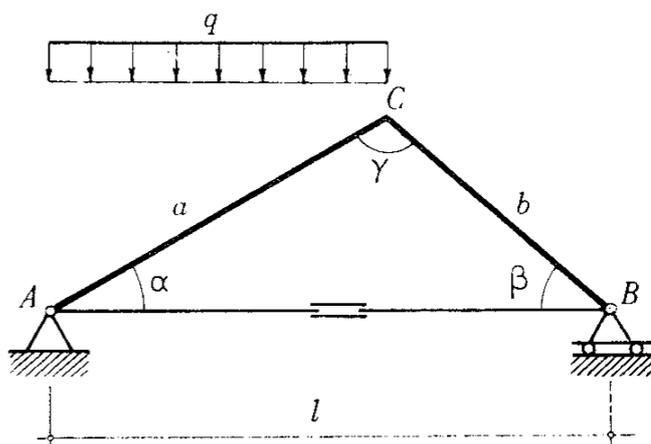


Fig. 21.1

La struttura è essenzialmente costituita dalla trave  $ACB$ , ad asse spezzato, vincolata isostaticamente all'esterno e resa una volta iperstatica per l'introduzione della catena inferiore.

Questa è solitamente realizzata con due elementi di ferro tondo aganciati, da un lato, ai vincoli, e collegati all'altro estremo tra di loro, mediante un manicotto filettato.

Assumiamo quale struttura principale la trave  $ACB$ , vincolata con cerniera e carrello, e soggetta al carico  $q$  e all'azione mutua  $X$  trasmessa dalla catena (fig. 21.2).

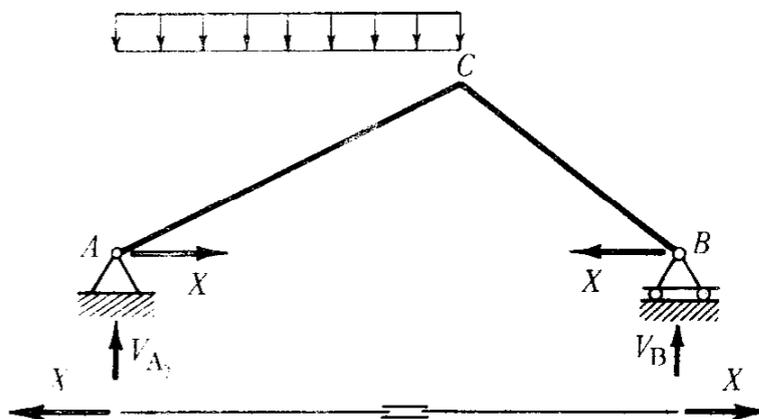


Fig. 21.2

Le reazioni verticali dei vincoli sono staticamente determinate; esse sono dirette entrambe verso l'alto e valgono:

$$V_A = \frac{Q}{l} \left( l - \frac{a \cos \alpha}{2} \right) = Q \left( 1 - \frac{a \cos \alpha}{2l} \right)$$

$$V_B = Q - V_A = Q \frac{a \cos \alpha}{2l}.$$

Il momento flettente provocato dai carichi tende ovunque le fibre interne della struttura principale e comprime quelle esterne, generando la tendenza ad uno spostamento verso destra del carrello. La catena agisce come tirante e contrasta questo spostamento, senza tuttavia annullarlo, perché è essa stessa deformabile. Nel suo complesso il vincolo  $B$  (carrello e catena) si comporta nei riguardi della trave  $ACB$ , come una cerniera cedevole elasticamente in senso orizzontale; la reazione  $X$  è ovviamente minore della spinta esistente nella corrispondente struttura  $ACB$  vincolata esternamente con due cerniere fisse.

Il valore di  $X$  si ottiene, evidentemente, eguagliando lo spostamento compiuto dal carrello verso destra, nella struttura principale, all'allungamento subito dalla catena:

In simboli:

$$\xi_B = \frac{Xl_1}{E_F \cdot A_F}.$$

Procediamo con il metodo di tipo cinematico già svolto nell'esercizio 18. Svincoliamo completamente la sezione  $B$ , applicando ad essa le reazioni  $V_B$ , nota, ed  $X$  incognita. Valutiamo lo spostamento relativo orizzontale di  $B$  rispetto ad  $A$ , considerando la sezione  $A$  provvisoriamente incastrata, mediante la composizione degli spostamenti delle due mensole  $BC$  e  $CA$ . Osserviamo infine che, essendo  $A$  e  $B$  allo stesso livello, un moto rigido di rotazione di tutta la struttura  $ACB$  attorno alla cerniera  $A$  non provoca spostamento orizzontale di  $B$ , e quindi non influenza l'espressione di  $\xi_B$ .

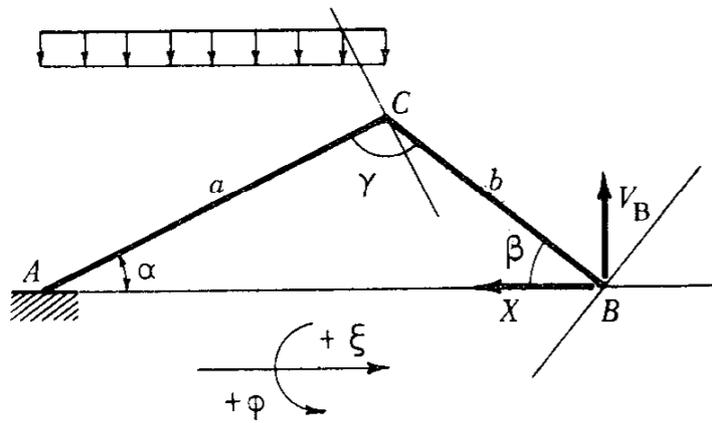


Fig. 21.3

È:

$$\xi_B = \xi_{B,C} + \varphi_{C,A} \cdot a \operatorname{sen} \alpha + \xi_{C,A}.$$

Con i sensi positivi indicati in fig. 21.3 per le rotazioni e gli spostamenti, si ha:

$$\begin{aligned} & \left\{ (V_B \cos \beta - X \operatorname{sen} \beta) \frac{b^3}{3EJ} \operatorname{sen} \beta \right\} + \left\{ (V_B \cos \beta - X \operatorname{sen} \beta) \frac{ba}{EJ} + \right. \\ & \quad \left. + (V_B \cos \alpha + X \operatorname{sen} \alpha) \cdot \frac{a^2}{2EJ} - q \cos^2 \alpha \frac{a^3}{6EJ} \right\} a \operatorname{sen} \alpha + \\ & + \left\{ -(V_B \cos \beta - X \operatorname{sen} \beta) \frac{ba^2}{2EJ} - (V_B \cos \alpha + X \operatorname{sen} \alpha) \frac{a^3}{3EJ} + \right. \\ & \quad \left. + q \cos^2 \alpha \frac{a^4}{8EJ} \right\} \operatorname{sen} \alpha = \frac{Xl}{E_F \cdot A_F}. \end{aligned}$$

### RISOLUZIONE NUMERICA E CALCOLO DI RESISTENZA.

Secondo una consuetudine pratica di uso frequente, le due aste AC e BC siano tra loro ortogonali ( $\gamma = 90^\circ$ ) (fig. 21.4).

Ponendo allora nell'equazione generale di congruenza prima scritta:

$$\beta = 90 - \alpha \quad a \operatorname{sen} \alpha = b \operatorname{sen} \beta = h \quad V_B = Q \frac{a \cos \alpha}{2l},$$

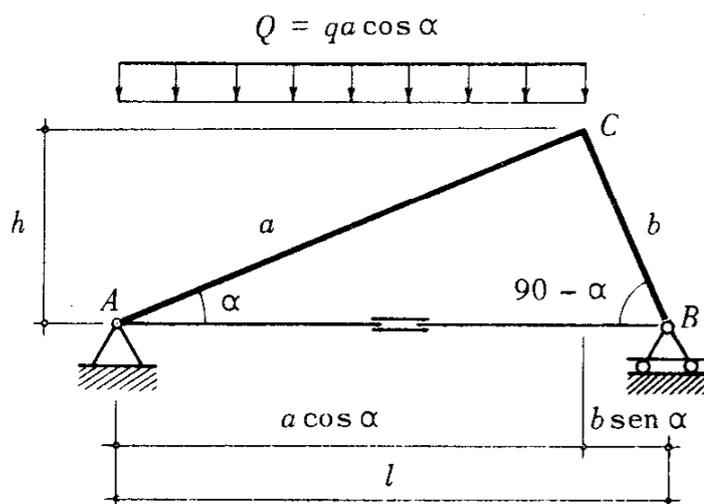


Fig. 21.4

e risolvendo per  $X$ , si ottiene:

$$X = \frac{Q}{4} \frac{\frac{h^2}{l} (3a + 2b) + a^2 \left( \cos^3 \alpha - \frac{1}{2} \right)}{h(a+b) + \frac{3l}{h} \cdot \frac{EJ}{E_F A_F}}$$

Il secondo termine al denominatore della frazione rappresenta l'influenza della catena.

Siano assegnate le grandezze:

$$l = 10,00 \text{ m}; \quad \alpha = 20^\circ; \quad q = 500 \text{ kg/m.}$$

Si ricava per le altre quantità che interessano il calcolo:

$$\cos \alpha = 0,94; \quad \sin \alpha = 0,34; \quad a = 9,40 \text{ m}; \quad b = 3,40 \text{ m}; \quad h = 3,20 \text{ m.}$$

Supponiamo che la trave  $ABC$  sia di cemento armato ed abbia le dimensioni già prefissate della sezione retta di cm  $20 \times 45$  (altezza = 45 cm) e che la catena sia costituita da un ferro tondo  $\phi 12$  mm.

Risulta:

$$X = \frac{4425}{4} \cdot \frac{35,84 + 29,16}{40,96 + 12,6} = 1342 \text{ kg.}$$

Completando i calcoli si ottiene:

$$V_A = 2470 \text{ kg}; \quad V_B = Q - V_A = 1955 \text{ kg};$$

$$R_A = \sqrt{V_A^2 + X^2} = 2810 \text{ kg}; \quad R_B = \sqrt{V_B^2 + X^2} = 2370 \text{ kg};$$

inclinazione delle reazioni sull'orizzontale:

$$\varphi_A = 61^\circ 30'; \quad \varphi_B = 55^\circ 30';$$

la  $R_B$  ha sull'orizzontale un'inclinazione minore dell'asta  $BC$ ; pertanto in questa risultano ovunque tese le fibre esterne, come del resto era facilmente prevedibile.

Nel nodo  $C$  si ha:

$$M_C = V_B \cdot h \operatorname{tg} \alpha - X \cdot h = -2027 \text{ kgm} \cong \frac{(q \cdot \cos^2 \alpha) a^2}{19,4}.$$

Nella sezione di sommità dell'asta  $BC$  è:

$$N_{C,B} = V_B \cdot \cos \alpha + X \operatorname{sen} \alpha = 2294 \text{ kg (compressione)}$$

l'eccentricità della risultante delle azioni interne in questa sezione vale:

$$e_{C,B} = \frac{M_C}{N_{C,B}} = 0,88 \text{ m.}$$

Nell'asta  $AC$  si ha nella sezione generica d'ascissa  $x$ :

$$T_S = (V_A \cdot \cos \alpha - X \operatorname{sen} \alpha) - (q \cos^2 \alpha) x = 1866 - 442 \cdot x$$

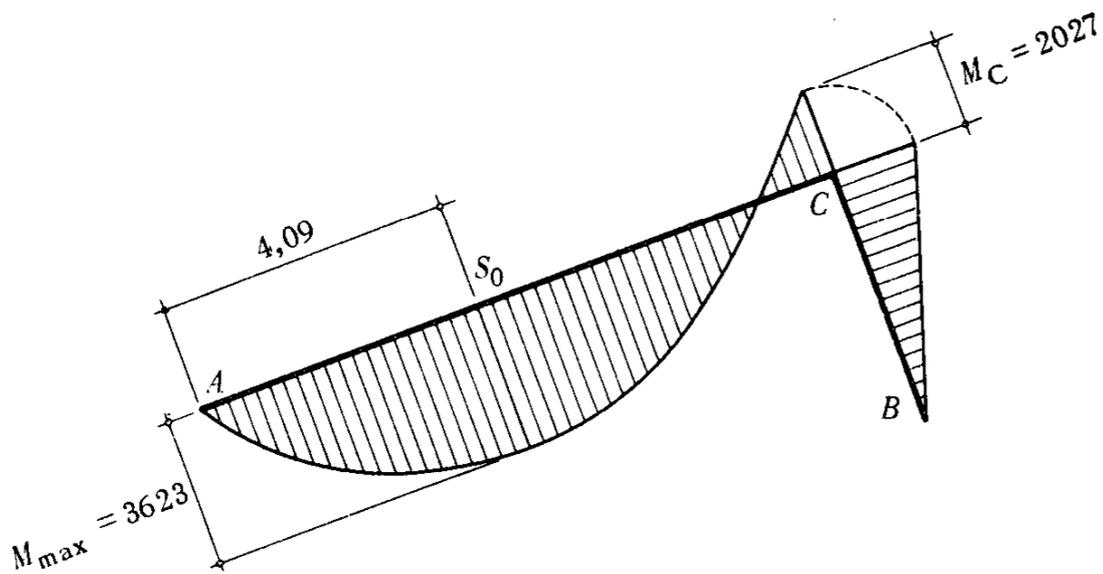
nella sezione d'ascissa  $x_0 = 4,09 \text{ m}$ , risulta:

$$T_{S_0} = 0; \quad M_{S_0} = M_{\max \text{ pos.}} = +3623 \text{ kgm} \cong \frac{(q \cos^2 \alpha) a^2}{10,9}$$

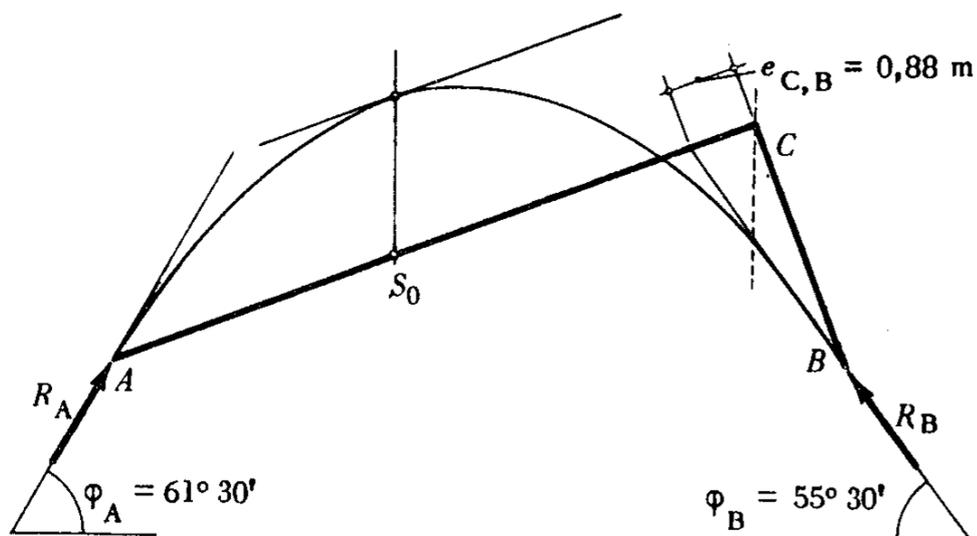
$$N_{S_0} = (V_A \cdot \operatorname{sen} \alpha + X \cos \alpha) - (q \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha) x_0 = 1865 \text{ kg.}$$

eccentricità della risultante delle azioni interne in  $S_0$ :

$$e_{S_0} = \frac{M_{\max}}{N_{S_0}} = 1,94 \text{ m.}$$



**Diagramma M** (ordinata portate dalla parte delle fibre tese)



**Curva delle pressioni**

Fig. 21.5

Rappresentiamo il diagramma  $M$  e la curva delle pressioni relative all'esempio numerico risolto (fig. 21.5).

Verifichiamo la sezione  $S_0$ ; dato il notevole valore dell'eccentricità rispetto alle dimensioni della sezione eseguiamo un calcolo a flessione semplice.

Assumiamo:

$$K_F = 1800 \text{ kg/cm}^2; \quad K_C = 75 \text{ kg/cm}^2; \quad \frac{E_F}{E_C} = 10.$$

È:

$$C_h = \frac{42,5}{\sqrt{3623/0,2}} = 0,316$$

nella apposita tabella si ricava:

$$\sigma_C = 75 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{e} \quad A_F = 0,00194 \sqrt{362300 \cdot 20} = 5,2 \text{ cm}^2.$$

Per la catena:

$$\sigma_F = \frac{1342}{1,13} \cong 1190 \text{ kg/cm}^2.$$

\*\*\*

22. - Risolvere il portale a due cerniere di fig. 22.1 caricato uniformemente su tutta la trave CD.

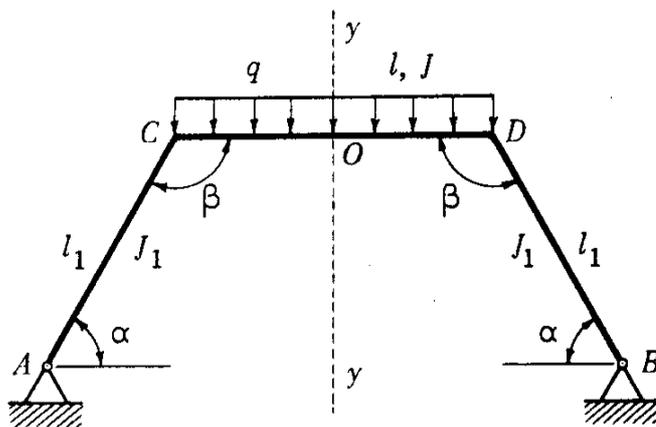


Fig. 22.1

La struttura è una volta iperstatica; simmetrica e simmetricamente caricata rispetto l'asse mediano verticale  $y - y$ .

È noto come le proprietà della simmetria dai carichi esterni si estendono alle reazioni dei vincoli e al regime statico della struttura. Le sezioni simmetriche rispetto all'asse  $y - y$  sono soggette ad azioni interne eguali e del medesimo segno, e, come risultato globale di questo

stato interno, la curva delle pressioni e la deformata elastica sono esse pure simmetriche.

Nella sezione 0, posta sull'asse di simmetria, si ha:

$$\begin{array}{llll} T = 0 & N \neq 0 & M \neq 0 & \text{per le azioni interne} \\ \eta \neq 0 & \xi = 0 & \varphi = 0 & \text{per gli spostamenti} \end{array}$$

in quanto in 0 possono sussistere solo componenti simmetriche di sollecitazione e di spostamento.

Inoltre essendo lecito trascurare, per le condizioni di carico assegnate, la deformazione a sforzo normale in confronto a quella generata dal momento flettente, i nodi *C* e *D* non si spostano (per ragioni di simmetria). In essi si ha:

$$\xi = 0 \quad \eta = 0 \quad \varphi \neq 0.$$

Le componenti verticali delle reazioni sono staticamente determinate e valgono:

$$V_A = V_B = V = \frac{Q}{2}.$$

Le componenti orizzontali delle reazioni sono incognite e costituiscono un sistema di forze autoequilibrato:

$$H_A = H_B = H.$$

Per risolvere il problema procediamo in modo da sfruttare la simmetria esistente; sopprimiamo pertanto la solidarietà angolare sia in *C* che in *D* e assumiamo quale struttura principale il telaio *ACDB*, a quattro cerniere, labile ma equilibrato, soggetto al carico *q* e alle azioni interne mutue  $M_C$  esplicitate dallo svincolamento ( $M_C = M_D$  per ragioni di simmetria) (fig. 22.2).

Per effetto dei soli carichi le aste *AC* e *DB* si comportano come due bielle: la componente *V* delle reazioni è già nota; la componente orizzontale soddisfa la condizione d'equilibrio alla rotazione dell'asta attorno alla cerniera:

$$H l_1 \sin \alpha - \frac{Q}{2} l_1 \cos \alpha = 0$$

da cui

$$H' = \frac{Q}{2 \operatorname{tg} \alpha} . \quad H' \text{ è la componente orizzontale della reazione dovuta ai soli carichi esterni}$$

La trave  $CD$  si deforma come una trave semplicemente appoggiata e gli angoli  $\beta$  diminuiscono: è compito dei momenti mutui  $M_C$  assicurare il rispetto del vincolo soppresso generando nelle due facce all'attacco delle cerniere  $C$  e  $D$  una rotazione relativa eguale e contraria a quella provocata dai carichi.

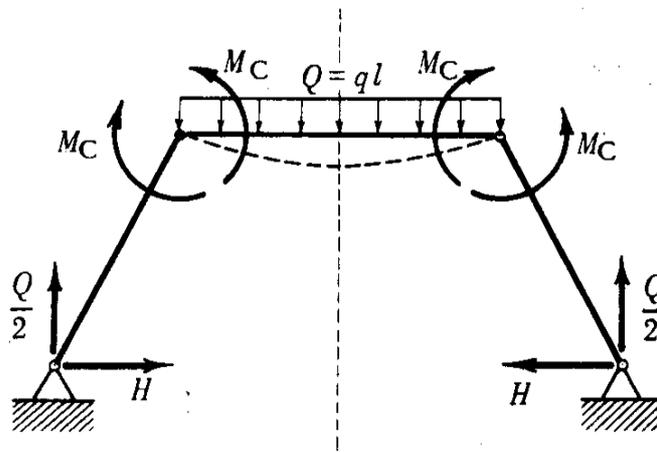


Fig. 22.2

Le coppie  $M_C$  hanno pertanto il senso facilmente prevedibile di fig. 22.2. In simboli la condizione di congruenza è:

$$\Delta \beta = 0.$$

Assumendo positive le rotazioni che fanno diminuire  $\beta$  si ha:

$$\left( \frac{Ql^2}{24 EJ} - \frac{M_C l}{2 EJ} \right) - \frac{M_C l_1}{3 EJ_1} = 0.$$

Si ottiene:

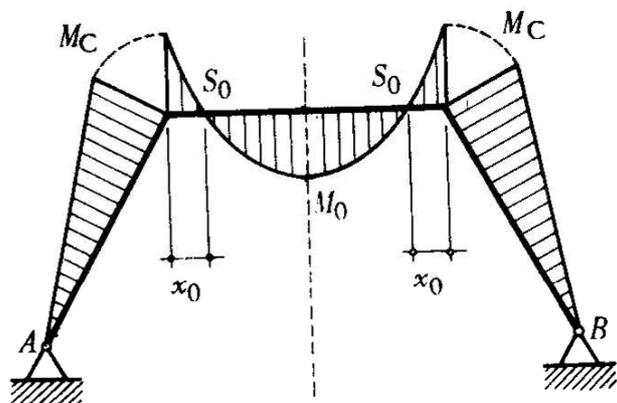
$$M_C = \frac{Ql}{12} \frac{1}{\left( 1 + \frac{2}{3} \frac{J}{J_1} \cdot \frac{l_1}{l} \right)}$$

La quantità  $\frac{Ql}{12}$  rappresenta il momento  $\bar{M}_C$  d'incastro perfetto della trave  $CD$ ; si può allora scrivere:

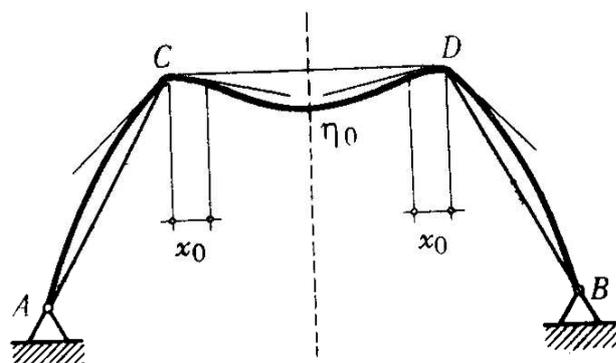
$$M_C = \frac{\bar{M}_C}{\left(1 + \frac{2}{3} \frac{J}{J_1} \cdot \frac{l_1}{l}\right)} = \frac{Z_1}{Z + Z_1} \bar{M}_C$$

e questa espressione è sempre valida qualunque sia la legge di variazione del carico, distribuito o concentrato, purché simmetrico, sulla trave  $CD$  (varia, naturalmente,  $M_C$ ).

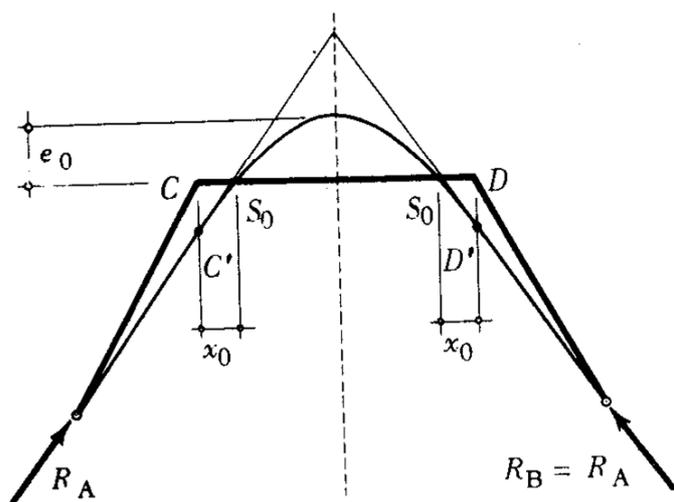
In analogia con quanto notato nell'esercizio 11, si vede come  $M_C$  non dipende dalla inclinazione delle aste ma solo dalla loro lunghezza e dal momento di inerzia della loro sezione, cioè dal rapporto delle rigidità flessionali  $Z$  e  $Z_1$ .



**Diagramma M** (simmetrico), portato dalla parte delle fibre tese.



**Deformata** (simmetrica)



**Curva delle pressioni** (simmetrica)

Fig. 22.3

È sempre  $M_C < \bar{M}_C$  a conferma del fatto che la trave  $CD$  si comporta come incastrata elasticamente.

Il valore complessivo di  $H$  risulta:

$$H = \frac{Q}{2 \operatorname{tg} \alpha} + \frac{M_C}{l_1 \operatorname{sen} \alpha} \quad (\text{diretta verso l'interno}).$$

Tracciamo qualitativamente la deformata della struttura, il diagramma del momento flettente e la curva delle pressioni (fig. 22.3).

La trave  $CD$  si comporta come imperfettamente incastrata ed il diagramma del momento ad essa relativo è intrecciato con prevalenza delle aree positive sulle negative.  $M$  si annulla in due sezioni  $S_0$ , simmetriche, per le quali passa la curva delle pressioni, e in corrispondenza delle quali la deformata presenta un flesso.

## RISOLUZIONE NUMERICA E CALCOLO DI RESISTENZA.

Siano assegnate:

$$l = 4,00 \text{ m}; \quad l_1 = 3,00 \text{ m}; \quad \alpha = 45^\circ; \quad q = 2000 \text{ kg/m} \quad (Q = 8000 \text{ kg}).$$

Supponiamo di volere realizzare un telaio in ferro a sezione costante I PN con  $K_F = 1600 \text{ kg/cm}^2$ .

Risulta:

$$M_C = \frac{8000 \cdot 4}{12} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \frac{3}{4}} = \frac{Ql}{18} = 1780 \text{ kgm};$$

$$V = \frac{Q}{2} = 4000 \text{ kg} \quad H = 4000 + \frac{1780}{3 \cdot 0,707} = 4840 \text{ kg}.$$

Nella sezione di sommità dei piedritti, all'attacco col trave è:

$$M = M_C = 1780 \text{ kgm} \quad N = V \operatorname{sen} \alpha + H \operatorname{cos} \alpha = 0,707 \cdot 8840 = 6250 \text{ kg}$$

eccentricità della risultante delle azioni interne:

$$e_{CA} = \frac{178\,000}{62,50} = 28,5 \text{ cm.}$$

Nella sezione di mezzaria della trave si ha:

$$M_0 = \frac{Ql}{8} - M_C = \frac{Ql}{14,4} = 2220 \text{ kgm} \quad N = H = 4840 \text{ kg;}$$

eccentricità della risultante:

$$e_0 = \frac{222\,000}{4840} = 46,0 \text{ cm.}$$

Progettando a flessione semplice per la sezione 0 di maggior momento:

$$W = \frac{M}{K_F} = \frac{222\,000}{1600} = 139 \text{ cm}^3.$$

$$\text{I PN 18: } A = 27,9 \text{ cm}^2; \quad J = 1446 \text{ cm}^4; \quad W = 161 \text{ cm}^3.$$

Verificando a pressoflessione:

$$\sigma_{\max} = \frac{222\,000}{161} + \frac{4840}{27,9} = 1380 + 175 = 1555 \text{ kg/cm}^2 < K_F$$

(per le fibre interne, compresse).

## ASSUNZIONE DI UN'ALTRA STRUTTURA PRINCIPALE.

Naturalmente sarebbe stato possibile assumere altre strutture principali, pur utilizzando la simmetria esistente.

Per esempio ricordando quanto si è detto a proposito dei movimenti che compie la sezione  $O$  sull'asse di simmetria e delle azioni interne che attraverso di essa si trasmettono le due parti a sinistra e a destra, se ne può schematizzare il comportamento mediante un incastro (fig. 22.4). Per la risoluzione è sufficiente prendere in esame solo metà struttura (ad e-

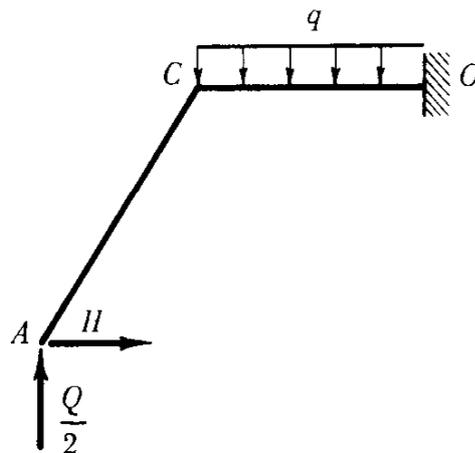


Fig. 22.4

sempio  $ACO$ ), incastrata in  $O$  e completamente svincolata in  $A$ , e ivi soggetta alle reazioni esplicitate della cerniera esterna ( $V = \frac{Q}{2}$  nota e  $H$  incognita).

La condizione che determina  $H$  è:

$$\xi_A = 0$$

(nei punti  $A$  e  $O$  sono nulli gli spostamenti orizzontali sia relativi che assoluti).

Per quanto riguarda gli spostamenti verticali nella struttura principale a mensola si ha un innalzamento di  $A$  rispetto ad  $O$  che rimane fisso. Nella realtà si verifica il contrario:  $A$  è fisso perché è vincolato alla cerniera e  $O$  si abbassa; quindi la configurazione della struttura principale si discosta da quella effettiva per un moto rigido di traslazione verticale  $|\eta_A| = |\eta_O|$  che però non influenza la risoluzione del problema iperstatico.

Rimane da valutare il criterio di convenienza per la scelta della struttura principale; a questo proposito si rimanda a quanto esposto nell'esercizio 7. Qui si ricorda solo che, quando è possibile, per una maggiore precisione dei calcoli numerici, è preferibile assumere una struttura principale di tipo incernierato che non a mensola, perché in quest'ultima il regime statico dovuto ai carichi è molto discosto da quello effettivo.

*OSSERVAZIONI SULL'INFLUENZA DELLA DEFORMAZIONE ASSIALE.* - Nella struttura principale incernierata in  $C$  e  $D$  i piedritti sono soggetti, per effetto dei carichi  $q$ , a solo sforzo assiale di compressione:

$$N = \frac{Q}{2} \left( \operatorname{sen} \alpha + \frac{\cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \right) = \frac{Q}{2 \operatorname{sen} \alpha}.$$

Potrebbe venire il dubbio di dovere valutare la variazione dell'angolo  $\beta$ , tenendo anche conto del contributo della deformazione assiale dei piedritti (fig. 22.5).

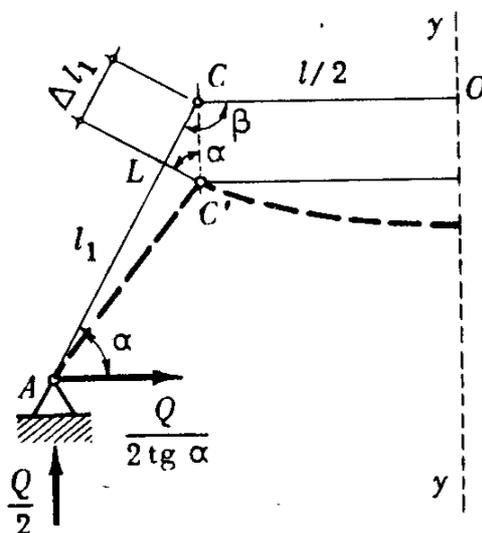


Fig. 22.5

In tal caso si avrebbe:

$$\Delta \beta = \Delta \beta_M - \Delta \beta_N.$$

Ove:

$$\Delta \beta_M = \frac{Ql^2}{24 EJ}$$

$$\Delta \beta_N = \frac{LC'}{l_1} = \frac{\Delta l_1 / \operatorname{tg} \alpha}{l_1} = \frac{\frac{Q}{2 \operatorname{sen} \alpha} l_1}{EA_1 \cdot l_1 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{Q}{2 EA_1 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \alpha}.$$

Confrontando i due contributi è:

$$\frac{\Delta\beta_M}{\Delta\beta_N} = \frac{1}{12} l^2 \frac{A_1}{J} \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \alpha$$

e se il telaio ha sezione costante:

$$\frac{\Delta\beta_M}{\Delta\beta_N} = \frac{1}{12} \left(\frac{l}{\rho}\right)^2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \alpha$$

ove:

$\rho$  = raggio d'inerzia della sezione retta;

$l$  = luce della trave  $CD$ .

Questo rapporto ha valore molto grande purché  $\alpha$  non sia molto piccolo [vedi le considerazioni svolte nell'esercizio 11 su  $H = f(\alpha)$ ] e purché le dimensioni della sezione retta della trave e dei piedritti siano le medesime, oppure non troppo diverse tra di loro.

Per  $\alpha = 90^\circ$  si ha addirittura  $\frac{\Delta\beta_M}{\Delta\beta_N} = \infty$ . In questo caso particolare, infatti, la deformazione assiale dei piedritti non influenza la variazione di  $\beta$ .

Rimane pertanto confermata la prevalenza delle deformazioni flessionali su quelle assiali e la legittimità del criterio finora assunto. *Cioè anche nei casi in cui la funicolare dei carichi coincide per certi tratti con l'asse geometrico, è egualmente lecito trascurare la deformazione assiale di questi, in confronto a quella flessionale che si manifesta nelle rimanenti parti della struttura principale.*

\*\*\*

**23. - Risolvere il portale simmetrico di fig. 23.1 doppiamente incastrato e soggetto alle forze  $P$  applicate agli estremi liberi degli sbalzi.**

Il portale è tre volte iperstatico, ma due sole volte indeterminato. Infatti, per ragioni di simmetria, le reazioni verticali dei vincoli sono e-

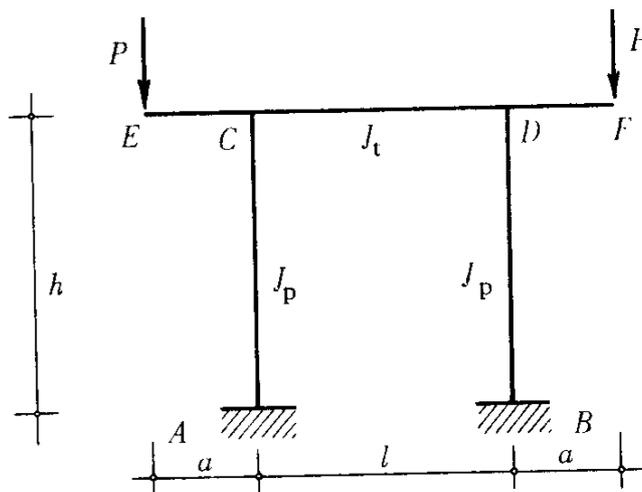


Fig. 23.1

guali e valgono  $P$ ; risultano incognite le spinte  $H$  e i momenti d'incastro.

L'indeterminazione riguarda solo il portale  $ACDB$  e non gli sbalzi  $EC$  e  $FD$ . Pertanto consideriamo le azioni trasmesse da questi al portale: forze verticali  $P$  e coppie  $(Pa)$ .

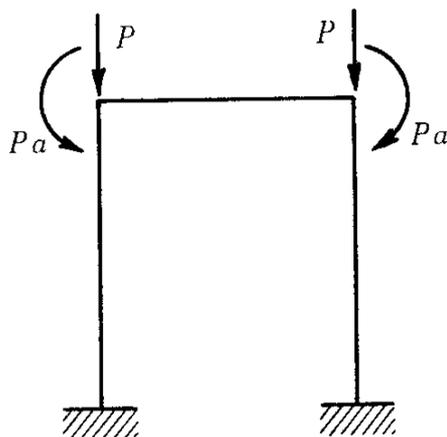


Fig. 23.2

Le forze  $P$  comprimono in egual misura i due piedritti provocando un abbassamento dei nodi  $C$  e  $D$   $\delta = \frac{Ph}{EA}$ , ed una semplice traslazione verticale della trave. La deformazione assiale, nota, è d'altra parte trascurabile in confronto a quella flessionale causata dalle coppie.

Queste provocano una rotazione dei due nodi nel loro stesso senso, di valore eguale, a causa della solidarietà angolare, per la sezione di sommità del piedritto e per quella estrema della trave.

Ciò significa che se noi svincoliamo il portale inserendo due cerniere interne nei nodi *C* e *D*, ciascuna coppia esterna si ripartisce nei due elementi di struttura su cui agisce (piedritto e trave) secondo due aliquote  $X_1$  e  $X_2$  in modo che sia soddisfatta la condizione:

$$\Phi \text{ di sommità piedritto} = \Phi \text{ iniziale trave}$$

Data la simmetria della struttura e del carico si può indifferentemente esprimere questa condizione di congruenza per il nodo *C* oppure *D*.

Con lo svincolamento effettuato i piedritti sono ancora una volta iperstatici, tuttavia il loro comportamento è noto (vedi tabella a pag. 12); il momento d'incastro in *A* e *B* vale:

$$M_i = \frac{X_1}{2}.$$

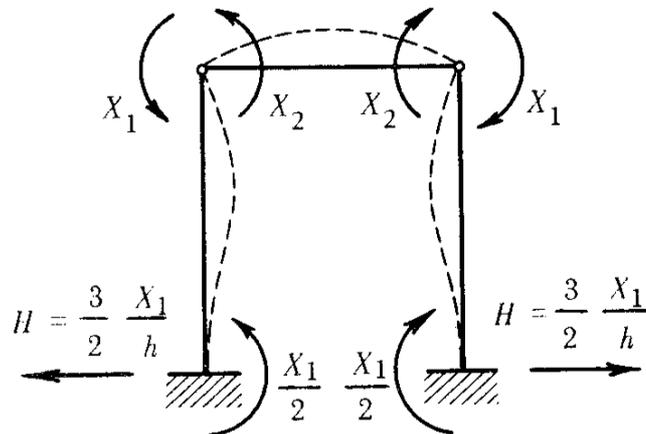


Fig. 23.3

Esprimendo la condizione d'equilibrio alla rotazione cui devono soddisfare  $X_1$  e  $X_2$ , ed esplicitando i termini dell'equazione di congruenza, si ha il sistema:

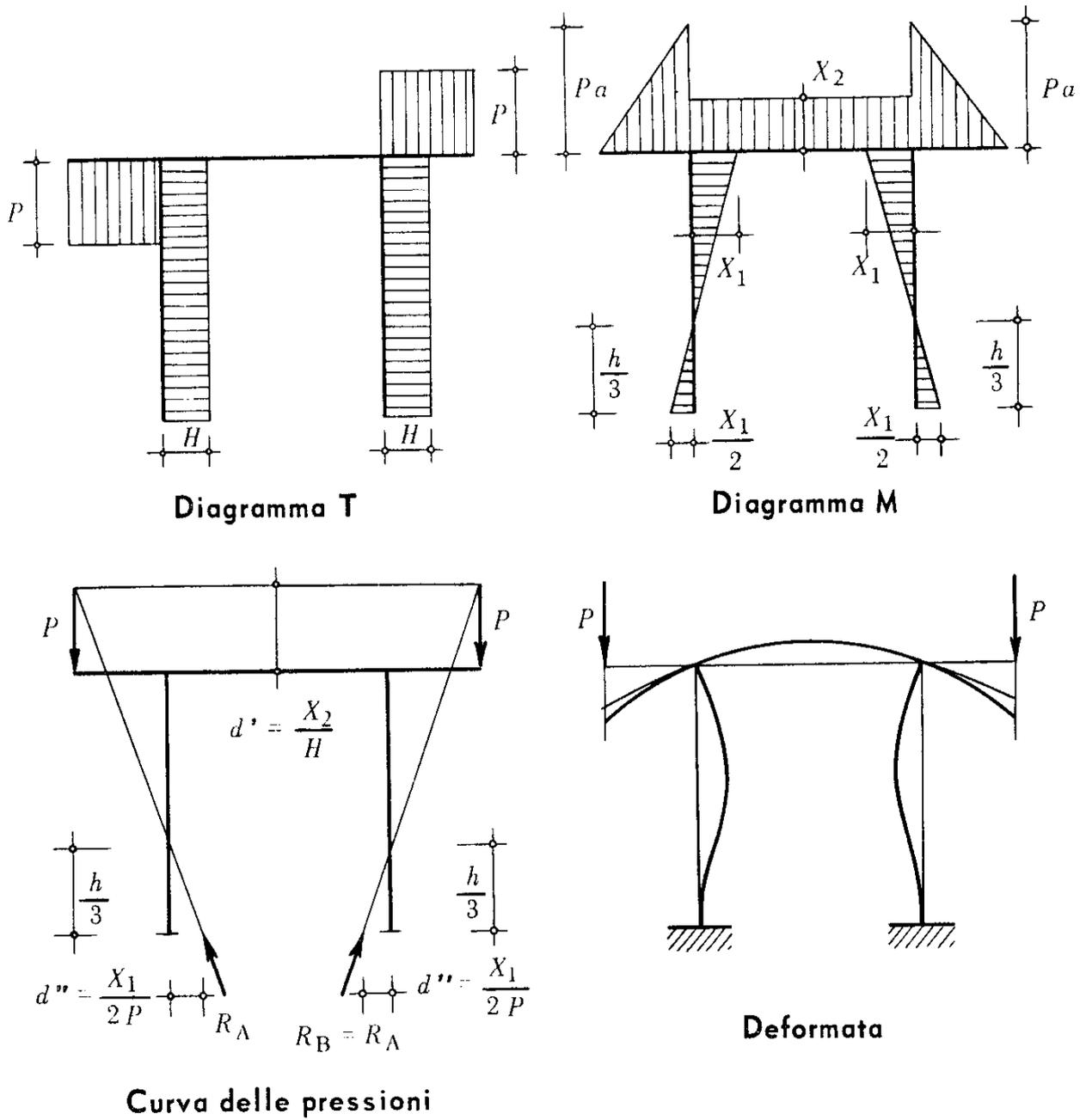


Fig. 23.4

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = Pa \\ \left( 2X_1 - \frac{X_1}{2} \right) \frac{h}{6EJ_p} = X_2 \frac{l}{2EJ_t} \end{cases}$$

Indicando con  $Z_t = \frac{2EJ_t}{l}$  e  $Z_p = \frac{4EJ_p}{h}$ , le rigidezze flessionali di piedritto e trave, si ottiene:

$$X_1 = Pa \frac{Z_t}{Z_t + Z_p} \quad X_2 = Pa \frac{Z_p}{Z_t + Z_p}$$

cioè la coppia esterna si ripartisce sui due elementi di struttura in parti proporzionali alle loro rigidezze flessionali (in accordo con quanto già esposto nell'es. 12).

Nella pagina precedente sono riportati i diagrammi  $T$  ed  $M$ , la curva delle pressioni e la deformata dell'intera struttura.

\*\*\*

**24. - Risolvere il portale a due cerniere dell'esercizio 22, soggetto ai carichi verticali  $P$ , applicati nei vertici  $C$  e  $D$  (fig. 24.1).**

Come nell'esercizio 22, si adotta un metodo risolutivo che sfrutti la simmetria della struttura e del carico, con l'avvertenza di tener conto,

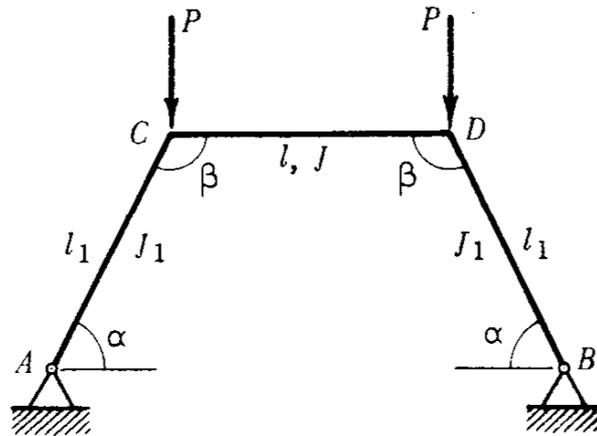


Fig. 24.1

in questo caso, anche della deformazione assiale. Infatti, se questa venisse trascurata, non varierebbe la lunghezza delle singole aste, e i vertici  $C$  e  $D$ , per ragioni di simmetria, non si sposterebbero. Sarebbe pertanto nullo il lavoro compiuto dalle forze esterne; di conseguenza risulterebbe anche  $L_i = 0$  e la struttura rimarrebbe indeformata.

Sopprimiamo la solidarietà angolare in  $C$  e  $D$  e assumiamo quale struttura principale il portale  $ACDB$  a quattro cerniere, labile ma equili-

brato, soggetto ai carichi esterni e alle coppie mutue  $M_C$  esplicitate dallo svincolamento (per ragioni di simmetria è  $M_C = M_D$ ; fig. 24.2).

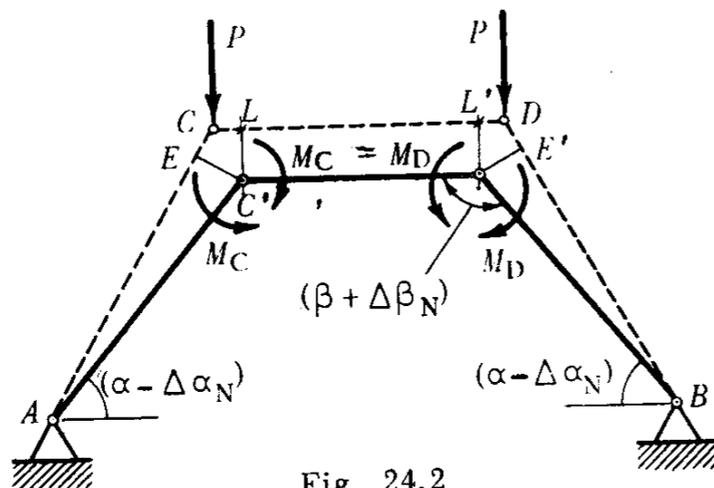


Fig. 24.2

La struttura principale è l'esatta funicolare dei carichi  $P$ ; in essa gli sforzi principali valgono:

**Asta CD:**

$$S = \frac{P}{\operatorname{tg} \alpha} \quad (\text{compressione})$$

**Aste AC e BD:**

$$S_1 = \frac{P}{\operatorname{sen} \alpha} \quad (\text{compressione}).$$

Valutiamo gli effetti della deformazione assiale:

**Accorciamento delle aste:**

$$\Delta l = 2(\overline{CL}) = \frac{Pl}{EA \operatorname{tg} \alpha}$$

$$\Delta l_1 = \overline{EC} = \frac{Pl_1}{EA_1 \operatorname{sen} \alpha}$$

**Spostamenti del nodo C:**

$$\xi_C = \frac{\Delta l}{2} = \frac{Pl}{2EA \operatorname{tg} \alpha}$$

$$\eta_C = \frac{\Delta l_1}{\operatorname{sen} \alpha} + \frac{\Delta l}{2 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{Pl_1}{2 EA_1 \operatorname{sen}^2 \alpha} + \frac{Pl}{2 EA \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

**Variazione dell'angolo  $\beta$ :**

$$\begin{aligned} |\Delta \beta_N| &= |\Delta \alpha_N| = \frac{\overline{EC'}}{l_1} = \frac{1}{l_1} \left( \frac{\Delta l_1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{\Delta l}{2 \operatorname{sen} \alpha} \right) = \\ &= \frac{1}{l_1} \left( \frac{Pl_1}{EA_1 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \alpha} + \frac{Pl}{2 EA \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \alpha} \right) = \\ &= \frac{P}{EA \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \alpha} \left( \frac{A}{A_1} + \frac{l}{2 l_1} \right). \end{aligned}$$

La solidarietà angolare in  $C$  è rispettata grazie all'azione delle coppie mutue. Queste hanno senz'altro il senso indicato in fig. 24.2, giacché l'angolo  $\beta$  aumenta per effetto della deformazione assiale della struttura.

La condizione di congruenza, in simboli, è:

$$\Delta \beta = 0$$

cioè:

$$\Delta \beta_N - \left( \frac{M_C l_1}{3 EJ_1} + \frac{M_C l}{2 EJ} \right) = 0.$$

Sostituendo e raccogliendo a fattor comune:

$$\frac{M_C l}{2 EJ} \left( 1 + \frac{2}{3} \frac{J}{J_1} \frac{l_1}{l} \right) = \frac{P}{EA \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \alpha} \left( \frac{A}{A_1} + \frac{l}{2 l_1} \right).$$

Si ottiene:

$$M_C = \frac{P}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{J}{A} \cdot \frac{\left( \frac{2A}{A_1} + \frac{l}{l_1} \right)}{l \left( 1 + \frac{2}{3} \frac{J}{J_1} \frac{l_1}{l} \right)}.$$

Le reazioni dei vincoli esterni valgono:

$$V = P \quad H = S - \frac{M_C}{l_1 \operatorname{sen} \alpha} = \frac{P}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{M_C}{l_1 \operatorname{sen} \alpha}.$$

Se il telaio ha sezione costante è  $A_1 = A$ ,  $J_1 = J$  e per  $M_C$  si ottiene l'espressione più semplice:

$$M_C = \frac{P}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \alpha} \frac{J}{A} \frac{\left(2 + \frac{l}{l_1}\right)}{l \left(1 + \frac{2}{3} \frac{l_1}{l}\right)}$$

Le coppie  $M_C$  provocano un leggero scostamento della curva delle pressioni all'esterno dell'asse geometrico (fig. 24.3). Basta infatti considerare il senso di  $M_C$  per comprendere come le fibre maggiormente compresse sono quelle esterne.

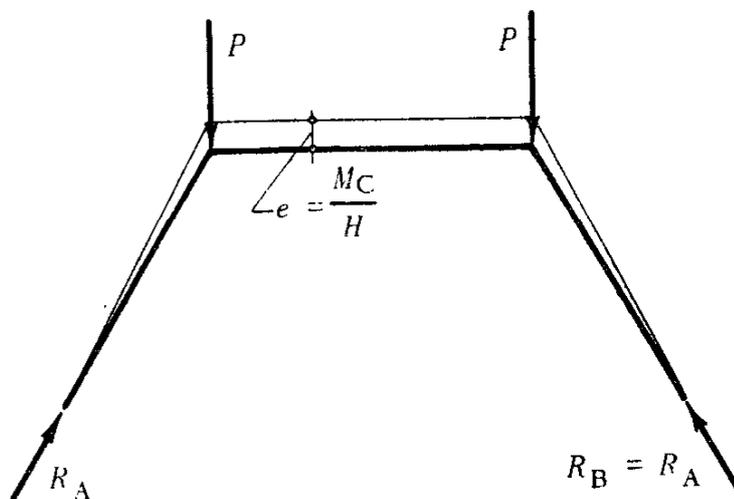


Fig. 24.3

L'eccentricità della curva delle pressioni è costante lungo tutta la trave  $CD$ , e vale:

$$e = \frac{M_C}{H}.$$

**RISOLUZIONE NUMERICA E CALCOLO DI RESISTENZA.**

Siano assegnate le dimensioni:

$$l = 4,00; \quad l_1 = 3,00 \text{ m}; \quad \alpha = 45^\circ.$$

Sia, inoltre:

$$P = 10\,000 \text{ kg.}$$

Si voglia realizzare il telaio in cemento armato. Procediamo anzitutto ad un dimensionamento di massima della struttura progettandola per gli sforzi principali.

È

$$S = 10\,000 \text{ kg} \quad S_1 = 14\,140 \text{ kg.}$$

Assumiamo  $K_C = 45 \text{ kg/cm}^2$ .

Fissiamo le dimensioni della sezione con una certa abbondanza in modo da contenere entro il carico di sicurezza la tensione finale che risente sia della snellezza delle aste, sia degli effetti flessionali.

Si adotti pertanto una sezione quadrata di lato 20 cm e armata con 4  $\phi$  12 dritti.

**Caratteristiche della sezione in cemento armato:**

$$A = 400 + 45,2 \cong 445 \text{ cm}^2$$

$$J = \frac{20^4}{12} + 45,2 \cdot 8^2 \cong 16\,200 \text{ cm}^4$$

$$W = \frac{J}{10} = 1620 \text{ cm}^3$$

$$\rho^2 = \frac{J}{A} = 36,5 \text{ cm}^2.$$

(Poiché l'area di ferro è inferiore al 2 % di quella di calcestruzzo si sarebbe potuto trascurarne il contributo, a norma di regolamento, nel calcolo di  $J$ ).

Si ottiene:

$$M_C = \frac{10\,000}{0,707 \cdot 1} \cdot \frac{36,5}{400} \cdot \frac{(2 + 1,33)}{\left(1 + \frac{2}{3} \cdot 0,75\right)} \cong 2870 \text{ kg cm.}$$

Le reazioni dei vincoli valgono:

$$V = 10\,000 \text{ kg} \quad H = \frac{P}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{M_C}{l_1 \operatorname{sen} \alpha} = 10\,000 - \frac{2870}{0,707 \cdot 300} = 9986 \text{ kg}$$

(cioè appena 14 kg in meno rispetto al valore che si ha nella struttura principale soggetta a solo sforzo normale!).

La sezione più sollecitata del piedritto è quella di sommità: È:

$$\sigma_{\max} = \frac{\omega_1 S_1}{A} + \frac{M_C}{W} = 1,25 \frac{14\,140}{445} + \frac{2870}{1620} = 42 \text{ kg/cm}^2.$$

Nella trave *CD* tutte le sezioni sono egualmente sollecitate. È:

$$\sigma_{\max} = \frac{\omega S}{A} + \frac{M_C}{W} = 1,95 \frac{10\,000}{445} + \frac{2870}{1620} = 46 \text{ kg/cm}^2.$$

(I valori del coefficiente  $\omega$  figurano in apposite tabelle, ove sono espressi in funzione del rapporto di snellezza  $\lambda = \frac{l_0}{\rho_{\min}}$ ).

Si noti che, pur non valendo nel cemento armato il principio di sovrapposizione degli effetti, è stato egualmente possibile in questo caso applicare la formula binomia per il calcolo della  $\sigma_{C_{\max}}$ . Grazie infatti alla piccolissima eccentricità della risultante delle azioni interne la sezione è tutta reagente, e le  $\sigma$  dovute alla flessione costituiscono solo una piccola variazione (in aumento o in diminuzione) di quelle molto maggiori di compressione generate dallo sforzo normale.

Nella trave *CD* è:

$$e = \frac{M_C}{H} \cong 0,3 \text{ cm.}$$

*OSSERVAZIONI.* - Nei casi simili al presente esercizio in cui la curva delle pressioni si discosta pochissimo dall'asse geometrico, il calcolo iniziale di progetto, eseguito a sforzo normale semplice per la struttura principale, funicolare del carico, costituisce già un dimensionamento di ottima approssimazione.

Il calcolo successivo non è altro che una verifica della variazione, in genere molto piccola, apportata dalle azioni flessionali al regime statico precedente.

\*\*\*

25. - Risolvere il portale simmetrico incastrato di fig. 25.1, soggetto alle due forze  $P$  orizzontali applicate nei nodi  $C$  e  $D$ .

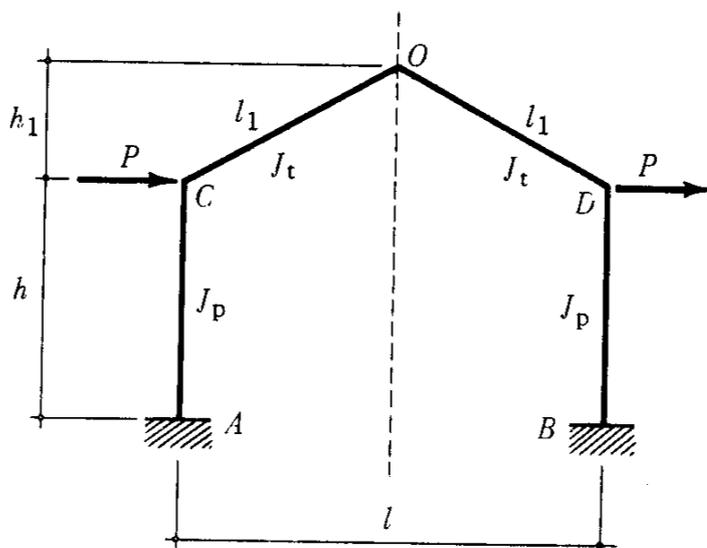


Fig. 25.1

La struttura è tre volte iperstatica; tuttavia l'antisimmetria del carico rispetto all'asse mediano verticale, riduce ad uno il grado di indeterminazione.

Infatti le proprietà dell'antisimmetria si estendono dai carichi esterni al regime statico interno: sezioni simmetriche sono soggette ad azioni interne eguali ma di segno opposto, e, quale conseguenza di ciò, la curva delle pressioni e la deformata della struttura risultano antisimmetriche.

In particolare nella sezione  $O$  è:

azioni mutue:	$V \neq 0$	$H = 0$	$M = 0$
spostamenti:	$\eta = 0$	$\xi \neq 0$	$\varphi \neq 0$

Da notare che l'azione mutua antisimmetrica in  $O$  è verticale, e provoca nelle aste  $CO$  e  $DO$  sia sforzo di taglio che sforzo normale, a causa della loro inclinazione e della cuspide che la struttura forma sull'asse di simmetria.

In base a queste considerazioni e per la lecita trascurabilità della deformazione assiale in confronto a quella provocata dal momento flettente (la curva delle pressioni è, all'evidenza, una trilatera e si discosta sensibilmente dall'asse geometrico), si può limitare lo studio a metà struttura e schematizzare il comportamento della sezione  $O$  vincolandola con un carrello a piano di scorrimento orizzontale (fig. 25.2).

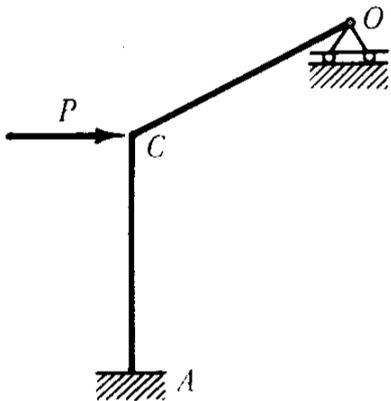


Fig. 25.2

Risulta così confermato che il portale è una sola volta staticamente indeterminato, come discende dal fatto che in  $O$  esiste solo l'azione mutua verticale, e come mette in evidenza la struttura equivalente  $ACO$ , ad incastro e carrello, una volta iperstatica.

Volendo risolvere il problema con metodo cinematico, si può svincolare completamente in  $O$ , e assumere quale struttura principale la mensola  $ACO$ , soggetta al carico  $P$  e all'azione mutua incognita  $V$  (fig. 25.3).

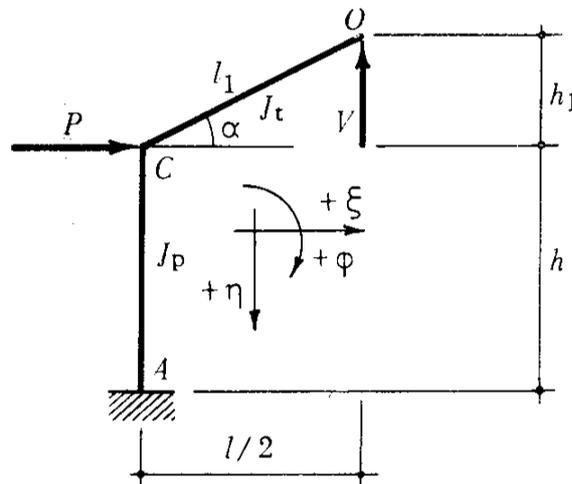


Fig. 25.3

La condizione di congruenza, in simboli è:

$$\eta_0 = 0.$$

Ossia:

$$\eta_0 = \varphi_C \frac{l}{2} + \eta_{0,C} = 0.$$

$V$  è senz'altro diretta verso l'alto per poter annullare lo spostamento di  $O$  verso il basso provocato da  $P$ . Esplicitando i vari termini, con i sensi positivi indicati in fig. 25.3, si ha:

$$\left( \frac{Ph^2}{2EJ_p} - \frac{\left(V \frac{l}{2}\right)h}{EJ_p} \right) \frac{l}{2} - \frac{(V \cos \alpha)l^3}{3EJ_t} \cos \alpha = 0$$

da cui:

$$V = P \frac{h}{l} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{J_p}{J_t} \cdot \frac{l}{h \cos \alpha}\right)}$$

La fig. 25.4 pone in evidenza l'equilibrio della struttura completamente svincolata.

In particolare è:

$$M_A = Ph - V \frac{l}{2} = Ph \left[ 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{6} \frac{J_p}{J_t} \cdot \frac{l}{h \cos \alpha}\right)} \right].$$

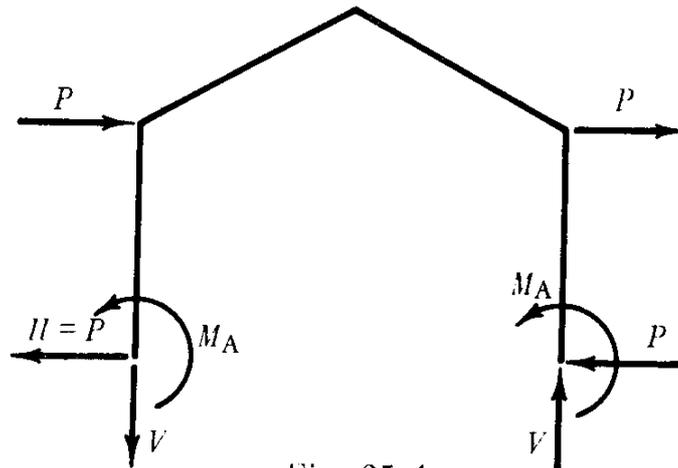
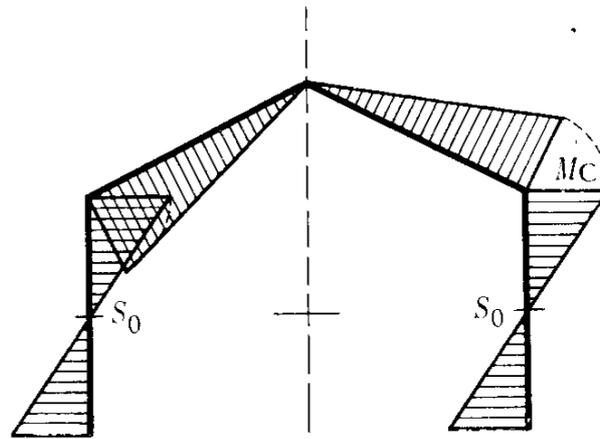


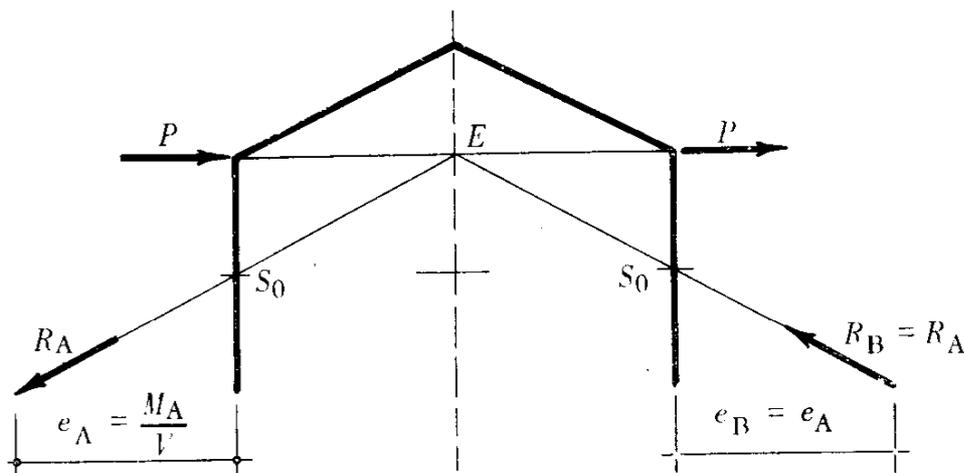
Fig. 25.4

Si riporta in fig. 25.5 l'andamento qualitativo del diagramma del momento flettente e la curva delle pressioni.



**Diagramma M**

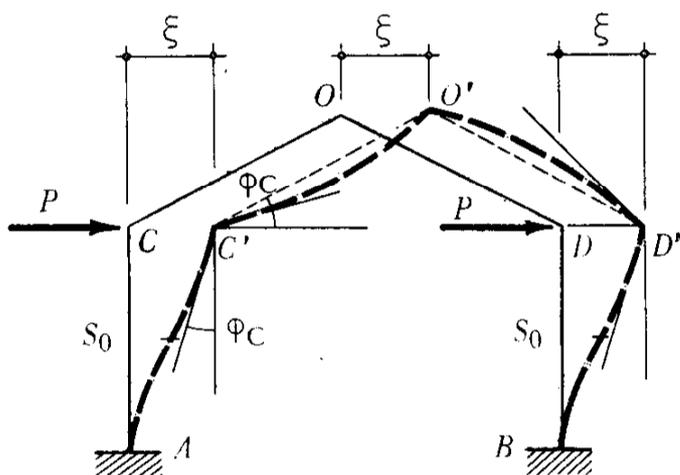
(ordinate del momento portate dalla parte delle fibre tese)



**Curva delle pressioni**

Fig. 25.5

La reazione  $R$  dell'incastro incontra la forza  $P$  nel punto  $E$ , sull'asse di antisimmetria; al variare del rapporto di rigidità flessionale tra le due aste  $AC$  e  $CO$  si modifica la  $R$  senza che però si sposti il punto d'incontro delle due forze: la  $R$  ruota intorno ad  $E$  e mantiene costante il valore della propria componente orizzontale ( $H = P$ ).



**Deformata della struttura**

Fig. 25,6

Per quanto riguarda la deformata della struttura (fig. 25.6) si può osservare che è:

$$\begin{aligned} \xi_C = \xi_O = \xi_D &= \frac{Ph^3}{3EJ_p} - \frac{\left(V \frac{l}{2}\right) h^2}{2EJ_p} = \\ &= \frac{Ph^3}{3EJ_p} \left[ 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{J_p}{J_t} \cdot \frac{l}{h \cos \alpha}\right)} \right] \end{aligned}$$

Ed inoltre:

$$\varphi_O = \frac{1}{2} \varphi_C$$

perché l'asta  $CO$  si comporta come una trave appoggiata soggetta alla coppia  $M_C$  al suo estremo  $C$ .