

* * *

10. - Risolvere la trave continua ad asse rettilineo di fig. 10.1, avente una cerniera interna D e soggetta a carico uniforme sulle due prime campate.

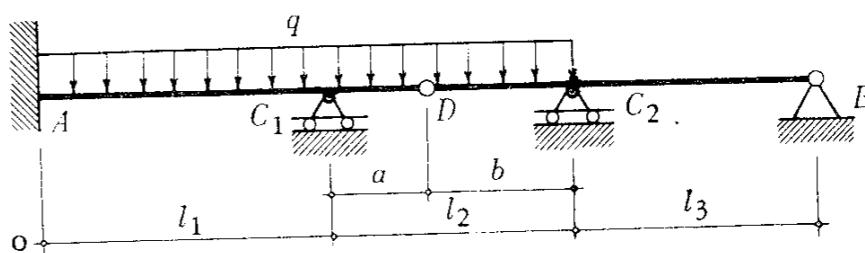


Fig. 10.1

La struttura è tre volte iperstatica, due sole volte staticamente indeterminata (mancano le azioni orizzontali). Si può considerare direttamente derivata dalla struttura dell'esercizio precedente mediante l'introduzione della cerniera interna D che fa diminuire di un grado l'iperstaticità del sistema.

Si può applicare il procedimento dell'esercizio precedente con l'avvertenza di introdurre una cerniera in corrispondenza della sola sezione C_1 , e assumere la struttura principale costituita dalla trave AC_1 ad incastro e appoggio (una volta iperstatica ma staticamente nota), e dalla trave Gerber C_1C_2B , a due campate, soggette entrambe ai carichi esterni assegnati e alla coppia mutua M_1 incognita, avente il compito di assicurare il rispetto della solidarietà angolare in C_1 (fig. 10.2).

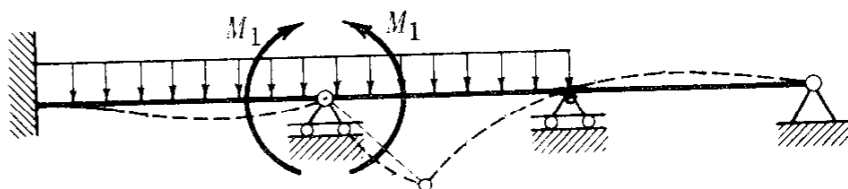


Fig. 10.2

Però l'espressione della rotazione $\varphi_{C_1 \text{ des.}}$ è influenzata anche dall'abbassamento del punto D ; ci si rende allora conto come conviene piuttosto considerare la struttura analoga ad una Gerber e operare su di essa uno svincolamento del tipo di quelli che normalmente si adottano nella risoluzione di queste travi isostatiche. Anziché equazioni di equilibrio si deve ora stendere una equazione di natura elastica per soddisfare la congruenza del sistema.

Si seziona in D spezzando la struttura in due parti (fig. 10.3); la struttura principale è costituita dalla trave isostatica BC_2D'' , ad una campata con sbalzo, e dalla trave AC_1D' ad incastro-appoggio e sbalzo, una volta iperstatica ma staticamente nota.

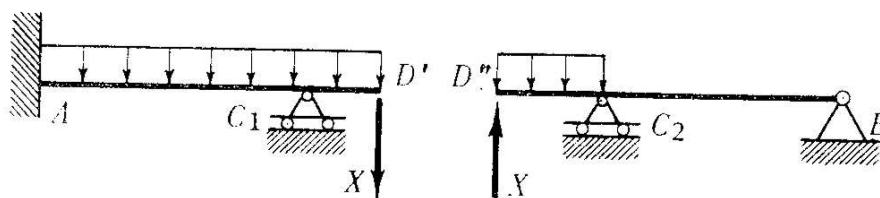


Fig. 10.3

Per effetto della deformazione flessionale indotta dai soli carichi esterni i punti D' e D'' subiscono nelle due travi spostamenti verticali diversi; la reazione verticale mutua X ha il compito di imporre alla struttura principale il rispetto del vincolo soppresso.

La condizione di congruenza che determina X è pertanto:

$$\eta_{D'} = \eta_{D''}$$

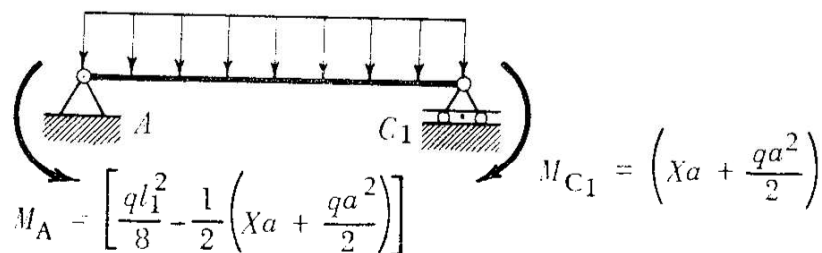


Fig. 10.4

La trave AC_1 è staticamente nota in funzione della sola incognita X .

Simbolicamente l'equazione di congruenza si può scrivere:

$$\varphi_{C_1} \cdot a + \eta_{D'C_1} = \varphi_{C_2} \cdot b + \eta_{D''C_2}.$$

Esplicitando i vari termini (positivi gli spostamenti verso il basso), nell'ipotesi di $I = \text{costante}$, si ha:

$$\left\{ \frac{l_1}{6 EJ} \left[2 \left(Xa + \frac{qa^2}{2} \right) + \left(\frac{ql_1^2}{8} - \frac{1}{2} \left(Xa + \frac{qa^2}{2} \right) \right) \right] - \frac{ql_1^3}{24 EJ} \right\} a + \frac{qa^4}{8 EJ} + \frac{Xa^3}{3 EJ} = \left[\left(\frac{qb^2}{2} - Xb \right) \frac{l_3}{3 EJ} \right] b + \frac{qb^4}{8 EJ} - \frac{Xb^3}{3 EJ}.$$

Moltiplicando per EJ e risolvendo rispetto ad X si ottiene:

$$X = \frac{q}{4} \cdot \frac{[l_1 a (l_1^2 + 6a^2) + b^3 (8l_3 + 6b) - 6a^4]}{[a^3 (3l_1 + 4a) + 4b^2 (l_3 + b)]}.$$

È ora possibile calcolare, mediante equazioni di equilibrio, le reazioni degli altri vincoli, e il taglio immediatamente prima e dopo gli appoggi (fig. 10.5).

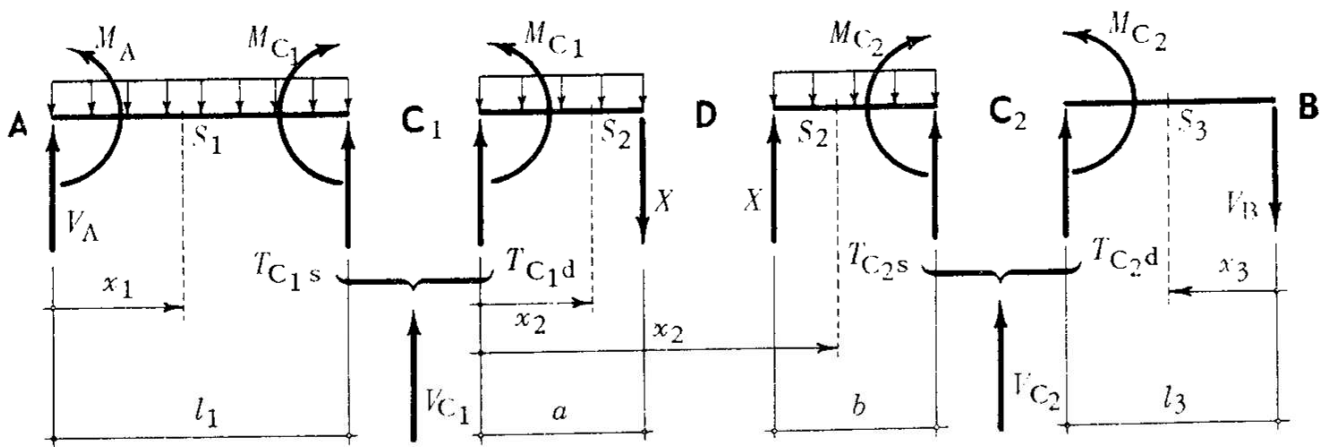


Fig. 10.5

Equilibrio alla rotazione attorno a C_2 della trave $D''C_2B$:

$$\Sigma M_{(C_2)} = 0 \quad Xb - \frac{qb^2}{2} + V_B \cdot l_3 = 0 \quad V_B = \frac{1}{l_3} \left(\frac{qb^2}{2} - Xb \right).$$

Equilibrio alla traslazione verticale della trave $D''C_2B$:

$$\Sigma Y = 0 \quad X - qb - V_B + V_{C_2} = 0 \quad V_{C_2} = qb + V_B - X.$$

Con le condizioni di carico assegnate risulta inoltre:

$$T_{C_2 \text{ des.}} = V_B \quad T_{C_2 \text{ sin.}} = (X - qb) = -(V_{C_2} - T_{C_2 \text{ des.}}).$$

Equilibrio alla rotazione attorno a C_1 della trave AC_1D' :

$$\Sigma M_{(C_1)} = 0 \quad V_A \cdot l_1 - \frac{ql_1^2}{2} - (M_A - M_{C_1}) = 0 \quad V_A = \frac{ql_1}{2} + \frac{M_A - M_{C_1}}{l_1}.$$

Equilibrio alla traslazione verticale della trave AC_1D' :

$$\Sigma Y = 0 \quad V_{C_1} + V_A - [q(l_1 + a) + X] = 0 \quad V_{C_1} = [q(l_1 + a) + X - V_A]$$

Con le condizioni di carico assegnate risulta inoltre:

$$T_{C_1 \text{ des.}} = qa + X \quad T_{C_1 \text{ sin.}} = V_A - ql_1 = -(V_{C_1} - T_{C_1 \text{ des.}}).$$

RISOLUZIONE NUMERICA E CALCOLO DI RESISTENZA.

Si abbia:

$$\begin{array}{lll} l_1 = 6,00 \text{ m}; & l_2 = l_3 = 5,00 \text{ m}; & a = 2,00 \text{ m.} \\ b = 3,00 \text{ m}; & q = 2000 \text{ kg/m}; & J = \text{costante.} \end{array}$$

Si ottiene:

$$\begin{array}{lll}
X & = & 1780 \text{ kg} \\
V_{C_1} & = & 12170 \text{ «} \\
V_{C_2} & = & 4950 \text{ «} \\
M_A & = & 5220 \text{ kgm}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
V_A & = & 5610 \text{ kg} \\
T_{C_1s} & = & 6390 \text{ «} \\
T_{C_2s} & = & 4220 \text{ «} \\
M_{C_1} & = & 7560 \text{ kgm}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
V_B & = & 730 \text{ kg} \\
T_{C_1d} & = & 5780 \text{ «} \\
T_{C_2d} & = & 730 \text{ «} \\
M_{C_2} & = & 3660 \text{ kgm.}
\end{array}$$

Tutte le reazioni risultano dai calcoli in accordo con il senso indicato nel disegno.

- Campata AC_1 : in corrispondenza della sezione di ascissa:

$$x = \frac{V_A}{q} = 2,805 \text{ m} \quad \text{è} \quad T = 0 \quad \text{e} \quad M_{\max} = 2550 \text{ kgm.}$$

Inoltre:

$$M(x) = -\frac{qx^2}{2} + V_A x - M_A = 0$$

per

$$x = 1,12 \text{ m} \quad \text{e} \quad x = 4,49 \text{ m (flessi).}$$

- Campata C_1C_2 : in corrispondenza della sezione di ascissa:

$$x = \frac{T_{C_1d}}{q} = 2,90 \text{ m} \quad \text{è} \quad T = 0 \quad \text{e} \quad M_{\max} = 800 \text{ kgm.}$$

Inoltre:

$$M(x) = -\frac{qx^2}{2} + T_{C_1d} \cdot x + M_{C_1} = 0$$

per

$$x = 2,00 \text{ m} \quad \text{e} \quad x = 3,78 \text{ m.}$$

La prima radice corrisponde alla ascissa della cerniera D : le due facce D' e D'' possono ruotare relativamente e la deformata presenta una cuspidè; la seconda radice di x corrisponde ad un punto di flesso della deformata.

Per il calcolo di resistenza valgono le considerazioni svolte nell'esercizio 7. Adottando un profilato a IPN con $K_F = 1600 \text{ kg/cm}^2$, nella sezione più sollecitata, che è quella sull'appoggio C_1 , ($|M_{C_1}| = |M_{\max}| = 7560 \text{ kgm}$), si ha:

$$W = \frac{M_{C_1}}{K_F} = \frac{756000}{1600} = 473 \text{ cm}^3.$$

Il profilato IPN 28 ha le seguenti caratteristiche:

$$A = 61,0 \text{ cm}^2; \quad J = 7587 \text{ cm}^4; \quad W = 542 \text{ cm}^3$$

e soddisfa le condizioni di resistenza richieste.

DIAGRAMMI DELLE AZIONI INTERNE.

Diagramma T. - Il diagramma del taglio (fig.10.6) ha andamento lineare nelle campate AC_1 e C_1C_2 ed è costituito da due rette parallele perché il carico q ha sempre lo stesso valore. Nella campata C_2B il taglio è costante.

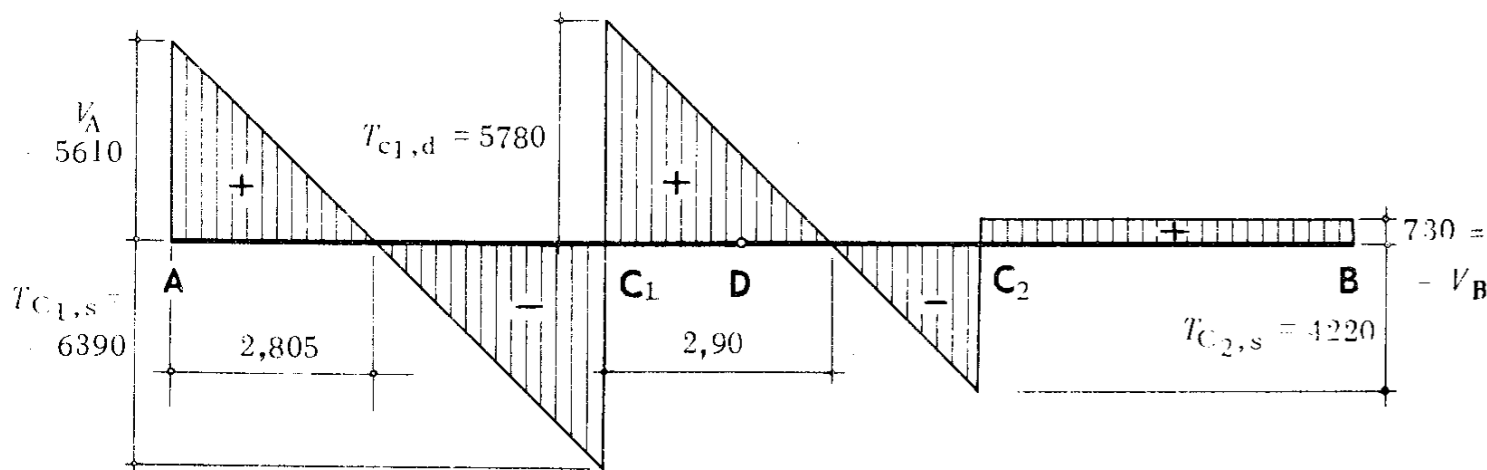


Fig. 10.6

Diagramma M. - Il diagramma del momento (fig.10.7) ha andamento parabolico nelle campate AC_1 e C_1C_2 e lineare nella campata C_2B . Sono

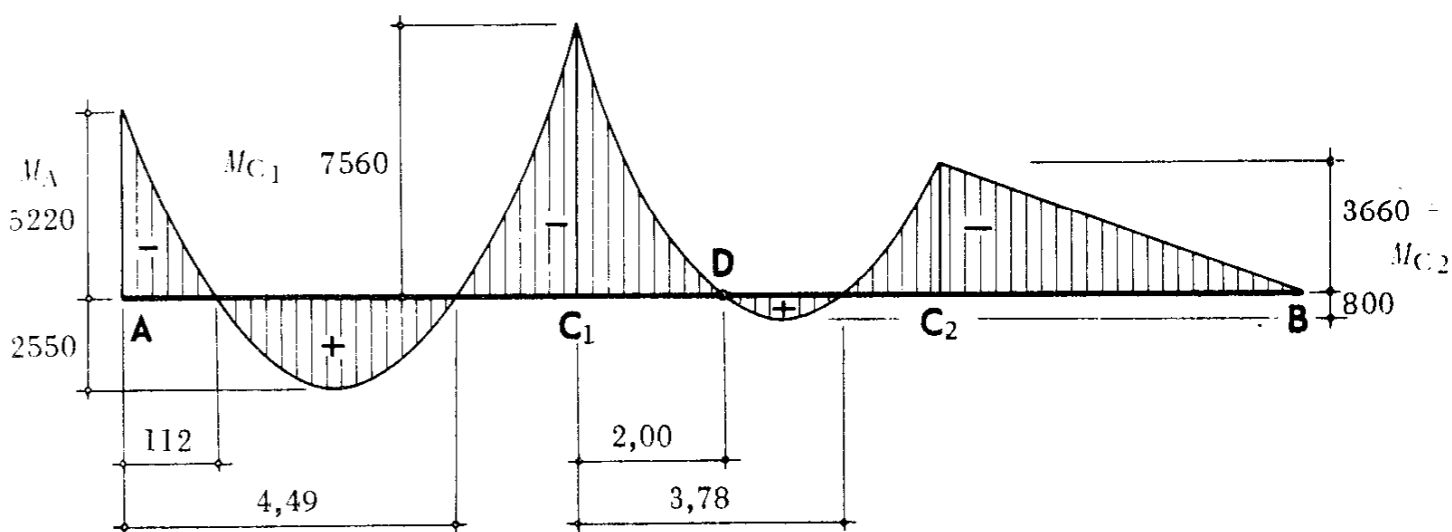


Fig. 10.7

indicati anche i punti di momento nullo e momento massimo positivo.

CONSIDERAZIONI SULLA LINEA ELASTICA.

La rotazione φ_{C_1} della sezione sull'appoggio C_1 risulta (positive le rotazioni in senso orario):

$$\begin{aligned}\varphi_{C_1} &= \left(\chi a + \frac{qa^2}{2} \right) \frac{l_1}{4 EJ} - \frac{ql_1^3}{48 EJ} = \\ &= \frac{1}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 7587} \left[(1780 \cdot 200 + \frac{20}{2} 200^2) \frac{600}{4} - \frac{20 \cdot 600^3}{48} \right] = \\ &= 1,47 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}\end{aligned}$$

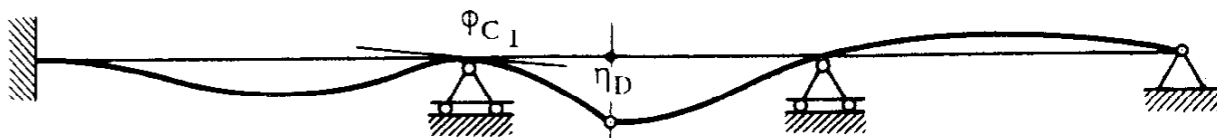


Fig. 10.8

Abbassamento della cerniera D :

$$\begin{aligned}\eta_D &= \left[\left(\frac{qb^2}{2} - \chi b \right) \frac{l_3}{3 EJ} \right] b + \frac{qb^4}{8 EJ} - \frac{\chi b^3}{3 EJ} = \\ &= \frac{1}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 7587} \left\{ \left[\left(\frac{20}{2} 300^2 - 1780 \cdot 300 \right) \frac{500}{3} \right] 300 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{20}{8} 300^4 - \frac{1780}{3} 300^3 \right\} = 1,41 \text{ cm.}\end{aligned}$$

Rotazione relativa delle facce D' e D'' (positive le rotazioni orarie):

$$\begin{aligned}\varphi_{D'D''} &= \varphi_{D'} - \varphi_{D''} = \left(\varphi_{C1} + \frac{qa^3}{6 EJ} + \frac{\chi a^2}{2 EJ} \right) - \left(\varphi_{C2} - \frac{qb^3}{6 EJ} + \frac{\chi b^2}{2 EJ} \right) = \\ &= [5,38 - (-1,31)] \cdot 10^{-3} = 6,69 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}\end{aligned}$$

* * *

11. - Risolvere la trave ACB ad asse rettilineo spezzato vincolata agli estremi con due cerniere fisse e soggetta su tutta l'asta CB a carico uniforme normale all'asse (fig. 11.1).

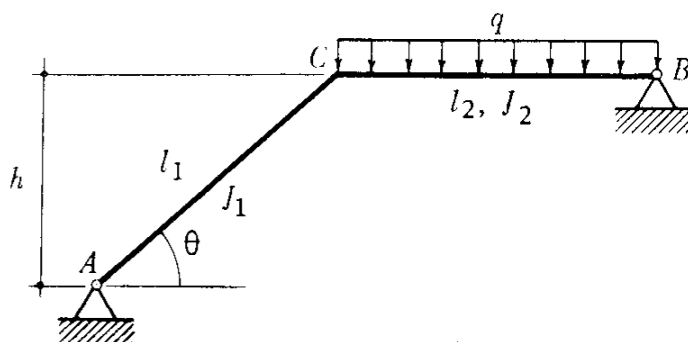


Fig. 11.1

La struttura è una volta iperstatica e una volta staticamente indeterminata,

Si può anzitutto osservare come l'unico caso in cui l'asse geometrico della trave ACB è una possibile funicolare dei carichi applicati, o si approssima molto ad essa, è costituito da una forza concentrata P , agente direttamente sul vertice C o nel suo intorno immediato. Per tutte le altre condizioni di carico cui può essere soggetto questo tipo di struttura (1 carico concentrato in un punto qualunque delle due travi, ma sufficientemente lontano da C ; più carichi concentrati; carichi distribuiti qualsiasi o coppie) la curva delle pressioni si discosta sempre in maniera sostanziale dall'asse geometrico, e quindi, nella risoluzione del problema iperstatico, è sempre lecito trascurare la deformazione dovuta allo sforzo normale in confronto a quella provocata dal momento flettente. Ne segue che non allungandosi o accorciandosi le aste AC e CB , il nodo C non si sposta e la trave ad asse spezzato si comporta, agli effetti della linea elastica, come una trave continua su tre appoggi fissi. (Infatti C per rispettare l'invariabilità assiale di un'asta si dovrebbe spostare normalmente alla direzione di questa, in contrasto con l'invariabilità assiale della seconda asta). Partendo da questa considerazione e volendo risolvere il problema con metodo cinematico, si può sopprimere la solidarietà angolare in C e assumere come struttura principale la struttura a tre cerniere A, C, B nella quale le due campate AC e CB si comportano come travi semplici su appoggi rigidi (fig. 11.2).

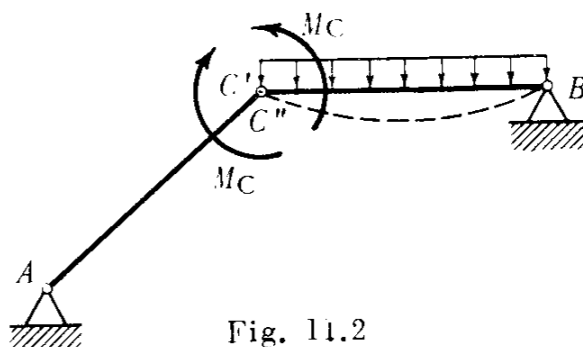


Fig. 11.2

Per effetto del carico esterno q , agente sulla campata BC , la struttura principale si deformerebbe come tratteggiato in figura; è compito delle azioni interne mutue M_C , esplicitate dallo svincolamento, assicurare il rispetto della solidarietà materiale in C . Le coppie M_C hanno il

senso rotatorio prevedibile di figura, in modo da riaprire l'angolo, che l'azione del carico q tende a rinchiudere.

La condizione di congruenza (invariabilità dell'angolo in C) si esprime imponendo l'eguaglianza delle rotazioni assolute delle facce C' e C'' all'attacco con la cerniera.

In simboli:

$$\varphi_{C'} = \varphi_{C''}$$

Esplicitando i vari termini e assumendo positive le rotazioni orarie:

$$\frac{M_C l_1}{3 E J_1} = \frac{Q l_2^2}{24 E J_2} - \frac{M_C l_2}{3 E J_2}.$$

Si ottiene:

$$M_C = \frac{Q l_2}{8 \left(1 + \frac{K_2}{K_1} \right)} \quad \text{avendo posto} \quad \begin{cases} K_1 = \frac{J_1}{J_2} \\ K_2 = \frac{l_1}{l_2} \end{cases}$$

Si può anzitutto osservare come il valore di M_C non dipende dall'angolo formato dalle due aste, ma solamente dalla loro lunghezza e dal momento d'inerzia della loro sezione trasversale, oltre che dal tipo di carico applicato.

Si possono ora determinare le reazioni delle cerniere esterne mediante equazioni d'equilibrio, calcolandole sia per mezzo delle componenti H e V , orizzontali e verticali, sia, direttamente, valendosi delle azioni interne N e T (per la cerniera B i due modi coincidono (fig. 11.3).

Lo svincolamento adottato equivale all'uso di due travi appoggiate. La soluzione iperstatica permette di calcolare subito T_A e T_B :

Equilibrio alla rotazione dell'asta AC attorno a C :

$$-T_A \cdot l_1 + M_C = 0 \quad T_A = \frac{M_C}{l_1}$$

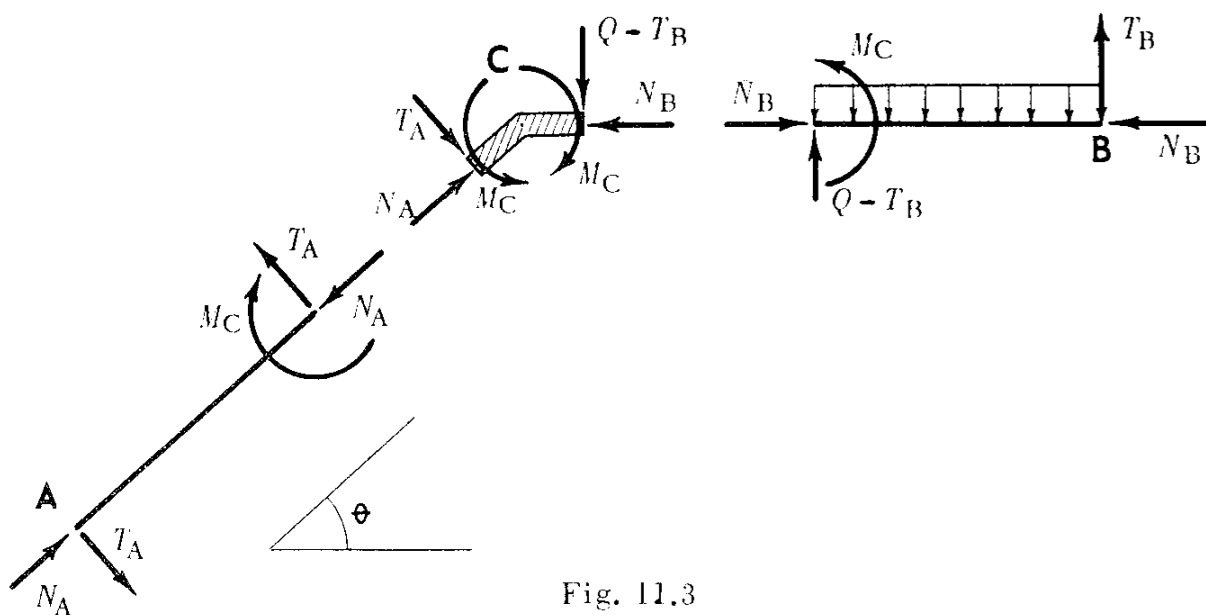


Fig. 11.3

Equilibrio alla rotazione dell'asta CB attorno a C :

$$T_B \cdot l_2 - \frac{Q l_2}{2} + M_C = 0 \quad T_B = \frac{Q}{2} - \frac{M_C}{l_2}.$$

Gli sforzi normali si ottengono dall'equilibrio generale della struttura, oppure isolando l'intorno del nodo C e imponendo per esso le condizioni d'equilibrio:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0 & V_A \cos \theta + T_A \sin \theta - N_B &= 0 \\ \sum Y &= 0 & N_A \sin \theta - T_A \cos \theta - (Q - T_B) &= 0. \end{aligned}$$

Si ottiene:

$$\begin{aligned} N_A &= \left[\frac{Q}{2} + M_C \left(\frac{\cos \theta}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) \right] \frac{1}{\sin \theta} \\ N_B &= \left[\frac{Q}{2} + M_C \left(\frac{\operatorname{tg} \theta (\sin \theta + \cos \theta)}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) \right] \frac{1}{\operatorname{tg} \theta}. \end{aligned}$$

RISOLUZIONE NUMERICA.

Siano assegnati

$$l_1 = 7,00 \text{ m}; \quad l_2 = 5,00 \text{ m}; \quad \theta = 45^\circ; \quad q = 2000 \text{ kg/m}.$$

Eseguendo i calcoli si ottiene

$$\begin{aligned} W_C &= 2600 \text{ kgm} \\ T_A &= 370 \text{ kg} & N_A &= 8170 \text{ kg} \\ T_B &= 4480 \text{ «} & N_B &= 6040 \text{ «} . \end{aligned}$$

Nella campata BC si ha:

$$\text{per } x = \frac{T_B}{q} = 2,24 \text{ m} \quad T = 0$$

$$M = M_{\max \text{ pos.}} = \frac{T_B^2}{2q} = 5030 \text{ kgm}.$$

Inoltre dall'espressione del momento per le sezioni della campata BC :

$$M = T_B x - \frac{q x^2}{2}$$

risulta:

$$M = 0 \quad \text{per } x = 0 \quad (\text{cerniera } B)$$

$$\text{e per } x = 2 \frac{T_B}{q} = 4,48 \text{ m} \quad (\text{punto di flesso}).$$

DIAGRAMMI DELLE AZIONI INTERNE.

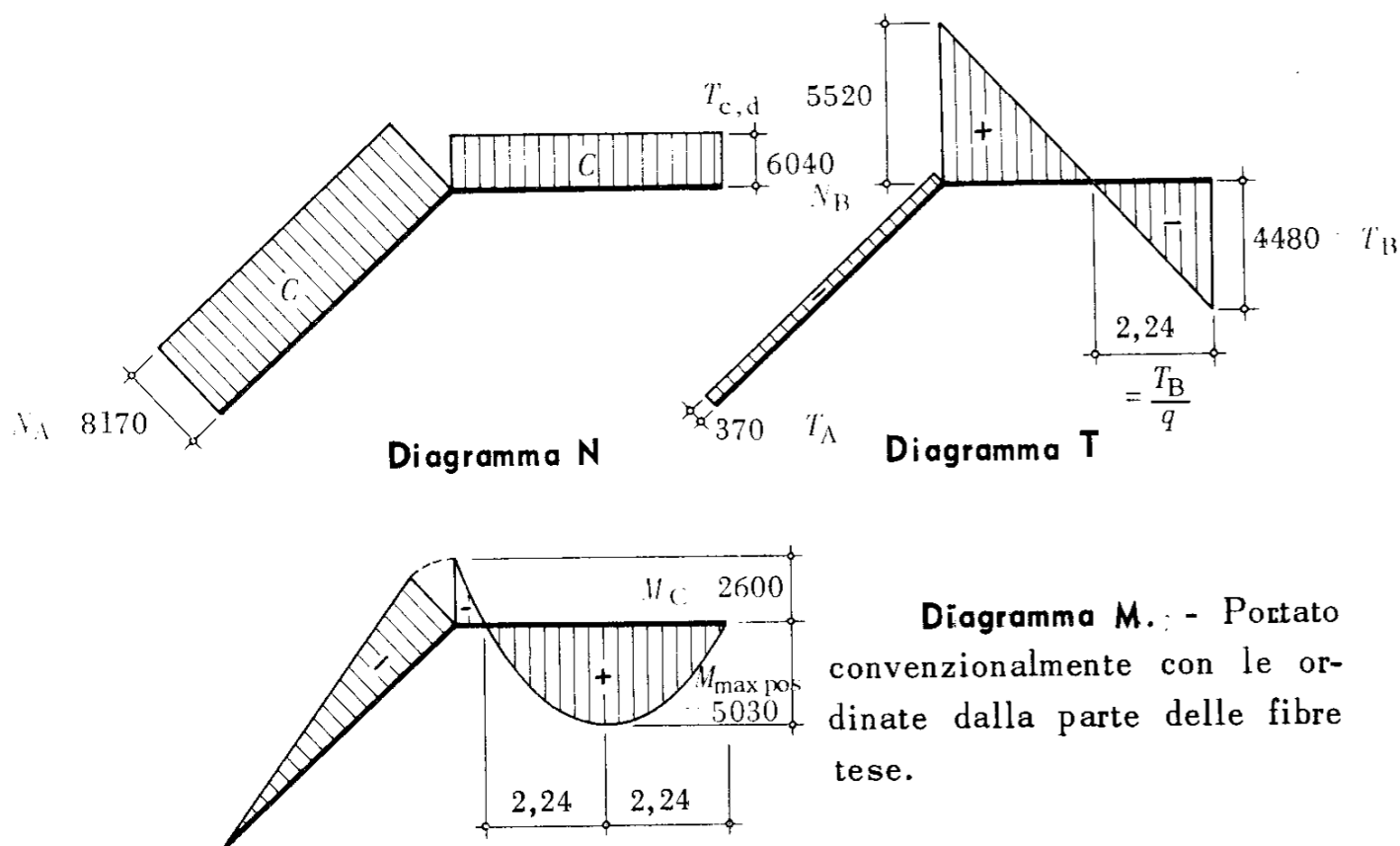


Fig. 11.4

CURVA DELLE PRESSIONI.

La curva delle pressioni (fig.11.5) è, all'evidenza, per il tratto BC un arco di parabola avente per tangenti nei punti estremi B e C^* (sulla verticale per C) le rette d'azione delle reazioni delle cerniere.

Per il tratto AC la curva delle pressioni è la stessa retta d'azione della R_A .

Inclinazione della R_A rispetto all'asse geometrico:

$$\operatorname{tg} \omega_A = \frac{T_A}{N_A} = 0,045 \quad \omega_A \cong 2^\circ 30'$$

CALCOLO DI RESISTENZA.

Avendo assunto EJ costante per tutta la struttura, l'incognita iperstatica M_C è funzione solo del carico e delle caratteristiche geometriche della struttura. La si può pertanto determinare senza avere preventivamente fissato le dimensioni della sezione.

Tuttavia considerando i valori numerici ottenuti, e osservando le caratteristiche della curva delle pressioni, ci si rende conto di trovarsi in un caso di pressoflessione in cui l'influenza dello sforzo normale non è trascurabile nel calcolo delle tensioni.

Supposto allora di volere adottare per la struttura un profilato normale a I PN e assunto per il ferro $K_F = 1600 \text{ kg/cm}^2$, si progetta dapprima di tentativo la sezione a flessione semplice:

$$W = \frac{M}{\sigma_F}$$

con $\sigma_F < K_F$, e si verifica poi a pressoflessione la sezione del profilato così calcolato.

Nel nostro caso assunto $\sigma_F = 1400 \text{ kg/cm}^2$ si ha per la sezione soggetta al $M_{\max \text{ pos.}}$ (che è la più sollecitata)

$$W = \frac{503\,000}{1400} = 360 \text{ cm}^3$$

il profilato I PN 24 cm ha le caratteristiche:

$$A = 46,1 \text{ cm}^2; \quad J = 4246 \text{ cm}^4; \quad W = 354 \text{ cm}^3.$$

Risulta:

$$\sigma_{\max} = \frac{503\,000}{354} + \frac{6040}{46,1} = 1420 + 131 = 1551 \text{ kg/cm}^2 < K_F.$$

Volendo eseguire un calcolo di verifica anche in corrispondenza del nodo C, conviene prendere in esame la sezione C', immediatamente precedente, perché soggetta, rispetto alla sezione che segue, ad eguale

M e maggiore N . Si ha:

$$\sigma_{\max} = \frac{260\,000}{354} + \frac{8170}{46,1} = 735 + 177 = 912 \text{ kg/cm}^2 < K_F.$$

CONSIDERAZIONI SULLA SPINTA H .

La spinta H è la componente orizzontale delle reazioni delle cerniere.

Sostituendo nella relazione prima ottenuta l'espressione di M_C si ha:

$$H = N_B = \frac{Q}{2} \left[1 + \frac{1}{4 \left(1 + \frac{K_1}{K_2} \right)} \cotg \theta + \frac{1}{4 K_1 \left(1 + \frac{K_1}{K_2} \right) \sen \theta} \right]$$

ed anche:

$$H = \frac{Q}{2 \sqrt{1 - \cos^2 \theta}} [R \cos \theta + S]$$

avendo espresso l'angolo θ in funzione del solo coseno, e indicando con R e S due costanti positive dipendenti solo dalle caratteristiche geometriche della struttura.

Questa espressione mette bene in rilievo la legge di variazione di H in funzione di θ , cioè dello slivellamento delle due cerniere A e B .

Per $\theta = 0^\circ$ la trave ACB è ad asse rettilineo e la spinta H assumerebbe un valore infinito. Questo risultato tuttavia è puramente teorico perché non sono più valide le ipotesi sulle quali era basato il calcolo iniziale. Infatti in questo caso il punto C , pur trascurando la deformabilità assiale della struttura, può liberamente spostarsi in senso verticale, ed i punti estremi A e B non tendono, per effetto della deformazione flessionale, a subire uno spostamento orizzontale relativo, a meno d'infinitesimi del secondo ordine. La trave ACB rettilinea, soggetta a carichi normali all'asse, può infatti essere vincolata con due cerniere fisse senza che nascano spinte H (vedi a questo proposito le osservazioni svolte negli esercizi 1 e 4).

* * *

12. - Risolvere la struttura costituita da più travi semplici concorrenti in un nodo 0 e solidali angularmente tra di loro, soggetta ad una coppia M_e , applicata al nodo (fig. 12.1).

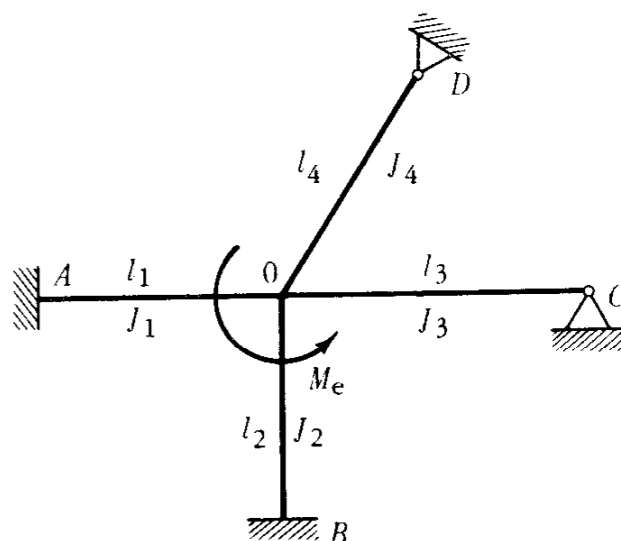


Fig. 12.1

Procedendo con il metodo cinematico adottato negli esercizi precedenti, si può introdurre una cerniera multipla in corrispondenza del nodo 0 e applicare all'estremità di ciascuna trave un momento incognito M , il cui valore si ricava imponendo il rispetto della solidarietà angolare che nella struttura principale è stata soppressa. In generale, se n sono le aste concorrenti nel nodo, si ottengono $(n - 1)$ incognite M che risultano determinate da $(n - 1)$ condizioni di congruenza alla rotazione. Infatti gli n momenti devono soddisfare anche l'equazione d'equilibrio alla rotazione del nodo, e le rotazioni indipendenti delle sezioni iniziali delle n aste concorrenti sono $(n - 1)$.

Nel nostro caso le $(n - 1)$ equazioni di congruenza sarebbero:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 \\ \varphi_1 = \varphi_3 \\ \varphi_1 = \varphi_4 \end{cases}$$

In ciascuna di esse compaiono due momenti incogniti, M_1 ed M_r della prima ed r^{esima} asta, ed eventualmente, i momenti in corrispondenza degli incastri esterni, che però sono noti in funzione dei precedenti

$$\left(M_{r_{\text{inc.}}} = \frac{M_r}{2} \right).$$

Si può osservare (vedi anche esercizio 11) che per questo tipo di struttura, costituita da più travi semplici concorrenti solidalmente in un nodo, l'unica condizione di carico per la quale l'asse geometrico è una possibile funicolare dei carichi, è data dal caso particolare di una forza concentrata P applicata direttamente al nodo; di conseguenza in tutti gli altri casi è sempre trascurabile, agli effetti della risoluzione del problema iperstatico, la deformazione dovuta allo sforzo normale in confronto a quella generata dal momento flettente. Con questa considerazione il nodo O , non allungandosi o accorciandosi le varie aste, rimane fisso nel piano e compie soltanto una rotazione φ , eguale, per congruenza, per tutte le aste.

È allora più conveniente assumere come incognita la rotazione φ del nodo, che è sempre unica, anziché i momenti, il cui numero dipende da quello delle aste. È questo il metodo risolutivo delle deformazioni, così denominato in confronto al precedente metodo delle forze, nel quale le incognite erano le reazioni iperstatiche.

Si sopprime la solidarietà angolare in O e, giacché il nodo non si sposta, si possono pensare le varie aste separate e singolarmente appoggiate (fig. 12.2).

In figura sono indicati i momenti agenti sulle aste, trasmessi dal nodo, cioè le aliquote incognite secondo cui si suddivide M_e .

Per l'equilibrio alla rotazione del nodo deve essere:

$$M_e - (M_1 + M_2 + M_3 + M_4) = 0 \quad (\text{il segno } - \text{ sta ad indicare i momenti trasmessi dalle aste, equilibranti del nodo})$$

Cioè:

$$M_e = \sum M_r.$$

Si esprime per ciascuna trave la rotazione incognita in funzione dei coefficienti elastici:

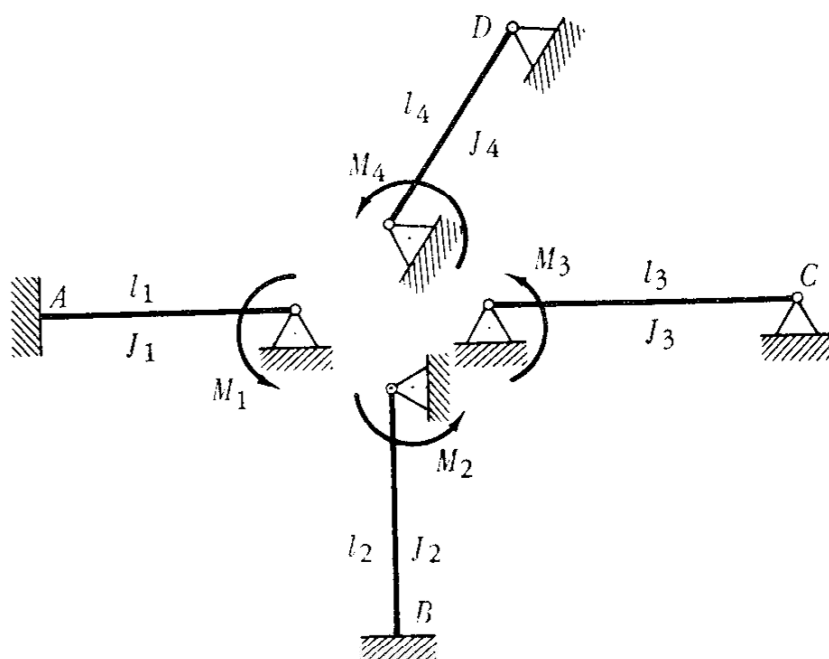


Fig. 12.2

$$\begin{array}{llll}
 \varphi = \frac{M_1 l_1}{4 E J_1} = \frac{M_1}{Z_1} & \text{da cui:} & M_1 = \varphi Z_1 \\
 \varphi = \frac{M_2 l_2}{4 E J_2} = \frac{M_2}{Z_2} & \text{« «} & M_2 = \varphi Z_2 \\
 \varphi = \frac{M_3 l_3}{3 E J_3} = \frac{M_3}{Z_3} & \text{« «} & M_3 = \varphi Z_3 \\
 \varphi = \frac{M_4 l_4}{3 E J_4} = \frac{M_4}{Z_4} & \text{« «} & M_4 = \varphi Z_4 \\
 \hline
 \text{Sommando membro a membro:} & & \Sigma M_r = \varphi \Sigma Z_r
 \end{array}$$

Si ricava:

$$\varphi = \frac{M_e}{\Sigma Z_r}$$

e sostituendo:

$$M_1 = M_e \frac{Z_1}{\sum Z_r}$$

$$M_2 = M_e \frac{Z_2}{\sum Z_r}$$

$$M_3 = M_e \frac{Z_3}{\sum Z_r}$$

$$M_4 = M_e \frac{Z_4}{\sum Z_r}.$$

In generale

$$M_r = M_e \frac{Z_r}{\sum Z_r}$$

dove il termine

$$Z_r = \rho_r \frac{EJ_r}{l_r}$$

esprime la *rigidezza elastica a flessione* della r^{esima} trave.

L'espressione ottenuta per M_r è valida qualunque sia il numero delle aste concorrenti nel nodo e comunque siano orientate e vincolate esternamente.

Il risultato ottenuto si esprime dicendo che la coppia esterna M_e si ripartisce tra le varie travi in parti direttamente proporzionali alle loro rigidezze flessionali. Risulta chiaramente che la rigidezza Z di una trave dipende esclusivamente dal suo dimensionamento (sezione e luce) e dalle condizioni di vincolo. Il coefficiente numerico ρ varia tra 3 e 4 in relazione ai due casi limiti di trave semplicemente appoggiata oppure perfettamente incastrata all'esterno.

Si possono ora calcolare:

a) i momenti in corrispondenza degli incastri esterni in base alla relazione

$$M_{r \text{ incastro esterno}} = \frac{1}{2} M_{r \text{ nodo}} ;$$

b) gli sforzi di taglio nelle travi mediante equazioni d'equilibrio alla rotazione scritte per ciascuna di esse (fig. 12.3).

Con i versi di figura:

$$T_1 = \frac{3}{2} \frac{M_1}{l_1}$$

$$T_2 = \frac{3}{2} \frac{M_2}{l_2}$$

$$T_3 = \frac{M_3}{l_3}$$

$$T_4 = \frac{M_4}{l_4}$$

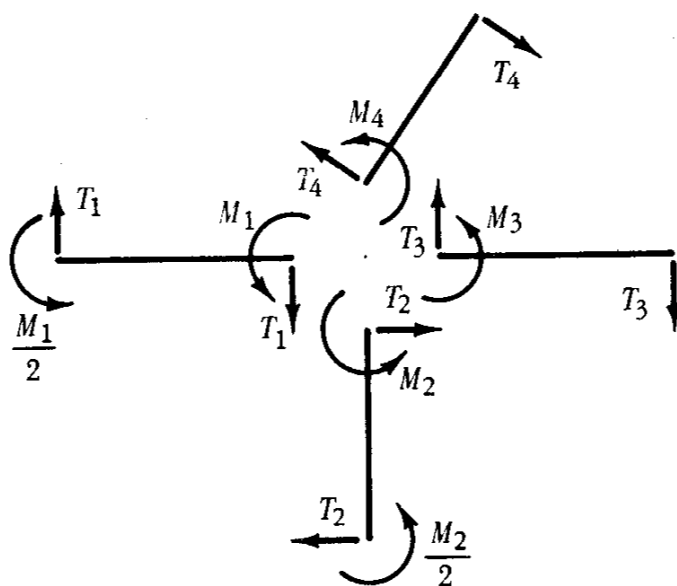


Fig. 12.3

c) Per determinare l'azione interna di sforzo normale le due equazioni di equilibrio alla traslazione del nodo non sono sufficienti qualora si abbiano più aste concorrenti e comunque orientate.

È necessario ricorrere a equazioni di natura elastica (vedi esercizio 13) esprimenti la deformazione assiale di ciascuna asta. Si comprende tuttavia come la struttura, per le condizioni di carico assegnate, si comporta fondamentalmente come inflessa, e lo sforzo normale ha un'influenza trascurabile sia nel calcolo delle deformazioni, sia in quello delle tensioni. Si può quindi progettare o verificare la struttura a flessione semplice, omettendo del tutto il calcolo di N (e, naturalmente, anche di T).

Per quanto riguarda i diagrammi del momento flettente e la deformata della struttura si rimanda alle corrispondenti travi semplici.

RISOLUZIONE NUMERICA E CALCOLO DI RESISTENZA.

Si abbia:

$$M_e = 10\,000 \text{ kgm}$$

$$l_1 = 4,00 \text{ m}; \quad l_2 = l_4 = 6,00 \text{ m}; \quad l_3 = 3,00 \text{ m}.$$

Si progetti la struttura in profilato normale a I in modo che ogni asta sia sollecitata esattamente al carico di sicurezza $K_F = 1600 \text{ kg/cm}^2$.

Per un'asta qualunque dovrà essere:

$$M_r = K_F \cdot W_r = M_e \frac{Z_r}{\sum Z_r} = \frac{M_e}{\sum Z_r} \left(\rho_r \cdot \frac{E J_r}{l_r} \right).$$

Esprimendo $J_r = W_r \frac{h_r}{2}$ e semplificando per E (cioè esprimendo la rigidezza a meno del fattore costante E):

$$K_F \cdot W_r = \frac{M_e}{\sum Z_r} \left(\rho_r \cdot \frac{W_r \cdot h_r}{2 l_r} \right)$$

semplificando per W_r :

$$\left(\frac{\rho_r}{l_r} \right) h_r = \frac{2 K_F \cdot \sum Z_r}{M_e} = \text{costante}.$$

Nel nostro caso è:

$$h_1 = \frac{4}{6} h_2 = h_3 = \frac{3}{6} h_4 = \text{costante}.$$

Indicando allora con h^* l'altezza del profilato occorrente per l'asta 1, si ha:

$$h_1 = h^* \quad h_2 = \frac{3}{2} h^* \quad h_3 = h^* \quad h_4 = 2 h^*.$$

Inoltre, affinché tutte le aste siano sollecitate a K_F , deve essere:

$$M_e = \sum M_r = \sum K_F W_r = K_F \sum \frac{2 J_r}{h_r}$$

cioè:

$$\sum \frac{J_r}{h_r} = \frac{M_e}{2 K_F}$$

e introducendo in quest'ultima espressione la relazione prima ottenuta tra le altezze dei profilati, si ottiene:

$$\left(\frac{J_1}{h^*} + \frac{J_2}{\frac{3}{2} h^*} + \frac{J_3}{h^*} + \frac{J_4}{2 h^*} \right) = \frac{M_e}{2 K_F}$$

Ossia:

$$(J_1 + \frac{2}{3} J_2 + J_3 + \frac{1}{2} J_4) = h^* \left(\frac{M_e}{2 K_F} \right) = \frac{10^6}{2 \cdot 1600} h^* = 312,5 \cdot h^*$$

È necessario procedere ora per tentativi scegliendo un profilato di altezza h^* e verificando se risultano soddisfatte le relazioni ottenute.

Ad esempio, fissando $h^* = 12$ cm:

aste 1 e 3	PN 12	$J_1 = J_3 = 328$	cm^4
asta 2	PN 18	$J_2 = 1446$	«
asta 4	PN 24	$J_4 = 4246$	« .

Risulta:

$$328 + \frac{2}{3} 1446 + 328 + \frac{4246}{2} = 3744 \cong 12 \cdot 312,5 \text{ (c.v.d.)}.$$

Nell'asta 1 si ha:

$$W_1 = \frac{328}{6} = 54,7 \text{ cm}^3$$

$$M_1 = 10^6 \cdot \frac{\frac{4}{400} 328}{\sum \rho \frac{J}{l}} = 87\,600 \text{ kg cm.}$$

Verificando:

$$\sigma_{\max} = \frac{87\,600}{54,7} \cong 1600 \text{ kg/cm}^2.$$

La stessa $\sigma_{\max} \cong K_F$ si ottiene nelle altre aste, ripetendo il calcolo di verifica.

13. - Risolvere la struttura a croce di fig. 13.1, costituita da quattro aste ortogonali, solidali angularmente in O , e comunque vincolate all'esterno. L'asta OC sia sottoposta a carico uniforme su tutta la luce.

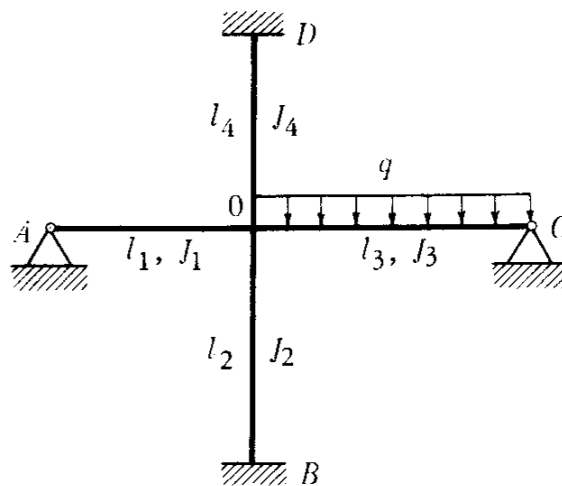


Fig. 13.1

Valgono le considerazioni di carattere generale svolte nell'esercizio precedente. Anziché il metodo delle forze si può convenientemente applicare il metodo delle deformazioni, assumendo come unica incognita la rotazione φ del nodo.

Si svincola nel nodo, ponendo in esso una cerniera multipla, e si assume quale struttura principale l'insieme delle singole travi, separate e appoggiate in O (fig. 13.2). Il carico esterno agisce solo sull'asta OC che si inflette come una trave semplicemente appoggiata (linea tratteggiata di figura) e la sua sezione iniziale ruota in senso orario della quantità:

$$\bar{\varphi}_3 = \frac{ql_3^3}{24 EJ_3}.$$

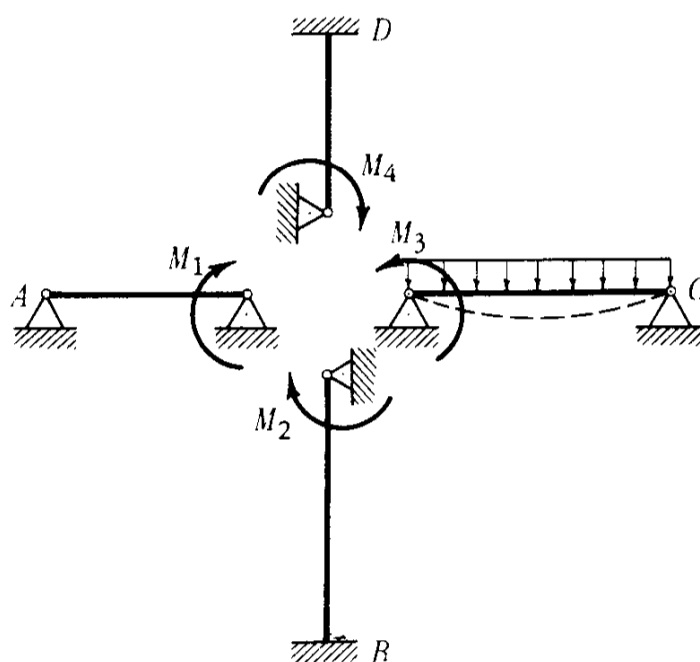


Fig. 13.2

Lo svincolamento va completato con l'apposizione dei momenti mutui M_1 , M_2 , M_3 , M_4 , esistenti all'estremità di ogni asta e aventi il compito di imporre alla struttura il rispetto del vincolo soppresso.

M_1 , M_2 , M_4 hanno senso orario e rappresentano l'azione che l'asta 3 esercita sulle altre allorché trasmette il senso rotatorio della propria sezione iniziale (per mezzo della solidarietà angolare esistente nel nodo O della struttura assegnata). M_3 è il momento con cui le aste 1, 2 e 4, grazie alla loro rigidezza flessionale, contrastano la deformazione dell'asta 3 limitandone la rotazione in corrispondenza del nodo.

Per l'equilibrio a rotazione del nodo deve essere:

$$\sum M_r = (M_1 + M_2 + M_4) - M_3 = 0.$$

Esprimiamo ora la rotazione incognita φ del nodo in funzione dei coefficienti elastici di ciascuna trave:

$$\varphi = M_1 \cdot \frac{l_1}{3 EJ_1} \quad \text{da cui:} \quad M_1 = \varphi Z_1$$

$$\varphi = M_2 \cdot \frac{l_2}{4 EJ_2} \quad \text{« «} \quad M_2 = \varphi Z_2$$

$$\varphi = - \left(M_3 \cdot \frac{l_3}{3 EJ_3} - \frac{ql_3^3}{24 EJ_3} \right) \quad \text{« «} \quad -M_3 = \varphi Z_3 - \frac{ql_3^2}{8}$$

$$\varphi = M_4 \cdot \frac{l_4}{4 EJ_4} \quad \text{« «} \quad M_4 = \varphi Z_4$$

$$\text{Sommando membro a membro:} \quad \sum M_r = \varphi \sum Z_r - \bar{M}_3 = 0.$$

Si è indicato con $\bar{M}_3 = \frac{ql_3^2}{8}$ il momento d'incastro perfetto dell'asta 3, dipendente dalla condizione di carico assegnata e dal tipo di vincolo esterno.

Si ottiene:

$$\varphi = \frac{\bar{M}_3}{\sum Z_r}$$

per le singole aste:

$$M_1 = \bar{M}_3 \frac{Z_1}{\sum Z_r}$$

$$M_2 = \bar{M}_3 \frac{Z_2}{\sum Z_r}$$

$$M_3 = \bar{M}_3 \left(1 - \frac{Z_3}{\sum Z_r} \right)$$

$$M_4 = \bar{M}_3 \frac{Z_4}{\sum Z_r}.$$

Vale ancora la relazione di tipo generale ottenuta nell'esercizio precedente; per le aste scariche tutto avviene come se sul nodo agisse una coppia esterna $\bar{M}_3$, di senso concorde con la rotazione φ e di valore eguale al momento d'incastro perfetto della trave caricata; su quest'ultima agisce un momento che è l'equilibrante di tutti gli altri e vale il momento $\bar{M}_3$ di incastro perfetto moltiplicato per il complemento all'unità del coefficiente di rigidezza flessionale dell'asta stessa.

Secondo quanto già fatto nell'esercizio precedente, si possono ora calcolare:

a) i momenti in corrispondenza degli incastri esterni:

$$M_B = \frac{M_2}{2}, \quad M_D = \frac{M_4}{2};$$

b) gli sforzi di taglio nelle travi mediante le solite equazioni di equilibrio alla rotazione scritte per ciascuna asta. Si ottiene:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{M_1}{l_1} \\ T_2 &= \frac{3}{2} \frac{M_2}{l_2} \\ \left\{ \begin{array}{l} T_{o-3} = \frac{Q}{2} + \frac{M_3}{l_3} \\ T_{c-3} = \frac{Q}{2} - \frac{M_3}{l_3} \end{array} \right. \\ T_4 &= \frac{3}{2} \frac{M_4}{l_4}; \end{aligned}$$

c) la determinazione degli sforzi normali risulta in questo caso più semplice rispetto all'esercizio precedente, perché le singole aste sono tutte tra loro ortogonali (fig. 13.3).

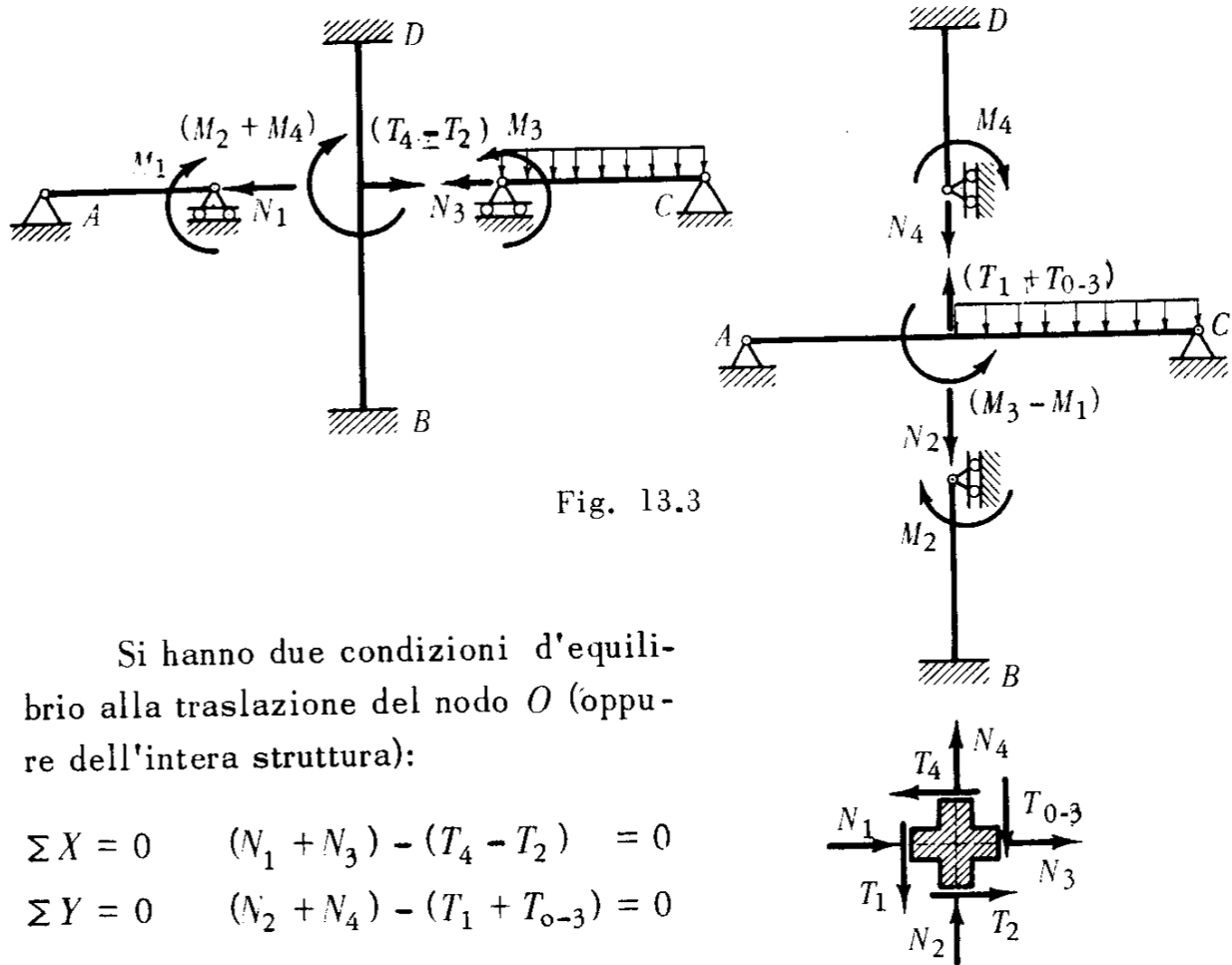


Fig. 13.3

Si hanno due condizioni d'equilibrio alla traslazione del nodo O (oppure dell'intera struttura):

$$\sum X = 0 \quad (N_1 + N_3) - (T_4 - T_2) = 0$$

$$\sum Y = 0 \quad (N_2 + N_4) - (T_1 + T_{0-3}) = 0$$

e due condizioni di congruenza alla deformazione assiale che esprimono l'invariabilità della distanza tra i punti esterni A e C , e B e D .

$$\xi_{A-C} = -\frac{N_1 l_1}{EA_1} + \frac{N_3 l_3}{EA_3} = 0$$

$$\eta_{B-D} = -\frac{N_2 l_2}{EA_2} + \frac{N_4 l_4}{EA_4} = 0.$$

Si comprende facilmente:

- in ciascuna di queste ultime condizioni di congruenza un'asta è tesa e l'altra è compressa:

- il punto O si sposta orizzontalmente di $\xi_0 = \frac{N_1 l_1}{EA_1}$ e verticalmente

di $\eta_0 = \frac{N_4 l_4}{EA_4}$. Questi spostamenti, dovuti alla deformazione assiale, sono stati lecitamente trascurati nella risoluzione del problema iperstatico, in cui si è considerato il nodo perfettamente fisso:

- i carichi esterni generano elevate azioni interne di sforzo assiale nelle aste ad essi parallele, e di taglio in quelle ad essi normali. In considerazione di ciò la verifica di resistenza si può correttamente eseguire a flessione composta per le aste BO e DO verticali, e a flessione semplice per le aste AO e CO orizzontali.

Concludendo, le aste che compongono la struttura si comportano tutte, dal punto di vista statico, come travi semplici, vincolate esternamente nel modo assegnato, e incastrate elasticamente in O ; per ciascuna di esse l'incastro è costituito dalla somma delle rigidezze flessionali di tutte le altre, ed ha un cedimento angolare φ (rotazione del nodo); le traslazioni ξ_0 e η_0 sono, al confronto, trascurabili.

RISOLUZIONE NUMERICA E VERIFICA DI RESISTENZA.

Si abbia:

$$l_1 = l_2 = l_3 = 4,00 \text{ m}; \quad l_4 = 3,00 \text{ m}; \quad q = 2000 \text{ kg/m}.$$

La struttura sia realizzata con profilati a I PN ($K_F = 1600 \text{ kg/cm}^2$):

aste 1 e 3: I PN 20 ($A_1 = 33,4 \text{ cm}^2$; $J_1 = 2142 \text{ cm}^4$; $W_1 = 214 \text{ cm}^3$);

aste 2 e 4: I PN 16 ($A_2 = 22,8 \text{ cm}^2$; $J_2 = 935 \text{ cm}^4$; $W_2 = 117 \text{ cm}^3$).

A meno del fattore E , eguale per tutte le aste, si ottiene:

$$Z_1 = Z_3 = \frac{3 \cdot 2142}{400} = 16,1$$

$$Z_2 = \frac{4 \cdot 935}{400} = 9,35$$

$$Z_4 = \frac{4 \cdot 935}{300} = 12,5$$

$$\Sigma Z = 54,05.$$

Coefficienti di ripartizione:

$$C_1 = C_3 = \frac{Z_1}{\Sigma Z} = 0,298$$

$$C_2 = \frac{Z_2}{\Sigma Z} = 0,173$$

$$C_4 = \frac{Z_4}{\Sigma Z} = 0,231.$$

Momento d'incastro perfetto per l'asta OC:

$$\bar{M}_3 = \frac{2000}{8} 4^2 = 4000 \text{ kgm.}$$

Momenti agenti sulle singole aste:

$$M_1 = 0,298 \cdot 4000 = +1192 \text{ kgm (orario)}$$

$$M_2 = 0,173 \cdot 4000 = + 692 \text{ « (orario)}$$

$$M_3 = (1 - 0,298) \cdot 4000 = +2808 \text{ « (antiorario)}$$

$$M_4 = 0,231 \cdot 4000 = + 924 \text{ « (orario).}$$

Incastri esterni:

$$M_B = \frac{M_2}{2} = +346 \text{ kgm (orario)}$$

$$M_D = \frac{M_4}{2} = +462 \text{ « (orario).}$$

Sforzi di taglio:

$$T_1 = \frac{1192}{4} = 298 \text{ kg.}$$

$$T_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{692}{4} = 259 \text{ «}$$

$$T_{03} = 2000 \cdot 2 + \frac{2808}{4} = 4702 \text{ «}$$

$$T_{c-3} = 2000 \cdot 2 - \frac{2808}{4} = 3298 \text{ «}$$

$$T_4 = \frac{3}{2} \cdot \frac{924}{3} = 462 \text{ «.}$$

Sforzi normali:

$$\left\{ \begin{array}{ll} N_1 + N_3 = 462 - 259 & N_1 = 101,5 \text{ kg} \\ N_2 + N_4 = 298 + 4702 & N_2 = 2140 \text{ «} \\ N_1 = N_3 & N_3 = 101,5 \text{ «} \\ N_2 \frac{400}{22,8} = N_4 \frac{300}{22,8} & N_4 = 2860 \text{ «.} \end{array} \right.$$

Per l'asta OC si ha inoltre $M_{\max \text{ pos.}} = \frac{T_{c-3}^2}{2q} = 2720 \text{ kgm} < |M_3|$,
nella sezione d'ascissa $x = \frac{T_{c-3}}{q} = 1,649 \text{ m.}$

Delle due aste verticali la più sollecitata è la OD (tensoinflessa) per la quale si ha:

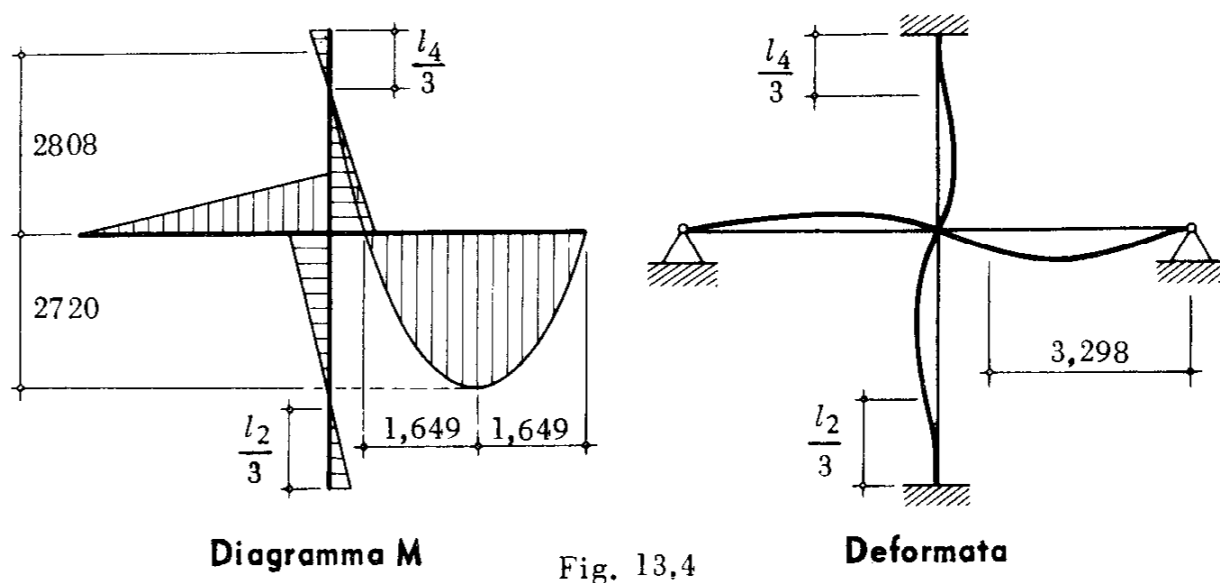
$$\sigma_{\max} = \frac{92400}{117} + \frac{2860}{22,8} = 790 + 125 = 915 \text{ kg/cm}^2 < K_F.$$

Delle due aste orizzontali la più sollecitata è la OC nella sezione

d'attacco al nodo in cui si ha:

$$\sigma_{\max} = \frac{280\,800}{214} = 1310 \text{ kg/cm}^2 < K_F.$$

Si riportano in fig. 13.4 il diagramma del momento flettente e la deformata risultante dal calcolo numerico svolto.



CASO PARTICOLARE $l_2 = l_4$.

Se O è il punto di mezzo della trave verticale BD e se i vincoli in B e in D sono eguali (due incastri, come nel presente esercizio, oppure due cerniere) evidentemente per i momenti di ripartizione si ha (fig. 13.5):

$$M_2 = M_4.$$

Il punto O di mezzo della trave BD , simmetrica e soggetta al carico antisimmetrico $2M_2$, non tende a spostarsi orizzontalmente e, di conseguenza, sono nulle le azioni mutue orizzontali in O . Infatti anche dai cal-

coli precedenti risulta $T_4 - T_2 = 0$ e $N_1 = N_3 = 0$ (la trave AC non è soggetta a sforzo normale).

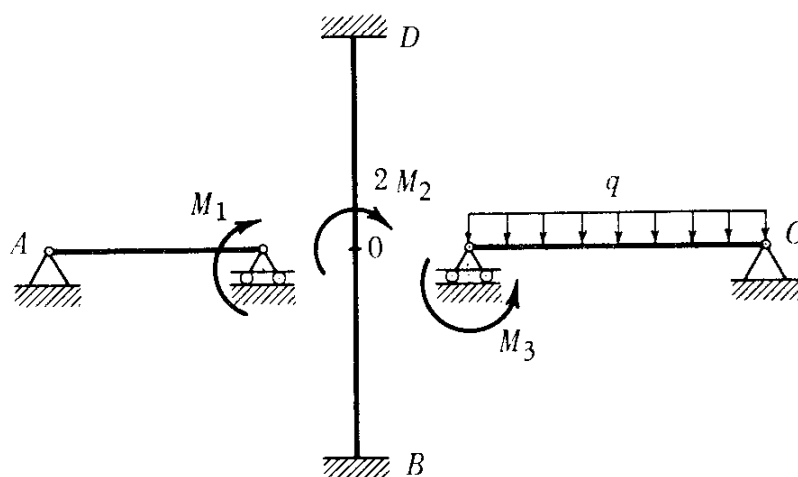


Fig. 13.5

* * *

14. - Risolvere la struttura di fig. 14.1 costituita da tre aste ortogonali, solidali angularmente in O , e soggette al carico P verticale, applicato al nodo.

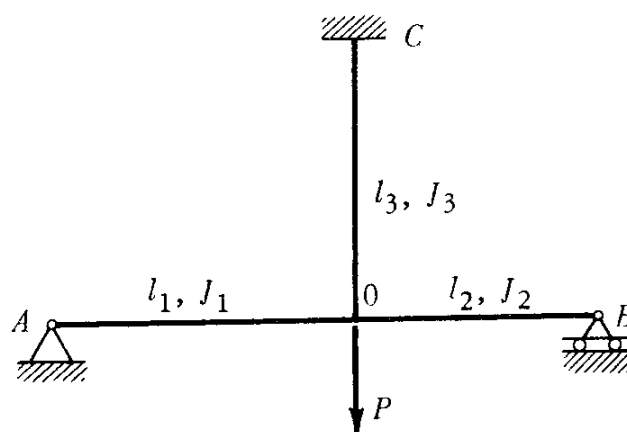


Fig. 14.1

La struttura assegnata è tre volte iperstatica.

In questo caso è indispensabile considerare la deformabilità assiale dell'asta OC ; è in virtù di essa, infatti, che la trave AB può a sua volta deformarsi ed entrare in tensione.

Operiamo lo stesso svincolamento già eseguito negli esercizi 12 e 13: sopprimiamo cioè la solidarietà angolare nel nodo O e consideriamo le tre aste incernierate tra di loro e soggette all'azione del carico esterno P e dei momenti mutui M_1, M_2, M_3 (fig. 14.2).

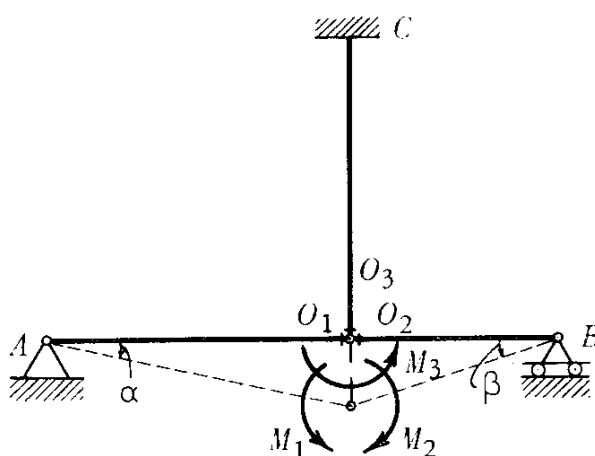


Fig. 14.2

La struttura principale così assunta è l'esatta funicolare del carico P : l'asta OC è semplicemente tesa e per effetto del suo allungamento il punto O si abbassa di $\eta_0 = \frac{Pl_3}{EA_3}$: le aste AO e OC sono scariche e ruotano rigidamente attorno ai vincoli esterni di angoli $\alpha = \frac{\eta_0}{l_1}$ e $\beta = \frac{\eta_0}{l_2}$.

Come si vede la deformazione generata da P non mantiene la congruenza angolare in O , il cui rispetto è garantito invece dai momenti M_1, M_2, M_3 . Il senso di questi momenti è facilmente prevedibile: M_1 , applicato alla faccia O_1 dell'asta 1, è antiorario perché deve riaprire l'angolo AOC che è diminuito di α ; M_2 , applicato alla faccia O_2 dell'asta 2, per lo stesso motivo, ha senso orario. Sulla faccia O_3 dell'asta 3 agisce il momento M_3 legato ai precedenti dalla relazione d'equilibrio alla rotazione del nodo:

$$\Sigma M_0 = 0 \quad \text{cioè} \quad M_1 - M_2 + M_3 = 0 \quad \text{da cui} \quad M_3 = M_2 - M_1.$$

Da questa relazione risulta il senso di M_3 .

Ad esempio se è $l_1 > l_2$ risulta $\alpha < \beta$ e di conseguenza $M_1 < M_2$; in tal caso M_3 ha senso antiorario e la deformazione che esso provoca nell'asta OC soccorre M_2 (cui spetterebbe il compito di ripristinare una congruenza angolare maggiormente alterata), e contrasta l'azione di M_1 .

Procedendo con questo svincolamento, lo studio del problema iperstatico, nel caso di struttura avente deformazione assiale non trascurabile, risulta decomposto in due distinte fasi più semplici:

1^a fase: struttura principale esatta funicolare dei carichi esterni; si ha solo deformazione assiale e il nodo si sposta di una quantità nota.

2^a fase: struttura principale soggetta solo ai momenti mutui interni, messi in evidenza dallo svincolamento. I momenti determinano uno stato di tensione essenzialmente flessionale; si può allora trascurare la deformazione provocata dallo sforzo normale che conseguentemente ad essi si manifesta nella struttura, e considerare il nodo O fisso.

È possibile procedere nella risoluzione adottando sia il metodo delle forze che quello delle deformazioni.

Applicando il primo le incognite sono i momenti M_1 , M_2 , M_3 e le relazioni che li determinano sono:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi_{01} = \varphi_{02} & \text{(equazione di congruenza)} \\ \varphi_{01} = \varphi_{03} & \text{(equazione di congruenza)} \\ \Sigma M_0 = 0 & \text{(equazione d'equilibrio).} \end{array} \right.$$

Assumendo positive le rotazioni orarie, e con i sensi dei momenti di fig. 14.2, il sistema risolutivo risulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{Pl_3}{EA_3 l_1} - \frac{M_1 l_1}{3 EJ_1} = - \frac{Pl_3}{EA_3 l_2} + \frac{M_2 l_2}{3 EJ_2} \\ \frac{Pl_3}{EA_3 l_1} - \frac{M_1 l_1}{3 EJ_1} = - \frac{M_3 l_3}{4 EJ_3} \\ M_1 - M_2 + M_3 = 0. \end{array} \right.$$

Applicando invece il metodo delle deformazioni l'unica incognita è la rotazione φ del nodo (η_0 è noto). Con le stesse convenzioni sui segni:

$$\varphi = \frac{\eta_0}{l_1} - \frac{M_1}{Z_1} \quad \text{da cui:} \quad M_1 = \frac{Z_1}{l_1} \eta_0 - \varphi Z_1$$

$$\varphi = -\frac{\eta_0}{l_2} + \frac{M_2}{Z_2} \quad \text{« «} \quad -M_2 = -\frac{Z_2}{l_2} \eta_0 - \varphi Z_2$$

$$\varphi = -\frac{M_3}{Z_3} \quad \text{« «} \quad M_3 = -\varphi Z_3$$

Sommando membro a membro: $(M_1 - M_2 + M_3) = \eta_0 \left(\frac{Z_1}{l_1} - \frac{Z_2}{l_2} \right) - \varphi \Sigma Z = 0.$

Si ottiene:

$$\varphi = \eta_0 \frac{\frac{Z_1}{l_1} - \frac{Z_2}{l_2}}{\Sigma Z}$$

e per i momenti:

$$M_1 = \eta_0 \left[\frac{Z_1}{l_1} - \frac{Z_1}{\Sigma Z} \left(\frac{Z_1}{l_1} - \frac{Z_2}{l_2} \right) \right]$$

$$M_2 = \eta_0 \left[\frac{Z_2}{l_2} + \frac{Z_2}{\Sigma Z} \left(\frac{Z_1}{l_1} - \frac{Z_2}{l_2} \right) \right]$$

$$M_3 = -\eta_0 \frac{Z_3}{\Sigma Z} \left(\frac{Z_1}{l_1} - \frac{Z_2}{l_2} \right).$$

Per quanto riguarda il calcolo delle reazioni dei vincoli si procede secondo lo schema noto (fig. 14.3):

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{M_1}{l_1} & N_1 &= T_3 \\ T_2 &= \frac{M_2}{l_2} & N_3 &= (T_1 + T_2) \\ T_3 &= \frac{3}{2} \frac{M_3}{l_3} . \end{aligned}$$

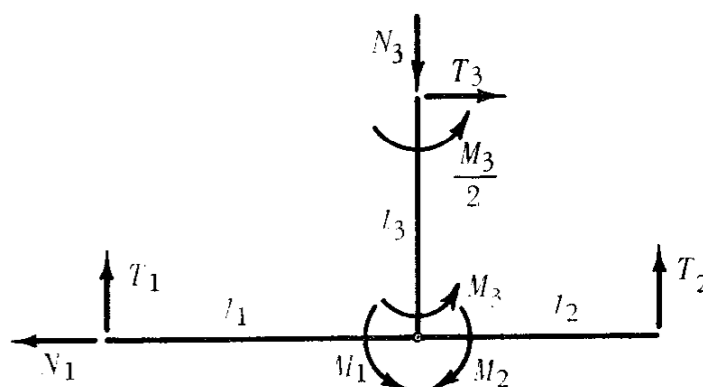


Fig. 14.3

Pertanto lo sforzo normale nell'asta OC vale $P' = P - N_3$. Si potrebbe allora ripetere il calcolo determinando nuovamente lo spostamento del nodo O : $\eta'_0 = \frac{P' l_3}{EA_3}$ e le rotazioni α' e β' ad esso conseguenti.

Al termine di questo secondo ciclo di operazioni si troverebbe un valore N'_3 che fornirebbe per l'asta OC : $P'' = P - N'_3$, con il quale potremmo operare come con i precedenti, e così via con metodo di successiva approssimazione. Bisogna però tenere presente che in una struttura possibile funicolare dei carichi esterni la curva delle pressioni si discosta pochissimo dall'asse geometrico. Ciò significa che la congruenza angolare del nodo, alterata nella struttura principale dalla deformazione assiale, è ripristinata mediante la deformazione flessionale provocata da coppie mutue M di valore molto piccolo. Lo sforzo normale N_3 , trascura-

bile nel calcolo delle deformazioni di questa seconda fase, lo è a maggior ragione in confronto a P . Gli sforzi normali che si generano nella struttura principale sotto l'azione delle coppie M si chiamano «sforzi secondari», per distinguerli da quelli «principali» agenti nella struttura funicolare del carico esterno.

RISOLUZIONE NUMERICA E CALCOLO DI RESISTENZA.

Si abbia:

$$l_1 = 5,00 \text{ m}; \quad l_2 = l_3 = 3,00 \text{ m}; \quad P = 10\,000 \text{ kg.}$$

Le aste siano realizzate con:

aste AO e OB: I PN 10 ($A = 10,6 \text{ cm}^2$; $J = 170 \text{ cm}^4$; $W = 34,1 \text{ cm}^3$);

asta OC: Profilato tubolare di dimensioni trasversali $7,0 \times 4,9 \text{ cm}$ ($A = 7,84 \text{ cm}^2$; $J = 52,5 \text{ cm}^4$; $W = 15 \text{ cm}^3$).

Si ha:

$$Z_1 = \frac{3 \cdot 170}{500} E = 1,02 \cdot E \quad \frac{Z_1}{l_1} = 1,02 \frac{2,1 \cdot 10^6}{500} = 4\,280$$

$$Z_2 = \frac{3 \cdot 170}{300} E = 1,70 \cdot E \quad \frac{Z_2}{l_2} = 1,70 \frac{2,1 \cdot 10^6}{300} = 11\,900$$

$$Z_3 = \frac{4 \cdot 52,5}{300} E = 0,70 \cdot E$$

$$\Sigma Z = 3,42 \cdot E$$

Inoltre:

$$\eta_0 = \frac{10\,000 \cdot 300}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 7,84} = 0,1825 \text{ cm.}$$

Risulta:

$$M_1 = 0,1825 \left[4280 - \frac{1,02}{3,42} (4280 - 11900) \right] = 1200 \text{ kg cm}$$

$$M_2 = 0,1825 \left[11900 - \frac{1,70}{3,42} (4280 - 11900) \right] = 2865 \text{ kg cm}$$

$$M_3 = 2865 - 1200 = 1665 \text{ kg cm.}$$

$$T_1 = \frac{1200}{500} \cong 2,4 \text{ kg} \quad N_1 = 8,32 \text{ kg}$$

$$T_2 = \frac{2865}{300} \cong 9,55 \text{ kg} \quad N_2 = 0$$

$$T_3 = 1,5 \frac{1665}{300} \cong 8,32 \text{ kg.} \quad N_3 = 11,95 \text{ kg.}$$

A conferma di quanto esposto, si vede come risultano piccolissimi i momenti mutui M e gli sforzi secondari N_1 e N_3 .

Eseguendo la verifica a tensoflessione per l'asta OC , che è la più sollecitata, si ha:

$$\sigma_{\max} = \frac{10000}{7,84} + \frac{1665}{15} = 1277 + 111 = 1388 \text{ kg/cm}^2 < 1600.$$

OSSERVAZIONI:

1) - Si sarebbe naturalmente potuto assumere un'altra struttura principale, per esempio quella di fig. 14.4, ottenuta sezionando sopra il nodo O , in modo da separare l'asta OC dalla trave inferiore AB . In questo caso le incognite iperstatiche sono X e M_3 e le condizioni di congruenza che le determinano:

$$\begin{cases} \eta_0 = \eta_{0'} \\ \varphi_0 = \varphi_{0'} \end{cases}$$

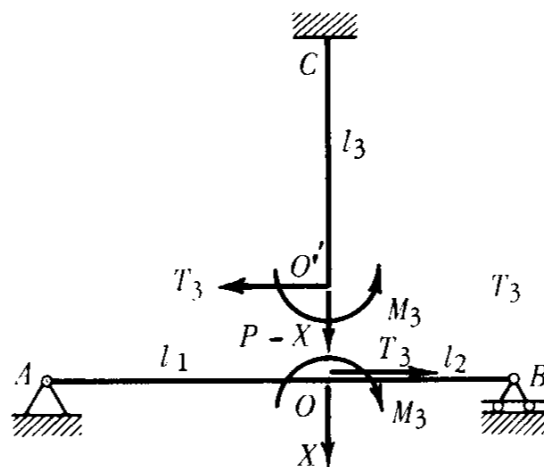


Fig. 14.4

L'asta 3 si comporta come incastrata in C e appoggiata in O' con un carrello a piano di scorrimento verticale; pertanto è $T_3 = \frac{3}{2} \frac{M_3}{l_3}$, in accordo con quanto già visto.

Si ha però lo svantaggio (già indicato nell'esercizio 7) di dover calcolare l'abbassamento e la rotazione di una sezione qualunque O della trave AB , ed inoltre, di procedere secondo uno schema che non consente una chiara separazione dei due effetti deformanti, assiale e flessionale, in due distinte fasi di calcolo.

2) - L'asta AO non varia di lunghezza e il nodo O , a meno di infinitesimi del secondo ordine, non si sposta orizzontalmente, e così pure l'estremo B . È pertanto indifferente, agli effetti della soluzione sin qui

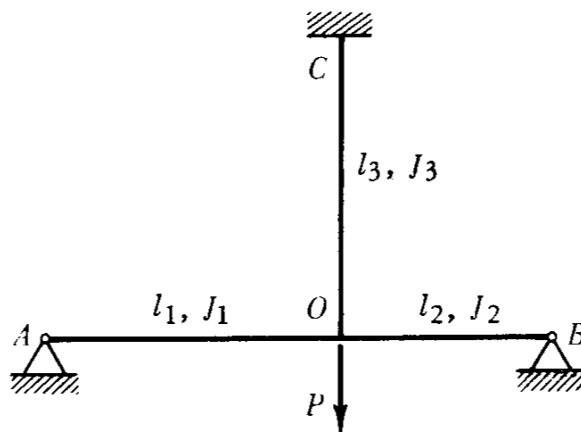


Fig. 14.5

ottenuta, che la sezione B sia vincolata con un carrello, oppure con una cerniera (fig. 14.5). In questa ultima ipotesi, quale variazione rispetto al caso precedente, anche l'asta OB è soggetta ad uno sforzo secondario normale N_2 (reazione orizzontale della cerniera) il cui valore si determina mediante il sistema d'equazioni:

$$\begin{cases} N_1 + N_2 = T_3 \\ \frac{N_1 l_1}{EA_1} - \frac{N_2 l_2}{EA_2} = 0. \end{cases}$$

3) - Nel caso in cui sia $l_1 = l_2$ e $A_1 = A_2$ la struttura è simmetrica e simmetricamente caricata. La trave inferiore AB e l'asta OC si trasmettono solo azioni mutue verticali, in accordo con la simmetria; pertanto $M_1 = M_2 = M$ e $M_3 = 0$ (fig. 14.6).

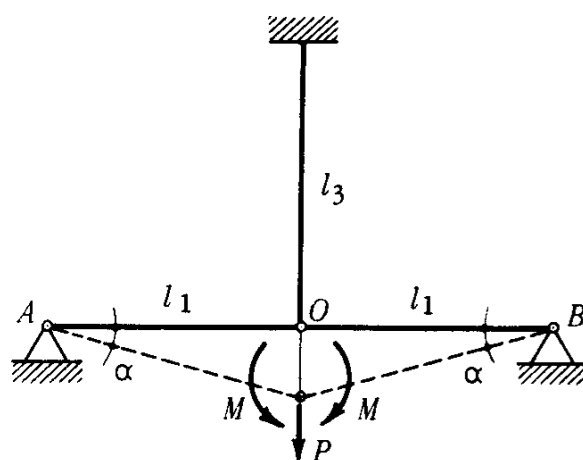


Fig. 14.6

Il nodo O non ruota e la condizione di congruenza che determina l'unica incognita M è:

$$\alpha - \frac{M l_1}{3 E J_1} = 0$$

cioè:

$$\frac{P l_3}{E A_3 \cdot l_1} - \frac{M l_1}{3 E J_1} = 0$$

da cui:

$$M = \frac{3 J_1 \cdot l_3}{A_3 \cdot l_1^2} P \quad \text{ed} \quad N_3 = \frac{2 M}{l_1}.$$

4) - Il metodo risolutivo precedente è ovviamente valido anche se l'asta OC non è normale alle altre due (fig. 14.7). Inserendo la cerniera multipla in O , l'asta OC è sempre sollecitata a trazione P , se la forza agisce secondo la sua stessa direzione, e le aste AO e OB sono scariche.

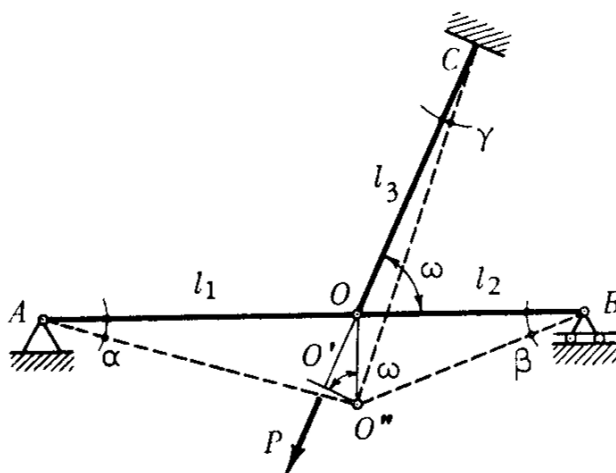


Fig. 14.7

L'allungamento $\Delta l_3 = \overline{OO'} = \frac{P l_3}{EA_3}$ avviene nella direzione dell'asta OC ; tuttavia il nodo O , per la invariabilità di lunghezza dell'asta AO si sposta solo verticalmente (si esclude l'eventualità di angolo ω molto piccolo formato tra le aste 2 e 3, nel qual caso l'abbassamento di O non è più dello stesso ordine di grandezza della deformazione).

Pertanto è necessario sbloccare l'incastro esterno C , sostituendolo con una cerniera, per consentire una rotazione rigida dell'asta attorno a C , in modo che il nodo da O' si porta in O'' , sulla verticale per O . L'abbassamento totale è:

$$\eta_0 = \overline{OO''} = \frac{\Delta l}{\sin \omega} = \frac{P l_3}{EA_3 \sin \omega}$$

e le variazioni angolari sono:

Cedimento dell'incastro esterno C:

$$\gamma = \frac{O'O''}{l_3} = \frac{P}{EA_3 \operatorname{tg} \omega}.$$

Rotazione relativa tra le aste AO e OC (diminuzione):

$$\Delta(180 - \omega) = \alpha + \gamma = \frac{OO''}{l_1} + \frac{O'O''}{l_3} = \frac{P}{EA_3} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \omega} + \frac{l_3}{l_1} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} \omega} \right).$$

Rotazione relativa tra le aste BO e OC (diminuzione):

$$\Delta \omega = \beta - \gamma = \frac{OO''}{l_2} - \frac{O'O''}{l_3} = \frac{P}{EA_3} \left(\frac{l_3}{l_2} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} \omega} - \frac{1}{\operatorname{tg} \omega} \right).$$

Può risultare $\Delta(180 - \omega) > \Delta \omega$ anche per $l_1 > l_2$, e ciò in dipendenza del valore di ω . Non è quindi facilmente prevedibile il senso dei momenti mutui M_1, M_2, M_3 . Supponiamo $M_1 > M_2$; con i sensi di fig. 14.8, assumendo positive le rotazioni orarie, e applicando il metodo delle forze, il sistema risolutivo è:

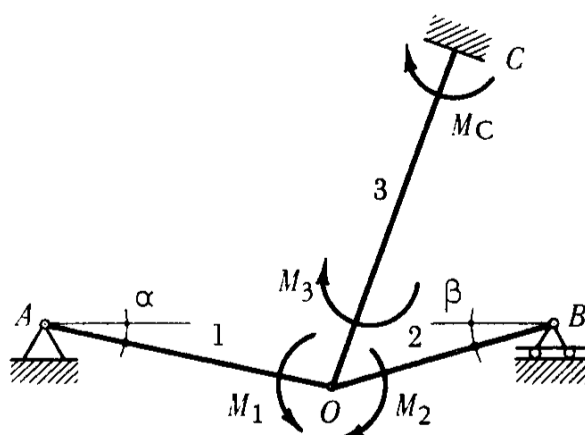


Fig. 14.8

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi_{01} = \varphi_{02} & \text{(equazione di congruenza)} \\ \varphi_{01} = \varphi_{03} & \text{(equazione di congruenza)} \\ \varphi_C = 0 & \text{(equazione di congruenza)} \\ \Sigma M_0 = 0 & \text{(equazione di equilibrio).} \end{array} \right.$$

Esplicitando i vari termini:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{Pl_3}{EA_3 \sin \omega} \cdot \frac{1}{l_1} - \frac{M_1 l_1}{3EJ_1} = - \frac{Pl_3}{EA_3 \sin \omega} \cdot \frac{1}{l_2} + \frac{M_2 l_2}{3EJ_2} \\ \frac{Pl_3}{EA_3 \sin \omega} \cdot \frac{1}{l_1} - \frac{M_1 l_1}{3EJ_1} = - \frac{P}{EA_3 \tan \omega} + \frac{l_3}{6EJ_3} (2M_3 - M_C) \\ - \frac{P}{EA_3 \tan \omega} + \frac{l_3}{6EJ_3} (2M_C - M_3) = 0 \\ M_1 - M_2 - M_3 = 0. \end{array} \right.$$

15. - Risolvere il telaio zoppo di fig. 15.1, caricato uniformemente su tutta la campata AB.

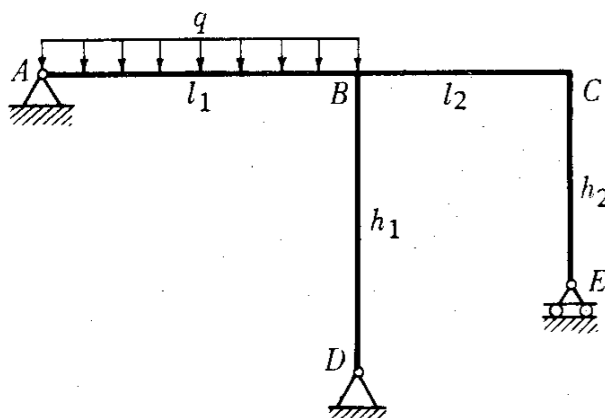


Fig. 15.1

La struttura è due volte iperstatica e due volte staticamente indeterminata.

Anche in questo caso si può facilmente prevedere che la curva delle pressioni si discosta notevolmente dall'asse geometrico; infatti essa è costituita per la parte di telaio ECB dalla retta d'azione della reazione verticale del carrello E , per il piedritto BD dalla retta d'azione inclinata della reazione della cerniera D , e per la trave AB , sottoposta al carico uniforme, da un arco di parabola.

La conseguente trascurabilità della deformazione assiale, fa sì che i due nodi B e C rimangano fissi.

Risolviamo il problema con metodo cinematico e procediamo ad uno svincolamento graduale che ci consente di prevedere il senso delle reazioni iperstatiche. Sopprimiamo dapprima il solo carrello E ; il carico q provoca una rotazione del nodo B di senso antiorario, cui consegue, per un moto di rotazione rigida attorno a B dello sbalzo BCE , non caricato, un innalzamento dell'estremo libero E . Pertanto la reazione X incognita del carrello deve essere diretta verso il basso per la congruenza del vincolo soppresso.

Il telaio ABD è ancora una volta iperstatico; esso è soggetto al carico q e alla risultante delle forze che seguono B , trasportate sul nodo (fig. 15.2): forza verticale X (che per effetto della indeformabilità assiale della struttura è assorbita totalmente dal vincolo D) e momento Xl_2 .

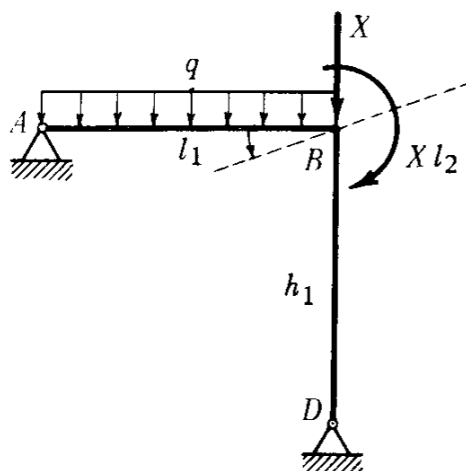


Fig. 15.2

Ci si riconduce ad una struttura principale isostatica sopprimendo, quale ulteriore grado di vincolo, anche la solidarietà angolare in B e studiando le due travi AB e BD , appoggiate in B perché il nodo non si sposta (fig. 15.3).

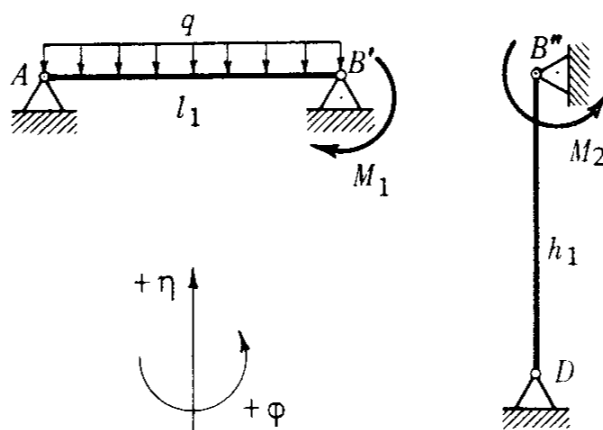


Fig. 15.3

Le condizioni di congruenza che si devono imporre per il rispetto dei vincoli complessivamente soppressi sono in simboli:

$$\begin{cases} \varphi_{B'} = \varphi_{B''} \\ \eta_E = 0. \end{cases}$$

In queste due equazioni compaiono le tre incognite M_1 , M_2 , X che però sono legate dalla relazione di equilibrio alla rotazione attorno al nodo B : $\sum M_B = 0$.

Per quanto riguarda il senso delle azioni interne:

- il momento M_1 , orario, è la reazione elastica con la quale la parte di telaio $DBCE$ contrasta la deformazione della trave AB e, in particolare, limita la rotazione antioraria della sua sezione estrema B' .

- il momento M_2 , antiorario, è l'azione che la trave AB trasmette alla sezione B'' di sommità del piedritto in virtù della propria tendenza alla rotazione antioraria, provocata dal carico.

Esplicitando i vari termini, con i sensi positivi di fig. 15.3 e adottando per tutte le aste il medesimo J :

$$\begin{cases} \frac{ql_1^3}{24 EJ} - \frac{M_1 l_1}{3 EJ} = \frac{M_2 h_1}{3 EJ} \\ \frac{M_2 h_1}{3 EJ} l_2 - \frac{X l_2^3}{3 EJ} = 0 \\ M_1 - M_2 = X l_2 \end{cases}$$

ponendo:

$$k_1 = \frac{l_2}{l_1}$$

$$k_2 = \frac{l_2}{h_1}$$

si ottiene:

$$X = \frac{ql_1}{8} \cdot \frac{1}{k_1 + k_1 k_2 + k_1^2} \quad M_1 = X l_2 (1 + k_2) \quad M_2 = X l_2 \cdot k_2.$$

Al solito, è ora possibile ricavare le componenti delle reazioni delle cerniere mediante equazioni d'equilibrio.

Si ottiene:

$$V_A = \frac{ql_1}{2} - \frac{M_1}{l_1} \quad (\text{positiva se diretta verso l'alto})$$

$$V_D = (Q + X) - V_A \quad (\text{positiva se diretta verso l'alto})$$

$$H_D = \frac{M_2}{h_1} \quad (\text{positiva se diretta verso sinistra})$$

$$H_A = H_D$$

OSSERVAZIONI. - Naturalmente si giungerebbe allo stesso sistema d'equazioni se la risoluzione del problema fosse stata impostata secondo i criteri dell'esercizio 12 (introduzione di una cerniera multipla in B). Delle due equazioni di congruenza che in tal caso si dovrebbero espri-

mere per la rotazione del nodo, una corrisponde esattamente alla prima già scritta, l'altra coinciderebbe con la seconda, qualora in essa si ponesse $Xl_2 = M_3$.

DIAGRAMMI DELLE AZIONI INTERNE (tracciamento qualitativo).

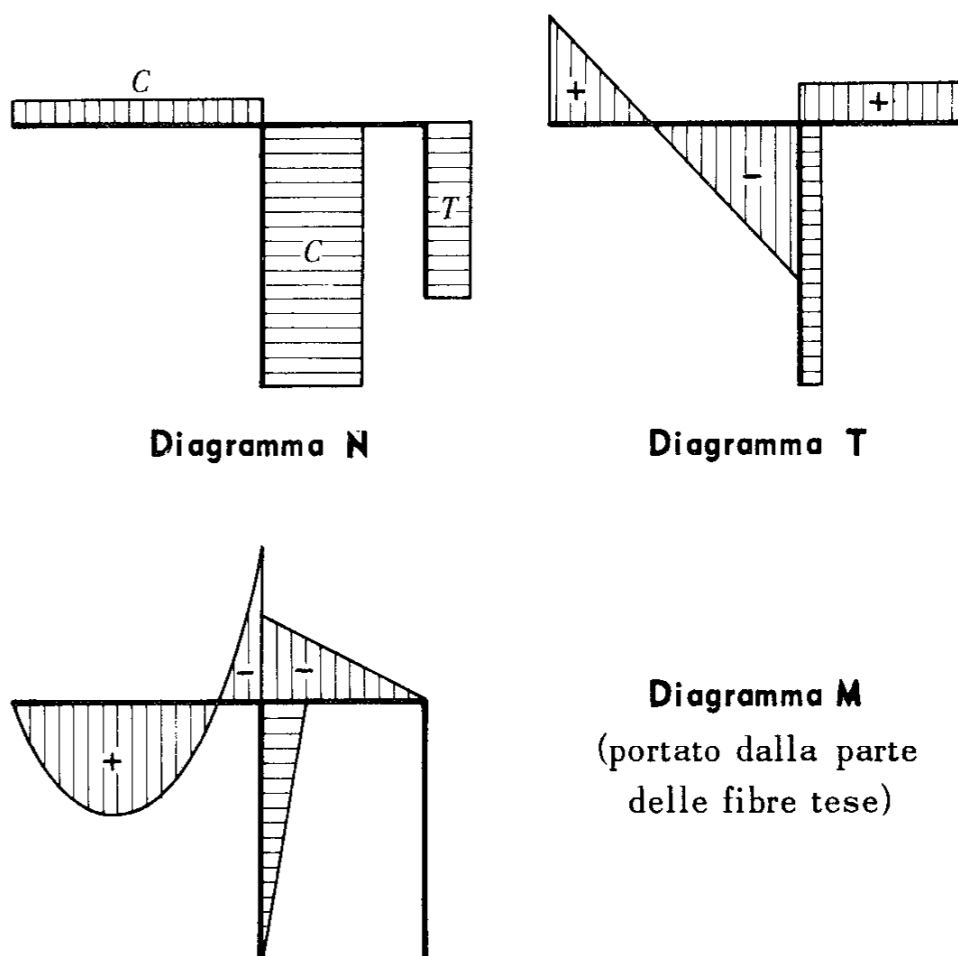


Fig. 15.4

CURVA DELLE PRESSIONI.

La curva delle pressioni (fig. 15.5) è costituita dalla retta d'azione verticale di X per la parte ECB ; per il piedritto BD è data dalla retta d'azione della reazione R_D della cerniera D ; per la trave AB è un arco di parabola tangente in A alla retta d'azione della R_A e all'altro estremo, che si trova sulla verticale per BD , alla risultante R' della R_D e di X (risultante delle forze che seguono B).

tano come travi semplicemente appoggiate cui sia applicato all'estremità un momento antiorario; il piedritto EC rimane indeformato e ruota rigidamente attorno al nodo C (fig. 15.6).

Lo spostamento orizzontale del carrello E vale:

$$\xi_E = \varphi_C \cdot h_2 = \frac{X l_2^2 \cdot h_2}{6 EJ}$$

e avviene verso sinistra.

CASO PARTICOLARE: $h_2 = 0$.

Rimangono validi i calcoli prima svolti e i risultati ottenuti (figura 15.7).

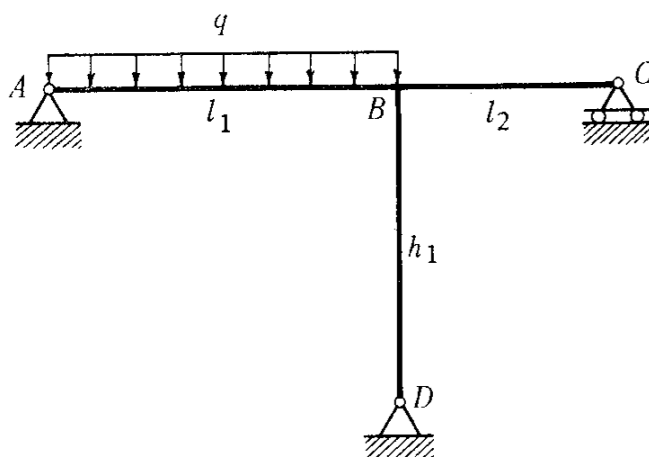


Fig. 15.7

Infatti nel caso precedente, il piedritto CE , sollecitato solo assialmente, rimaneva indeformato e non influenzava il valore delle incognite iperstatiche.

Al variare di h_2 , varia solo lo spostamento orizzontale del carrello con la legge di proporzionalità diretta:

$$\xi_E = \varphi_C \cdot h_2$$

(φ_C è costante, per i carichi assegnati).