EXERCICES

DE

MATHÉMATIQUES,

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

INGÉNIEUR EN CHEF DES PONTS ET CHAUSSÉES, PROFESSEUR A L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE, PROFESSEUR ADJOINT A LA FACULTÉ DES SCIENCES, MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, CHEVALIER DE LA LÉGION D'HONNEUR.

SECONDE ANNÉE.

A PARIS,

CHEZ DE BURE FRÈRES, LIBRAIRES DU ROI ET DE LA BIBLIOTHÈQUE DU ROI, RUE SERPENTE, N° 7.

1827.

SUR

LA CONDENSATION ET LA DILATATION

DES CORPS SOLIDES.

Lorsqu'un corps solide vient à changer de forme, et que, par l'effet d'une cause quelconque, il passe d'un premier état naturel ou artificiel à un second état distinct du premier, chaque élément du volume se condense ou se dilate, et les divers éléments offrent, en général, des condensations ou dilatations diverses. Il y a plus, la condensation ou dilatation du corps en un point donné peut n'être pas la même dans tous les sens. Nous allons entrer, à ce sujet, dans quelques détails qui, plus tard, nous seront fort utiles pour la solution de quelques problèmes de Mécanique.

Rapportons tous les points de l'espace à trois axes rectangulaires, et supposons que le point matériel, correspondant aux coordonnées x, y, z dans le dernier état du corps solide, soit précisément celui qui, dans le premier état du même corps, avait pour coordonnées les trois différences

$$x-\xi,\quad y-\eta,\quad z-\zeta. \tag{1}$$

Si l'on prend x, y, z pour variables indépendantes, ξ, η, ζ seront des fonctions de x, y, z qui serviront à mesurer les déplacements du point que l'on considère parallèlement aux axes des coordonnées. Soit d'ailleurs r la distance qui, dans le second état du corps solide, sépare deux molécules m, m', correspondantes aux coordonnées x, y, z, et $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$, en sorte qu'on ait

$$r^2=\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2. \tag{2}$$

Comme ces deux molécules seront celles qui, dans le premier état, avaient pour coordonnées

$$x-\xi,\quad y-\eta,\quad z-\zeta,$$

et

$$\begin{aligned}
&x+\Delta x-\left(\xi+\frac{\partial\xi}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial\xi}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial\xi}{\partial z}\Delta z+\ldots\right),\\
&y+\Delta y-\left(\eta+\frac{\partial\eta}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial\eta}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial\eta}{\partial z}\Delta z+\ldots\right),\\
&z+\Delta z-\left(\zeta+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\Delta z+\ldots\right),
\end{aligned}$$

il est clair que, si l'on désigne leur distance primitive par

$$\frac{r}{1+\varepsilon},\tag{3}$$

on trouvera

$$\left\{\begin{aligned}
\left(\frac{r}{1+\varepsilon}\right)^2=&\left(\Delta x-\frac{\partial\xi}{\partial x}\Delta x-\frac{\partial\xi}{\partial y}\Delta y-\frac{\partial\xi}{\partial z}\Delta z-\ldots\right)^2\\
&+\left(\Delta y-\frac{\partial\eta}{\partial x}\Delta x-\frac{\partial\eta}{\partial y}\Delta y-\frac{\partial\eta}{\partial z}\Delta z-\ldots\right)^2\\
&+\left(\Delta z-\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Delta x-\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Delta y-\frac{\partial\zeta}{\partial z}\Delta z-\ldots\right)^2.
\end{aligned}\right.\tag{4}$$

Soient maintenant α, β, γ les angles que forme, avec les demi-axes des coordonnées positives, le rayon vecteur r mené de la molécule m à la molécule m'. On aura évidemment

$$\Delta x=r\cos\alpha,\qquad \Delta y=r\cos\beta,\qquad \Delta z=r\cos\gamma;\tag{5}$$

et, en supposant la distance r infiniment petite, on tirera de l'équation (4) divisée par r^2

$$\left\{\begin{aligned}
\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^2=&\left(\cos\alpha-\frac{\partial\xi}{\partial x}\cos\alpha-\frac{\partial\xi}{\partial y}\cos\beta-\frac{\partial\xi}{\partial z}\cos\gamma\right)^2\\
&+\left(\cos\beta-\frac{\partial\eta}{\partial x}\cos\alpha-\frac{\partial\eta}{\partial y}\cos\beta-\frac{\partial\eta}{\partial z}\cos\gamma\right)^2\\
&+\left(\cos\gamma-\frac{\partial\zeta}{\partial x}\cos\alpha-\frac{\partial\zeta}{\partial y}\cos\beta-\frac{\partial\zeta}{\partial z}\cos\gamma\right)^2.
\end{aligned}\right.\tag{6}$$

La quantité $1+\varepsilon$, déterminée par la formule (6), n'est autre chose que le rapport du rayon vecteur r à l'expression (3), c'est-à-dire le rapport entre les distances qui séparent les deux molécules infiniment voisines m et m', dans les deux états du corps solide. Par suite, la valeur numérique de ε servira de mesure à ce qu'on peut nommer la dilatation ou la condensation *linéaire* du corps suivant la direction du rayon vecteur r, savoir, à la dilatation linéaire, si ε est une quantité positive, et à la condensation ou contraction linéaire, dans le cas contraire.

Concevons à présent qu'à partir du point (x, y, z) on porte sur la droite qui forme, avec les demi-axes des coordonnées positives, les angles α, β, γ, une longueur équivalente à $1+\varepsilon$; et désignons par

$$x+\mathrm{x},\quad y+\mathrm{y},\quad z+\mathrm{z}$$

les coordonnées de l'extrémité de cette longueur. On aura

$$\frac{\mathrm{x}}{\cos\alpha}=\frac{\mathrm{y}}{\cos\beta}=\frac{\mathrm{z}}{\cos\gamma}=\pm(1+\varepsilon); \tag{7}$$

et la formule (6) donnera

$$\left\{\begin{aligned}&\left(\mathrm{x}-\frac{\partial\xi}{\partial x}\mathrm{x}-\frac{\partial\xi}{\partial y}\mathrm{y}-\frac{\partial\xi}{\partial z}\mathrm{z}\right)^2+\left(\mathrm{y}-\frac{\partial\eta}{\partial x}\mathrm{x}-\frac{\partial\eta}{\partial y}\mathrm{y}-\frac{\partial\eta}{\partial z}\mathrm{z}\right)^2\\&\qquad\qquad+\left(\mathrm{z}-\frac{\partial\zeta}{\partial x}\mathrm{x}-\frac{\partial\zeta}{\partial y}\mathrm{y}-\frac{\partial\zeta}{\partial z}\mathrm{z}\right)^2=1.\end{aligned}\right. \tag{8}$$

Cette dernière équation représente un ellipsoïde dont la construction suffit pour indiquer les rapports qui existent entre les dilatations ou condensations linéaires dans les différentes directions autour du point (x, y, z). Nous appellerons *dilatations* ou *condensations principales* celles qui correspondent aux trois axes de l'ellipsoïde, et parmi lesquelles on rencontre toujours les dilatations ou condensations *maximum* ou *minimum*. Les autres se trouvent symétriquement distribuées autour des trois axes de ce même ellipsoïde.

On peut aisément déduire des équations (6) et (8) les valeurs des variables ε et α, β, γ qui correspondent aux condensations et dilatations linéaires principales. En effet, si l'on pose, pour abréger,

$$(9) \qquad \left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^2 = \theta,$$

et, de plus,

$$(10) \qquad \begin{cases} A = \left(\frac{\partial\xi}{\partial x} - 1\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2, \\ B = \left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial y} - 1\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2, \\ C = \left(\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial z} - 1\right)^2; \end{cases}$$

$$(11) \qquad \begin{cases} D = \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\xi}{\partial z} + \left(\frac{\partial\eta}{\partial y} - 1\right)\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z} - 1\right), \\ E = \frac{\partial\xi}{\partial z}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} - 1\right) + \frac{\partial\eta}{\partial z}\frac{\partial\eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial z} - 1\right)\frac{\partial\zeta}{\partial x}, \\ F = \left(\frac{\partial\xi}{\partial x} - 1\right)\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y} - 1\right) + \frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y}, \end{cases}$$

les formules (6) et (8) se réduiront aux suivantes :

$$(12) \qquad \begin{cases} \theta = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma + 2D\cos\beta\cos\gamma \\ \qquad + 2E\cos\gamma\cos\alpha + 2F\cos\alpha\cos\beta, \end{cases}$$

$$(13) \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = 1.$$

Or, dans l'ellipsoïde représenté par l'équation (13), le rayon vecteur mené du centre à un point de la surface sera normal à cette surface, si les angles α, β, γ, formés par le même rayon vecteur avec les demi-axes des coordonnées positives, vérifient la formule

$$(14) \qquad \frac{A\cos\alpha + F\cos\beta + E\cos\gamma}{\cos\alpha} = \frac{F\cos\alpha + B\cos\beta + D\cos\gamma}{\cos\beta} = \frac{E\cos\alpha + D\cos\beta + C\cos\gamma}{\cos\gamma};$$

et, comme les trois fractions qui précèdent, quand elles deviennent égales entre elles, sont en même temps équivalentes au rapport

$$\frac{(A\cos\alpha + F\cos\beta + E\cos\gamma)\cos\alpha + (F\cos\alpha + B\cos\beta + D\cos\gamma)\cos\beta + (E\cos\alpha + D\cos\beta + C\cos\gamma)\cos\gamma}{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} = \theta,$$

il est clair que les valeurs de θ, α, β, γ correspondantes aux dilatations ou condensations principales seront déterminées par la formule

$$(15)\qquad \frac{A\cos\alpha+F\cos\beta+E\cos\gamma}{\cos\alpha}=\frac{F\cos\alpha+B\cos\beta+D\cos\gamma}{\cos\beta}=\frac{E\cos\alpha+D\cos\beta+C\cos\gamma}{\cos\gamma}=\theta,$$

jointe à l'équation

$$(16)\qquad \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

D'ailleurs on conclura de la formule (15)

$$(17)\qquad \left\{\begin{array}{l}(A-\theta)\cos\alpha+F\cos\beta+E\cos\gamma=0,\\ F\cos\alpha+(B-\theta)\cos\beta+D\cos\gamma=0,\\ E\cos\alpha+D\cos\beta+(C-\theta)\cos\gamma=0,\end{array}\right.$$

et, par suite,

$$(18)\qquad (A-\theta)(B-\theta)(C-\theta)-D^2(A-\theta)-E^2(B-\theta)-F^2(C-\theta)+2DEF=0.$$

Soient θ', θ'', θ''' les trois racines de cette dernière équation, et ε', ε'', ε''' les valeurs correspondantes de ε, en sorte qu'on ait

$$(19)\qquad \varepsilon'=\frac{1}{\sqrt{\theta'}}-1,\qquad \varepsilon''=\frac{1}{\sqrt{\theta''}}-1,\qquad \varepsilon'''=\frac{1}{\sqrt{\theta'''}}-1.$$

Chacune des trois quantités ε', ε'', ε''' représentera toujours, lorsqu'elle sera positive, une dilatation principale et, lorsqu'elle sera négative, une condensation principale prise avec le signe $-$. De plus on aura évidemment, en vertu de l'équation (18),

$$(20)\qquad \left\{\begin{array}{l}\theta'+\theta''+\theta'''=A+B+C,\\ \theta''\theta'''+\theta'''\theta'+\theta'\theta''=BC+CA+AB-D^2-E^2-F^2,\\ \theta'\theta''\theta'''=ABC-AD^2-BE^2-CF^2+2DEF.\end{array}\right.$$

Si l'on supposait les axes coordonnés parallèles aux droites menées par le point (x, y, z), et correspondantes aux dilatations ou condensations linéaires principales, l'équation (13) représenterait un ellipsoïde rapporté, non seulement à son centre, mais encore à ses axes. On aurait donc alors

$$(21)\qquad D=0,\qquad E=0,\qquad F=0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}=\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial z},\\ &\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial z}=\frac{\partial\xi}{\partial z}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial z}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial x},\\ &\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y}; \end{aligned}\right.$$

et comme l'équation (18) se réduirait à

$$(23)\qquad (A-\theta)(B-\theta)(C-\theta)=0,$$

on pourrait prendre

$$(24)\qquad \theta'=A,\qquad \theta''=B,\qquad \theta'''=C.$$

Par suite, la formule (12) donnerait

$$(25)\qquad \theta=\theta'\cos^2\alpha+\theta''\cos^2\beta+\theta'''\cos^2\gamma,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(26)\qquad \left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^2=\left(\frac{\cos\alpha}{1+\varepsilon'}\right)^2+\left(\frac{\cos\beta}{1+\varepsilon''}\right)^2+\left(\frac{\cos\gamma}{1+\varepsilon'''}\right)^2.$$

L'équation (26) sert à déduire la dilatation ou condensation, mesurée suivant un axe quelconque, des condensations ou dilatations principales, mesurées suivant trois axes qui se coupent à angles droits, quand on connaît les angles α, β, γ que forme le premier axe prolongé dans un certain sens avec les trois autres.

Outre les condensations et dilatations linéaires dont nous venons de parler, il peut être utile de considérer la condensation ou dilatation d'un très petit élément de volume qui renferme le point (x, y, z). Or, supposons que, en vertu du changement d'état du corps solide, ce petit élément ait varié dans le rapport de 1 à $1+\upsilon$. La valeur numérique de υ servira précisément à mesurer ce qu'on peut appeler la *dilatation* ou la *condensation du volume* au point (x, y, z), savoir la dilatation du volume, si la quantité υ est positive, et la condensation du volume dans le cas contraire. Ajoutons qu'il suffira, pour déterminer la quantité υ, de connaître les condensations ou dilatations linéaires principales, c'est-à-dire, en d'autres termes, les valeurs de ε', ε'', ε'''. En effet, concevons, pour fixer les idées, que le petit élément de volume ait été renfermé, dans le premier état du corps solide, sous une surface sphérique décrite avec un rayon infiniment petit désigné par ρ. Ce petit élément, qui avait alors pour mesure le produit

$$\tfrac{4}{3}\pi\rho^3,$$

prendra évidemment, après le changement d'état, la forme d'un ellipsoïde, dont les trois axes seront

$$\rho(1+\varepsilon'),\quad \rho(1+\varepsilon''),\quad \rho(1+\varepsilon'''),$$

et en conséquence il deviendra équivalent au produit

$$\tfrac{4}{3}\pi\rho^3(1+\varepsilon')(1+\varepsilon'')(1+\varepsilon''').$$

On aura donc

$$1+\upsilon=\frac{\frac{4}{3}\pi\rho^3(1+\varepsilon')(1+\varepsilon'')(1+\varepsilon''')}{\frac{4}{3}\pi\rho^3},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(27)\qquad 1+\upsilon=(1+\varepsilon')(1+\varepsilon'')(1+\varepsilon''')=\frac{1}{\sqrt{\theta'\theta''\theta'''}}.$$

En combinant cette dernière équation avec la troisième des formules (20), on trouvera

$$(28)\qquad \left(\frac{1}{1+\upsilon}\right)^2=\mathrm{ABC}-\mathrm{AD}^2-\mathrm{BE}^2-\mathrm{CF}^2+2\,\mathrm{DEF}.$$

Les équations (10), (11), (12), (17), (27) et (28) se simplifient, quand la forme du corps solide varie très peu dans le passage du premier état au second. En effet, si l'on considère les quantités

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta,\quad \varepsilon,\quad \upsilon,\quad \varepsilon',\quad \varepsilon'',\quad \varepsilon'''$$

comme infiniment petites du premier ordre, on tirera des équations dont il s'agit, en remplaçant θ par $(1+\varepsilon)^{-2}$, et négligeant les infiniment petits du second ordre ou d'un ordre plus élevé,

$$(29)\quad A = 1 - 2\frac{\partial\xi}{\partial x}, \qquad B = 1 - 2\frac{\partial\eta}{\partial y}, \qquad C = 1 - 2\frac{\partial\zeta}{\partial z},$$

$$(30)\quad D = -\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right), \qquad E = -\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial z}\right), \qquad F = -\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right);$$

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} \varepsilon = {} & \frac{\partial\xi}{\partial x}\cos^2\alpha + \frac{\partial\eta}{\partial y}\cos^2\beta + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\cos^2\gamma + \left(\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\cos\beta\cos\gamma \\ & + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial z}\right)\cos\gamma\cos\alpha + \left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\cos\alpha\cos\beta; \end{aligned}\right.$$

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} & 2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} - \varepsilon\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial\xi}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)\cos\gamma = 0, \\ & \left(\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\cos\alpha + 2\left(\frac{\partial\eta}{\partial y} - \varepsilon\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\cos\gamma = 0, \\ & \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial z}\right)\cos\beta + 2\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z} - \varepsilon\right)\cos\gamma = 0, \end{aligned}\right.$$

$$(33)\qquad v = \varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon''' = \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}.$$

Alors aussi l'élimination des angles α, β, γ entre les formules (32) produira l'équation

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} & 4\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} - \varepsilon\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial y} - \varepsilon\right)\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z} - \varepsilon\right) + \left(\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right) \\ & - \left(\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} - \varepsilon\right) - \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2\left(\frac{\partial\eta}{\partial y} - \varepsilon\right) - \left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z} - \varepsilon\right) = 0, \end{aligned}\right.$$

qui aura pour racines les quantités ε', ε'', ε''', et de laquelle on conclura

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} & \varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon''' = \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}, \\ & \varepsilon''\varepsilon''' + \varepsilon'''\varepsilon' + \varepsilon'\varepsilon'' = \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} \\ & \qquad - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2, \\ & \varepsilon'\varepsilon''\varepsilon''' = \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial z} - \frac{1}{4}\frac{\partial\xi}{\partial x}\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2 - \frac{1}{4}\frac{\partial\eta}{\partial y}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2 \\ & \qquad - \frac{1}{4}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right). \end{aligned}\right.$$

Si l'on supposait les axes coordonnés parallèles aux droites suivant lesquelles se mesurent les dilatations et condensations principales relatives au point (x, y, z), les conditions (21) ou (22) seraient vérifiées. On aurait donc, en négligeant les infiniment petits du second ordre ou d'un ordre plus élevé,

$$\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x} = 0; \tag{36}$$

et, comme par suite l'équation (34) se réduirait à

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} - \varepsilon\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial y} - \varepsilon\right)\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z} - \varepsilon\right) = 0, \tag{37}$$

on pourrait prendre

$$\varepsilon' = \frac{\partial\xi}{\partial x}, \qquad \varepsilon'' = \frac{\partial\eta}{\partial y}, \qquad \varepsilon''' = \frac{\partial\zeta}{\partial z}. \tag{38}$$

Dans la même supposition, la formule (31) donnerait

$$\varepsilon = \frac{\partial\xi}{\partial x}\cos^2\alpha + \frac{\partial\eta}{\partial y}\cos^2\beta + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\cos^2\gamma, \tag{39}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\varepsilon = \varepsilon'\cos^2\alpha + \varepsilon''\cos^2\beta + \varepsilon'''\cos^2\gamma. \tag{40}$$

Cette dernière se déduit immédiatement de l'équation (26), quand on considère ε, ε', ε'', ε''' comme des quantités infiniment petites.

Revenons au cas où les axes coordonnés sont dirigés suivant des droites quelconques. Alors, si l'on fait, pour abréger,

$$\left\{\begin{array}{lll} \mathcal{A} = \dfrac{\partial\xi}{\partial x}, & \mathcal{B} = \dfrac{\partial\eta}{\partial y}, & \mathcal{C} = \dfrac{\partial\zeta}{\partial z}, \\ 2\mathcal{D} = \dfrac{\partial\eta}{\partial z} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial y}, & 2\mathcal{E} = \dfrac{\partial\zeta}{\partial x} + \dfrac{\partial\xi}{\partial z}, & 2\mathcal{F} = \dfrac{\partial\xi}{\partial y} + \dfrac{\partial\eta}{\partial x}, \end{array}\right. \tag{41}$$

la formule (31) donnera

$$\left\{\begin{array}{l} \varepsilon = \mathcal{A}\cos^2\alpha + \mathcal{B}\cos^2\beta + \mathcal{C}\cos^2\gamma \\ \qquad + 2\mathcal{D}\cos\beta\cos\gamma + 2\mathcal{E}\cos\gamma\cos\alpha + 2\mathcal{F}\cos\alpha\cos\beta. \end{array}\right. \tag{42}$$

Concevons maintenant qu'à partir du point (x, y, z) on porte, sur la droite qui forme avec les demi-axes des coordonnées positives les angles α, β, γ, une longueur dont le carré représente la valeur numérique du rapport $\frac{1}{\varepsilon}$; et désignons par $x + \mathrm{x}$, $y + \mathrm{y}$, $z + \mathrm{z}$ les coordonnées de l'extrémité de cette longueur. On aura

$$\frac{\mathrm{x}}{\cos\alpha} = \frac{\mathrm{y}}{\cos\beta} = \frac{\mathrm{z}}{\cos\gamma} = \pm\sqrt{\pm\frac{1}{\varepsilon}}, \tag{43}$$

et l'on tirera de la formule (42)

$$\mathcal{A}\mathrm{x}^2 + \mathcal{B}\mathrm{y}^2 + \mathcal{C}\mathrm{z}^2 + 2\mathcal{D}\mathrm{yz} + 2\mathcal{E}\mathrm{zx} + 2\mathcal{F}\mathrm{xy} = \pm 1. \tag{44}$$

L'équation (44), semblable à la formule (29) de la page 71, appartient à une surface du second degré, dont le centre coïncide avec le point (x, y, z). Cette même équation représente un ellipsoïde, dans le cas où ε ne change pas de signe tandis que l'on fait varier les angles α, β, γ, et se réduit alors à

$$\mathcal{A}\mathrm{x}^2 + \mathcal{B}\mathrm{y}^2 + \mathcal{C}\mathrm{z}^2 + 2\mathcal{D}\mathrm{yz} + 2\mathcal{E}\mathrm{zx} + 2\mathcal{F}\mathrm{xy} = 1, \tag{45}$$

ou bien à

$$\mathcal{A}\mathrm{x}^2 + \mathcal{B}\mathrm{y}^2 + \mathcal{C}\mathrm{z}^2 + 2\mathcal{D}\mathrm{yz} + 2\mathcal{E}\mathrm{zx} + 2\mathcal{F}\mathrm{xy} = -1, \tag{46}$$

selon que l'on suppose ε constamment positif ou constamment négatif. Dans ce cas, il n'y aura, autour du point (x, y, z), que des dilatations linéaires, si ε est positif, et des condensations linéaires, si ε est négatif. Dans le cas contraire, l'ellipsoïde se trouvera remplacé par le système de deux hyperboloïdes conjugués, dont l'un, représenté par l'équation (45), comprendra les extrémités des rayons vecteurs dirigés dans les divers sens suivant lesquels le corps solide se sera dilaté, tandis que l'autre, représenté par l'équation (46), comprendra les extrémités des rayons vecteurs dirigés dans les divers sens suivant lesquels le corps solide se sera condensé. Ajoutons que, dans tous les cas possibles, les condensations ou dilatations *maximum* ou *minimum* correspondront évidemment à deux axes de l'ellipsoïde ou des deux hyperboloïdes. Cela posé, on pourra énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *Supposons que, par l'effet d'une cause quelconque, un corps solide ait passé d'un premier état naturel ou artificiel à un second état très peu différent du premier, et que, à partir d'un point donné de ce corps solide, on porte, sur chacun des demi-axes aboutissant au même point, une longueur équivalente à l'unité divisée par la racine carrée de la condensation ou dilatation linéaire mesurée suivant le demi-axe que l'on considère. Cette longueur sera le rayon vecteur d'un ellipsoïde qui aura pour centre le point* (x, y, z), *et dont les trois axes correspondront à trois dilatations ou condensations principales. Quant aux autres dilatations ou condensations, elles seront symétriquement distribuées autour de ces trois axes. Dans certains cas, l'ellipsoïde dont il s'agit se trouvera remplacé par deux hyperboloïdes à une nappe et à deux nappes, qui, étant conjugués l'un à l'autre, auront le même centre avec les mêmes axes, et seront touchés à l'infini par une même surface conique du second degré. Ces cas sont ceux où il y aura, autour du point donné, dilatation dans un sens, condensation dans un autre. Alors la surface conique dont nous venons de parler séparera la région dilatée, qui correspondra au premier hyperboloïde, de la région condensée qui correspondra au second, et les génératrices de cette surface conique indiqueront les directions suivant lesquelles il n'y aura ni dilatation ni condensation. Ajoutons que, parmi les condensations ou dilatations principales, on rencontrera toujours, si le corps est dilaté dans tous les sens, ou condensé dans tous les sens autour du point* (x, y, z), *un* maximum *et un* minimum *de dilatation, ou bien un* maximum *et un* minimum *de condensation ; et, si le contraire arrive, une dilatation* maximum *avec une condensation* maximum.

Il peut arriver que les trois condensations ou dilatations principales, ou au moins deux d'entre elles, deviennent équivalentes ou se réduisent à zéro. Alors l'ellipsoïde et les hyperboloïdes mentionnés dans le théorème précédent deviennent des surfaces de révolution ou des cylindres, et peuvent même se réduire à une sphère ou à un système de deux plans parallèles. Ainsi, en particulier, lorsque le corps solide est dilaté dans tous les sens ou condensé dans tous les sens, et que les condensations ou dilatations principales sont équivalentes, l'ellipsoïde se change en une sphère, et la condensation ou dilatation linéaire a une valeur constante, qui reste la même, dans toutes les directions autour du point (x, y, z). Dans ce cas, la condensation ou dilatation du volume est évidemment le triple de la condensation ou dilatation linéaire.