EXERCICES

DE

MATHÉMATIQUES,

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

INGÉNIEUR EN CHEF DES PONTS ET CHAUSSÉES, PROFESSEUR A L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE, PROFESSEUR ADJOINT A LA FACULTÉ DES SCIENCES, MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, CHEVALIER DE LA LÉGION D'HONNEUR.

SECONDE ANNÉE.

A PARIS,

CHEZ DE BURE FRÈRES, LIBRAIRES DU ROI ET DE LA BIBLIOTHÈQUE DU ROI, RUE SERPENTE, N° 7.

1827.

DE LA PRESSION OU TENSION
DANS UN CORPS SOLIDE.

Les géomètres qui ont recherché les équations d'équilibre ou de mouvement des lames ou des surfaces élastiques ou non élastiques ont distingué deux espèces de forces produites, les unes par la dilatation ou la contraction, les autres par la flexion de ces mêmes surfaces. De plus, ils ont généralement supposé, dans leurs calculs, que les forces de la première espèce, nommées *tensions*, restent perpendiculaires aux lignes contre lesquelles elles s'exercent. Il m'a semblé que ces deux espèces de forces pouvaient être réduites à une seule, qui doit constamment s'appeler *tension* ou *pression*, qui agit sur chaque élément d'une section faite à volonté, non seulement dans une surface flexible, mais encore dans un solide élastique ou non élastique, et qui est de la même nature que la pression hydrostatique exercée par un fluide en repos contre la surface extérieure d'un corps. Seulement la nouvelle pression ne demeure pas toujours perpendiculaire aux faces qui lui sont soumises, ni la même dans tous les sens en un point donné. En développant cette idée, je suis parvenu à reconnaître que la pression ou tension exercée contre un plan quelconque en un point donné d'un corps solide se déduit très aisément, tant en grandeur qu'en direction, des pressions ou tensions exercées contre trois plans rectangulaires menés par le même point. Cette proposition, que j'ai déjà indiquée dans le *Bulletin de la Société philomathique* de janvier 1823 (¹), peut être établie à l'aide des considérations suivantes.

(¹) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. II.

Si, dans un corps solide élastique ou non élastique, on vient à rendre rigide et invariable un petit élément de volume terminé par des faces quelconques, ce petit élément éprouvera sur ses différentes faces et en chaque point de chacune d'elles une pression ou tension déterminée. Cette pression ou tension sera semblable à la pression qu'un fluide exerce contre un élément de l'enveloppe d'un corps solide, avec cette seule différence que la pression exercée par un fluide en repos, contre la surface d'un corps solide, est dirigée perpendiculairement à cette surface de dehors en dedans, et indépendante en chaque point de l'inclinaison de la surface par rapport aux plans coordonnés, tandis que la pression ou tension exercée en un point donné d'un corps solide, contre un très petit élément de surface passant par ce point, peut être dirigée perpendiculairement ou obliquement à cette surface, tantôt de dehors en dedans, s'il y a condensation, tantôt de dedans en dehors, s'il y a dilatation, et peut dépendre de l'inclinaison de la surface par rapport aux plans dont il s'agit. Cela posé, soit v le volume d'une portion du corps devenue rigide, $s, s', s'', \ldots$ les aires des surfaces planes ou courbes qui recouvrent le volume v; x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point pris au hasard dans la surface s; p la pression ou tension exercée en ce point contre la surface; α, β, γ les angles que la perpendiculaire à la surface forme avec les demi-axes des coordonnées positives; enfin λ, μ, ν les angles formés avec les mêmes demi-axes par la direction de la force p. Si l'on projette sur les axes des x, y et z les pressions ou tensions diverses auxquelles la surface sera soumise, les sommes de leurs projections algébriques sur ces trois axes seront représentées par les intégrales

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \iint p \cos\lambda \cos\gamma \, dy\, dx, \\ \iint p \cos\mu \cos\gamma \, dy\, dx, \\ \iint p \cos\nu \cos\gamma \, dy\, dx, \end{array}\right.$$

tandis que les sommes des projections algébriques de leurs moments linéaires seront respectivement, si l'on prend pour centre des moments l'origine des coordonnées,

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} \iint p\,(y\cos\nu - z\cos\mu)\cos\gamma\,dy\,dx,\\ \iint p\,(z\cos\lambda - x\cos\nu)\cos\gamma\,dy\,dx,\\ \iint p\,(x\cos\mu - y\cos\lambda)\cos\gamma\,dy\,dx,\end{array}\right.$$

ou, si l'on transporte le centre des moments au point qui a pour coordonnées x_0, y_0, z_0,

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} \iint p[(y-y_0)\cos\nu - (z-z_0)\cos\mu]\cos\gamma\,dy\,dx,\\ \iint p[(z-z_0)\cos\lambda - (x-x_0)\cos\nu]\cos\gamma\,dy\,dx,\\ \iint p[(x-x_0)\cos\mu - (y-y_0)\cos\lambda]\cos\gamma\,dy\,dx.\end{array}\right.$$

Dans ces diverses intégrales, les limites des intégrations relatives aux variables x, y devront être déterminées d'après la forme du contour de la surface s, de manière qu'on ait entre ces limites

$$(4)\qquad \iint \cos\gamma\,dy\,dx = s.$$

Si la surface s devient plane, et le volume v très petit, en sorte que chacune de ses dimensions soit considérée comme une quantité infiniment petite du premier ordre, alors les variations que les trois produits

$$(5)\qquad p\cos\lambda,\quad p\cos\mu,\quad p\cos\nu.$$

éprouveront, dans le passage d'un point à un autre de la surface s, seront encore infiniment petites du premier ordre; et, en négligeant les infiniment petits du troisième ordre dans les valeurs des intégrales (1), on réduira ces intégrales aux quantités

$$(6)\qquad ps\cos\lambda,\quad ps\cos\mu,\quad ps\cos\nu.$$

Si d'ailleurs on fait coïncider le centre des moments avec un point du volume v, les intégrales (3) seront des quantités infiniment petites du troisième ordre, et il suffira de négliger, dans ces intégrales, les infiniment petits du quatrième ordre, pour qu'elles se réduisent aux produits

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{l} ps[(\eta - y_0)\cos\nu - (\zeta - z_0)\cos\mu], \\ ps[(\zeta - z_0)\cos\lambda - (\xi - x_0)\cos\nu], \\ ps[(\xi - x_0)\cos\mu - (\eta - y_0)\cos\lambda], \end{array}\right.$$

ξ, η, ζ désignant les rapports

$$(8)\qquad \frac{\iint x\cos\gamma\, dy\, dx}{s}, \quad \frac{\iint y\cos\gamma\, dy\, dx}{s}, \quad \frac{\iint z\cos\gamma\, dy\, dx}{s},$$

c'est-à-dire les coordonnées du centre de gravité de la surface s.

Soit maintenant m la masse infiniment petite comprise sous le volume v. Concevons en outre que la lettre φ représente la force accélératrice appliquée à cette masse, si le corps solide est en équilibre, et, dans le cas contraire, l'excès de la force accélératrice appliquée sur celle qui serait capable de produire le mouvement observé de la masse m. Enfin nommons X, Y, Z les projections algébriques de la force φ, et ξ_0, η_0, ζ_0 les coordonnées du centre de gravité de la masse m. Si l'on suppose que la force accélératrice φ reste la même en grandeur et en direction dans tous les points de la masse m, il devra y avoir équilibre entre la force motrice $m\varphi$ appliquée au point (ξ_0, η_0, ζ_0), et les forces auxquelles se réduisent les pressions ou tensions exercées sur les surfaces s, s', ... Donc les sommes des projections algébriques de toutes ces forces et de leurs moments linéaires sur les axes des x, y, z devront se réduire à zéro. Donc, si l'on se contente de placer un ou plusieurs accents à la suite des lettres p, λ, μ, ν, ξ, η, ζ, comprises dans les expressions (6) et (7), pour indiquer les nouvelles valeurs que prennent ces expressions, quand on passe de la surface s à la surface s', ou s'', ou s''', ..., on trouvera, en négligeant, dans les sommes des forces projetées, les infiniment petits du troisième ordre, et dans les sommes des moments linéaires projetés, les infiniment petits du quatrième ordre,

$$(9)\quad \begin{cases} ps\cos\lambda + p's'\cos\lambda' + \ldots + m\mathrm{X} = 0, \\ ps\cos\mu + p's'\cos\mu' + \ldots + m\mathrm{Y} = 0, \\ ps\cos\nu + p's'\cos\nu' + \ldots + m\mathrm{Z} = 0; \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} ps[(\eta - y_0)\cos\nu - (\zeta - z_0)\cos\mu] + p's'[(\eta' - y_0)\cos\nu' - (\zeta' - z_0)\cos\mu'] + \ldots \\ \qquad + m[(\eta_0 - y_0)\mathrm{Z} - (\zeta_0 - z_0)\mathrm{Y}] = 0, \\ ps[(\zeta - z_0)\cos\lambda - (\xi - x_0)\cos\nu] + p's'[(\zeta' - z_0)\cos\lambda' - (\xi' - x_0)\cos\nu'] + \ldots \\ \qquad + m[(\zeta_0 - z_0)\mathrm{X} - (\xi_0 - x_0)\mathrm{Z}] = 0, \\ ps[(\xi - x_0)\cos\mu - (\eta - y_0)\cos\lambda] + p's'[(\xi' - x_0)\cos\mu' - (\eta' - y_0)\cos\lambda'] + \ldots \\ \qquad + m[(\xi_0 - x_0)\mathrm{Y} - (\eta_0 - y_0)\mathrm{X}] = 0. \end{cases}$$

Or, la masse m étant elle-même infiniment petite du troisième ordre, les termes qui la renferment seront du troisième ordre dans les formules (9), du quatrième ordre dans les formules (10). On pourra donc négliger ces termes, et remplacer les formules dont il s'agit par les suivantes :

$$(11)\quad \begin{cases} ps\cos\lambda + p's'\cos\lambda' + p''s''\cos\lambda'' + p'''s'''\cos\lambda''' + \ldots = 0, \\ ps\cos\mu + p's'\cos\mu' + p''s''\cos\mu'' + p'''s'''\cos\mu''' + \ldots = 0, \\ ps\cos\nu + p's'\cos\nu' + p''s''\cos\nu'' + p'''s'''\cos\nu''' + \ldots = 0; \end{cases}$$

$$(12)\quad \begin{cases} ps[(\eta - y_0)\cos\nu - (\zeta - z_0)\cos\mu] + p's'[(\eta' - y_0)\cos\nu' - (\zeta' - z_0)\cos\mu'] + \ldots = 0, \\ ps[(\zeta - z_0)\cos\lambda - (\xi - x_0)\cos\nu] + p's'[(\zeta' - z_0)\cos\lambda' - (\xi' - x_0)\cos\nu'] + \ldots = 0, \\ ps[(\xi - x_0)\cos\mu - (\eta - y_0)\cos\lambda] + p's'[(\xi' - x_0)\cos\mu' - (\eta' - y_0)\cos\lambda'] + \ldots = 0. \end{cases}$$

Si l'on voulait tenir compte des variations que peuvent éprouver la force accélératrice φ et ses projections X, Y, Z, quand on passe d'un point à un autre de la masse m, il faudrait remplacer, dans les équations (9) et (10), les six quantités

$$m\mathrm{X}, \quad m\mathrm{Y}, \quad m\mathrm{Z};$$

$$m[(\eta_0 - y_0)\mathrm{Z} - (\zeta_0 - z_0)\mathrm{Y}],$$
$$m[(\zeta_0 - z_0)\mathrm{X} - (\xi_0 - x_0)\mathrm{Z}],$$
$$m[(\xi_0 - x_0)\mathrm{Y} - (\eta_0 - y_0)\mathrm{X}]$$

par six intégrales de la forme

$$\int\!\!\int\!\!\int \rho X\,dz\,dy\,dx, \quad \int\!\!\int\!\!\int \rho Y\,dz\,dy\,dx, \quad \int\!\!\int\!\!\int \rho Z\,dz\,dy\,dx;$$

$$\int\!\!\int\!\!\int \rho[(y-y_0)Z-(z-z_0)Y]\,dz\,dy\,dx,$$

$$\int\!\!\int\!\!\int \rho[(z-z_0)X-(x-x_0)Z]\,dz\,dy\,dx,$$

$$\int\!\!\int\!\!\int \rho[(x-x_0)Y-(y-y_0)X]\,dz\,dy\,dx;$$

ρ désignant la densité du corps solide au point (x, y, z), et les limites des intégrations étant relatives aux limites du volume v. Mais, comme les trois premières intégrales seraient des infiniment petits du troisième ordre, et les trois dernières des infiniment petits du quatrième ordre, on se trouverait encore ramené aux formules (11) et (12). Il reste à faire voir comment, à l'aide de ces formules, on peut découvrir les relations qui existent entre les pressions ou tensions exercées en un point donné d'un corps solide contre divers plans menés successivement par le même point.

Concevons d'abord que le volume v prenne la forme d'un prisme droit, dont les deux bases soient représentées par s et par s'. On aura $s'=s$; et si, les dimensions de chaque base étant considérées comme infiniment petites du premier ordre, la hauteur du prisme devient une quantité infiniment petite d'un ordre supérieur au premier, alors, en négligeant, dans les formules (11), les infiniment petits d'un ordre supérieur au second, on trouvera

$$(p\cos\lambda+p'\cos\lambda')s=0, \quad (p\cos\mu+p'\cos\mu')s=0, \quad (p\cos\nu+p'\cos\nu')s=0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$p'\cos\lambda'=-p\cos\lambda, \qquad p'\cos\mu'=-p\cos\mu, \qquad p'\cos\nu'=-p\cos\nu,$$

et l'on en conclura

$$p'=p,$$

$$\cos\lambda'=-\cos\lambda, \qquad \cos\mu'=-\cos\mu, \qquad \cos\nu'=-\cos\nu.$$

Ces dernières équations ont rigoureusement lieu dans le cas où la hauteur du prisme s'évanouit, et comprennent un théorème dont voici l'énoncé :

THÉORÈME I. — *Les pressions ou tensions exercées, en un point donné d'un corps solide, contre les deux faces d'un plan quelconque mené par ce point, sont des forces égales et directement opposées;* ce qu'il était facile de prévoir.

Soient maintenant

$$p', \quad p'', \quad p''' \tag{13}$$

les pressions ou tensions exercées au point (x, y, z) et du côté des coordonnées positives contre trois plans menés par ce point parallèlement aux plans coordonnés des y, z, des z, x et des x, y. Soient de plus λ', μ', ν'; λ'', μ'', ν''; λ''', μ''', ν''' les angles formés par les directions des forces p', p'', p''' avec les demi-axes des coordonnées positives. Enfin concevons que le volume v, prenant la forme d'un parallélépipède rectangle, soit renfermé entre les trois points menés par le point (x, y, z), et trois plans parallèles menés par un point très voisin $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$. Les pressions ou tensions, supportées par les faces du parallélépipède qui aboutiront à ce dernier point, seront à très peu près

$$p'\,\Delta y\,\Delta z, \quad p''\,\Delta z\,\Delta x, \quad p'''\,\Delta x\,\Delta y, \tag{14}$$

tandis que leurs projections algébriques sur les axes des x, y et z se réduiront sensiblement aux quantités

$$\left\{\begin{array}{lll} p'\cos\lambda'\,\Delta y\,\Delta z, & p''\cos\lambda''\,\Delta z\,\Delta x, & p'''\cos\lambda'''\,\Delta x\,\Delta y, \\ p'\cos\mu'\,\Delta y\,\Delta z, & p''\cos\mu''\,\Delta z\,\Delta x, & p'''\cos\mu'''\,\Delta x\,\Delta y, \\ p'\cos\nu'\,\Delta y\,\Delta z, & p''\cos\nu''\,\Delta z\,\Delta x, & p'''\cos\nu'''\,\Delta x\,\Delta y. \end{array}\right. \tag{15}$$

Quant aux pressions ou tensions supportées par les faces qui aboutissent au point (x, y, z), elles seront, en vertu du théorème I, respectivement égales, mais directement opposées à celles qui agissent sur les faces parallèles aboutissant au point $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$. Donc les projections algébriques de ces nouvelles tensions seront numériquement égales aux projections algébriques des trois autres, mais affectées de signes contraires, en sorte que chacune des formules (11) deviendra identique. Ajoutons que les centres de gravité des six faces du parallélépipède se confondront avec leurs centres de figure, et seront situés sur trois droites menées parallèlement aux axes des x, y, z par le centre du parallélépipède, c'est-à-dire par le point qui a pour coordonnées

$$x+\frac{1}{2}\Delta x,\qquad y+\frac{1}{2}\Delta y,\qquad z+\frac{1}{2}\Delta z.$$

Cela posé, il est clair que, si l'on prend ce dernier point pour centre des moments, la première des formules (12) donnera

$$\begin{aligned} p''\cos\nu''\,\Delta z\,\Delta x\,\frac{\Delta y}{2} &- p'''\cos\mu'''\,\Delta x\,\Delta y\,\frac{\Delta z}{2} \\ &-(-p''\cos\nu'')\,\Delta z\,\Delta x\,\frac{\Delta y}{2}+(-p'''\cos\mu''')\,\Delta x\,\Delta y\,\frac{\Delta z}{2}=0, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} &p''\cos\nu''=p'''\cos\mu'''.\\ &\quad\text{On trouvera de même}\\ &p'''\cos\lambda'''=p'\cos\nu',\\ &p'\cos\mu'=p''\cos\lambda''. \end{aligned}\right.$$

Comme les axes des x, y, z sont entièrement arbitraires, les équations (16) comprennent évidemment le théorème que nous allons énoncer :

THÉORÈME II. — *Si par un point quelconque d'un corps solide on mène deux axes qui se coupent à angles droits, et si l'on projette sur l'un de ces axes la pression ou tension supportée par un plan perpendiculaire à l'autre au point dont il s'agit, la projection ainsi obtenue ne variera pas quand on échangera entre eux ces mêmes axes.*

Concevons à présent que le volume v prenne la forme d'un tétraèdre dont trois arêtes coïncident avec trois longueurs infiniment petites portées à partir du point (x, y, z) sur des droites parallèles aux axes coordonnés. Considérons le point (x, y, z) comme étant le sommet de ce tétraèdre; désignons sa base par s, et soient α, β, γ les angles que forme, avec les demi-axes des coordonnées positives, une perpendiculaire élevée par un point de cette base, mais prolongée en dehors du tétraèdre. Les trois faces qui aboutissent au sommet du tétraèdre seront mesurées par les valeurs numériques des produits

$$s\cos\alpha, \quad s\cos\beta, \quad s\cos\gamma. \tag{17}$$

Cela posé, si l'on nomme p la pression ou tension supportée par la base du tétraèdre, et si l'on continue d'attribuer aux quantités p', p'', p''' les valeurs qu'elles ont reçues dans les équations (16), la première des formules (11) donnera évidemment

$$ps\cos\lambda - p'\cos\lambda' s\cos\alpha - p''\cos\lambda'' s\cos\beta - p'''\cos\lambda''' s\cos\gamma = 0$$

et, par suite,

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{l} p\cos\lambda = p'\cos\lambda'\cos\alpha + p''\cos\lambda''\cos\beta + p'''\cos\lambda'''\cos\gamma. \\ \text{On trouvera de même} \\ p\cos\mu = p'\cos\mu'\cos\alpha + p''\cos\mu''\cos\beta + p'''\cos\mu'''\cos\gamma, \\ p\cos\nu = p'\cos\nu'\cos\alpha + p''\cos\nu''\cos\beta + p'''\cos\nu'''\cos\gamma. \end{array}\right.$$

Donc, si l'on fait, pour abréger,

$$(19)\quad \left\{\begin{array}{l} A = p'\cos\lambda', \\ B = p''\cos\mu'', \\ C = p'''\cos\nu''', \\ D = p''\cos\nu'' = p'''\cos\mu''', \\ E = p'''\cos\lambda''' = p'\cos\nu', \\ F = p'\cos\mu' = p''\cos\lambda'', \end{array}\right.$$

on aura simplement

$$(20)\quad \left\{\begin{array}{l} p\cos\lambda = A\cos\alpha + F\cos\beta + E\cos\gamma, \\ p\cos\mu = F\cos\alpha + B\cos\beta + D\cos\gamma, \\ p\cos\nu = E\cos\alpha + D\cos\beta + C\cos\gamma. \end{array}\right.$$

Ces dernières équations font connaitre les relations qui subsistent, pour le point (x, y, z), entre les projections algébriques

$$(21)\qquad \begin{cases} A, & F, & E; \\ F, & B, & D; \\ E, & D, & C \end{cases}$$

des pressions p', p'', p''' exercées en ce point, du côté des coordonnées positives, contre trois plans parallèles aux plans coordonnés, et les projections algébriques

$$(5)\qquad p\cos\lambda,\quad p\cos\mu,\quad p\cos\nu$$

de la pression ou tension p exercée au même point contre un plan quelconque perpendiculaire à une droite qui; prolongée du côté où la force p se manifeste, forme, avec les demi-axes des coordonnées positives, les angles α, β, γ.

En partant des équations (20), il est facile de reconnaitre que, si le volume v, au lieu de présenter la forme d'un tétraèdre, est terminé par un nombre quelconque de faces planes, les formules (11) et (12) seront toujours vérifiées. En effet, ces différentes faces étant représentées par s, s', ..., nommons α, β, γ; α', β', γ'; ... les angles que des droites perpendiculaires aux plans de ces mêmes faces, et prolongées en dehors du volume v, forment avec les demi-axes des coordonnées positives. Il suffira, pour obtenir la première des formules (11), d'ajouter les équations (1) de la page 55, après les avoir multipliées respectivement par A, F, E, puis d'avoir égard à la première des formules (20), ainsi qu'aux formules analogues. On établirait, de même, la seconde et la troisième des formules (11), en ajoutant les équations (1) (p. 55), après les avoir respectivement multipliées par les coefficients F, B, D, ou par les coefficients E, D, C. Enfin, si l'on combine les formules (20) et autres du même genre, non seulement avec les équations (1) de la page 55, mais encore avec les équations (5) de la page 56, on parviendra sans difficulté aux formules (12).

On déduit aisément des formules (20) : 1° l'intensité de la force p;

2° l'angle compris entre la direction de cette force et la perpendiculaire au plan contre lequel elle s'exerce. En effet, si l'on ajoute ces formules, après avoir élevé au carré chacun de leurs membres, on trouvera

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} p^2 = &+ (A\cos\alpha + F\cos\beta + E\cos\gamma)^2 \\ &+ (F\cos\alpha + B\cos\beta + D\cos\gamma)^2 \\ &+ (E\cos\alpha + D\cos\beta + C\cos\gamma)^2. \end{aligned}\right.$$

De plus, si l'on nomme δ l'angle dont nous venons de parler, on aura évidemment

$$(23)\qquad \cos\delta = \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu,$$

et, par suite,

$$(24)\qquad \cos\delta = \frac{A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma + 2D\cos\beta\cos\gamma + 2E\cos\gamma\cos\alpha + 2F\cos\alpha\cos\beta}{p}.$$

Ajoutons que, si l'on remplace la force p par deux composantes, dont l'une soit comprise dans le plan que l'on considère, et l'autre perpendiculaire à ce plan, la seconde composante sera représentée, au signe près, par le produit

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} p\cos\delta = &A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma \\ &+ 2D\cos\beta\cos\gamma + 2E\cos\gamma\cos\alpha + 2F\cos\alpha\cos\beta. \end{aligned}\right.$$

Observons enfin que cette seconde composante sera une tension ou une pression suivant que la formule (25) aura pour second membre une quantité positive ou négative.

Supposons maintenant qu'à partir du point (x, y, z) on porte, sur la perpendiculaire au plan contre lequel agit la force p, une longueur r dont le carré représente la valeur numérique du rapport

$$(26)\qquad \frac{1}{p\cos\delta},$$

et désignons par $x + \mathrm{x}$, $y + \mathrm{y}$, $z + \mathrm{z}$ les coordonnées de l'extrémité de cette même longueur. On aura

$$\frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y}{\cos\beta} = \frac{z}{\cos\gamma} = \pm\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \pm r, \tag{27}$$

$$\frac{1}{p\cos\delta} = \pm r^2; \tag{28}$$

et, par conséquent, la formule (25) donnera

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = \pm 1. \tag{29}$$

Les variables x, y, z, comprises dans l'équation (29), sont les coordonnées de l'extrémité de la longueur r, comptées à partir du point (x, y, z) sur trois axes rectangulaires; et cette équation elle-même appartient à une surface du second degré qui a pour centre le point (x, y, z). Lorsque le polynôme

$$\left\{\begin{aligned} &A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma \\ &\qquad + 2D\cos\beta\cos\gamma + 2E\cos\gamma\cos\alpha + 2F\cos\alpha\cos\beta \end{aligned}\right. \tag{30}$$

conserve le même signe, quelles que soient les valeurs attribuées aux angles α, β, γ, alors l'équation (29), réduite à l'une des suivantes

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = 1, \tag{31}$$

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = -1, \tag{32}$$

représente un ellipsoïde. Mais, si le polynôme (30) change de signe, tandis que les angles α, β, γ varient, l'ellipsoïde dont il s'agit fera place au système de deux hyperboloïdes, dont l'un sera représenté par l'équation (31), l'autre par l'équation (32); et ces deux hyperboloïdes, dont l'un offrira une seule nappe, l'autre deux nappes distinctes, seront conjugués [1] entre eux, de sorte qu'ils auront le même centre avec les mêmes axes, et seront touchés à l'infini par une même surface conique du second degré. Ajoutons que, dans le premier cas, la force

$$\pm p\cos\delta = \frac{1}{r^2} \tag{33}$$

[1] *Voir*, relativement aux propriétés des hyperboloïdes conjugués, les *Leçons sur les applications du Calcul infinitésimal à la Géométrie*, p. 275 (*Œuvres de Cauchy*, S. II, T. V).

sera toujours une tension, si le polynôme (30) est positif, une pression s'il est négatif. Dans le second cas, au contraire, la force dont il s'agit sera tantôt une pression, tantôt une tension, selon que l'extrémité du rayon vecteur r se trouvera située sur la surface de l'un ou de l'autre hyperboloïde; et la même force s'évanouira toutes les fois que ce rayon vecteur sera dirigé suivant une génératrice de la surface conique ci-dessus mentionnée.

On démontré aisément que la normale, menée par l'extrémité du rayon vecteur r à la surface (31) ou (32), forme, avec les demi-axes des coordonnées positives, des angles dont les cosinus sont proportionnels aux trois polynômes

$$\begin{gathered} A\cos\alpha + F\cos\beta + E\cos\gamma, \\ F\cos\alpha + B\cos\beta + D\cos\gamma, \\ E\cos\alpha + D\cos\beta + C\cos\gamma. \end{gathered}$$

Donc cette normale sera dirigée suivant la même droite que le rayon vecteur, si l'on a

$$(34)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{A\cos\alpha + F\cos\beta + E\cos\gamma}{\cos\alpha} \\ &= \frac{F\cos\alpha + B\cos\beta + D\cos\gamma}{\cos\beta} \\ &= \frac{E\cos\alpha + D\cos\beta + C\cos\gamma}{\cos\gamma}. \end{aligned} \right.$$

La formule (34) se vérifie, en effet, lorsque le rayon vecteur coïncide avec l'un des axes de la surface (31) ou (32). Alors aussi on tire des équations (20), combinées avec la formule (34),

$$(35)\qquad \frac{\cos\lambda}{\cos\alpha} = \frac{\cos\mu}{\cos\beta} = \frac{\cos\nu}{\cos\gamma} = \pm\frac{\sqrt{\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu}}{\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma}} = \pm 1,$$

et il en résulte que la force p est elle-même dirigée suivant le rayon vecteur r, ou suivant son prolongement. Par conséquent, aux trois axes de la surface (31) ou (32) correspondent trois pressions ou tensions, dont chacune est perpendiculaire au plan contre lequel elle s'exerce. Nous les nommerons *pressions* ou *tensions principales*. Il est d'ailleurs facile de s'assurer qu'on trouve parmi elles la pression ou tension *maximum* et la pression ou tension *minimum;* car, si l'on égale à zéro la valeur de dp tirée de la formule (22), et si l'on a égard à l'équation

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \tag{36}$$

en vertu de laquelle une des trois variables α, β, γ devient fonction des deux autres considérées comme indépendantes, on sera immédiatement ramené à la formule (34).

Si, à partir du point (x, y, z), on portait, sur la perpendiculaire au plan contre lequel agit la force p, une longueur équivalente, non plus à la racine carrée du rapport $\pm\frac{1}{p\cos\delta}$, mais à la fraction $\frac{1}{p}$, en désignant par $x+\mathrm{x}$, $y+\mathrm{y}$, $z+\mathrm{z}$ les coordonnées de l'extrémité de cette longueur, on trouverait

$$\frac{\mathrm{x}}{\cos\alpha} = \frac{\mathrm{y}}{\cos\beta} = \frac{\mathrm{z}}{\cos\gamma} = \pm\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+\mathrm{z}^2} = \pm r, \tag{37}$$

$$\frac{1}{p} = r; \tag{37}$$

et, par suite, la formule (22) donnerait

$$(A\mathrm{x}+F\mathrm{y}+E\mathrm{z})^2 + (F\mathrm{x}+B\mathrm{y}+D\mathrm{z})^2 + (E\mathrm{x}+D\mathrm{y}+C\mathrm{z})^2 = 1. \tag{38}$$

L'équation (38) appartient à un ellipsoïde dont les axes correspondent aux valeurs de α, β, γ déterminées par la formule

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{A(A\cos\alpha+F\cos\beta+E\cos\gamma)+F(F\cos\alpha+B\cos\beta+D\cos\gamma)+E(E\cos\alpha+D\cos\beta+C\cos\gamma)}{\cos\alpha}\\ =&\frac{F(A\cos\alpha+F\cos\beta+E\cos\gamma)+B(F\cos\alpha+B\cos\beta+D\cos\gamma)+D(E\cos\alpha+D\cos\beta+C\cos\gamma)}{\cos\beta}\\ =&\frac{E(A\cos\alpha+F\cos\beta+E\cos\gamma)+D(F\cos\alpha+B\cos\beta+D\cos\gamma)+C(E\cos\alpha+D\cos\beta+C\cos\gamma)}{\cos\gamma}.\end{aligned}\right.$$

Or, celle-ci étant évidemment vérifiée par les valeurs de α, β, γ qui satisfont à la formule (34), on peut affirmer que les axes du nouvel ellipsoïde sont dirigés suivant les mêmes droites que les pressions ou tensions principales. On arriverait à la même conclusion en observant que les valeurs *maximum* et *minimum* du rayon vecteur, c'est-à-dire le grand axe et le petit axe de l'ellipsoïde, correspondent nécessairement, en vertu de l'équation (37), le premier, à la pression ou tension *minimum*, le second, à la pression ou tension *maximum*.

En résumant les diverses propositions que nous venons d'établir, on obtiendra le théorème suivant :

Théorème III. — *Si, après avoir fait passer par un point donné d'un corps solide un plan quelconque, on porte, à partir de ce point et sur chacun des demi-axes perpendiculaires au plan, deux longueurs équivalentes, la première à l'unité divisée par la pression ou tension exercée contre le plan, la seconde à l'unité divisée par la racine carrée de cette force projetée sur l'un des demi-axes que l'on considère, ces deux longueurs seront les rayons vecteurs de deux ellipsoides, dont les axes seront dirigés suivant les mêmes droites. A ces axes correspondront les pressions ou tensions* principales *dont chacune sera normale au plan qui la supportera, et parmi lesquelles on rencontrera toujours la pression ou tension* maximum, *ainsi que la pression ou tension* minimum. *Quant aux autres pressions ou tensions, elles seront distribuées symétriquement autour des axes des deux ellipsoïdes. Ajoutons que, dans certains cas, le second ellipsoïde se trouvera remplacé par deux hyperboloïdes conjugués. Ces cas sont ceux dans lesquels le système des pressions ou tensions principales se compose d'une tension et de deux pressions ou d'une pression et de deux tensions. Alors, si l'on substitue à la force qui agit contre chaque plan deux composantes rectangulaires, dont l'une soit normale au plan, cette dernière composante sera une tension ou une pression, suivant que le rayon vecteur perpendiculaire au plan appartiendra à l'un ou à l'autre des deux hyperboloïdes, et elle s'évanouira quand le rayon vecteur sera dirigé suivant une des génératrices de la surface conique du second degré qui touche les deux hyperboloïdes à l'infini.*

Concevons à présent que du centre du premier ellipsoïde on mène arbitrairement à la surface trois rayons vecteurs qui se coupent à angles droits. On prouvera sans peine que, si l'on divise l'unité par chacun de ces rayons vecteurs, la somme des carrés des quotients sera une quantité constante, égale à la somme qu'on obtiendrait en faisant coïncider les trois rayons vecteurs avec les trois demi-axes de l'ellipsoïde (*voir* les *Leçons sur les applications du Calcul infinitésimal à la Géométrie*, p. 274 et 275) [1]. De cette remarque, jointe au troisième théorème, on déduit immédiatement la proposition suivante :

Théorème IV. — *Si par un point donné d'un corps solide on fait passer trois plans rectangulaires entre eux, la somme des carrés des pressions ou tensions supportées par ces mêmes plans sera une quantité constante, égale à la somme des carrés des pressions ou tensions principales.*

Il peut arriver que les trois pressions ou tensions principales, ou au moins deux d'entre elles, deviennent équivalentes. Lorsque ces forces se réduisent à trois pressions égales, ou à trois tensions égales, les deux ellipsoïdes dont nous avons parlé se réduisent à deux sphères. Alors il y a égalité de pression ou de tension en tous sens, et chaque pression ou tension est perpendiculaire au plan qui la supporte. Il importe d'ailleurs d'observer que, de ces deux dernières conditions, la seconde ne peut être remplie qu'autant que la première l'est pareillement. En effet, si l'on suppose la force p constamment dirigée suivant la droite qui forme, avec les demi-axes des coordonnées positives, les angles α, β, γ, la formule (34) ou (35) subsistera pour une position quelconque de cette droite, et, par conséquent, pour toutes les valeurs de α, β, γ propres à vérifier l'équation (36). Or on tire de la formule (34) : 1° en supposant deux des quantités

$$\cos\alpha, \quad \cos\beta, \quad \cos\gamma$$

réduites à zéro, et la troisième à l'unité,

$$D = 0, \qquad E = 0, \qquad F = 0; \tag{40}$$

2° en ayant égard aux équations (40),

$$A = B = C. \tag{41}$$

[1] *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. V.

Par conséquent, dans l'hypothèse admise, les formules (20) deviendront

$$(42)\qquad p\cos\lambda = \mathrm{A}\cos\alpha,\qquad p\cos\mu = \mathrm{A}\cos\beta,\qquad p\cos\nu = \mathrm{A}\cos\gamma;$$

et, comme on tirera de ces dernières

$$(43)\qquad \frac{p}{\mathrm{A}} = \frac{\cos\alpha}{\cos\lambda} = \frac{\cos\beta}{\cos\mu} = \frac{\cos\gamma}{\cos\nu} = \pm\frac{\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}}{\sqrt{\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\nu}} = \pm 1,$$

$$(44)\qquad p = \pm\mathrm{A},$$

il est clair que la pression ou tension, désignée par p, restera la même dans tous les sens. C'est précisément ce qui a lieu quand on considère une masse fluide en équilibre.

Si deux pressions ou deux tensions principales devenaient égales entre elles, les deux ellipsoïdes mentionnés dans le théorème III se réduiraient à deux ellipsoïdes de révolution, dont le second se trouverait remplacé, dans certains cas, par un système de deux hyperboloïdes de révolution conjugués l'un à l'autre. Alors tous les plans menés par l'axe de révolution de ces ellipsoïdes ou hyperboloïdes supporteraient des pressions ou tensions équivalentes, dont chacune, étant perpendiculaire au plan qui lui serait soumis, pourrait être considérée comme une pression ou tension principale.

La supposition que nous venons de faire comprend le cas où les trois forces, qui composent le système des pressions ou tensions principales, seraient équivalentes, et se réduiraient à une pression et à deux tensions, ou bien encore à deux pressions et à une tension. Seulement il importe d'observer que, dans le dernier cas, le premier ellipsoïde serait remplacé par une sphère, et qu'en conséquence tous les plans menés par le point (x, y, z) supporteraient des pressions ou tensions équivalentes, mais dirigées, les unes suivant des droites perpendiculaires, et les autres suivant des droites obliques à ces mêmes plans.

Généralement, toutes les fois qu'une tension principale deviendra équivalente à une pression principale, les plans menés par l'axe perpendiculaire aux directions de ces deux forces supporteront des pressions ou tensions équivalentes, mais qui resteront obliques aux plans dont il s'agit, tant qu'elles seront distinctes de ces mêmes forces.

On peut encore supposer qu'une ou deux des tensions ou pressions principales se réduisent à zéro, ou qu'elles s'évanouissent toutes. Dans le premier cas, les ellipsoïdes ou hyperboloïdes, mentionnés dans le troisième théorème, se transformeront en cylindres droits qui auront pour bases des ellipses ou des hyperboles conjuguées. Dans le second cas, chacun de ces cylindres se trouvera remplacé par deux plans parallèles. Dans le troisième cas, la pression ou tension, exercée contre un plan quelconque mené par le point (x, y, z), se réduira toujours à zéro.

Les formules précédemment obtenues se simplifient lorsqu'on prend pour axes coordonnés des droites parallèles aux directions des pressions ou tensions principales correspondantes au point (x, y, z). Alors, en effet, la surface, que représente l'équation (29), doit être une surface du second degré rapportée, non seulement à son centre, mais encore à ses axes; et l'on doit avoir, en conséquence,

$$D = 0, \qquad E = 0, \qquad F = 0. \tag{40}$$

Cela posé, les valeurs numériques des quantités A, B, C représenteront évidemment les pressions ou tensions principales, et les formules (20), (22), (25) se réduiront à

$$p\cos\lambda = A\cos\alpha, \qquad p\cos\mu = B\cos\beta, \qquad p\cos\nu = C\cos\gamma, \tag{45}$$

$$p^2 = A^2\cos^2\alpha + B^2\cos^2\beta + C^2\cos^2\gamma, \tag{46}$$

$$p\cos\delta = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma, \tag{47}$$

tandis que les équations (29) et (38) deviendront

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = \pm 1, \tag{48}$$

$$A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = 1. \tag{49}$$

Les équations (46) et (47) font connaître les relations qui existent : 1° entre les pressions ou tensions principales, et la pression ou tension p supportée par un plan quelconque; 2° entre les trois premières forces et les projections de la dernière sur une droite perpendiculaire au plan dont il s'agit. Les angles α, β, γ compris dans ces mêmes équations sont précisément les angles que forme la perpendiculaire au plan avec les axes suivant lesquels sont dirigées les pressions ou tensions principales.

Dans le cas particulier où l'on considère uniquement des points situés dans le plan des x, y, et où l'on fait abstraction de l'une des dimensions du corps solide, les formules (45), (46), (47), (48), (49) peuvent être remplacées par les suivantes :

$$p\cos\lambda = A\cos\alpha, \qquad p\sin\lambda = B\sin\alpha, \tag{50}$$

$$p^2 = A^2\cos^2\alpha + B^2\sin^2\alpha, \tag{51}$$

$$p\cos\delta = A\cos^2\alpha + B\sin^2\alpha, \tag{52}$$

$$Ax^2 + By^2 = \pm 1, \tag{53}$$

$$A^2x^2 + B^2y^2 = 1. \tag{54}$$

Alors aussi les ellipsoïdes ou hyperboloïdes, mentionnés dans les théorèmes II et III, se réduisent à des ellipses ou à des hyperboles conjuguées, représentées par les équations (53) et (54).

Dans d'autres articles, je ferai voir comment on peut déduire des principes ci-dessus établis les équations qui expriment l'état d'équilibre ou le mouvement intérieur d'un corps solide élastique ou non élastique.

ADDITION A L'ARTICLE PRÉCÉDENT.

Les valeurs de $p\cos\lambda$, $p\cos\mu$, $p\cos\nu$, données par les formules (20) de l'article précédent, sont entièrement semblables aux valeurs des composantes rectangulaires de la force qui solliciterait un point matériel placé en présence de plusieurs centres fixes d'attraction ou de répulsion, et très peu écarté d'une position dans laquelle il restait en équilibre au milieu des centres dont il s'agit. En effet, concevons que le point matériel, après avoir coïncidé, dans la position d'équilibre, avec l'origine des coordonnées, ait été transporté à une distance très petite et désignée par ρ. Soient d'ailleurs

r, r', ... les rayons vecteurs menés de l'origine aux divers centres fixes;

R, R', ... les forces d'attraction ou de répulsion qui, émanant des mêmes centres, sollicitaient le point matériel dans la position d'équilibre;

P la résultante de celles auxquelles ce point est soumis après son déplacement.

Soient enfin

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma;\qquad a,\ b,\ c;\qquad a',\ b',\ c';\qquad \ldots;\qquad \lambda,\ \mu,\ \nu$$

les angles que forment avec les demi-axes des coordonnées positives : 1° le rayon vecteur ρ; 2° les rayons vecteurs r, r', ...; 3° la direction de la force P. En supposant le point matériel ramené à la position d'équilibre, on établira sans peine les équations

$$(1)\qquad \Sigma(\pm \mathrm{R}\cos a) = 0,\qquad \Sigma(\pm \mathrm{R}\cos b) = 0,\qquad \Sigma(\pm \mathrm{R}\cos c) = 0,$$

la lettre Σ indiquant une somme de termes semblables, mais relatifs aux divers centres fixes, et le signe $\pm$ devant être réduit, tantôt au signe $-$, tantôt au signe $+$, suivant que la force R sera répulsive ou attractive. Soit maintenant $f(r)$ la fonction de la distance r qui mesure la force R. Tandis que le point matériel sera transporté de l'origine à l'extrémité du rayon ρ, les quantités r, R, a, b, c prendront des accroissements correspondants que nous désignerons à l'aide de la caractéristique Δ, et l'on aura évidemment

$$(2)\quad \begin{cases} (r+\Delta r)\cos(a+\Delta a) = r\cos a - \rho\cos\alpha, \\ (r+\Delta r)\cos(b+\Delta b) = r\cos b - \rho\cos\beta, \\ (r+\Delta r)\cos(c+\Delta c) = r\cos c - \rho\cos\gamma; \end{cases}$$

$$(3)\quad R+\Delta R = f(r+\Delta r);$$

$$(4)\quad \begin{cases} P\cos\lambda = \Sigma[\pm(R+\Delta R)\cos(a+\Delta a)], \\ P\cos\mu = \Sigma[\pm(R+\Delta R)\cos(b+\Delta b)], \\ P\cos\nu = \Sigma[\pm(R+\Delta R)\cos(c+\Delta c)]. \end{cases}$$

On trouvera, par suite,

$$(5)\quad \begin{cases} (r+\Delta r)^2 = (r\cos a - \rho\cos\alpha)^2 + (r\cos b - \rho\cos\beta)^2 + (r\cos c - \rho\cos\gamma)^2 \\ \qquad = r^2 - 2r\rho(\cos a\cos\alpha + \cos b\cos\beta + \cos c\cos\gamma) + \rho^2; \end{cases}$$

puis, en considérant la quantité ρ comme infiniment petite du premier ordre, et négligeant les infiniment petits du second ordre, on conclura des formules (2), (3), (5)

$$(6)\quad \Delta r = -\rho(\cos a\cos\alpha + \cos b\cos\beta + \cos c\cos\gamma);$$

$$(7)\quad R+\Delta R = f(r) + f'(r)\,\Delta r = R + f'(r)\,\Delta r;$$

$$(8)\quad \begin{cases} \cos(a+\Delta a) = \dfrac{r\cos a - \rho\cos\alpha}{r+\Delta r} = \cos a - \rho\dfrac{\cos\alpha}{r} - \dfrac{\cos a}{r}\Delta r, \\ \cos(b+\Delta b) = \dfrac{r\cos b - \rho\cos\beta}{r+\Delta r} = \cos b - \rho\dfrac{\cos\beta}{r} - \dfrac{\cos b}{r}\Delta r, \\ \cos(c+\Delta c) = \dfrac{r\cos c - \rho\cos\gamma}{r+\Delta r} = \cos c - \rho\dfrac{\cos\gamma}{r} - \dfrac{\cos c}{r}\Delta r. \end{cases}$$

Cela posé, en ayant égard aux équations (1), on reconnaîtra que les formules (4) peuvent être réduites à

$$(9)\quad \begin{cases} P\cos\lambda = \Sigma\left\{\pm\left[f'(r) - \frac{f(r)}{r}\right]\cos a\,\Delta r \mp \frac{f(r)}{r}\rho\cos\alpha\right\}, \\ P\cos\mu = \Sigma\left\{\pm\left[f'(r) - \frac{f(r)}{r}\right]\cos b\,\Delta r \mp \frac{f(r)}{r}\rho\cos\beta\right\}, \\ P\cos\nu = \Sigma\left\{\pm\left[f'(r) - \frac{f(r)}{r}\right]\cos c\,\Delta r \mp \frac{f(r)}{r}\rho\cos\gamma\right\}; \end{cases}$$

puis, en remettant pour Δr sa valeur tirée de la formule (6), et faisant, pour abréger,

$$(10)\quad \begin{cases} A = \rho\,\Sigma\left\{\mp\left[f'(r) - \frac{f(r)}{r}\right]\cos^2 a \mp \frac{f(r)}{r}\right\}, \\ B = \rho\,\Sigma\left\{\mp\left[f'(r) - \frac{f(r)}{r}\right]\cos^2 b \mp \frac{f(r)}{r}\right\}, \\ C = \rho\,\Sigma\left\{\mp\left[f'(r) - \frac{f(r)}{r}\right]\cos^2 c \mp \frac{f(r)}{r}\right\}; \end{cases}$$

$$(11)\quad \begin{cases} D = \rho\,\Sigma\left\{\mp\left[f'(r) + \frac{f(r)}{r}\right]\cos b\cos c\right\}, \\ E = \rho\,\Sigma\left\{\mp\left[f'(r) + \frac{f(r)}{r}\right]\cos c\cos a\right\}, \\ F = \rho\,\Sigma\left\{\mp\left[f'(r) + \frac{f(r)}{r}\right]\cos a\cos b\right\}, \end{cases}$$

on trouvera définitivement

$$(12)\quad \begin{cases} P\cos\lambda = A\cos\alpha + F\cos\beta + E\cos\gamma, \\ P\cos\mu = F\cos\alpha + B\cos\beta + D\cos\gamma, \\ P\cos\nu = E\cos\alpha + D\cos\beta + C\cos\gamma. \end{cases}$$

Les formules (12), ainsi que plusieurs propositions qui s'en déduisent et qui sont analogues aux théorèmes I, II, III du précédent article, sont dues à M. Fresnel, qui les a données dans ses *Recherches sur la double réfraction*.