Trave continua
Trattazione grafica -

Ci riferiamo ad una trave continua a sezione costante e ci proponiamo di determinare le ordinate momenti sugli appoggi utilizzando le proprietà del secondo poligono funicolare precedentemente definito.

È già noto che una campata intermedia della trave continua si comporta come una trave imperfettamente incastrata agli estremi ora studiata; per le campate estreme, se gli appoggi estremi sono semplici, sarà noto (ed in particolare nullo) il momento flettente sull'appoggio stesso: da esso si potrà dedurre una condizione per il secondo poligono funicolare, il quale poi servirà per determinare la tangente sull'appoggio.

Trattando graficamente ciascuna campata come trave imperfettamente incastrata agli estremi dovremo tracciare il secondo poligono funicolare ad essa relativo: che, con i suoi lati estremi, dà le tangenti sugli appoggi: ora per la continuità della trave i vari secondi poligoni funicolari delle varie campate debbono essere tali che i lati di estremità di uno di essi relativi ad una campata, coincidano con i lati contigui dei poligoni relativi alle campate adiacenti poichè sugli appoggi, come in ogni altro punto della trave, la tangente alla linea elastica deve essere unica, ciò significa che il primo lato del secondo poligono funicolare relativo ad una campata deve coincidere con il quarto lato dell' analogo poligono relativo alla campata precedente, il quarto lato del secondo poligono funicolare della campata generica deve coincidere con il primo lato dell' analogo poligono relativo alla campata seguente, e così via.

Tutti i vari poligoni funicolari relativi alle varie campate vengono così a riunirsi in un unico poligono che può chiamarsi secondo <u>poligono funicolare relativo a tutta la trave continua</u>.

Perchè sia possibile un tale raccordo occorre che per tutte le campate si adotti uno stesso rapporto di affinità $\xi = \frac{EI}{H \cdot \lambda_1 \times \lambda_2}$ affinchè le inclinazioni di tutte le tangenti sugli appoggi siano portate nella stessa scala. Si adotterà quindi una scala delle forze e si faranno tutte le superficie semplici dei momenti con un'unica distanza polare H. Occorrerà ancora che il prodotto $\lambda_1 \lambda_2$ sia lo stesso per tutte le campate. Con tali scelte il rapporto ξ risulterà lo stesso per tutte le campate (si ricordi che essendo la trave a sezione costante I è lo stesso per tutte le campate).

Converrà inoltre scegliere il prodotto $\lambda_1 \lambda_2$ in modo che almeno per una campata le ordinate momenti d'incastro siano eguali ai seguenti staccati sulle verticali a e b degli appoggi rispettivamente dai primi e dagli ultimi due lati del secondo poligono funicolare relativo a quella campata.

Se indichiamo con l_0 la lunghezza della prescelta campata, cioè se si sceglie $\lambda_1 = l_0$, per una campata di diversa lunghezza l_1 si dovranno applicare nei tre baricentri delle tre aeree (S) (1) e (2) le forze

$$\eta_m \frac{l_1}{l_0} \quad ; \quad \frac{1}{2}\eta' \frac{l_1}{l_0} \quad ; \quad \frac{1}{2}\eta'' \frac{l_1}{l_0}$$

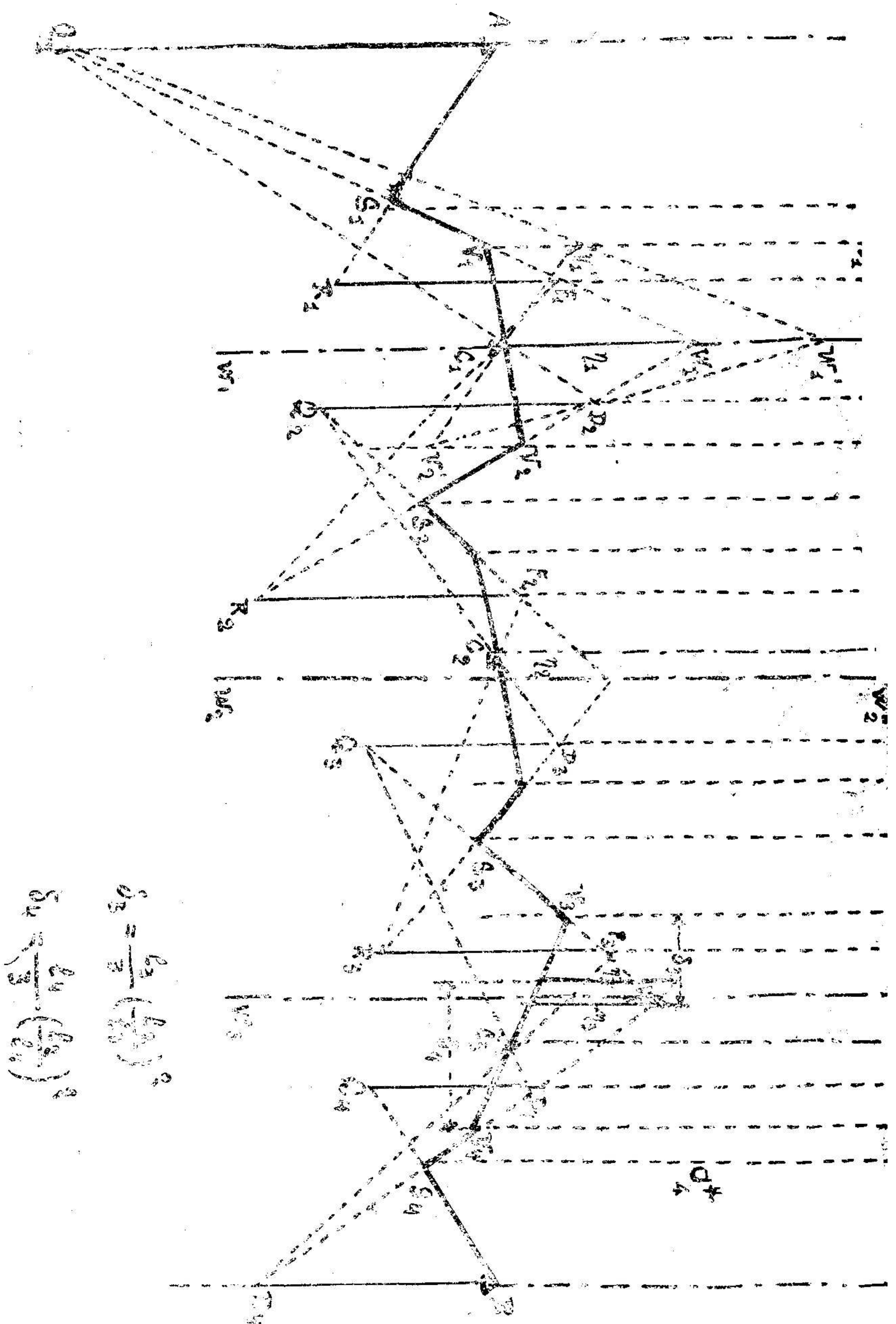
in tal caso risulta (confronta col caso precedente)

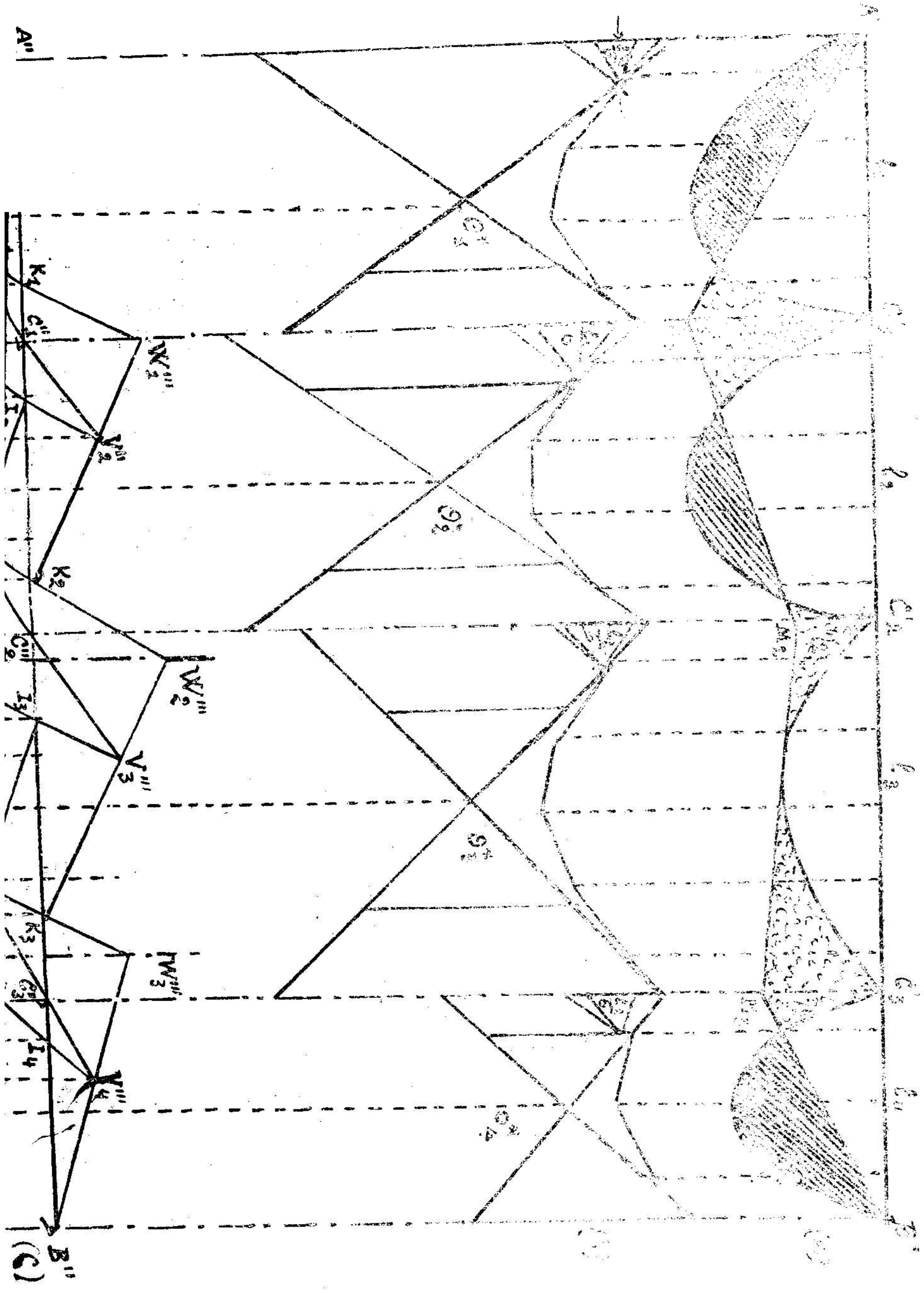
$$A_1M = \frac{\eta' l_1^2}{6\lambda_2 l_0} \qquad B_1N = \frac{\eta'' l_1^2}{6\lambda_2 l_0}$$

ed avendo scelto $\lambda_2 = \frac{l_0}{6}$ sarà

$$A_1M = \eta'\left(\frac{l_1}{l_0}\right)^2 \qquad B_1N = \eta''\left(\frac{l_2}{l_0}\right)^2$$

Se si costruiscono dalla parte degli appoggi le verticali che distano dalle trisecanti di $\frac{1}{3}\, l_1 \left(\frac{l_0}{l_1}\right)^2$; i





seguenti che vi intercettano sopra il primo ed il secondo ovvero il terzo e quarto lato del secondo poligono funicolare risultano rispettivamente eguali a η' e η''. È utile osservare che nel caso, comune in pratica, che tutte le campate intermedie della trave sono di lunghezza l_0 eguale e le campate esterne di lunghezza differente prendendo $\frac{l_0^2}{6} = \lambda_1 \lambda_2$ le ordinate che risultano determinate sulle verticali del 2° e del penultimo appoggio dai prolungamenti dei lati intermedi del 2° poligono funicolare relativo alla 2ª ed alla penultima campata rappresentano senz'altro le ordinate momenti sugli appoggi stessi.

Scelte dunque convenientemente le basi di riduzione λ_1 ed λ_2 si costruiranno le incrociate per tutte le singole campate, così pure si costruiranno per tutte le campate le <u>verticali trisecanti</u>. Se uno degli estremi della trave è semplicemente appoggiato, senza sbalzo, nella campata adiacente interessa soltanto la trisecante più lontana dall'appoggio di estremità.

Noi supponiamo fissati "a priori" i cedimenti degli appoggi i quali saranno riportati nel disegno tenendo conto dello stabilito rapporto di affinità. Riferiamoci per quanto segue ad una trave continua a 4 campate di cui le due prime siano eguali, e le altre due di lunghezze differenti con appoggi semplici di estremità, rappresentata nelle pagine 244 e 245 - Supponiamo che la campata per la quale $l=l_0$ sia la seconda, cioè $l_0=l_2$

Nella indicata tavola sono tracciate in a) le superficie dei momenti per le varie campate, in b) sono rappresentate le incrociate, ottenute riducendo le aeree del diagramma delle curvature (affine a quello del momento flettente, essendo la sezione costante) nella base $\lambda_1=l_2$ e connettendole con distanza polare eguale a $\frac{l_2}{6}$.

Siano C_1 C_2...... gli appoggi intermedi e siano η_1, η_2... le ordinate momenti sopra gli appoggi stessi ridotte in base H.

Se dal primo appoggio di estremità a sinistra A portiamo verticalmente in basso un segmento eguale a quello intercetto fra le incrociate sulla stessa verticale otteniamo un punto Q_1 per il quale certo deve passare il secondo lato del secondo poligono funicolare. Per Q_1 si tiri una retta arbitraria Q_1W_1' la quale incontra in V_1' la trisecante destra della prima campata; se la retta $Q_1V_1'W_1'$ fosse il detto secondo lato del secondo poligono funicolare, il terzo lato sarebbe $V_1'C_1$, questo incontra in V_2' la trisecante sinistra della seconda campata e perciò il quarto lato dovrebbe passare per V_2'.

Indichiamo ora con W_2' l'intersezione di questo lato con il secondo: notiamo che il triangolo funicolare costituito dal secondo, terzo e quarto lato connette le forze: $\frac{1}{2} q_1 \frac{l_1}{l_2}$ e $\frac{1}{2} q_2$ agenti secondo la trisecante di destra della prima campata e rispettivamente secondo la trisecante di sinistra della 2ª campata.

Tali forze stanno tra loro nel rapporto $\frac{l_1}{l_2}$. Il punto W_2' sopra definito si trova sulla retta di azione della risultante di queste due forze perciò sulla verticale che divide la distanza fra le due trisecanti contigue all'appoggio C_1 in due parti che tra loro stanno nel rapporto inverso di quello dell'intensità delle forze componenti, cioè nel rapporto: $\frac{l_1}{l_2}$.

Una tale verticale detta <u>controverticale di appoggio</u>, che indicheremo con v_1, è perfettamente individuata da questo rapporto, la sua posizione non dipende dai carichi esterni, ma soltanto dalle dimensioni delle campate adiacenti, poichè essa divide la distanza $\frac{1}{3} l_1 + \frac{1}{3} l_2$ tra le due trisecanti adiacenti all'appoggio C_1 nel rapporto $\frac{\frac{1}{3} l_2}{\frac{1}{3} l_1}$, essa dista dalla trisecante di destra della prima campata di $\frac{1}{3} l_2$ e di $\frac{1}{3} l_1$ dalla trisecante di sinistra della 2ª campata.

La controverticale di appoggio è sempre molto vicina alla verticale per l'appoggio e coincide con essa quando le due campate sono simmetriche rispetto alla verticale dell'appoggio comune. (Nella tavola le controverticali sono tracciate a tratto e punto in essa essendo $l_1 = l_2$ la prima controverticale coincide con la verticale per C_1).

Osserviamo che, avendo condotto ad arbitrio il lato $Q_1 V_1' W_1'$, il triangolo $V_1' W_1' V_2'$ può venire deformato facendo ruotare il lato arbitrario intorno al punto Q_1. Allora i tre vertici si spostano rispettivamente sulle verticali V_1'', W_1, V_2' ed il lato intermedio ruota intorno all'appoggio C_1, quindi per il teorema dei triangoli omologici, noto dalla geometria proiettiva, il terzo lato ruota attorno al punto D_2 appartenente alla retta degli altri due centri di rotazione Q_1 e C_1, perciò il punto D_2, ricavato col triangolo funicolare di tentativo appartiene al quarto lato del secondo poligono funicolare; di tale lato conosciamo dunque un punto. Se da D_2 portiamo verticalmente in basso il segmento $D_2 Q_2$ eguale a quello staccato dalle incrociate della seconda campata sulla stessa verticale per D_2 otteniamo in Q_2 un punto per il quale deve certo passare il quinto lato del secondo poligono funicolare e si potrebbe ora partire da Q_2 per operare, rispetto alla seconda campata, come si è operato per la prima partendo da Q_1.

È opportuno indicare, prima di procedere oltre, un'altra costruzione del punto D_2: innanzi tutto osserviamo che la verticale per D_2 non dipende dai carichi esterni, ossia variando il carico sulla prima campata, D_2 si sposta sempre sulla stessa verticale. Infatti se sulla prima campata varia il carico insistente varierà il segmento che le relative incrociate staranno sulla verticale dell'appoggio A e perciò varia la posizione di Q_1, sulla stessa verticale. Consideriamo ora il quadrilatero completo costituito dai lati del triangolo di tentativo $V'_1 W'_1 V'_2$ sopra descritto e dalla retta (asse di omologia) $Q_1 C_1 D_2$: i suoi sei vertici sono $Q_1 V'_1 C_1 W'_1 D_2 V'_2$.

Esso può variare perchè Q_1 si può spostare sulla verticale di A ed anche perchè il lato $Q_1 V'_1 W'_1$ è una retta condotta per Q_1 ad arbitrio. Ma da quanto precede risulta che durante un tale spostamento il vertice V'_1 si sposta sulla trisecante V''_1 della prima campata; C_1 resta sempre sulla verticale di appoggio: W'_1 resta sempre sulla controverticale di appoggio; V'_2 si sposta sulla trisecante V'_2 della seconda campata, ossia cinque dei sei vertici del quadrilatero si spostano, mentre esso si deforma, restando sulle rispettive verticali: se ne deduce che anche il sesto vertice D_2, spostandosi, resterà sulla verticale passante per una sua posizione (ciò per un noto teorema di geometria proiettiva). Dunque restando dimostrato che la verticale per D_2 ha una posizione fissa, indipendente dai carichi, noi possiamo determinarla, una volta tanto, costruendo il quadrilatero mobile suddetto in una sua posizione particolare. ciò si può fare conducendo (come nella tavola è stato fatto in c)) una orizzontale qualunque la quale incontra la verticale degli appoggi nei punti A'' C_1'' .... B'' (essa si può considerare come l'asse della trave trasportato in un'altra posizione per maggiore chiarezza della figura) poi conducendo per A'' una retta ad arbitrio (distinta dalla orizzontale), la quale incontra la trisecante destra V_1' della prima campata in un punto V_1'' e la controverticale di appoggio W_1 in un punto W_1''. poi si tira la retta V_1'' C_1'' fino ad incontrare in V_2'' la trisecante sinistra V_2' della seconda campata. infine si conduce la retta V_2'' W_1'' la quale incontra la orizzontale A'' C_1'' C_2'' .... in un punto I_2 che, per le già viste proprietà del quadrilatero considerato, appartiene alla verticale fissa del punto D_2.

tale punto, la cui posizione sull'asse della trave non dipende dai carichi estremi, si dice punto fisso e precisamente punto fisso di sinistra della seconda campata.

Già si disse, poco sopra, che per proseguire il secondo poligono funicolare si deve poi, partendo da Q_2, procedere nella seconda campata come già si procedette nella prima; partendo da Q_2 si troverebbe così nella terza campata un punto D_3 (analogo a D_2) per il quale deve passare il settimo lato del secondo poligono funicolare.

Anche D_3, per le stesse ragioni già viste per D_2, al variare dei carichi si sposta in altezza, restando sempre sulla stessa verticale.

Perciò anche nella terza campata si ha un punto fisso di sinistra I_3, che si ottiene partendo da I_2 ed operando come si era fatto per ottenere I_2 partendo da A". Così pure, se si opera nello stesso modo, partendo da I_3 si trova I_4, punto fisso di sinistra della quarta campata, che è l'ultima nel caso speciale qui considerato. Se le campate fossero in numero maggiore non si avrebbe che da proseguire fino ad avere ottenuto il punto fisso di sinistra dell'ultima campata.

Ottenuti questi punti fissi di sinistra I_1, I_2 ecc.

e segnate le verticali rispettive, il secondo poligono funicolare può essere completato come segue: trovato il punto Q_1 nel modo già detto, proiettando Q_1 dall'appoggio C_1 sulla verticale del punto fisso I_2 si ottiene il punto D_2; da questo, come già si disse, abbassando verticalmente un segmento eguale a quello staccato sulla stessa verticale delle incrociate della 2ª campata, si ottiene il punto Q_2, proiettando il punto Q_2 dall'appoggio C_2 sulla verticale del punto fisso I_3, si trova il punto D_3; da questo, in modo analogo a quello già visto, si ricava Q_3, che proiettato da C_3, sulla verticale di I_4 ci dà il punto D_4, per il quale deve passare il decimo e penultimo lato del poligono funicolare, da D_4 al modo solito, si ricava Q_4, e la retta $Q_4 B$ è l'ultimo (11°) lato del 2° poligono funicolare.

Ora se dall'appoggio di estremità B portiamo verticalmente in basso il segmento intercetto sulla stessa verticale, tra le incrociate dell'ultima campata, si ottiene un punto R_4, per il quale deve pure passare il penultimo (decimo) lato del secondo poligono funicolare, tale lato è perciò la retta $D_4 R_4$, che, per verifica, deve incontrare il penultimo lato in S_4 sulla verticale 0^* sulla quale si intersecano le incrociate dell'ultima campata. Il penultimo lato incontra l'intersecante di sinistra dell'ultima campata in un punto V_4, che, unito con C_3, determina il 9° lato del secondo poligono funicolare; questo incontra la intersecante destra V_3'' della terza campata in un punto V_3 che deve stare sull'8° lato; questo è determinato da V_3, da Q_3 e dal punto W_3 intersezione del penultimo lato con la controverticale di appoggio w_3; l'8° lato incontra la verticale 0_3^* baricentrica di (S_8) nel punto S_3 che unito con D_3 determina il 7° lato e così via si procede verso l'appoggio A, il primo lato resta determinato da A e da S_1.

Si possono ottenere delle verifiche grafiche determinando altri punti dei lati del secondo poligono funicolare. Infatti, come abbiamo operato partendo dall'appoggio A e procedendo verso destra determinando i punti fissi di sinistra delle varie campate, potremmo partire dall'appoggio B, procedendo verso sinistra, ed operando in modo analogo; si troverebbero così, uno per ogni campata, altri punti fissi, detti punti fissi di destra delle varie campate, aventi proprietà del tutto analoghe a quelle dei punti fissi di sinistra.

Essi si possono trovare riferendoci alla figura C) come segue: si unisca B'' con V''_4 prolungando la retta fino ad incontrare in W'''_3 la controverticale di appoggio w_3; poi si tiri la retta $W'''_3 V''_3$: essa taglia l'orizzontale $A''B''$ nel punto K_3 che è il punto fisso di destra della terza campata.

Dalle costruzioni indicate risulta subito che i punti fissi I e K sono sempre esterni al segmento dell'asse della trave compresa tra le trisecanti.

Ora se il punto R_4 si proietta da C_3 sulla verticale di K_3 si trova un punto F_3, per cui si deve certo passare l'8° lato del secondo poligono funicolare; se da F_3 portiamo verticalmente verso il basso in $F_3 R_3$ un segmento eguale a quello intercetto sulla stessa verticale tra le incrociate della terza campata, si trova in R_3 un punto del settimo lato del 2° poligono funicolare. Se R_3 si proietta da C_2 sulla verticale di K_2 si ottiene un punto F_2, per cui deve passare il 5° lato e così di seguito.

Si ottengono così altri elementi che da soli sarebbero sufficienti a ridetermimare il 2° poligono funicolare.

Per l'esattezza grafica conviene determinare tutti i punti fissi, e costruire il secondo poligono funicolare procedendo in ambo i sensi, da A verso B e da B verso A, così ogni lato viene determinato da almeno tre e persino cinque punti distinti che col loro allineamento ci forniscono una verifica dell'esattezza delle costruzioni grafiche.

Trovato il secondo poligono funicolare si possono subito determinare le ordinate momenti sugli appoggi: tra queste, le η_1 e η_2 relative agli appoggi C_1 e C_2 si trovano nei segmenti staccati dal 3° e quarto lato e rispettivamente dal 5° e sesto lato del detto poligono sulle rispettive verticali dei detti appoggi e ciò perchè, come si è più sopra supposto, le basi λ_1 e λ_2 furono scelte in modo che il prodotto $\lambda_1 \lambda_2$, fosse eguale a $\frac{l_2^2}{6}$.

Invece, poichè per nessuna delle due ultime campate questa relazione è verificata, l'ordinata momento η_3 si può trovare o come segmento staccato dall'ottavo o nono lato del poligono funicolare su di una verticale situata dalla trisecante destra V_3'' della terza campata ad una distanza $\delta_3 = \frac{l_3}{3}\left(\frac{l_2}{l_3}\right)^2$ dalla parte dell'appoggio C_3, ovvero come segmento staccato del nono e decimo lato del detto poligono su di una verticale che dalla trisecante sinistra V_4'

della quarta campata disti di $\frac{l_4}{3}\left(\frac{l_2}{l_4}\right)$ dalla parte dell'appoggio stesso (e ciò conforme a quanto è detto avanti). Il fatto che nei due modi si ottenga uno stesso valore per η_3 è una conseguenza immediata delle proprietà puramente geometriche del secondo poligono funicolare e precisamente del fatto che l'8° ed undecimo lato si incontrano sulla controverticale di appoggio W_3, la quale dista dalle trisecanti contigue di segmenti che stanno nel rapporto espresso da $\frac{\frac{1}{3}l_4}{\frac{1}{3}l_3}$.

In modo perfettamente analogo si procederebbe qualora ci fossero anche altri appoggi intermedii.

Trovate le η_1, η_2, η_3 ordinate momenti sugli appoggi (le quali per le scelte fatte di λ_1 e λ_2 misurano detti momenti ridotti alla stessa base H con cui furono fatti i diagrammi dei momenti semplici) si può completare il diagramma dei momenti flettenti nel modo noto, già visto per la trave in perfettamente incastrata agli estremi, e realizzata nella tavola in a); cioè si portano dalla fondamentale A'C'... B' dei diagrammi semplici momenti, le ordinate momenti η_1 ... ecc. sulle rispettive verticali degli appoggi, dirette verso il basso in $C_1' M_1'$, $C_2' M_2$, $C_3' M_3$, e poi si tirano le rette di chiusa per le varie campate, cioè le rette $A'M_1$, M_1M_2, M_2M_3, M_3B'.

Se all'estremo A la trave fosse incastrata imperfettamente, o no, supposta data la tangente alla linea elastica, si dovrebbero eseguire le costruzioni qui sopra indicate; soltanto nel fare il secondo poligono funicolare occorrerebbe partire, anzichè da A, come più sopra si indicò dalla intersezione che potremo chiamare U - della data tangente iniziale in A, colla trisecante di sinistra v'_1 della prima campata. Analoga è l'osservazione quando fosse incastrato l'estremo B, allora dell'ultimo lato del secondo poligono funicolare è data la tangente in B alla linea elastica, ed il penultimo lato deve passare per il punto che potremo dire V, intersezione della detta tangente con la trisecante di destra v''_4 dell'ultima campata.

Se invece per es: per effetto di uno sbalzo oltre A, fosse staticamente noto il momento M_A sull'appoggio A, basterebbe determinare la relativa ordinata momento η_0 in base H (tale che sia $M = \eta_0 H$) e portarla da A verso l'alto di AA_0; allora la costruzione del secondo poligono funicolare si inizierebbe da A_0 col secondo lato dello stesso poligono: il punto Q_1 si troverebbe pertanto da A_0 verticalmente in basso il segmento A_0Q_1, uguale a quello intercetto sulla stessa verticale tra le in-

crociate della prima campata; il punto U interse-
zione del secondo lato del poligono con l'interse-
cante v_1' unito con A ci darebbe la tangente sull'ap-
poggio A; analoga osservazione si può fare per
il caso in cui sia noto il momento in B, simil-
mente a ciò che si vide a pag: 237 per la trave in-
castrata ad un estremo, ed appoggiata all'altra
con uno sbalzo caricato.

Sollecitazioni prodotte dai dislivelli degli appoggi.

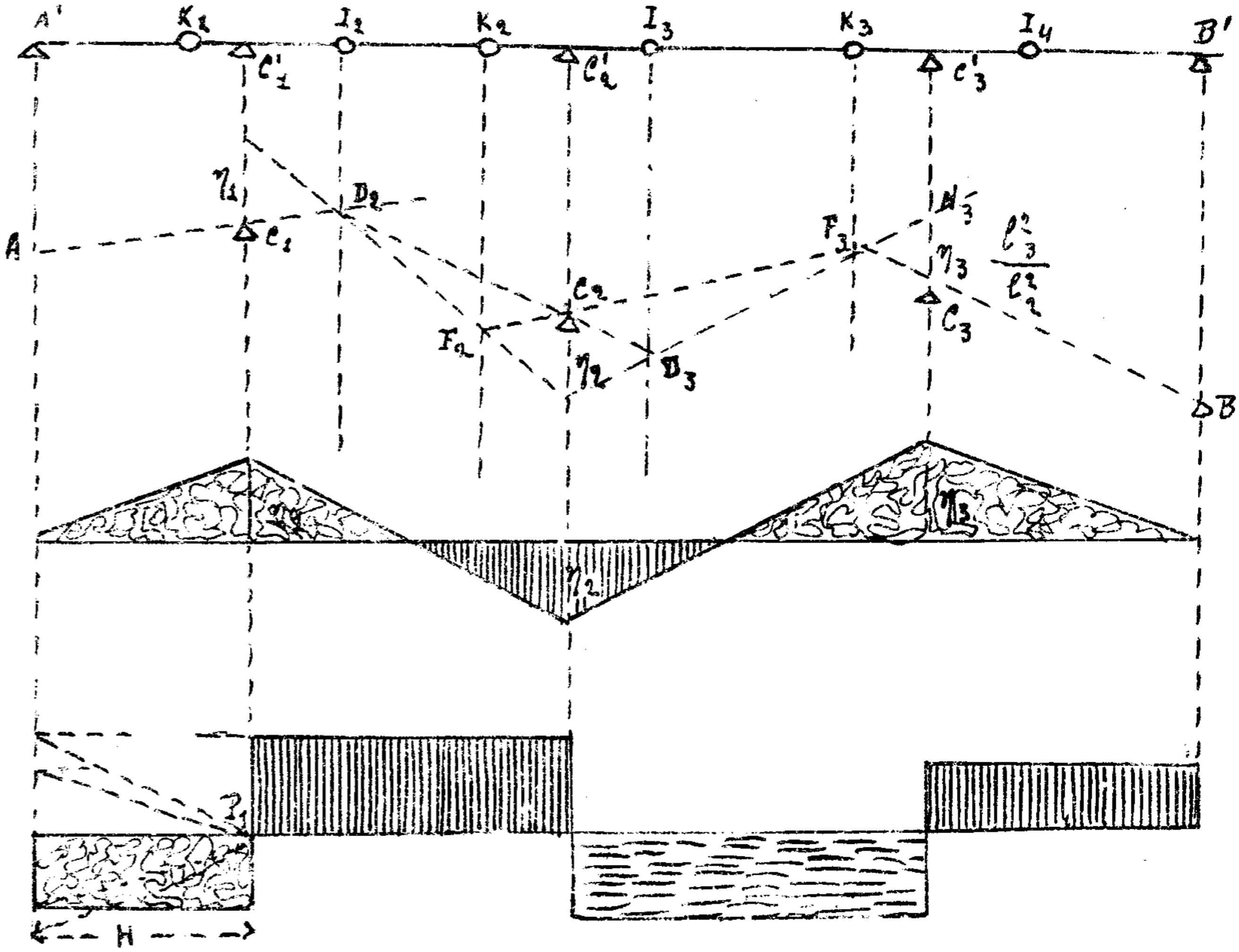
Può essere praticamente opportuno valutare separatamente l'effetto dei dislivelli degli appoggi sulla trave supposta carica. Per fare ciò non c'è che da applicare il procedimento precedentemente esposto, soltanto occorre osservare che, supposti nulli tutti i carichi esterni, i seguenti verticali compresi fra le incrociate sono tutti nulli.

Nella figura è eseguita la detta costruzione per una trave di quattro campate e si sono scelte le basi di riduzioni così che $\lambda_1 \lambda_2 = \frac{l_2^2}{6}$.

Si portano sul disegno i dislivelli degli appoggi moltiplicati per il rapporto di affinità ξ, precedentemente definito, poi, dato che le incrociate di ciascuna campata risultano sovrapposte in una sola retta, due a due vengono a coincidere i punti A e Q_1, F_1 ed R_1, D_2 e Q_2, F_2 ed R_2, ecc..... B ed R_4 (Vedi Tavola)

Perciò la retta $A C_1$ incontra la verticale del punto fisso I_2 nel punto D_2, la retta $D_2 C_2$ taglia la verticale del punto fisso I_3 nel punto D_3, ecc...

Ed analogamente partendo dall'appoggio estremo di destra B si ricavano i punti F_3, F_2, ecc...
Su ciascuna delle rette $D_2 F_2$, $D_3 F_3$, ecc. coincidono per ciascuna campata i due lati intermedii del 2° poligono funicolare relativo alla campata stessa; allora, avendo supposto $l_0 = l_2$ $\left(\lambda_1 \lambda_2 = \frac{l_2^2}{6}\right)$ la retta



$D_2 F_2$ a partire dagli appoggi C_1 e C_2, sulle verticali degli stessi determina esattamente le ordinate momenti η_1 e η_2. Invece l'ordinata momento η_3, sull'appoggio C_3 si ottiene, nel modo già visto per il caso generale nel segmento $C_3 N_3$ compreso sulla verticale di C tra l'appoggio stesso e la retta DF moltiplicandolo per il rapporto $\frac{l_3^2}{l_2^2}$.

Dalle η_1, η_2, η_3 nel modo già noto, si ricava il diagramma del momento flettente, tenendo presente che in questo caso le superficie semplici dei momenti svaniscono, poichè si ha sempre $M_0 = 0$, il diagramma si riduce alla spezzata costituita dalle così dette <u>rette di chiusa</u>. Da esso si può ricavare con un semplice procedimento di derivazione grafica il diagramma dello sforzo di taglio; tale sforzo è costante per tutte le sezioni di una stessa campata (V. figura).