

- Capitolo IX -

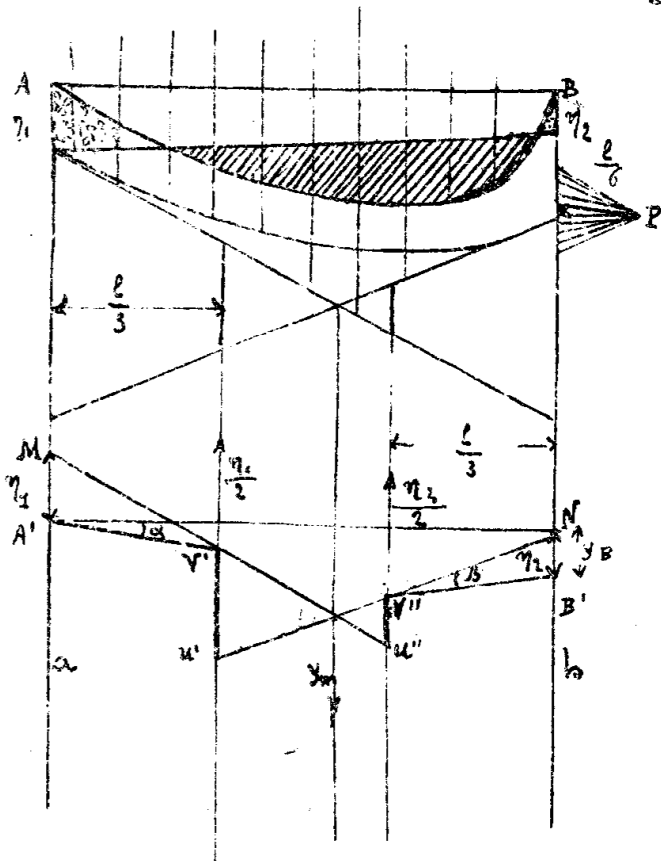
Trattazione grafica delle travi staticamente indeterminate -

Trave imperfettamente incastrata agli estremi -

Supponiamo che la sezione trasversale sia costante e prescindiamo dalla deformazione dovuta al taglio.

Dalla figura a pag. 205 Cap. VIII nella quale è rappresentato il diagramma del momento flettente per il caso in esame, risulta che esso si può considerare come somma algebrica della superficie semplice dei momenti (3) positiva e dei due triangoli (1) e (2) negativi, che sono i diagrammi dei momenti flettenti provocati dai momenti d'incastro M_A e M_B .

Immaginiamo per ora che siano noti i due momenti d'incastro cioè supponiamo noto il diagramma effettivo del momento flettente ottenuto con distanza poleare H : ed indichiamo con η_1 e η_2 le ordinate negative del diagramma stesso, che, moltiplicate per H ,



damo rispettivamente

M_A e M_B .

Ma quanto si è detto a pag. 186 del Cap. VII risulta che la linea elastica della trave può ottenersi considerando il diagramma del momento flettente come diagramma di carico descrivendone la relativa linea funicolare tenendo oppor-

tunamente conto delle condizioni imposte dai vincoli.

È anche noto che, se nell'eseguire le operazioni grafiche rianciamo le aree nella base λ_1 e facciamo il poligono funicolare con distanza polare λ_2 , il rapporto di affinità è dato dalla (164) del Cap. VII.

$$k = \frac{EI}{H \lambda_1 \lambda_2}$$

(noi riteniamo $EI = \text{costante}$).

Con questo rapporto di affinità debbono essere riportati sul disegno i cedimenti consentiti dai vincoli e cioè $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ che, come nel Cap. VIII, sono noti "a priori". Le tangenti di estremità della linea elastica incontreranno le verticali a e b per A e B in due punti A' e B' aventi dislivello relativo γ_B .

Dalla statica grafica è noto ^{che} quando si debbano

comettero più forze con un poligono funicolare esse possono essere riunite in gruppi parziali, e si può sostituire a ciascuno gruppo la relativa risultante senza che vengano per questo alterati i lati estremi, i quali resteranno invariati se sono fissati due punti per i quali essi debbono rispettivamente passare; da ciò risulta che per ottenere le tangenti di estremità della linea relativa (dette tangenti sugli appoggi), possiamo sostituire alle forze rappresentative delle aeree (3) (1) e (2) le misure complessive di ciascuna di esse applicate ai rispettivi baricentri, la prima, positiva verso il basso, le altre due negative dirette verso l'alto.

Se comettiamo tali tre forze con un poligono funicolare, i lati estremi condotti a passare per A' e B' saranno le stesse tangenti sugli appoggi.

Questo poligono è detto secondo poligono funicolare (il primo è quello che dà la superficie semplice dei momenti).

Se prendiamo come base di riduzione λ_2 delle aeree la lunghezza l di tutta la trave, le forze proporzionali alle tre suddette aeree (1) (2) e (3) saranno: $\frac{1}{2} \eta_1$; $\frac{1}{2} \eta_2$; η_m dove η_m è l'ordinata media della superficie semplice dei momenti.

Questa agisce secondo la verticale baricentrica dell'aerea (3) e le $\frac{1}{2} \eta_1$ e $\frac{1}{2} \eta_2$ agiscono secondo le

verticali trisecanti, che sono baricentriche rispettivamente per i triangoli (1) e (2) e dividono la lunghezza l in tre parti uguali.

Osserviamo che le tangenti sugli appoggi risultano date a priori poiché supponiamo dato A' , (e quindi B').

Ma per completare il secondo poligono funicolare, osserviamo che i due lati intermedi di questo, che si intersecano sulla retta d'azione della η_m , devono intercettare su una verticale qualunque un segmento, il quale altro non è che il momento della forza rispetto alla stessa verticale, ridotto alla base λ_2 che è la distanza polare con la quale si fa il secondo poligono funicolare.

Quindi si potrà, al solito modo, costruire, con distanza polare λ_2 , la linea funicolare dell'area del diagramma (5), considerato come diagramma di carico, riducendo le aree delle strisce elementari verticali alla base l ; allora le tangenti estreme di tale linea funicolare o lati estremi del poligono funicolare, prolungate convenientemente, intercettano su una verticale qualunque (in particolare su oo meno delle trisecanti) un segmento uguale a quello che sulla stessa verticale devono staccare i lati intermedi del secondo poligono funicolare.

Tali tangenti estreme si vogliono chiamare le

incrociate. Perciò, seghate le tangenti sugli appoggi nel modo sopraddetto, esse incontrano ciascuna la trisecante più vicina al rispettivo appoggio, in un punto: tali punti nella figura sono indicati rispettivamente con V' e V'' .

Ora su ciascuna trisecante portiamo verticalmente in basso a partire da V' e da V'' un segmento uguale a quello che sulla stessa trisecante intersecano le incrociate. Otteniamo così rispettivamente due punti U' e U'' , e quindi in croce i quattro punti ora definiti, ossia tirando le rette $V'U''$ e $V''U'$ si ottengono i lati intermedi del secondo poligono funicolare; essi, per verifica, devono intersecarsi sulla verticale baricentrica della (S) ossia sulla retta d'azione della forza η_m .

A questo punto osserviamo che i primi due lati del secondo poligono funicolare stanno sulla verticale a dell'appoggio A un segmento $A'M$ il quale è il momento, ridotto in base λ_2 , della forza $\frac{1}{2} \eta_2$, rispetto alla verticale a; analogamente gli ultimi due lati dello stesso poligono stanno sulla verticale B un segmento $B'N$, il quale è, ridotto in base λ_2 , il momento della forza $\frac{1}{2} \eta_2$, rispetto alla stessa verticale b.

Si ha quindi:

$$A'M = \frac{l}{6\lambda_2} \eta_2$$

$$B'N = \frac{l}{6\lambda_2} \eta_2$$

Se poi assumiamo, come è lecito: $\lambda_2 = \frac{l}{6}$, allora i rapporti che in queste formule moltiplicano η_1 ed η_2 si riducono all'unità e perciò si ha senz'altro:

$$A'M = \eta_1$$

$$B'N = \eta_2$$

ossia le ordinate momenti d'incastro sono eguali ai segmenti staccati sulle verticali a e b degli appoggi rispettivamente dai primi due, e dagli ultimi due lati del secondo poligono funicolare.

Avendo scelto $\lambda_1 = l$ e $\lambda_2 = \frac{l}{6}$ il rapporto di affinità ξ della linea elastica, dato dalla (15H) diviene:

$$\xi = \frac{6EI}{Hl^2}$$

Ma quanto precede risulta esplicitamente la determinazione grafica dei momenti incrociati M_1 e M_2 : trovati questi, si può completare il diagramma del momento flettente, come risulta dalla figura.

Casi particolari.

A titolo di esempio e di esercizio consideriamo i seguenti casi particolari.

Trave perfettamente incastrata agli estremi.

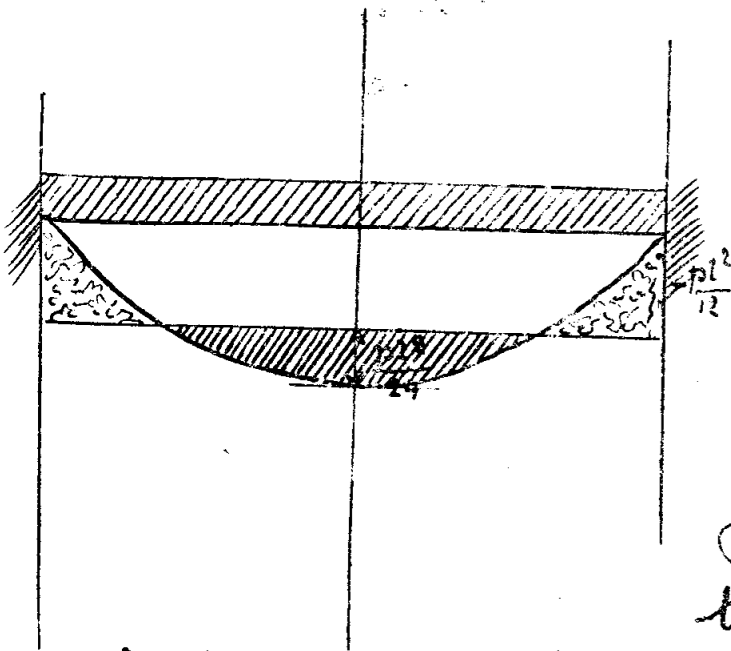
In questo caso i due lati estremi del poligono funicolare coincidono, ossia il poligono stesso

risulta chiuso, cioè le tre forze $\eta_m; \frac{1}{2}\eta_1; \frac{1}{2}\eta_2$ sono in equilibrio: infatti la stativa in equazione che le condizioni necessarie e sufficienti perché un sistema piano di forze sia in equilibrio sono due: deve risultare chiuso il poligono delle forze e chiuso il poligono funicolare.

È noto ancora che la seconda condizione può essere soddisfatta senza che sia la prima solo nel caso in cui si scelga il polo sul lato di chiusura del poligono delle forze ed il primo lato del poligono funicolare nella retta di azione della risultante stessa.

Questo caso particolare non può presentarsi perché il polo da noi prescelto non si trova sulla punteggiata delle forze, ma ad una distanza da essa eguale a $\frac{l}{6}$. Si deduce, in conseguenza, che l'area positiva (1) della superficie semplice dei momenti e quella negativa del trapezio somma di (1) e (2) sono eguali in valore assoluto ed hanno la stessa verticale baricentrica: queste proprietà servono a determinare il trapezio (1) e (2) quando si conosca la superficie semplice dei momenti (3).

Così se la trave è sottoposta ad un carico uniformemente distribuito è noto che la superficie semplice dei momenti è un segmento parabolico



ad asse verticale
simmetrico rispetto al-
la verticale mediana
ed avente in questa una
freccia

$$M_{0max} = \frac{1}{8} pl^2$$

(V. Cap. 7. a pag. 233).

Per la su trovata proprie-
tà il trapezio negativo do-

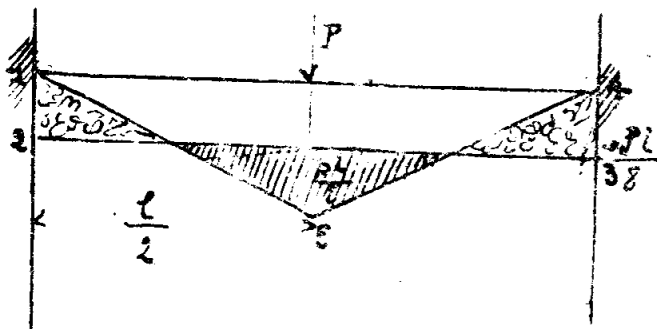
vrà ridursi in questo caso ad un rettangolo di base
 l e di ordinata eguale alla ordinata media del seg-
mento parabolico, la quale, come è noto, è eguale ai
due terzi dell'ordinata massima.

Quindi si ha:

$$M_A = M_B = -\frac{ql}{12} \quad ; (q = pl)$$

ed il momento positivo in menneria sarà $\frac{ql}{24}$, si
trovano così valori già trovati nel Cap. VIII; pg 214.

Se la trave è sottoposta ad un carico concentra-
to in menneria, la superficie semplice dei momen-
ti è un triangolo la cui altezza è $\frac{Pl}{4}$, per la su



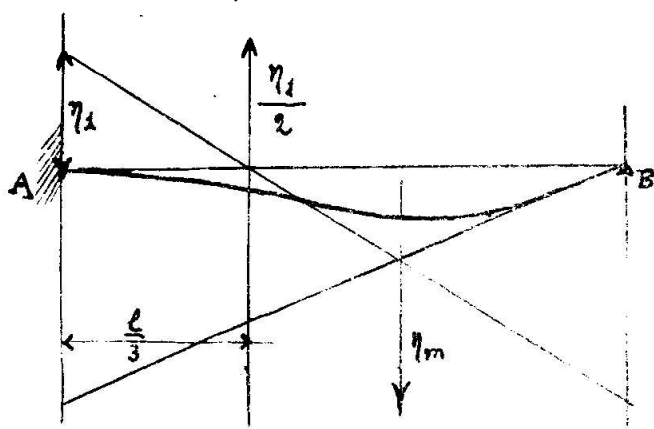
indicata proprietà,
dovendo essere l'area del
rettangolo 1 2 3 4 equi-
valente a quella del trian-
golo 1 5 4, risulterà:

$$M_A = M_B = -\frac{Pl}{8}$$

Il momento massimo in mezzogiorno è positivo ed è uguale a: $+\frac{PE}{8}$.

Trave incastrata in un estremo e semplicemente appoggiata nell'altro.

Sia A l'incastro e B l'appoggio entrambi rigidi.



Dovendo risultare $M_B = 0$ il triangolo (2) ha l'area nulla, ed è $\eta_2 = 0$; cioè nel secondo poligono funicolare gli ultimi due vertici cadono in una sola retta

che incontra il primo lato del poligono funicolare, che è orizzontale, proprio nell'appoggio B. Ciò significa che il momento complessivo delle due forze η_m ed $\frac{1}{2} \eta_1$, rispetto all'appoggio B è nullo, cioè $\frac{1}{2} \eta_1$ deve avere, rispetto a B, un momento uguale ed di segno contrario a quello della η_m .

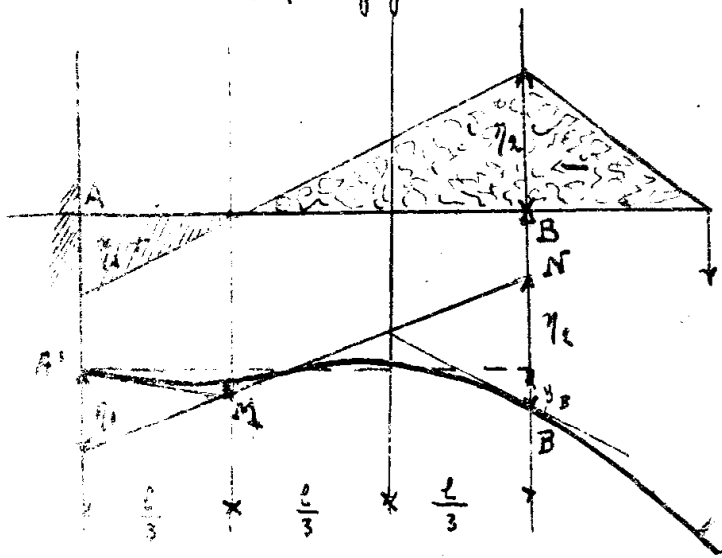
Da ciò risulta:

$$\frac{1}{2} \eta_1 \frac{2}{3} l = \eta_m b_*$$

dove b_* è la distanza del baricentro della superficie semplice dei momenti dall'appoggio B. Si ricava quindi:

$$\eta_1 = \frac{3 \eta_m b_*}{l}$$

Notiamo anche qui, come si è già fatto nella trattazione analitica, che se è staticamente noto il momento su di un appoggio e in conseguenza noto un punto per il quale deve passare il corrispondente lato intermedio del secondo poligono funicolare e questo serve a determinare la corrispondente inclinazione sull'appoggio, e ciò può realizzarsi su un solo o su entrambi gli appoggi. Consideriamo infatti una trave incastrata in A, appoggiata in B con uno sbalzo oltre B e sia caricata solo lo sbalzo, inoltre i vincoli siano entrambi cedevoli. Essendo staticamente noto il momento sull'appoggio B è determinato sulla verticale



per B il punto N per il quale deve passare il quarto lato del 2° poligono funicolare, tale lato coincide con il terzo poiché le intersezioni della campata AB si corrispondono essendo

tale campata scarica.

Il secondo poligono funicolare si completa conoscendo la tangente sull'appoggio A, che è nota a

prismi, determinandone l'incontro M con la trisecante di sinistra e congiungendo N con M .

Il punto di incontro di MN con la trisecante di destra, congiunto con B , ci dà la tangente alla linea elastica in B .

È facile verificare che se l'incastro e l'appoggio sono rigidi, la sezione di momento nullo (punto di flesso) sta sulla trisecante più vicino ad A .

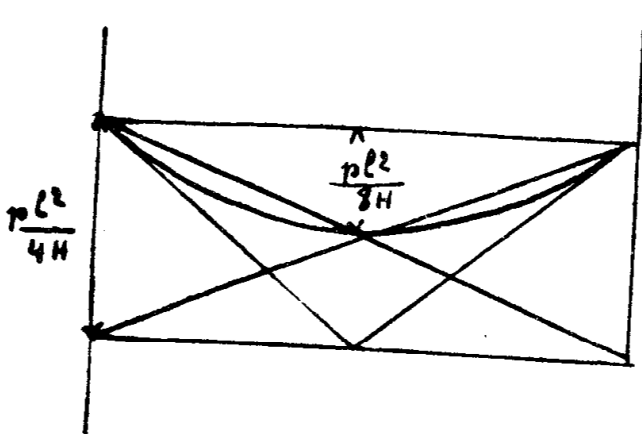
Inerocitate per particolari condizioni di carico.

Per un carico uniformemente ripartito di intensità p la superficie semplice dei momenti è un segmento parabolico la cui ordinata massima è $\frac{pl^2}{8H} = \eta_{max}$ dove H è, come sempre, la distanza polare.

L'area quindi sarà:

$$\frac{2}{3} l \frac{pl^2}{8H} = \frac{pl^3}{12H}$$

Il momento statico dell'area rispetto ad una delle



verticali di appoggio è

$$\frac{pl^3}{12H} \frac{l}{2} = \frac{pl^4}{24H}$$

riducendo nella base

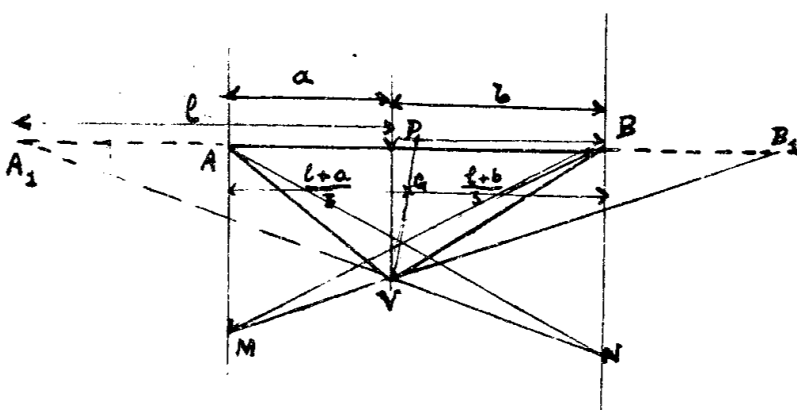
$\frac{l^2}{6}$ si ottiene il segmento interretto tra le in-

incrociate su una delle verticali di appoggio. Tale segmento risulta:

$$\frac{pb^2}{4H} = 2\eta_{max}$$

cioè esso è doppio della freccia del segmento parabolico superficie semplice dei momenti.

Per una forza concentrata che disti a e b dalle verticali per gli appoggi la superficie semplice dei momenti è un triangolo avente per base la lunghezza della trave ed avente il vertice opposto V sulla verticale linea di azione di P con ordinata



$$\frac{Pa \cdot b}{2CH}$$

L'area della superficie semplice dei momenti è:

$$\frac{Pa \cdot b}{2CH} \cdot \frac{l}{2}$$

Il suo baricentro G dista dalle verticali degli appoggi A e B rispettivamente di

$$\frac{l+a}{3} \quad \frac{l+b}{3}$$

Per ciò i momenti statici della superficie semplice dei momenti rispetto alle verticali degli appoggi sono rispettivamente

$$\frac{Pa \cdot b}{2CH} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l+a}{3} \quad e \quad \frac{Pa \cdot b}{2CH} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l+b}{3}$$

riducendo nella base $\frac{l^2}{l}$ si ottengono i seguenti intercetti dalle incrociate sulle verticali per A e B, essi saranno:

$$\frac{Pab}{lH} \frac{l+a}{l} \quad e \quad \frac{Pab}{lH} \frac{l+b}{l}$$

Tali valori potranno ottenersi prendendo sulla fondamentale AB due punti A_1 e B_1 distanti di l dalla verticale di carico P da parti opposte e proiettando il vertice V del triangolo. Superfici semplici dei momenti da A_1 in N sulla verticale di B e da B_1 in M sulla verticale di A.

Infatti dai triangoli simili AB_1 e PB_1V si ricava

$$\frac{AM}{PV} = \frac{AB_1}{PB_1} \quad \text{cioè essendo} \quad PV = \frac{Pab}{lH}$$

$$AM = \frac{Pab}{lH} \frac{l+a}{l} \quad \begin{matrix} AB_1 = l+a \\ PB_1 = l \end{matrix}$$

analogamente per BN.

Le incrociate saranno dunque le rette AN e BM.

