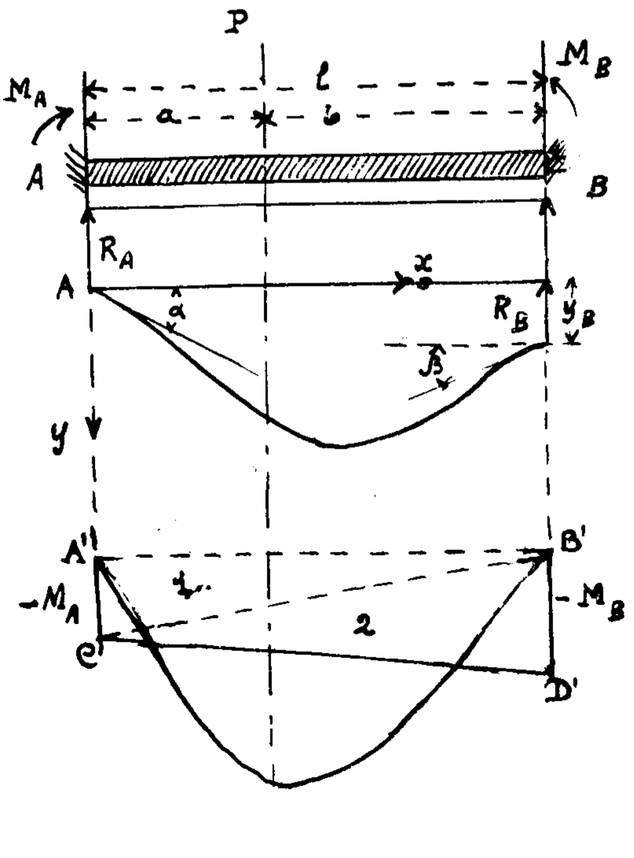
– Capitolo VIII –

Trattazione analitica delle travi iperstatiche.

Trave imperfettamente incastrata allo due estremità.

Noi supporremo che gli incastri siano cedevoli così da permettere, alle tangenti estreme alla linea elastica, delle rotazioni e che inoltre consentano un certo dislivello fra le sezioni estreme che si suppone abbiamo inizialmente



i centri su di una stessa orizzontale.

Indichiamo con α e β le inclinazioni delle tangenti di estremità della linea elastica (prese positive se le tangenti di estremità scendono verso l'interno della trave) e con y_B il dislivello dei punti estremi della linea elastica, positivo se B è più basso di A.

Noi supporremo che queste grandezze siano assegnate ed indipendenti dai carichi: come accade nel caso di vincoli rigidi presentanti iniziali difetti di montaggio; del resto se queste deformazioni vincolari fossero proporzionali alle rispettive reazioni basterà, nelle formule che troveremo, esprimere i detti spostamenti in funzione degli sforzi che li provocano, cioè indicando con C_a C_b D_a D_b quattro costanti elastiche determinabili secondo la natura dei vincoli, si dovrà porre:

$$\alpha = C_a M_a, \quad \beta = C_b M_B \qquad y_B = D_b R_B - D_A R_A.$$

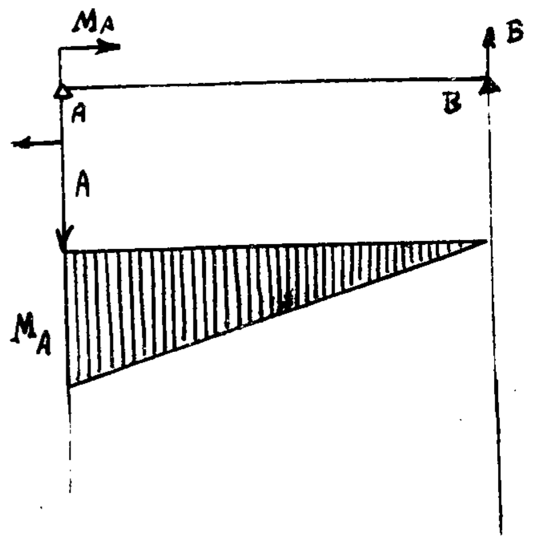
Assumiamo come incognite iperstatiche i momenti di incastro M_A e M_B; le equazioni della statica ci permetteranno di determinare le altre due incognite R_A ed R_B.

Assumiamo come condizioni di carico quelle più comuni in pratica: cioè un carico distribuito uniformemente di intensità p a ml:, ed un carico concentrato P situato alle distanze <u>a</u> e <u>b</u> rispettivamente dai due estremi A e B. I risultati ai quali perverremo sono estensibili anche al caso di più forze concentrate sostituendo ai termini contenenti P le sommatorie estese a tutti i carichi concentrati.

Sia A l'origine della linea elastica della trave, la verticale per A sia l'asse y positivo verso il basso, l'orizzontale per A sia l'asse x. Assumiamo positivi i momenti di incastro M_A ed M_B quando abbiano i sensi indicati dalle frecce circolari nella figura, cioè quando provochino momenti flettenti positivi nella trave: è chiaro che se i momenti effettivi di incastro avranno senso contrario a quello da noi supposto, dalle formule troveremo per essi valori negativi.

Terremo conto solo delle deformazioni dovute alla flessione.

avvalendoci della sovrapposizione degli effetti, il momento flettente in una sezione qualunque si potrà ritenere eguale a quello (che diremo M_0) che i carichi esterni produrrebbero sulla stessa trave quando essa fosse semplicemente appoggiata agli estremi, più il momento provocato dai momenti M_A ed M_B agenti nelle sezioni estreme della trave pure semplicemente appoggiata.



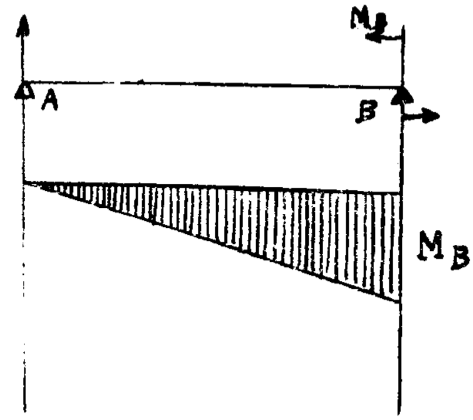
Il momento M_A provoca nei due appoggi due reazioni eguali in intensità ad $\frac{M_A}{l}$ delle quali quella in A è diretta verso il basso e quella in B verso l'alto; ciò si vede ad es: prendendo i momenti intorno a B, essendo eguale a zero il momento della reazione B potremo scrivere, immaginando la reazione in A diretta verso l'alto

$M_A + Al = 0$ da cui $A = -\frac{M}{l}$ cioè la reazione in A è diretta verso il basso e la sua intensità è M/l: analogamente per B.

In una sezione a distanza x da A si ha un momento flettente dato da

$$M_A - \frac{M_A}{l}x = \frac{M_A}{l}(l-x)$$

Il diagramma del momento flettente è disegnato in figura. Così M_B provoca in A una reazione $\frac{M_B}{l}$ diretta verso l'alto ed in B una reazione $\frac{M_B}{l}$ diretta verso il basso. In una sezione a distanza x dall'appoggio A si ha un momento flettente $\frac{M_B}{l}x$. Il diagramma del momento flettente è



disegnato in figura.
Per la trave imperfettamente incastrata che noi studiamo, per quanto sopra si è detto, in una sezione alla distanza x da A si ha un momento flettente:

$$M(x) = M_0 + \frac{M_A}{l}(l-x) + \frac{M_B}{l}x \qquad (179)$$

Il diagramma del momento M_0 si suol chiamare <u>superficie semplice dei momenti</u>.

Nella fig. a pag 205 essa è stata disegnata costruendo la linea funicolare del carico esterno e riducendola alla retta di chiusura $A'B'$ che le dà ordinata nulla in corrispondenza degli appoggi A e B. Così nella figura stessa si sono riportati in $A'B'C'$ e $B'C'D'$ i diagrammi dei momenti flettenti dovuti ad M_A ed M_B essi sono stati riportati in basso rispetto alla orizzontale $A'B'$ poiché, nei casi concreti, i momenti di incastro sono negativi.

Il momento flettente in una sezione generica di ascissa x è:

$$M_0 = P\frac{b}{l}x - P(x-a) + \frac{p}{2}(lx - x^2)$$

convenendo che il termine $P(x-a)$ sia definito soltanto per $x > a$ e quindi non apparisca nella espressione del momento flettente per $x \leq a$.

Potremo, avvalendoci della (162), scrivere l'equazione differenziale della linea elastica:

$$-EI\frac{d^2y}{dx^2} = M_0 + \frac{M_A}{l}(l-x) + \frac{M_B}{l}x = \frac{Pb}{l}x - P(x-a) + \frac{p}{2}(lx - x^2) +$$
$$+ \frac{M_A}{l}(l-x) + \frac{M_B}{l}x$$

Integrando e determinando la costante con la condizione che per $x=0$, sia $dy/dx=\alpha$ si ottiene (si ricordi che il termine $P(x-a)$ va integrato fra $\underline{a}$ ed $\underline{x}$ ed esiste solo per $x>a$ ed inoltre che $\int_a^x (x-a)\,dx = \int_a^x (x-a)\,d(x-a) = \frac{(x-a)^2}{2}$)

$$EI\left(\alpha-\frac{dy}{dx}\right)=P\frac{b}{l}\,\frac{x^2}{2}-\frac{P(x-a)^2}{2}+\frac{p}{2}\left(\frac{lx^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)+\frac{M_A}{l}\left(lx-\frac{x^2}{2}\right)+\frac{M_B}{l}\,\frac{x^2}{2}$$

Integrando una seconda volta ed imponendo la condizione che per $x=0$, $y=0$ si ottiene, sempre tenendo conto della precedente convenzione fatta sul termine $P(x-a)$,

$$EI(\alpha x-y)=P\frac{b}{l}\,\frac{x^3}{6}-\frac{P(x-a)^3}{6}+\frac{p}{2}\left(\frac{lx^3}{6}-\frac{x^4}{12}\right)+\frac{M_A}{l}\left(l\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)+\frac{M_B}{l}\,\frac{x^3}{6}$$

Per $x=l$ deve essere $y=y_B$ quindi dall'ultima equazione si ricava, ricordando che $b=l-a$, dopo facili riduzioni:

$$EI(\alpha l-y_B)=\frac{Pb}{6}\left(l^2-b^2\right)+\frac{1}{6}\,\frac{pl^4}{4}+\frac{l^2}{6}\left(2M_A+M_B\right) \qquad (180)$$

questa è una prima relazione fra le incognite M_A e M_B.

Ora è ovvio che le proprietà della linea elastica si potrebbero pure studiare partendo dall'appoggio B, ossia prendendo come origine degli assi l'estremo B della trave già deformata, come asse delle x l'orizzontale per B, positivo verso sinistra (ossia verso l'altro estremo A) e per asse delle y la verticale per B, col senso positivo in basso.

In tal modo è chiaro che si dovrebbero scrivere delle relazioni che si possono ottenere da quelle già sopra stabilite, scambiando in esse $\underline{a}$ con $\underline{b}$

M_A con M_B, ed inoltre ponendo β in luogo di α, e mutando y_B in $-y_B$ (e quest'ultima sostituzione perchè il dislivello relativo di A rispetto a B è evidentemente l'opposto di quello di B rispetto ad A).

In particolare l'ultima relazione sopra scritta diviene:

$$EI(\beta l + y_B) = \frac{Pa}{6}(l^2 - a^2) + \frac{1}{6}\frac{pl^4}{4} + \frac{l^2}{6}(M_A + 2M_B);$$

e questa è un'altra relazione, che, unita alla precedente, permette di determinare i momenti di incastro M_A ed M_B, che sono le incognite iperstatiche di questo caso.

Come si disse più sopra, se sulla trave vi sono più carichi concentrati, come P, nelle due ultime equazioni trovate bisognerà al termine contenente P, sostituire la relativa sommatoria, intendendo questa estesa a tutti i carichi insistenti sulla trave.

Le dette equazioni si possono trasformare raccogliendo nei primi membri i termini contenenti i momenti M_A ed M_B e, introducendo le sommatorie sovradette, troviamo:

$$\left.\begin{aligned} 2M_A + M_B &= -\frac{\Sigma Pb(l^2 - b^2)}{l^2} - \frac{pl^2}{4} + \frac{6EI}{l}\left(\alpha - \frac{y_B}{l}\right) \\ M_A + 2M_B &= -\frac{\Sigma Pa(l^2 - a^2)}{l^2} - \frac{pl^2}{4} + \frac{6EI}{l}\left(\beta + \frac{y_B}{l}\right) \end{aligned}\right\} \quad (181)$$

queste si possono risolvere rispetto alle incognite M_A ed M_B, e si trova:

$$\left.\begin{aligned} M_A &= \frac{\Sigma Pa\, b^2}{l^2} - \frac{pl^2}{12} + \frac{2EI}{l}\left(2\alpha - \beta - \frac{3y_B}{l}\right) \\ M_B &= -\frac{\Sigma Pa^2 b}{l^2} - \frac{pl^2}{12} + \frac{2EI}{l}\left(2\beta - \alpha + \frac{3y_B}{l}\right) \end{aligned}\right\} \quad (182)$$

La reazione finita (verticale) R_A dell'appoggio A si può esprimere come somma di quella R_{A0} che nella stessa trave semplicemente appoggiata sarebbe provocata dai carichi esterni dati, più l'analoga reazione provocata dai momenti M_A ed M_B agenti sulla stessa trave con semplici appoggi.

Si trova così, secondo le leggi della statica:

$$R_A = R_{A0} + \frac{M_B - M_A}{l}\ ; \qquad R_B = R_{B0} - \frac{M_B - M_A}{l}$$

D'altra parte, pure dalla statica, risultano ovviamente le relazioni:

$$R_{A0} = \frac{\Sigma Pb}{l} + \frac{pl}{2}\ ; \quad R_{B0} = \frac{\Sigma Pa}{l} + \frac{pl}{2}$$

e sostituendo nelle precedenti si ha:

$$R_A = \frac{\Sigma Pb}{l} + \frac{pl}{2} + \frac{M_B - M_A}{l}\ ; \qquad R_B = \frac{\Sigma Pa}{l} + \frac{pl}{2} - \frac{M_B - M_A}{l}$$

(risultando per verifica: $R_A + R_B = \Sigma P + pl$ come deve essere)

Utilizzando i valori dati dalla (182) con ovvie riduzioni si trova:

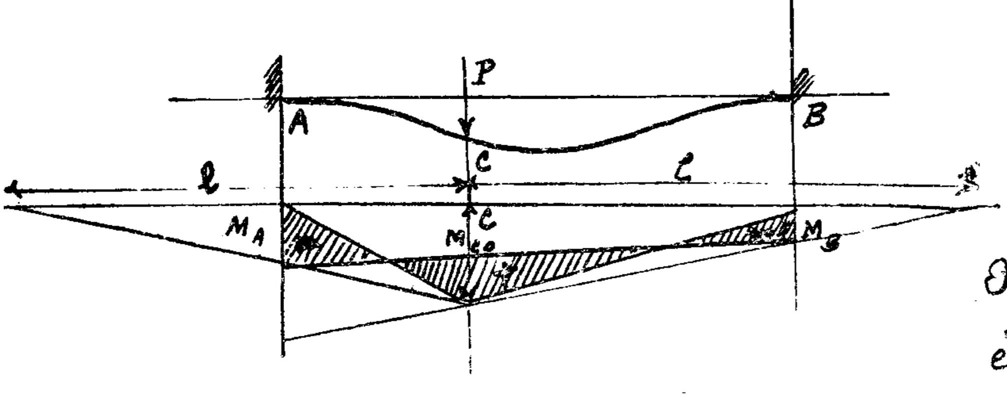
$$\left.\begin{aligned} R_A &= \frac{\Sigma P(3a+b)\,b^2}{l^3} + \frac{pl}{2} + \frac{6EI}{l^2}\left(\beta-\alpha+\frac{2y_B}{l}\right) \\ R_B &= \frac{\Sigma P(3b+a)\,a^2}{l^3} + \frac{pl}{2} + \frac{6EI}{l^2}\left(\alpha-\beta-\frac{2y_B}{l}\right) \end{aligned}\right\} \quad (183)$$

Le formule ora trovate possono essere applicate a studiare alcuni casi particolari che si presentano frequentemente in pratica.

Le (181) e (182), sono delle relazioni tra i momenti M_A ed M_B e le inclinazioni α e β così che esse si prestano a determinare due di queste quattro grandezze quando sono date le altre due.

Trave perfettamente incastrata alle estremità.

2) La trave è sollecitata soltanto da un carico concentrato. Occorrerà porre nelle (182) $\alpha=\beta=y_B=p=0$.



Si ottiene:

$$M_A = -\frac{Pab^2}{l^2}$$

$$M_B = -\frac{Pa^2b}{l^2}$$

Osservando che $\frac{Pab}{l}$ è il momento M_{oc} in C per una trave semplicemente appoggiata agli estremi e che $-M_A = M_{co}\frac{b}{l}$

si possono ottenere (noto M_{c0}) questi momenti estremi riportando l a sinistra e a destra di C e dagli estremi dei due segmenti proiettando l'ordinata M_{c0} rispettivamente sulle verticali per gli appoggi, come rilevasi dalla figura.

Dalla espressione di M_A risulta che esso diventa massimo allo spostarsi del carico P sulla trave, quando questo dista di $\frac{l}{3}$ dall'incastro A, allora M_A assume il valore $\frac{4}{27}Pl$.

Si avranno due punti di flesso, uno sul tratto AC e l'altro nel tratto BC, per essi, dovendo risultare $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ sarà $M_x=0$; le loro distanze da A e B rispettivamente sono date da $x_1=-\frac{M_A}{R_A}$; $x_2=-\frac{M_B}{R_B}$, dove R_A ed R_B sono rispettivamente, come si rileva dalle (183):

$$R_A=\frac{P(3a+b)b^2}{l^3} \qquad R_B=\frac{P(3b+a)a^2}{l^3}$$

quindi:

$$x_1=\frac{a}{3a+b}\,l \qquad x_2=\frac{b}{3b+a}\,l$$

Il momento M_c nella sezione in cui è applicato il carico P si ricava dalla equazione $M_A+R_Aa=M_c$ si ottiene $M_c=P\frac{2a^2b^2}{l^3}$.

Se $a<b$ l'ordinata massima, che evidentemente è unica ~~la~~ trova nel tratto BC e si ottiene dalla $\frac{dy}{dx}=0$

il suo valore è $y = \frac{P}{EI} \frac{2a^2b^3}{3(a+3b)^2}$ la sua distanza da B risulta essere $\frac{2b}{a+3b}l$ cioè doppia della distanza del secondo punto (x_2) di flesso da B.

Se il carico P è applicato nel mezzo:

$$R_A = R_B = \frac{P}{2} \qquad -M_A = -M_B = \frac{Pl}{8}$$

b) La trave è sollecitata soltanto da un carico $Q = pl$ uniformemente ripartito su tutta la sua lunghezza.

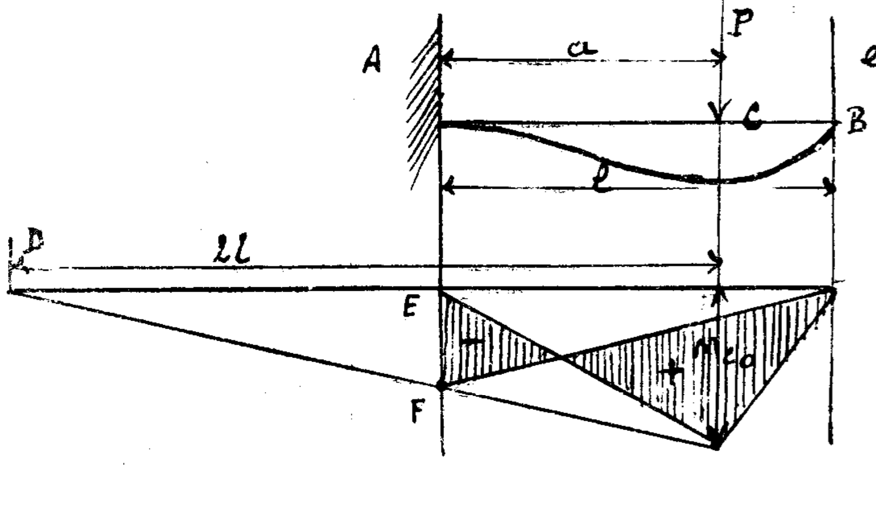
Dalle (182) e dalle (183) ricaviamo

$$R_A = R_B = \frac{Q}{2} \qquad M_A = M_B = -\frac{Ql}{12}$$

la freccia di incurvamento è data da: $f = \frac{1}{8 \times 48} \frac{Ql^3}{EI}$

Trave incastrata in un estremo ed appoggiata nell'altro con incastro ed appoggio rigidi.

a) La trave è sollecitata soltanto da un carico concentrato.



In questo caso risulta essere $M_B = 0$ inoltre $\alpha = y_B = \beta = 0$ dalle (182) si ricava

$$M_A = -\frac{Pab^2}{l^2} - \frac{2EI}{l}\beta$$

$$0 = -\frac{Pa^2b}{l^2} + \frac{4EI}{l}\beta$$

da cui si ricava:

$$M_A = -\frac{Pab(a+2b)}{2l^2}$$

Il momento M_c è:

$$M_c = \frac{Pa^2b(2a+3b)}{2l^3}$$

Ponendo M_A sotto la forma $-M_A = \frac{Pab}{l}\,\frac{2l-a}{2l} = M_{oc}\frac{2l-a}{2l}$ dove M_{oc} è il momento in C per la trave semplicemente appoggiata agli estremi; si può ottenere M_A con la seguente costruzione grafica: Si porta a sinistra di C un segmento lungo $2l$ e dall'estremo D si proietta l'ordinata M_{oc} sulla verticale per A come si rileva dalla figura: risulta $EF = M_A$.

Le sezioni di momento massimo relativo sono A (incastro) e C (sezione in cui è applicato il carico)

Dalle (183) risulta ponendo per β il suo ricavato valore:

$$R_A = \frac{P(3a^2+6ab+3b^2)b}{2l^3} \qquad R_B = \frac{Pa^2(2a+3b)}{2l^3}$$

b) La trave è sollecitata da un carico $Q = pl$ uniformemente ripartito su tutta la sua lunghezza -

In tal caso dalla (182) (183) si ricava:

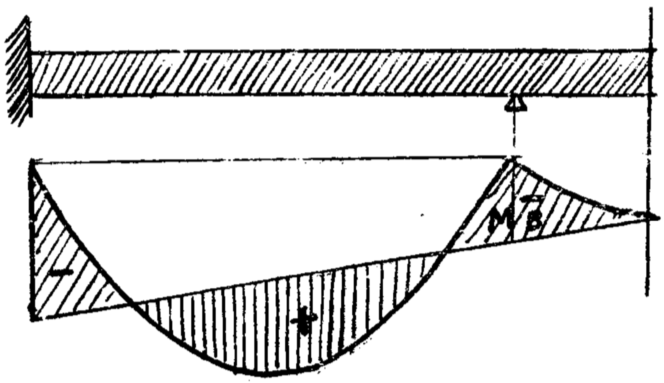
$$\beta = \frac{pl^3}{48EI} \qquad R_A = \frac{5}{8}Q \qquad R_B = \frac{3}{8}Q \qquad M_A = -\frac{Ql}{8}$$

Sono sezioni di momento massimo relativo A ed una altra la cui distanza x_o da B ed il cui momento corrispondente sono dati da

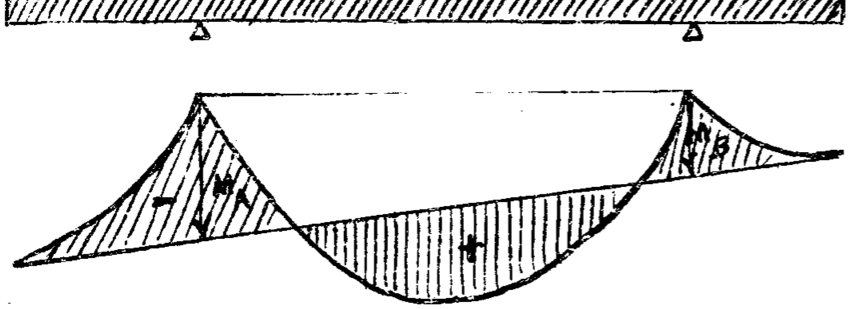
$$x_0 = \frac{3}{8} l \qquad M_{x_0} = \frac{9}{16} \frac{ql}{8}$$

Se la trave è incastrata in A, appoggiata in B e prolungata oltre questo con uno sbalzo caricato è noto staticamente il momento M_B come il momento rispetto a B dei carichi insistenti sullo sbalzo: allora le (182) permetteranno di determinare, essendo $\alpha = 0$, la inclinazione della linea elastica β in B e il momento d'incastro M_A.

Se si ha una trave appoggiata in due punti A e B con due sbalzi carichi da ambo le parti, sono staticamente noti M_A ed M_B quindi le (182) servono a determinare α e β. I diagrammi dei momenti flettenti per questi ultimi due casi sono qui disegnati. In ambo i casi supponiamo noto y_B.



È ovvio che se uno appoggio è semplice senza sbalzo il rispettivo momento è zero quindi le stesse (182) ponendovi $M_A = M_B = 0$ danno inclinazioni α e β per la ~~trave~~ semplicemente appoggiata senza sbalzi.

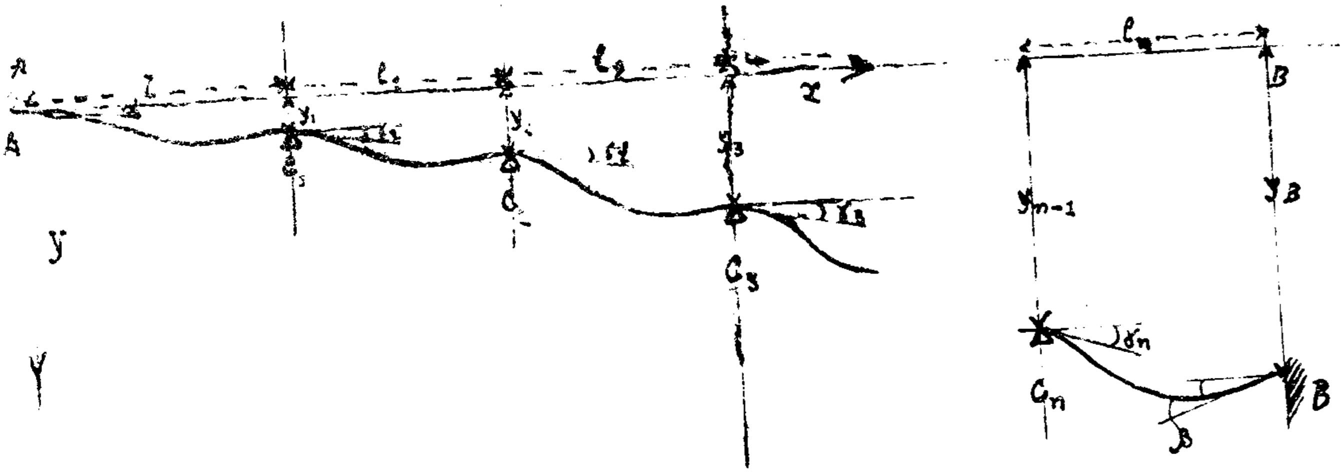


Trave continua -

Applichiamo ora la formula trovata per la trave imperfettamente incastrata alle estremità, allo studio della trave continua che è una trave disposta su più appoggi intermedii senza soluzioni di continuità sugli appoggi stessi. Gli intervalli fra due appoggi consecutivi si dicono campate. Per la continuità i tratti di due campate consecutive si trasmettono, attraverso la sezione di appoggio comune un momento, che per ciascuna delle campate, funziona come momento di incastro, perciò ogni campata si comporterà come una trave imperfettamente incastrata agli estremi. La trave, sugli appoggi di estremità, potrà essere appoggiata o incastrata. Si assumono come incognite iperstatiche i momenti sugli appoggi intermedi il cui numero indichiamo con n, se si fa fare incastro ad una od entrambe le estremità, il numero delle incognite iperstatiche diventa $n+1$ ed $n+2$ rispettivamente. Infatti è chiaro che la trave si può rendere staticamente determinata sopprimendo, per esempio, tutti gli appoggi intermedi e riducendo i vincoli di estremità ad appoggi semplici: ciò fatto potremmo assumere come incognite iperstatiche le n reazioni degli appoggi intermedi, alle quali si devono aggiungere i momenti di reazione degli eventuali incastri di estremità. Per la semplicità della soluzione numerica del problema è però più conveniente assumere come incognite i momenti sugli appoggi intermedi, i quali, per quanto già sappiamo sono legati alle corrispondenti reazioni da relazioni molto semplici che la statica insegna a determinare, e che noi scriveremo in seguito per ottenere le reazioni trovati i momenti sugli appoggi.

Nella figura è indicato lo schema della linea elastica di una trave continua per specificare il significato dei simboli adottati ad esprimere le varie grandezze relative alle diverse campate.

Indichiamo con A e B gli appoggi di estremità e con C_1 C_2 C_3 ... gli appoggi intermedi.



Riferiamo la trave all'orizzontale per A come asse delle x, col senso positivo da A verso B (verso destra), contando al solito le y positive verso il basso.

Siano poi $y_1, y_2, y_3 \dots\dots y_n$ y_B le ordinate dei vari appoggi $C_1\, C_2\, C_3 \dots\dots C_n$, B; siano $\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \dots\dots \gamma_n, \beta$ i valori $\frac{dy}{dx}$ per la linea elastica, rispettivamente sugli appoggi $A, C_1, C_2, C_3 \dots\dots C_n, B$ (positive se ivi la tangente è inclinata in discesa nel verso delle x positive).

Siano poi l la lunghezza della campata AC; l_1 quella della campata $C_1 C_2$ successiva all'appoggio C_1 e così via...... l_n la lunghezza della campata $C_n B$. Infine siano $M_1\, M_2\, M_3 \dots\dots M_n$ i momenti (flettenti) sugli appoggi* estremi se questi forniscono pure incastri rigidi o no; ne risulta che M_B sarà positivo se il momento d'incastro in B risulta negativo e ciò in conformità di quanto si fece

* intermedi ed M_A e M_B i momenti flettenti in adiacenza degli appoggi

per la trave incastrata ai due estremi ove si assunse il verso positivo di M_B in senso opposto a quello di M_A; questo si giustifica osservando che in A il momento flettente è lo stesso momento di incastro mentre in B il momento flettente è eguale ed opposto al momento reazione di incastro.

Ciò posto consideriamo ora la campata $C_1 C_2$ di lunghezza l_1 essa si comporta come una trave imperfettamente incastrata alle estremità perciò ad esse applichiamo la seconda delle (181), la quale contiene l'inclinazione β; in essa noi dovremo porre M_1 in luogo di M_A; M_2 in luogo di M_B, l_1 per l, p_1 in luogo di p (ritenendo, per maggiore generalità, che i carichi ripartiti sulle varie campate abbiano valori diversi da una campata all'altra), inoltre in luogo di y_B dovremo porre $y_2 - y_1$ e, per la convenzione fatta, in luogo di β si deve mettere $-\gamma_2$.

Converrà poi moltiplicare tutta l'equazione per l_1 così noi otterremo:

$$l_1 M_1 + 2 l_1 M_2 = -\frac{\Sigma Pa(l_1^2 - a^2)}{l_1} - \frac{p_1 l_1^2}{4} + 6EI\left(-\gamma_2 + \frac{y_2 - y_1}{l_1}\right) \quad (184)$$

In modo analogo possiamo applicare la prima delle (181), la quale contiene α, alla campata $C_2 C_3$ ponendo M_2 in luogo di M_A, M_3 per M_B, p_2 in luogo di p

$y_3 - y_2$ in luogo di y_B ed infine γ_2 in luogo di α; moltiplicheremo poi tutto per l_2 si otterrà:

$$2l_2 M_2 + l_2 M_3 = -\frac{\Sigma Pb(l_2^2 - b^2)}{l^2} - \frac{p_2 l_2^3}{4} + 6EI\left(\gamma_2 - \frac{y_3 - y_2}{l^2}\right) \quad (185)$$

Ora se sommiamo membro a membro queste relazioni (184) e (185) si elimina l'inclinazione γ_2 e si trova:

$$l_1 M_1 + 2(l_1 + l_2) M_2 + l_3 M_3 = -\frac{\Sigma Pa(l_1^2 - a^2)}{l^1} - \frac{\Sigma Pb(l_2^2 - b^2)}{l^2} - \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{4} +$$

$$+ 6EI\left(\frac{y_2 - y_1}{l_1} - \frac{y_3 - y_2}{l_2}\right) \quad (186)$$

In questa s'intende che la prima sommatoria va estesa a tutti i carichi P insistenti sulla campata l_1, e la seconda va estesa a tutta la campata l_2; richiamando qui i significati dei termini dipendenti dai carichi esterni, osserviamo che questi termini rispetto a quelli ivi considerati, sono moltiplicati per la lunghezza della rispettiva campata.

L'equazione (186) stabilisce una relazione tra i carichi esterni sulle due campate l_1 ed l_2, le dimensioni della trave in esse, i dislivelli relativi degli appoggi ed i momenti M_1 M_2 M_3 sui tre appoggi consecutivi C_1 C_2 C_3. Essa si chiama perciò <u>la equazione dei tre momenti</u>, ed è pure nota sotto il nome di <u>equazione di Clapeyron</u> essendo a questi dovuta(+)

(+). Si noti però che il Clapeyron nella sua ricerca (1857) aveva considerato il caso degli appoggi tutti di livello $y_1 = y_2 = y_3 \cdots y_n = 0$

Per la trave continua che consideriamo si possono scrivere tante equazioni come questa (52) quanti sono gli appoggi intermedii cioè n. notiamo che la prima di tali equazioni, cioè quella relativa alle campate AC_1, e C_1C_2 diviene:

$$lM_A+2(l+l_1)M_1+l_1M_2=-\frac{\Sigma Pa(l^2-a^2)}{l}-\frac{\Sigma Pb(l_1^2-b^2)}{l_1}-$$

$$-\frac{pl^3-p_1l_1^3}{4}+6EI\left(\frac{y_1}{l}-\frac{y_2-y_1}{l_1}\right) \qquad (187)$$

e, l'ultima equazione, cioè quella relativa alle campate $C_{n-1}C_n$ e C_nB sarà:

$$l_{n-1}M_{n-1}+2(l_{n-1}+l_n)M_n+l_nM_B=$$

$$=-\frac{\Sigma Pa(l_{n-1}^2-a^2)}{l_{n-1}}-\frac{\Sigma Pb(l_n^2-b^2)}{l_n}-\frac{p_{n-1}l_{n-1}^3+p_nl_n^3}{4}+$$

$$+6EI\left(\frac{y_n-y_{n-1}}{l_{n-1}}-\frac{y_B-y_n}{l_n}\right) \qquad (188)$$

Se M_A ed M_B sono staticamente noti ed in particolare nulli le n equazioni sopradette, che costituiscono un sistema lineare determinato, bastano ricavare gli n momenti negli appoggi intermedi.

Se invece uno dei momenti M_A ed M_B, od entrambi, sono incogniti, occorre aggiungere al sistema ancora una o due equazioni, le quali si ottengono rispettivamente applicando la prima delle (182) alla prima campata l e la seconda, pure delle (182), all'ultima campata l_n; e perciò dovranno essere date le condizioni di vincolo alle estremità, le inclinazioni α e β. Si ottiene così per la prima campata $AC_1 = l$.

$$2lM_A + lM_1 = -\frac{\Sigma Pb(l^2-b^2)}{l} - \frac{pl^3}{4} + 6EI\left(\alpha - \frac{y_1}{l}\right) \qquad (189)$$

e per l'ultima campata $C_nB = l_n$:

$$l_nM_n + 2l_nM_B = -\frac{\Sigma Pa(l_n^2-a^2)}{l_n} - \frac{p_nl_n^3}{4} + 6EI\left(\beta + \frac{y_B - y_n}{l_n}\right) \qquad (190)$$

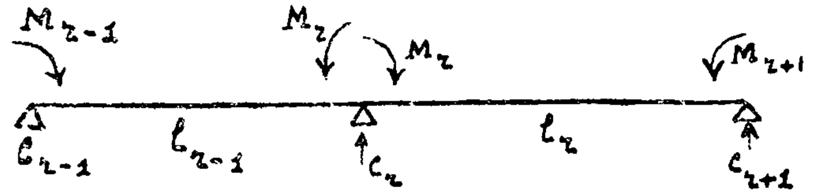
È ormai ovvio che se poi i momenti M_A ed M_B sono dati (o in particolare nulli) le equazioni ora dette servono a determinare le inclinazioni α e β, che in tale caso sono incognite.

Il sistema di equazioni lineari costituito dalle n equazioni dei tre momenti disposte in ordine secondo la numerazione, alle quali sieno, ove occorra, aggregate la prima delle (182) in primo posto, cioè la (189), e la seconda delle stesse in ultimo posto, cioè la (190), si può risolvere numericamente in modo abbastanza comodo, poichè la prima equazione contiene i primi due momenti incogniti, la seconda contiene i primi tre momenti, la terza contiene il secondo, terzo e quarto momento, e così via; l'ultima contiene gli ultimi due. Così risulta facile tra le prime due equazioni eliminare la prima incognita e si ottiene un'equazione, che contiene solamente la seconda e la terza incognita; poi tra questa equazione e la terza delle date si elimina la seconda incognita ottenendo un'equazione che contiene solamente la terza e la quarta incognita, e così di seguito si può procedere finchè in ultimo si ottiene una equazione che contiene soltanto l'ultimo delle incognite la quale così viene determinata: allora dall'ultima delle date equazioni si determina la penultima incognita e dalla penultima equazione del sistema, si ricava la terzultima incognita, e così di seguito le altre incognite si determinano agevolmente.

La facilità dell'eliminazione per la risoluzione del sistema costituisce il precipuo vantaggio del metodo basato sul concetto (dovuto al Clapeyron) di assumere come incognite iperstatiche i momenti sugli appoggi anzichè le reazioni finite verticali degli appoggi stessi.

Infatti sarebbe facile verificare che se si considerassero come incognite iperstatiche le reazioni ora dette, si troverebbe un sistema di equazioni contenenti ciascuna tutte le incognite: perciò la soluzione numerica ne sarebbe molto più laboriosa ed incomoda.

Trovati i momenti sugli appoggi è facile determinare, colle leggi della statica, le reazioni degli appoggi stessi, come pure le sollecitazioni (momento flettente e sforzo di taglio) per una qualunque sezione generica della trave.



Così per determinare la reazione C_z dell'appoggio z^{mo} potremo avvalerci del principio della sovrapposizione degli effetti, immaginando la campata precedente e quella seguente l'appoggio C_z come semplicemente appoggiate agli estremi e tenendo conto dell'azione dei momenti flettenti che, per la continuità, si trasmettono attraverso le sezioni sugli appoggi C_{z-1}, C_z e C_{z+1}.

Indichiamo con C_{z_0} la reazione dell'appoggio C_z quando le due campate l_{z-1} ed l_z sono soltanto appoggiate agli estremi e caricate dall'assegnato sistema di forze esterne.

Per effetto di M_{z-1}, che ha il verso indicato dalla figura e agisce nella sezione sull'appoggio C_{z-1} si ha (ricordando quanto si è detto in precedenza sulla determinazione delle reazioni degli appoggi in una trave semplicemente appoggiata agli estremi e sollecitata in una delle sezioni terminali da un momento flettente) in C_r una reazione diretta dal basso in alto di intensità $\frac{M_{r-1}}{l_{r-1}}$; analogamente M_{r+1} agente sulla sezione per C_{r+1} produce in C_r una reazione diretta dal basso in alto data da: $\frac{M_{r+1}}{l_r}$; per effetto di M_r agente sulla sezione per C_r considerato come appartenente alla campata l_{r-1} ed alla campata l_r si hanno in C_r reazioni dirette dall'alto in basso rispettivamente eguali a $\frac{M_r}{l_{r-1}}$ ed $\frac{M_r}{l_r}$ in definitiva si ha sommando algebricamente le diverse reazioni:

$$C_r = C_{r0} + \frac{M_{r-1}}{l_{r-1}} - M_r\left(\frac{1}{l_{r-1}} + \frac{1}{l_r}\right) + \frac{M_{r+1}}{l_r} \qquad (191)$$

In particolare alle estremità si ha in A:

$$R_A = C \quad - \frac{A}{l} + \frac{M_1}{l}$$

e in B

$$R_B = - \quad \frac{B}{l} + \frac{M_n}{l_n}$$

Restano così determinate tutte le forze esterne applicate alla trave, e quindi per una qualunque sezione è facile esprimere le sollecitazioni ossia il momento flettente e lo sforzo di taglio, e ciò si ottiene dalle leggi della statica.

In particolare, per esprimere il momento flettenti in una sezione qualunque, considerando la campata cui questa appartiene come imperfettamente incastrata alle estremità, si può usare la formula:

$$M_x = M_0 + \frac{M_A}{l}(l-x) + \frac{M_B}{l}x$$

già vista precedentemente, applicandola alla campata considerata e perciò ponendo in luogo di M_A ed M_B i momenti sugli appoggi che limitano la detta campata, oltre alle altre sostituzioni ovvie.

Si noti che la su esposta applicazione dell'equazione dei tre momenti si presta pure, con particolare semplicità, a determinare le sollecitazioni provocate nella trave continua dai dislivelli degli appoggi i quali possono esser dovuti ad errori od imperfezioni di montaggio oppure a cedimenti degli appoggi stessi.

Talora è opportuno valutare separatamente le suddette sollecitazioni e ciò si fa applicando l'equazione dei tre momenti, nella quale si annullano tutti i termini dipendenti dai carichi esterni.

Se poi tre appoggi consecutivi sono in linea retta, allora dall'equazione che lega i tre momenti su tali appoggi scompare del tutto il termine noto, ed il calcolo numerico del sistema si semplifica ancora ulteriormente.