

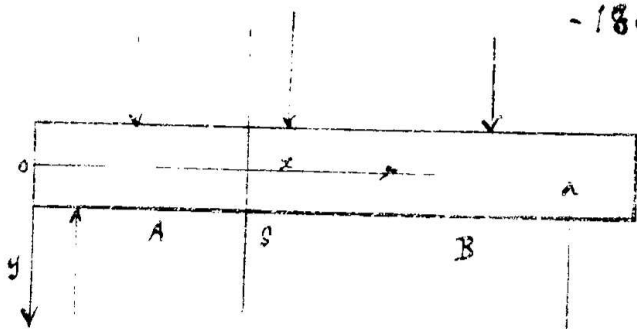
- Capitolo VII -

Trattazione analitica e grafica delle travi inflesse staticamente determinate.

Si intende per trave un solido ad asse geometrico rettilineo a sezione costante soggetto a forze normali al suo asse. Quando le forze sollecitanti sono incidenti a tale asse la trave è sollecitata a flessione e taglio; noi supporremo che l'asse della trave sia orizzontale le forze siano verticali (carichi) e che la sezione trasversale della trave abbia un asse principale di inerzia verticale così che sia esclusa la flessione deviata.

assumiamo come asse delle x l'asse geometrico della trave non deformata positivo verso destra, l'asse y sarà assunto verticale positivo verso il basso.

Le deduzioni che seguono si applicano oltre che alle travi a sezione costante, anche alle travi a sezione quasi costante e ciò in via di approssimazione; cioè immaginando che per queste ultime la distribuzione delle forze interne sia la stessa di quella delle travi a sezione costante. Tale estensione è anche sperimentalmente giustificata. Consideriamo in una trave disposta orizzontalmente sollecitata da forze verticali in equilibrio situate nel suo piano di simmetria (pia-



no della figura) ed agenti staticamente, una sezione trasversale S . Tale sezione divide la trave in

due parti che chiameremo A e B . Se nello stato di equilibrio elastico, corrispondente al valore finale delle forze, immaginiamo di asportare la parte B ; perché la parte A permanga nelle stesse condizioni di equilibrio elastico in cui si trovava prima del taglio dovremo applicare ad ogni elemento di area della sezione S una certa forza di tensione (dello stesso ordine di grandezza dell'elemento di area) che rappresenti l'azione esercitata da B sulla parte A attraverso quell'elemento di area quando il corpo era ancora integro. Questo sistema di forze applicate agli elementi di area S deve evidentemente equilibrare il sistema di forze esterne applicate alla parte A della trave. Osservando che le forze esterne applicate ad A sono anche equilibrate dalle forze esterne applicate a B , concludiamo che il sistema delle forze applicate agli elementi di area S è equivalente a quello formato dalle forze esterne applicate a B .

La risultante delle forze esterne sollecitanti la parte A , per la trave sollecitata nel modo su detto, è una forza unica giacente nel piano di simmetria della trave e normale all'asse. Tale risultante, trasportata nel baricentro della sezione S , dà luogo ad una forza di taglio che diremo T e ad un momento flettente M .

Queste due caratteristiche della sollecitazione sono diverse da sezione a sezione cioè sono funzioni di x .

È utile osservare esplicitamente che:

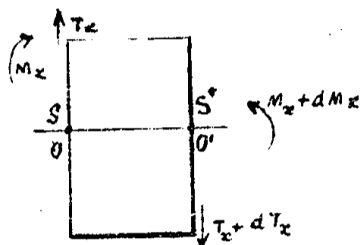
- 1) La forza di taglio I relativa ad una sezione qualsiasi è la somma algebrica di tutte le forze applicate alla trave, liberata dai vincoli, e compresa fra l'estremo di sinistra A fino alla sezione che si considera, essa si assume positiva se diretta verso l'alto.
- 2) Il momento flettente M relativo ad una qualunque sezione S è la somma algebrica dei momenti, presi rispetto al baricentro della sezione considerata, di tutte le forze applicate alla trave, liberata dai vincoli, comprese fra l'estremo A di sinistra e la sezione che si considera, e lo assumiamo positivo se destro giro.

Ciò premesso supponiamo di aver calcolato per un certo numero di sezioni della trave sia le forze di taglio I che i momenti flettenti M .

A partire da una retta fondamentale che rappresenti l'asse della trave in una certa scala per le lunghezze, riportiamo, sulle verticali corrispondenti alle considerate sezioni, le I in una certa scala per le forze e le M in una certa scala per i momenti e congiungiamo con una linea gli estremi delle ordinate che rappresentano le I e con un'altra linea gli estremi delle ordinate che rappresentano le M .

Otterremo così il diagramma degli sforzi di taglio e quello dei momenti flettenti.

Consideriamo l'equilibrio del tratto dx di trave compreso fra le sezioni S ed S' . Per isolare tale elemento



di trave dalla rimanente parte a destra di S' ed a sinistra di S dovremo applicare in S un sistema di forze equivalenti a quelle agenti sulla trave dell'estremo di sinistra fino ad S , tale sistema

sarà costituito da una forza di taglio T_x e da un momento flettente M_x . Analogamente dovremo applicare in S' , una coppia flettente $M_x + dM_x$ di senso opposto ad M_x ed una forza di taglio $T_x + dT_x$ pure opposta a T_x .

Escluderemo l'applicazione di qualunque carico concentrato in superficie mentre ammetteremo che sull'elemento stesso dx di trave sia applicato un carico ripartito di intensità p per metro lineare, la quale intensità comprende anche il peso della trave per unità di lunghezza. Scrivendo l'equazione di equilibrio alla traslazione secondo l'asse y si ha:

$$T_x = p dx + (T_x + dT_x) = 0 \quad \text{da cui}$$

$$p dx = -dT_x \quad (158)$$

per l'equilibrio alla rotazione, prendendo come centro dei momenti O' , si ha:

$$M_x + T_x dx - p \frac{dx^2}{2} - (M_x + dM_x) = 0$$

trascurando $p \frac{dx^2}{2}$ che è un infinitesimo del secondo ordine si ha:

$$dM_x = T_x dx \quad (159)$$

Dalle (158) e (159) si trae

$$\frac{dT_x}{dx} = -q_s \quad \frac{dM_x}{dx} = T_x \quad (160)$$

che dimostrano i due teoremi seguenti:

1) la derivata della forma di taglio relativa alla sezione generica di ascissa x rappresenta l'intensità del carico ripartito, col segno cambiato, esistente sulla trave in quella sezione.

2) la derivata del momento flettente relativo alla sezione generica S , rispetto all'ascissa x , rappresenta la forma di taglio relativa alla stessa sezione S .

Da quanto precede, risulta che, se è dato il diagramma di carico, integrandolo si otterrà il diagramma dello sforzo di taglio determinando convenientemente la costante di integrazione. Se sulla trave esistono anche carichi concentrati sulle verticali di esse il diagramma del taglio presenta delle discontinuità eguali, nella scala delle forze, alle intensità delle stesse forze concentrate; si hanno così diversi valori della costante di integrazione per i tratti trapezi compresi fra due carichi concentrati consecutivi.

Integrando il diagramma dello sforzo di taglio si ottiene quello del momento flettente.

Le due costanti delle due integrazioni possono entrambe determinarsi dopo la seconda integrazione se in due distinte sezioni è noto il valore del momento flettente.

Le integrazioni possono eseguirsi graficamente ricordando che l'integrazione grafica dà la sola forma del dia-

gramma e la determinazione della costante conduce a fissare la posizione dell'asse di riferimento dal quale si debbono contare le ordinate del diagramma integrale (tale asse risulta sempre parallelo al raggio proiettante corrispondente al valore zero della ordinata del diagramma integrando). Se la costante di integrazione non è determinata subito, allora il secondo integrale è determinato a meno di un termine lineare in x i cui due coefficienti sono le due costanti di integrazione, cioè il diagramma 2° integrale è determinato solo nella forma, ma occorre determinare la posizione e la direzione della retta fondamentale dalla quale si debbono contare le ordinate del detto diagramma.

Tale retta si determina quando siano noti i valori di due distinte ordinate del diagramma, la parallela ad essa retta condotta per il polo della 2° integrazione taglia la retta sulla quale si riportano le ordinate del diagramma primo integrale, per poter eseguire la seconda integrazione, in un punto per il quale deve passare la fondamentale del primo diagramma integrale; viene così ad essere determinata la costante della prima integrazione.

Ricorda le scale osserviamo che se μ è l'ordinata generica del diagramma di carico ed a ne è la scala sarà:

$$p = a \mu$$

eseguendo la prima integrazione con distanza polare.

b ed indicando con v l'ordinata generica del diagramma primo integrale si ottiene:

$$h v = \int \mu dx$$

Per la (158)

$$I_x = - \int p dx = - a \int \mu dx = - a b v$$

essendo I la forza di taglio, il prodotto ab è la scala delle forze, cioè la scala del diagramma del taglio.

Integrando il diagramma di ordinata $-v$ con distanza polare c ed indicando con η l'ordinata generica del nuovo diagramma integrale, avremo:

$$c \eta = - \int v dx$$

quindi, a meno della costante, per la (159)

$$M = \int I dx = - a b \int v dx = a b c \eta$$

La scala del diagramma del momento flettente è abc .

Il diagramma del momento flettente si può anche ottenere dividendo il diagramma di carico in sottili strisce verticali, considerando le aree delle singole strisce come forze applicate nei baricentri delle strisce stesse e ammettendo tali forze ad un poligono funicolare.

Occorrerà ridurre tali strisce ad una certa base che potrà essere b , e poiché tali aree rappresentano delle forze sarà ancora ab la scala delle forze. Il poligono funicolare si farà con una certa distanza polare che può essere la stessa c , quindi se η è l'ordinata del poligono funicolare riferita alla sua retta di chiusura il momento flettente si otterrà moltiplicando η (letta nella scala delle lunghezze) per la distanza

polare e letta nella scala delle forze, avremo cioè, come sopra:

$$M = abc\eta$$

Per quanto sopra si è detto, dovendo d'altra parte essere:

$$M = - \int dx \int p dx = a \int dx \int \mu dx$$

equagliando le due espressioni di M si ha:

$$bc\eta = - \int dx \int \mu dx$$

dalla quale relazione si trae un importante teorema:

Per ottenere il diagramma secondo integrale di un diagramma dato, basterà eseguire due integrazioni grafiche successive con distanze polari b e c e si può considerare il diagramma dato come un diagramma di carico e , come tale, dividere la sua area in strisce verticali, ridurre queste aree ad una data base b ed applicarle alle verticali passanti per i baricentri delle singole strisce per connetterle con un poligono funicolare di distanza polare c , riferendo poi questo poligono ad una retta di chiusa che è determinata quando si conoscano due distinte ordinate del diagramma cercato.

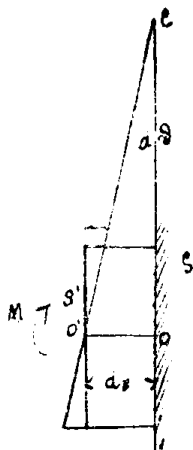
Ci proponiamo ora di calcolare le deformazioni delle travi inflesse e precisamente studiamo la linea (linea elastica) secondo cui si dispone l'asse geometrico, primitivamente rettilineo, di una trave inflessa.

Tale calcolo è utile direttamente per verificare se gli spostamenti si mantengono inferiori a certi limiti fissati affinché il corpo abbia una sufficiente rigidità. La

conoscenza a priori delle deformazioni è utile nei calcoli delle costruzioni già eseguite nei quali mediante appositi strumenti si misurano alcuni cedimenti delle costruzioni per constatare la loro uguaglianza con i valori derivanti da calcolo. Infine la conoscenza delle deformazioni è necessaria alla determinazione delle reazioni dei vincoli sovrabbondanti nelle costruzioni iperstatiche, tali reazioni si ottengono esprimendo delle relazioni tra le deformazioni elastiche avendo riguardo alle condizioni geometriche a cui esse deformazioni debbono soddisfare per la configurazione del sistema e per la natura dei vincoli.

La trave che noi studiamo è soggetta a flessione e taglio ma noi studieremo indipendentemente le deformazioni dovute alle due sollecitazioni semplici ed osserviamo fin d'ora che le deformazioni prodotte dal taglio nella quasi totalità dei casi pratici sono trascurabili di fronte a quelle dovute alla flessione.

È possibile studiare indipendentemente le deformazioni dovute alle due sollecitazioni di flessione e di ta-



glia per la seguente ragione: Considerando due sezioni infinitamente vicine S ed S' nello studio degli spostamenti relativi si può considerare S fissa. Possiamo ritenere che per tutta la lunghezza

infinitesima dx il momento flettente M resti costante, quindi il tratto dx , nei riguardi della flessione, può considerarsi come soggetto a flessione semplice; allora il suo asse $00'$ si incurva secondo un arco di circonferenza (V. Cap. VI §. III) cioè la sezione S subisce una rotazione rispetto ad S' effettivamente intorno all'asse baricentrico di S' che si proietta in O' . Per effetto della forza di taglio T la sezione S non potrà che scorrere sul suo piano senza che questo suo spostamento possa avere influenza alcuna sull'ampiezza della rotazione subita da S' per effetto di M . Questo ci permette di concludere che si può calcolare l'angolo $d\theta$, e quindi il raggio di curvatura ρ nel punto O dell'asse deformato prescindendo dalla deformazione dovuta al taglio.

Cerchiamo ora di stabilire l'equazione della linea elastica. Riferita agli assi in precedenza indicati tale equazione sarà della forma:

$$y = f(x)$$

dove x ed y sono le coordinate di un suo punto generico.

Nella linea rappresentata da tale equazione non ci è noto che il raggio di curvatura dato dalla (105) del Cap. VI. §. 3.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (105)$$

Dalla geometria differenziale è noto che il raggio di curvatura nel punto generico di coordinate x, y è:

$$\rho = \frac{\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

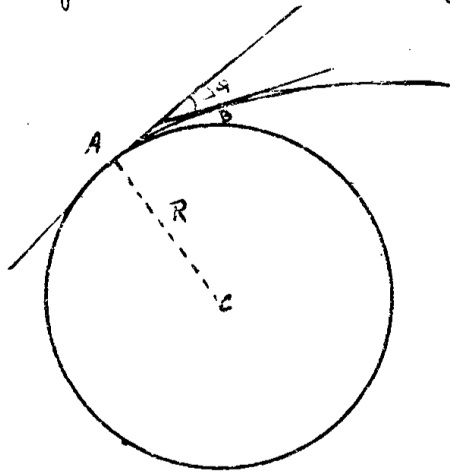
(1) (Vedi Nota a pag. seguente).

potremo quindi scrivere per la (161)

$$\frac{EI}{M} = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\pm \frac{d^2y}{dx^2}}$$

che è l'equazione differenziale della linea elastica.

*) In un cerchio l'angolo delle due tangenti è eguale all'angolo delle due normali, cioè dei raggi, e l'arco è eguale a tale angolo moltiplicato per il raggio, dunque il rapporto dell'angolo delle due tangenti all'arco è $\frac{1}{R}$ dove R è il raggio del cerchio; riferendo ci ad un arco infinitesimo sarà $R d\varphi = ds$ cioè: $\frac{ds}{d\varphi} = R$



In un punto A della curva costruiamo il cerchio tangente alla curva stessa, cioè tale che il suo centro sia sulla normale alla curva in A. Tale cerchio

è detto cerchio di curvatura il suo raggio è uguale al raggio di curvatura della curva data nel punto A. Cerchiamo un'espressione:

Essendo la curva riferita agli assi x ed y sarà: $\tan \varphi = \frac{dy}{dx}$ se con φ indichiamo l'angolo che la tangente in A alla curva forma con l'asse x differenziando avremo: $d \tan \varphi = \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{d^2y}{dx^2}$ ed esprimendo il $\cos \varphi$ in funzione della $\tan \varphi$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} \quad \text{quindi} \quad \cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

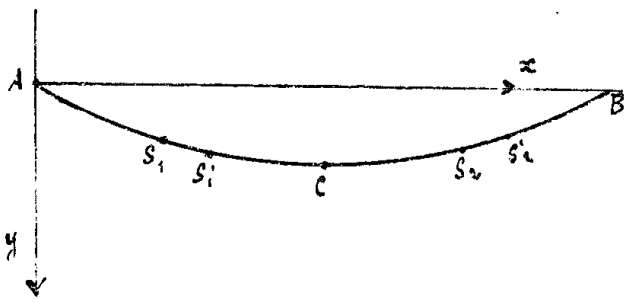
essendo per la formula precedente $d\varphi = \frac{d^2y}{dx^2} \cos^2 \varphi d\varphi$ e

$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ sostituendo i trovati valori di $\cos^2 \varphi$ e $d\varphi$ si

Osserviamo che per la natura dei materiali impiegati nelle costruzioni le deformazioni sono sempre piccolissime, perciò piccolissimo è il $\frac{dy}{dx}$ (inclinazione della tangente alla linea elastica) quindi si può trascurare il $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ (che è infinitesimo del secondo ordine) rispetto all'unità ed in conseguenza si può scrivere:

$$\pm \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

Osserviamo ancora che $\frac{d^2y}{dx^2}$ è l'incremento di $\frac{dy}{dx}$ riferendosi per es. al punto



per es. al punto S_1 , l'incremento di $\frac{dy}{dx}$ è negativo (diminuisce la inclinazione della tangente della linea elastica al crescere di x).

Per la fatta ipotesi circa il segno M in S (esso si assume positivo se la risultante delle forze a sinistra della sezione S dà luogo ad un momento destro, cioè se l'asse della trave si deforma in modo che la concavità è rivolta dalla parte delle y negative, come in figura)

segue che $\frac{d^2y}{dx^2}$ ed M debbono essere di segno contrario.

Osserviamo ancora che p. es. in S_2 il $\frac{dy}{dx}$ è negativo mentre l'angolo che forma la tg in S_1 è maggiore (in valore assoluto) di quello che forma la tg in S_2 con lo stesso asse x . In conclusione per M positivo $\frac{dy}{dx}$ diminuisce ed cresce

ottenere:

$$r = \frac{\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}{+ \frac{d^2y}{dx^2}}$$

di x se è positiva e cresce al crescere di x se è negativa. dunque $\frac{d^2y}{dx^2}$ sarà sempre negativa: l'equazione della linea elastica è dunque:

$$-\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (162)$$

Nella precedente equazione le variabili sono già separate poiché il secondo membro è funzione della sola x ; infatti per ogni valore di x è dato il valore di EI e, d'altra parte, M si può esprimere in funzione di x ed è indipendente da y giacché gli spostamenti dei vari punti dell'asse geometrico sono a questo normali e perciò non alterano i bracci di leva dei vari carichi rispetto alle diverse sezioni.

La determinazione della linea elastica partendo dalla (162) può farsi per via analitica e per via grafica.

Per la determinazione grafica della linea elastica conveniamo di indicare con φ l'inclinazione della tangente alla linea elastica, ossia poniamo $\varphi = \frac{dy}{ds}$ e poiché nelle operazioni grafiche noi assimiliamo ad infinitesimi gli incrementi piccolissimi, ma finiti, sostituiamo col segno Δ il segno d :

$$-\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = \frac{M}{EI}$$

secondo la $M = abc\eta$ indicando con H la scala del momento flettente, cioè ponendo $H = abc$, potremo scrivere:

$$-\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = \frac{H\eta}{EI} \quad (163)$$

Se la trave è omogenea ed a sezione costante (EI costante) la ordinata η del diagramma del momento flettente è proporzionale alla curvatura (ricordiamo che si intende

per curvatura l'inverso del raggio di curvatura $\frac{1}{r} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta x}$) quindi tale diagramma può rappresentare il diagramma della curvatura. Integrando una prima volta il diagramma della curvatura si ottiene il diagramma della inclinazione φ della linea elastica, la costante di integrazione si potrà determinare quando in una sezione si conosca "a priori" l'inclinazione stessa. Se l'integrazione è fatta graficamente e si indica con η' l'ordinata del diagramma integrale e con λ_1 , la distanza polare, dalla (163) si ricava:

$$\varphi = \frac{H}{EI} \int \eta \Delta x = \frac{H \lambda_1}{EI} \eta'$$

essendo $\varphi = \frac{dy}{dx}$ integrando il diagramma della inclinazione con distanza polare λ_2 ed indicando con η'' la ordinata corrente del diagramma integrale si ha:

$$y = \int \varphi \Delta x = \frac{H \lambda_1}{EI} \int \eta' \Delta x = \frac{H \lambda_1 \lambda_2}{EI} \eta''$$

L'ordinata η'' è quindi proporzionale alla ordinata y della linea elastica, il rapporto di affinità \mathcal{F} è dato da:

$$\mathcal{F} = \frac{\eta''}{y} = \frac{EI}{H \lambda_1 \lambda_2} \quad (164)$$

Da quanto si è detto a pag. 186 risulta che la linea elastica può anche ottenersi come linea funicolare di un carico proporzionale all'area del diagramma η , riducendo quest'area in base λ_1 e costruendo il poligono funicolare con distanza polare λ_2 .

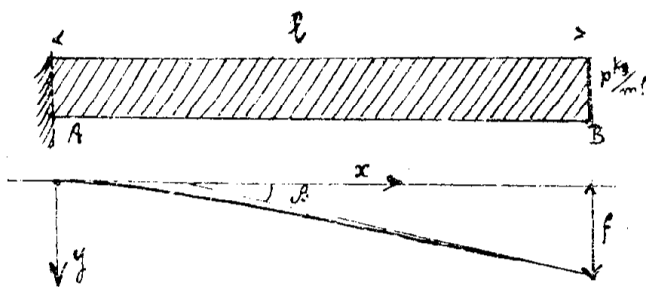
A titolo di esempio trattiamo analiticamente e graficamente i seguenti problemi:

Trave incastrata rigidamente in un estremo, libera nell'altra caricata uniformemente su tutta la sua lunghezza.

Trattazione analitica.

Indichiamo con p la intensità del carico riferita alla unità di lunghezza.

Riferendoci ai già fissati assi x ed y si ottiene come espressione del momento flettente in una sezione distante x dalla origine (ricordando le ipotesi fatte sul segno di M)



$$M = -p \frac{(l-x)^2}{2} = -\frac{p}{2} (l^2 - 2lx + x^2)$$

L'equazione differenziale della linea elastica è per

la (162):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{2EI} (l^2 - 2lx + x^2) \quad (165)$$

che integrata con la condi-

zione che per $x=0$, $\frac{dy}{dx} = 0$, dà:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2EI} \left(l^2x - lx^2 + \frac{x^3}{3} \right) \quad (166)$$

Per ottenere y si integra ancora una volta con la condizione che per $x=0$ $y=0$

$$y = \frac{p}{2EI} \left(\frac{l^2x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right) \quad (167)$$

Per ottenere l'inclinazione β della tangente alla linea elastica all'estremo libero B occorre porre nella (166) $x=l$, si ottiene:

$$\beta = \frac{pl^3}{6EI} \quad (168)$$

Dalla (167) ponendo $x=l$ si ottiene la freccia:

$$f = \frac{pl^4}{8EI} \quad (169)$$

Dalle due ultime equazioni si ottiene:

$$\frac{f}{\beta} = \frac{3}{4} l$$

cioè la tangente alla linea elastica nell'estremo libero incontra l'asse delle x ad $\frac{1}{4}l$, a partire dall'incastro A.

La serie più elementare è quella di incastro in cui il valore del momento flettente è $\frac{pl^2}{2}$

Trattazione grafica - (V. disegno N° 1)

Studiamo una trave vincolata come precedentemente lunga $m: 5.00$ sollecitata da un carico uniformemente distribuito di 600 kg/ml , la scala delle lunghezze è $1:50$.

Disegnato il diagramma di carico, che in questo caso è un rettangolo, nella scala $1 \text{ cm} = 600 \text{ kg/ml}$, lo integriamo per ottenere secondo la (158) il diagramma dello sforzo di taglio.

Il polo per la integrazione è P, la distanza polare è di 3 cm . La fondamentale del diagramma integrale si può senz'altro tracciare perché all'estremo lo sforzo di taglio è zero.

La scala del diagramma integrale si otterrà moltiplicando la distanza polare letta nella scala delle lunghezze per la scala delle ordinate del diagramma da integrare: nel nostro caso la scala del diagramma dello sforzo di taglio è:

$$3 \times 50 \times 6.00 = 900 \text{ kg.}$$

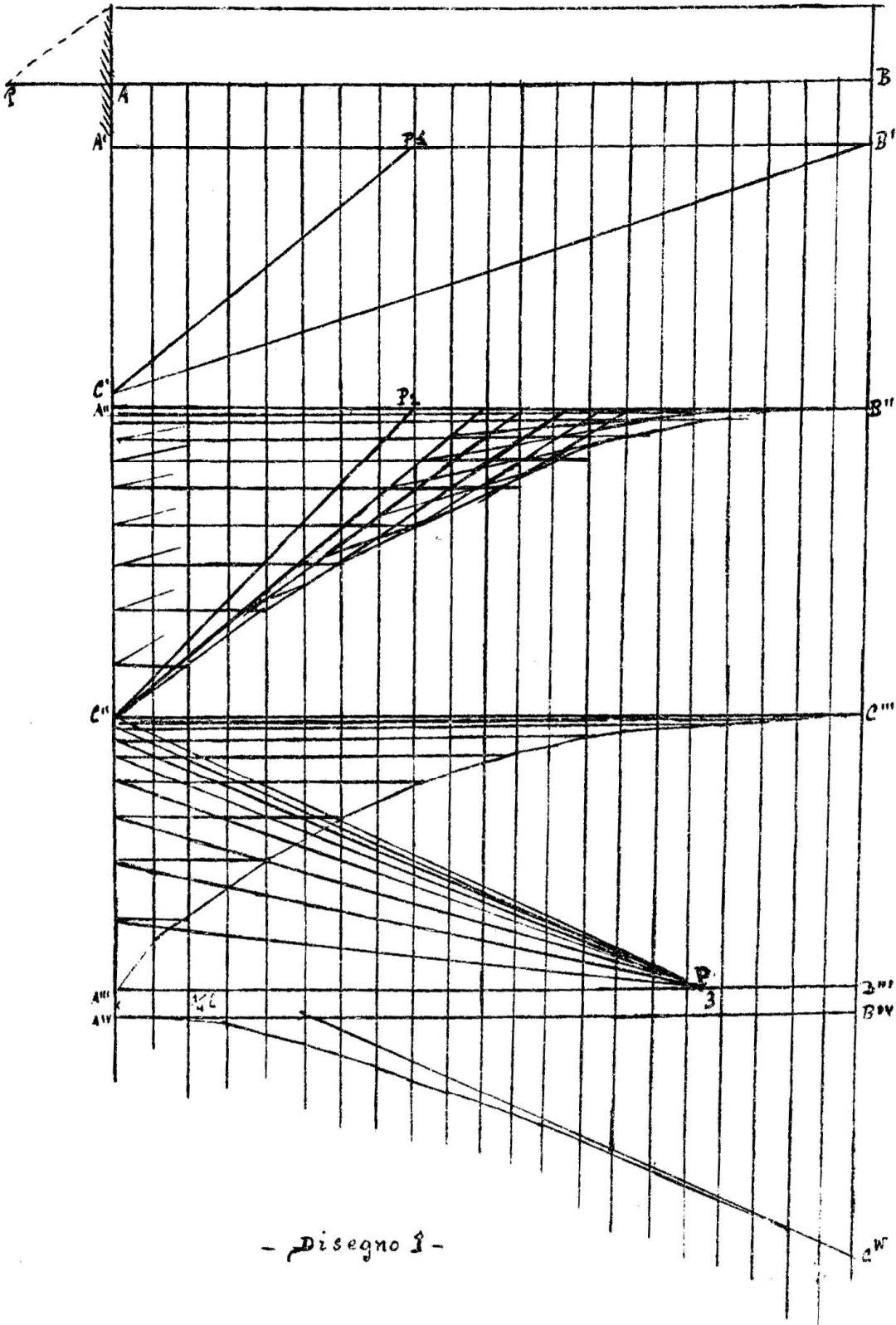
(Si verifici che lo sforzo di taglio, che all'incastro è dato da $pl = 3000 \text{ kg}$, risulta dal disegno $A'C' \times 900$ cioè circa 3000)

Integrando il diagramma dello sforzo di taglio si ottiene il diagramma del momento flettente. Il polo è P_1 la distanza polare 4 cm : La fondamentale è la $A''B''$ dovendosi essere il momento flettente, all'estremo B della trave, e quale a zero. La scala del diagramma del momento flettente è:

$$4 \times 50 \times 900 = 180000 \text{ kgem.}$$

Scala delle lunghezze

1:50



Scala del dia:
gramma di carico
1cm: 600 kg/ml.

(Il momento flettente all'incastro A è : $\frac{pl^2}{2} = \frac{600 \times 25}{2} = 7500 \text{ kgm}$.
 dal disegno risulta tale momento $A''B'' \times 180000 = 4,17 \times 180000 =$
 $\cong 750.000 \text{ Kgcm}$).

Ma quanto precede risulta che lo stesso diagramma del momento flettente, (essendo la trave a sezione costante, quindi $I = \text{cost}$) quando si dividono le sue ordinate per EI , cioè quando si modifica la sua scala, rappresenta il diagramma delle curvature.

Integrando il diagramma della curvatura (il polo è P_2 e la distanza polare è di cm: 4.00) si ottiene il diagramma delle inclinazioni; la fondamentale di questo diagramma si ottiene tenendo conto ^{che} all'incastro l'inclinazione della linea elastica è zero. La scala di questo diagramma è:

$$\frac{180000 \times 4 \times 50}{EI} = \frac{36000000}{EI}$$

Per ottenere la linea elastica integriamo il diagramma delle inclinazioni con polo P_3 e distanza polare di 8cm: tenendo conto che l'abbassamento in corrispondenza del punto A è uguale a zero; si traccia la fondamentale alla quale va riferita la linea elastica.

La scala del diagramma è:

$$\frac{36000000 \times 8 \times 50}{EI} = \frac{14400000000}{EI}$$

Il rapporto di affinità (164) è:

$$\xi = \frac{EI}{H \lambda_1 \lambda_2} = \frac{EI}{14400000000}$$

È chiaro che se si desiderasse la linea elastica rappresen-

tata con un determinato rapporto di affinità basterebbe dalla stessa (164) ricavare il valore dell'ultima distanza polare λ_2 ;

Applicando la formula (169) si ricava analiticamente per la freccia

$$f = \frac{pl^4}{8EI} = \frac{1}{EI} \frac{6 \times 500^4}{8} = \frac{48750000000}{EI}$$

e dalla linea elastica si ricava:

$$f = \frac{14400000000}{EI} \times B''e'' = \frac{14400000000}{EI} \times 3,39 = \frac{48800000000}{EI}$$

valore sensibilmente eguale a quello analiticamente calcolato.

Trave incastrata rigidamente ad un estremo libera nell'altro = Carico concentrato all'estremo libero.



assumiamo come asse delle x l'asse geometrico della trave non deformata e come asse y la verticale per A positiva verso il basso.

Nella sezione generica di ascissa x il momento flettente è:

$$M = -P(l-x)$$

applicando quindi la (162) si trova:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P}{EI}(l-x)$$

Integrando tenendo conto che per $x=0$ è $\frac{dy}{dx} = 0$, si ottiene;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{EI} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) \quad (170)$$

Integrando una seconda volta con la condizione che per $x=0$

sia $y=0$ si ottiene l'equazione finita della linea elastica:

$$y = \frac{P}{EI} \left(l \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \quad (171)$$

Per $x=l$ dalla (170) si ottiene l'inclinazione della tangente alla linea elastica nell'estremo B

$$\beta = \frac{Pl^2}{2EI} \quad (172)$$

Dalla (171) ponendo $x=l$ si trova l'ordinata estrema della linea elastica, detta freccia:

$$f = \frac{Pl^3}{3EI} \quad (173)$$

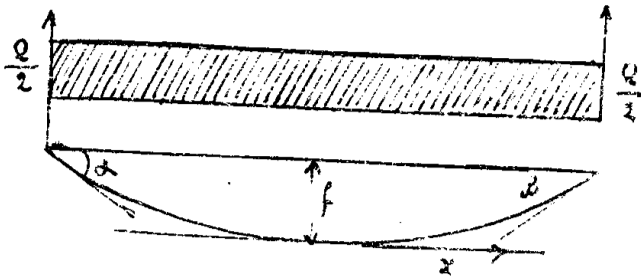
Dividendo f per β si ottiene la distanza dell'estremo B dal punto T in cui la tangente alla linea elastica nello estremo libero incontra l'asse geometrico positivo della trave:

$$\frac{f}{\beta} = \frac{2}{3} l$$

cioè T dista dall'incastro A della lunghezza $\frac{1}{3}l$.

Trave prismatica appoggiata alle due estremità = Carico uniformemente distribuito per tutta la lunghezza.

Se p è l'intensità del carico per unità di lunghezza ed L è la lunghezza della trave, il carico totale sarà $Q = pL$. Le reazioni degli appoggi sono eguali a $\frac{Q}{2}$.



Per ragioni di evidente simmetria la linea elastica avrà nella sezione di mezzo C la tangente orizzontale: possiamo

dunque dire che ciascuna delle due metà in cui la trave è divisa dalla sezione C si comporta come una trave

di lunghezza $\frac{1}{2}l$, incastrata in C e sollecitata da un carico ripartito uniformemente diretto in basso e da una forza concentrata in B diretta in alto eguale a $\frac{Q}{2}$.

L'equazione della linea elastica riferita all'asse y positivo verso l'alto ed alla tangente orizzontale in C come asse delle x (positivo verso l'altro estremo della stessa trave) si ottiene esprimendo la y come differenza fra la y_1 , dovuta alla forza concentrata (data dalla (171)) e la y_2 dovuta al carico distribuito $\frac{pl}{2}$, espressa secondo la (167), quindi si trova:

$$y = y_1 - y_2 = \frac{Q}{4EI} \left(\frac{l}{2} x^2 - \frac{x^3}{3} \right) - \frac{p}{4EI} \left(\frac{l^2}{4} x^2 - \frac{l x^3}{3} + \frac{x^4}{6} \right)$$

ossia riducendo:

$$y = \frac{p}{8EI} \left(\frac{l^2}{2} x^2 - \frac{x^4}{3} \right) \quad (174)$$

Da questa equazione, per $x = \frac{1}{2}l$ si ottiene la freccia f

$$f = \frac{5}{8} \frac{Ql^3}{48EI} \quad (175)$$

Per ottenere il valore della inclinazione $\alpha = \beta$ delle tangenti di estremità alla linea elastica occorre applicare la (168) e la (172) ponendo in esso $\frac{1}{2}l$ in luogo di l , ed inoltre nella (172) $\frac{Q}{2}$ in luogo di P e nella (168) $\frac{Q}{2}$ in luogo di Q .

$$\alpha = -\beta = \frac{Ql^2}{2 \times 2 \times 4EI} - \frac{Ql^2}{2 \times 4 \times 4EI} = \frac{Ql^2}{24EI} \quad (176)$$

La sezione più eumentata è quella di mezzo nella quale il momento flettente è:

$$\frac{Ql}{8} = \frac{pl^2}{8}$$

Trattazione grafica dello stesso problema con il metodo del poligono funicolare.

La trave sia lunga 5 metri e caricata uniformemente di 500 Kg/ml. La scala delle lunghezze è $1/50$, il diagramma di carico è designato nella scala $1\text{ cm} = 500\text{ Kg/ml}$.

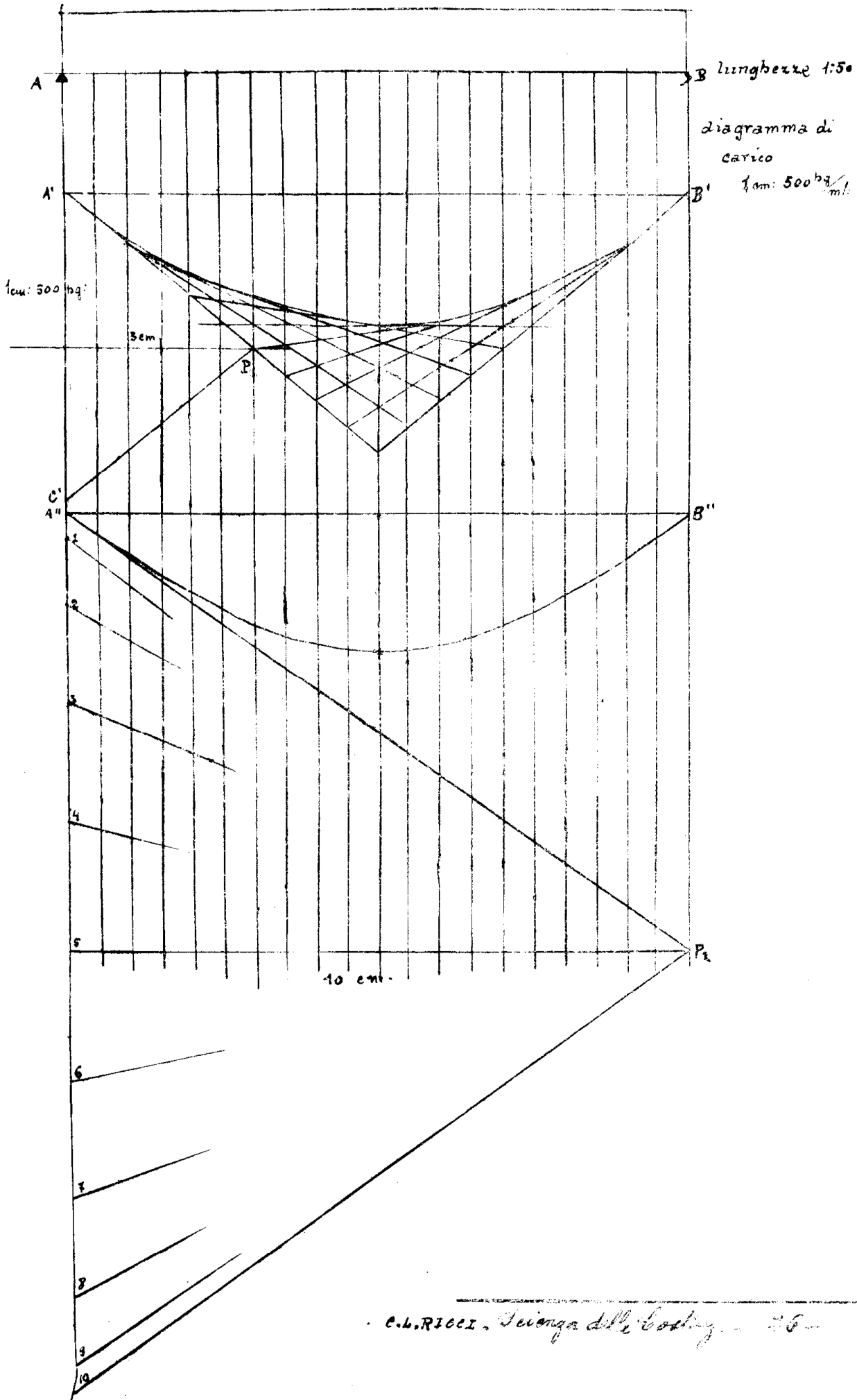
Il diagramma del momento flettente è una parabola che si ottiene rappresentando con $A'C'$ nella scala delle forze (si è scelto $1\text{ cm} = 500\text{ Kg}$) il peso complessivo sulla trave $Q = pl = 500 \times 5 = 2500\text{ Kg}$. (quindi $A'C' = 5\text{ cm}$) Dal punto di mezzo di $A'C'$ si è condotta la normale ad $A'C'$ e si è scelto su di essa il polo P_1 , alla distanza di 3 cm. Si è quindi costruita la parabola che, riferita alla fondamentale $A'B'$ (linea di chiusa del diagramma) ottenuta congiungendo le intersezioni della parabola con le verticali per gli appoggi, rappresenta il diagramma del momento flettente.

La scala di questo diagramma sarà:

$$3 \times 50 \times 500 = 75000\text{ Kgcm}$$

Divise le ordinate per EI , lo stesso diagramma, poiché la sezione trasversale è costante, rappresenta il diagramma delle curvature.

Quest'ultimo diagramma, considerato come diagramma di carico, è stato suddiviso in strisce di eguale larghezza, così che le ordinate medie delle singole strisce possano rappresentare le aree delle strisce stesse, essendo la larghezza prescelta relativamente piccola si



sono assunte come verticali baricentriche delle varie strisce le verticali medie.

La punteggiatura 0, 1, 2, ... rappresenta le aree del diagramma delle curvature. La scala nella quale tali aree sono state rappresentate è data, tenendo conto che la larghezza delle strisce è di 1 cm: da:

$$\frac{1 \times 50 \times 75000}{EI} = \frac{3750000}{EI}$$

Si è scelto il polo per la connessione sulla normale alla punteggiatura, passante per il suo punto medio 5, e ciò per evidenti ragioni di simmetria.

Connettendo le forze con distanza polare di 10 cm: si è ottenuto un poligono funicolare che risulta circoscritto alla curva funicolare e ad essa tangente in corrispondenza delle verticali dividenti il diagramma delle curvature. Tale curva funicolare rappresenta la linea elastica. La scala nella quale vanno letti gli abbassamenti si ottiene moltiplicando la scala nella quale si sono rappresentate le aree del diagramma delle curvature, per la distanza polare letta nella scala delle lunghezze:

$$\frac{3750000}{EI} \cdot 10 \times 50 = \frac{1875000000}{EI}$$

Applicando la (175) si ottiene analiticamente per la freccia:

$$f = \frac{5 \times 5 \times l^4}{8 \times 48 \times EI} = \frac{4080000000}{EI}$$

Graficamente si ottiene, essendo f sul diagramma cu. 2.26:

$$f = \frac{1875000000}{EI} \times 2.26 = \frac{4060000000}{EI}$$



Deformazioni prodotte dal taglio -

Per effetto del taglio le ordinate della linea elastica ottenuta valutando la influenza della sola flessione si modificano, così che le ordinate effettive si otterranno sommando a quella dovuta alla sola flessione quelle ordinate y_2 dovute al taglio che ora calcoliamo.

Per effetto dello sforzo tagliante sull'elemento dx il lavoro di deformazione accumulato è: (vedi la (155).)

$$\frac{1}{2} \times \frac{I^2 dx}{GA}$$

d'altra parte, dove si consideri la deformazione provocata nell'elemento stesso dallo sforzo tagliante I si nota che il semiprodotto dello spostamento relativo dy , per la grandezza di I può considerarsi come lavoro esterno di deformazione dovuto al taglio sull'elemento dx .

La equazione fra questo lavoro e quello interno corrispondente conduce alla equazione:

$$\frac{1}{2} I dy_2 = X \frac{T^2 dx}{2GA}$$

da cui si ricava

$$dy_2 = X \frac{T dx}{GA} \quad (177)$$

e quindi integrando (per una trave omogenea prismatica)

$$y_2 = \frac{X}{GA} \int T dx + C \quad (178)$$

dove la costante si ottiene tenendo conto delle condizioni agli estremi.

Cioché per la (158)

$$\int T dx = M_x + C$$

si deduce che la linea elastica dovuta al taglio è affine alla linea che dà il diagramma del momento flettente, purché se ne contino le ordinate a partire da un asse di riferimento la cui posizione dipende dalla detta costante di integrazione.

A titolo di esempio calcoliamo il valore y_1 in una trave incastrata in un estremo, libera nell'altra e caricata uniformemente.

Si ha riferendosi agli assi indicati

$$T = p(l-x)$$

$$y_1 = \frac{\chi p}{GA} \int_0^x (l-x) dx$$

dovendo essere per $x=0$ $y=0$

$$y_1 = \frac{\chi p}{GA} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right)$$

per $x=l$

$$f_1 = \frac{\chi p l^2}{2GA}$$

Ricordando la (159) si ricava che per ottenere un valore di f_1 uguale a quello di f dovuto alla flessione assumendo come incognita la lunghezza della trave essa è data da:

$$\frac{pl_0^3}{8Ez} = \frac{\chi pl_0^2}{2GA}$$

cioè ricordando che

$$G = \frac{2}{5} E$$

$$I = Ap^2$$

$$l_0 = \sqrt{10} \chi p$$

per una sezione rettangolare di altezza h avremo $\rho = \frac{h}{\sqrt{12}}$ e $\chi = \frac{6}{5}$

(vedi (151)) si ha quindi: $h = l_0$.

Cioè l'equaglianza fra f e f_1 può realizzarsi solo per una trave di lunghezza uguale alla sua altezza cioè per una lunghezza molto inferiore a quella che si riscontra negli ordinari problemi pratici.

è rappresentato dai tratti 1, 2 e 1' 2' di una curva parabolica simmetricamente disposta rispetto allo strato neutro. Per le fibre dello strato M (limate fra corrente ed anima) si hanno due valori di ϵ_{yz} , precisamente

$$\epsilon_1 = \frac{1}{2} \frac{T}{I} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) = \frac{1}{8} \frac{T}{I} (h^2 - h_1^2)$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{2} \frac{T}{I} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) \frac{a}{a_1} = \frac{1}{8} \frac{T}{I} (h^2 - h_1^2) \frac{a}{a_1}$$

a seconda che si consideri la fibra come appartenente al corrente o all'anima; tale differenza è provocata dalla brusca variazione della lunghezza della sezione.

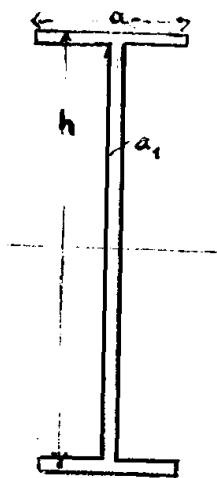
Per le fibre dell'anima:

$$\epsilon_{yz} = \frac{T}{I} \frac{1}{2a_1} \left\{ a \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) + a_1 \left(\frac{h_1^2}{4} - y^2 \right) \right\} = \frac{1}{8} \frac{T}{I} \frac{a}{a_1} \left\{ h^2 - h_1^2 \left(1 - \frac{a_1}{a} \right) \right\} - \frac{1}{2} \frac{T}{I} y^2$$

che rappresenta ancora una variazione parabolica di ϵ_{yz} fra M e M'.

Il valore massimo ϵ_{xy} si ha per $y=0$, cioè in corrispondenza dell'asse neutro.

Quando l'anima della sezione è molto alta (sezione a doppio T limite simmetrica) indicando con h la distanza dei baricentri dei correnti, con a la lunghezza dei correnti stessi, ω l'area di ciascuno di essi,



si può porre:

$$I = \omega \frac{h^2}{2}$$

per uno strato qualunque e dell'anima, trascurando i termini assai