- §. 5 -

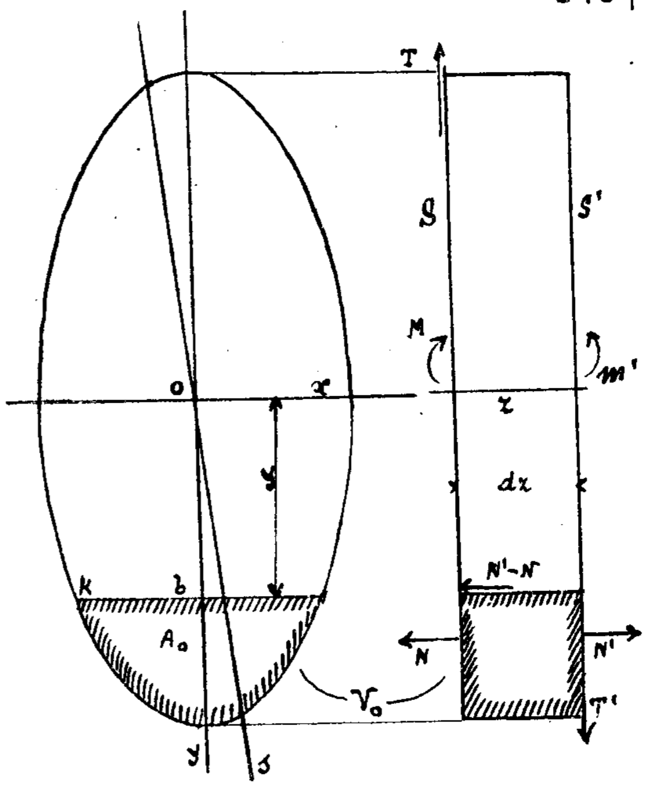
- Taglio -

(Teoria approssimata)

Un solido si dice sollecitato al taglio semplice quando in ogni sua sezione trasversale la caratteristica della sollecitazione sia una forza T giacente nel piano stesso della sezione e passante per il baricentro. Questa sollecitazione semplice può avverarsi soltanto in sezioni isolate del solido, ma non può estendersi a tronchi sia pure molto corti senza essere accompagnata da momento flettente.

Noi studieremo la distribuzione delle tensioni tangenziali interne immaginando che la forza di taglio sia accompagnata da un certo momento flettente.

Consideriamo una sezione generica riferita ai soliti assi x ed y baricentrici, anche non principali di inerzia. Sia x l'asse neutro; l'asse di sollecitazione s parallelo al taglio complessivo di componenti T_x e T_y (V. Cap: VI. §.1) sarà coniugato dall'asse x rispetto all'ellisse di inerzia della sezione trasversale (V. Cap: VI §. 3). Consideriamo la corda parallela all'asse neutro x, alla distanza y da esso; per tale corda conduciamo il piano parallelo all'asse geometrico z del solido e consideriamo il volume V (tratteggiato in figura) compreso fra tale piano, due sezioni trasversali alla distanza dz



e la superficie esterna, e studiamone l'equilibrio. La sezione S è sollecitata da uno sforzo di taglio T e da un momento flettente M, la sezione S' (ammettendo che sulla porzione elementare dz non sia applicata alcuna forza concentrata e trascurando quelle ripartite) è sollecitata da una forza tagliante -T eguale in valore assoluto a quella sollecitata la sezione S e da un momento flettente $-(M+T\,dz)$.

Indichiamo con N la risultante delle tensioni normali interne dovute alla flessione che si sviluppano sulla porzione A_0 della sezione S: con N' la risultante di quelle che si sviluppano sulla stessa porzione A_0 della sezione S'. Per l'equilibrio alla traslazione longitudinale è necessario ammettere sulla faccia $b\,dz$ del volume V uno sforzo tangenziale eguale alla differenza fra N' ed N.

Indicando con $\underline{\tau_{zy}}$ il valore medio di τ_{zy}, lo sforzo tangenziale complessivo sulla detta area è:

$$-\underline{\tau_{zy}}\,b\,dz$$

dove il segno - indica che se τ_{zy} è positiva il detto sforzo è diretto nel senso delle z negative. Si avrà dunque:

$$\tau_{zy}\, b\, dz = N' - N = \frac{\partial}{\partial z}\left[\int_{A_0} \sigma_z\, dA\right] dz = dz \int_{A_0} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}\, dA$$

intendendo l'integrale esteso all'area A_0.

Ricordando che

$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y$ sarà $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{\partial M_x}{\partial z} \frac{y}{I_x}$ ma, come è noto dalla statica $\frac{\partial M_x}{\partial z} = T_y$; quindi sostituendo si ottiene:

$$\tau_{zy}\, b = \frac{T_y}{I_x} \int_{A_0} y\, dA$$

L'integrale al secondo membro rappresenta il momento statico della area A rispetto all'asse neutro; indicandolo con $\mathfrak{m}_0$ si ha:

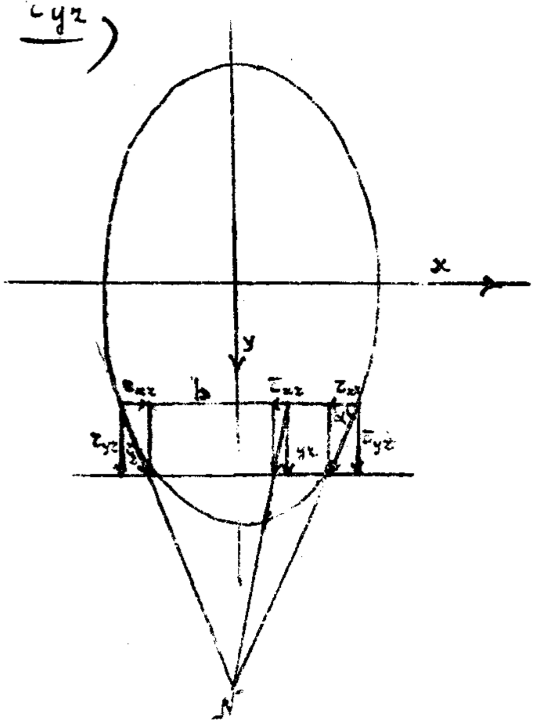
$$\tau_{zy} = \frac{T_y\, \mathfrak{m}_0}{I_x\, b} \qquad (151)$$

Con approssimazione si ritiene tale valore medio eguale al valore effettivo locale di τ_{zy}. Il trovato valore di τ_{zy} (tensione tangenziale nella sezione longitudinale per b) è eguale al valore τ_{yz} della tensione tangenziale agente nella sezione trasversale all'altezza della corda b.

Nei calcoli approssimati di stabilità si prescinde dal, la presenza della τ_{zx} che si ritiene nulla: tale ipotesi è giustificata soltanto nei punti dell'asse y nel caso della sezione simmetrica rispetto allo stesso asse e sollecitata lungo l'asse y stesso (allora $T_x = 0$), essa invece è tanto più errata sul contorno quanto più è inclinata la tangente ad esso contorno rispetto alla corda. Ivi però può esser lecito ritenere il valore locale di τ_{yz} eguale al suo valore medio e ricavare τ_{zx} ricordando che la risultante τ_z di τ_{yz} e τ_{zx} deve risultare tangente al contorno nel punto considerato, avremo:

$$\tau_{zx} = \tau_{yz} \cot g\, \alpha \qquad (152)$$

quanto alla distribuzione di τ_{zx} lungo la detta corda nel l'interno della sezione ricordando la (69) ed osservando che $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}$ è funzione della sola y e che lo stesso si può affermare delle $\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}$ (perchè con approssimazione riteniamo τ_{yz} costante lungo la corda ed eguale al suo valore medio $\overline{\tau_{yz}}$)



~~Risulta dalla stessa (69) (Cap. VI. 3.1. pag. 99)~~ che $\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}$ è funzione della sola y quindi τ_{zx} lungo la corda varia linearmente con la x, ciò significa che τ_{zx} è determinata in ogni punto della corda quando si conoscano i suoi valori agli estremi della corda stessa, da ciò segue che le tensioni tangenziali totali τ_z nei punti della detta corda convergono tutte nel punto N di intersezione delle tangenti al contorno nei due punti estremi della corda stessa.

Si noti che il complemento dell'area A_0 a tutta l'area della sezione trasversale (ossia la porzione non tratteggiata in figura) ha rispetto all'asse neutro x un momento statico eguale a $-m_0$ (poichè il momento statico di tutta la sezione trasversale rispetto all'asse x baricentrico, deve essere nullo).

Per ottenere il momento di inerzia I della sezione trasversale rispetto ad x, bisogna intendere applicati i momenti statici $\mathfrak{M}_0$ e $-\mathfrak{M}_0$ nei centri relativi dell'asse x rispetto alle due dette aree parziali (si ricordi quanto insegna la statica sul cosidetto spostamento delle forze) i due momenti statici $\mathfrak{M}_0$ e $-\mathfrak{M}_0$ costituiscono una coppia il cui momento costituisce il momento d'inerzia della sezione trasversale, dunque:

$$\frac{I}{\mathfrak{M}_0} = h_0 \qquad (152)$$

dove h_0 è la distanza, misurata normalmente ad x, fra i centri relativi dello stesso asse x rispetto alle due parti in cui la corda b divide la sezione.

La (151) diventa allora

$$\tau_{yz} = \frac{T}{b h_0} \qquad (153)$$

questa formula è utile perchè h_0 può ricavarsi con note costruzioni di statica grafica.

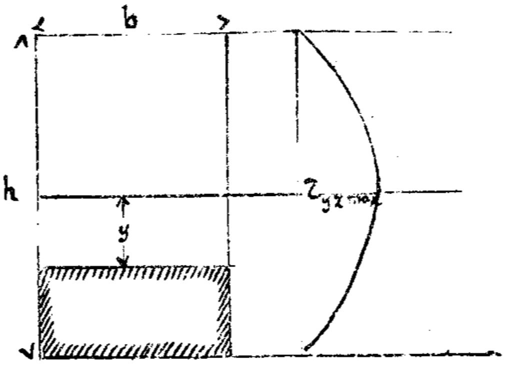
Dalla (151) si trae che τ_{yz} è massima per quel valore di y per cui

$$b\frac{\partial \mathfrak{M}_0}{\partial y} = \mathfrak{M}_0 \frac{\partial b}{\partial y}$$

La $\frac{\partial \mathfrak{M}_0}{\partial y}$ è sempre nulla per $y = 0$, cioè $\mathfrak{M}_0$ ha il massimo valore quando rappresenta il momento statico di una delle due parti in cui l'asse neutro divide la sezione trasversale, preso rispetto all'asse neutro stesso; nelle sezioni trasversali più in uso si ha pure per $y = 0$, $\frac{\partial b}{\partial y} = 0$ perciò, in tali casi, la τ_{yz} diviene massima proprio sull'asse neutro x.

La τ_{yz} si annulla nei punti del contorno più lontani dall'asse x, poichè quando la corda b si avvicina indefinitamente a tali punti, se pure la lunghezza b diventa infinitesima, il momento statico M_o diventa infinitesimo di ordine superiore.

Riferiamoci, a scopo di esempio, ad un caso particolare; quello in cui b è costante, cioè la sezione è rettangolare, h ne sia l'altezza.



$$M = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}+y\right)\left(\frac{h}{2}-y\right)b = \frac{bh^2}{8}\left(1-4\frac{y^2}{h^2}\right)$$

Ricordando che

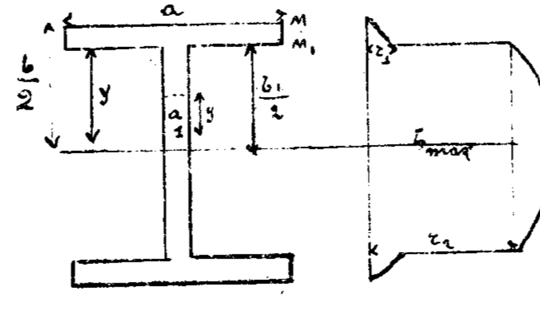
$I = \frac{1}{12}\, bh^3$ e ponendo $A = bh$ si trova

$$\tau_{yz} = \frac{3}{2}\frac{T}{A}\left(1-\frac{4y^2}{h^2}\right) \qquad (154)$$

la tensione tangenziale τ_{yz} si annulla dunque per $y = \pm\frac{h}{2}$ cioè sui due lati della sezione paralleli all'asse neutro, al variare di y fra questi limiti varia con legge parabolica per divenire massima per $y = 0$ cioè in corrispondenza dell'asse neutro, assumendovi il valore

$$\tau_{yz\,max} = \frac{3}{2}\frac{T}{A}$$

Sezione a doppio T simmetrica.



Per una fibra appartenente al corrente MM_1 si ha:

$$\tau_{yz} = \frac{T}{I}\frac{a}{a}\left(\frac{h}{2}-y\right)\left(y+\frac{h}{4}-\frac{y}{2}\right) = \frac{T}{I}\,\frac{a\left\{\left(\frac{h}{2}\right)^2-y^2\right\}}{2a} =$$

$$= \frac{1}{8}\,\frac{T}{I}\,h^2 - \frac{1}{2}\,\frac{T}{I}\,y^2$$

quindi il diagramma di τ_{yz}

è rappresentato dai tratti 1.2 e 1'2' di una curva parabolica simmetricamente disposta rispetto allo strato neutro. Per le fibre dello strato M (limite fra corrente ed anima) si hanno due valori di τ_{yx}, precisamente

$$\tau_1 = \frac{1}{2}\,\frac{T}{I}\left(\frac{h^2}{4}-\frac{h_1^2}{4}\right) = \frac{1}{8}\,\frac{T}{I}\left(h^2-h_1^2\right)$$

$$\tau_2 = \frac{1}{2}\,\frac{T}{I}\left(\frac{h^2}{4}-\frac{h_1^2}{4}\right)\frac{a}{a_1} = \frac{1}{8}\,\frac{T}{I}\left(h^2-h_1^2\right)\frac{a}{a_1}$$

a seconda che si consideri la fibra come appartenente al corrente o all'anima; tale differenza è provocata dalla brusca variazione della larghezza della sezione.

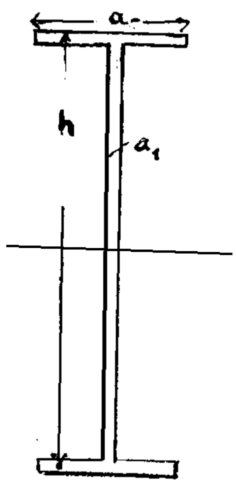
Per le fibre dell'anima:

$$\tau_{yx} = \frac{T}{I}\,\frac{1}{2a_1}\left\{a\left(\frac{h^2}{4}-\frac{h_1^2}{4}\right)+a_1\left(\frac{h_1^2}{4}-y^2\right)\right\} = \frac{1}{8}\,\frac{T}{I}\,\frac{a}{a_1}\left\{h^2-h_1^2\left(1-\frac{a_1}{a}\right)\right\}-\frac{1}{2}\,\frac{T}{I}\,y^2$$

che rappresenta ancora una variazione parabolica di τ_{yx} fra M ed M'.

Il valore massimo τ_{xy} si ha per $y=0$, cioè in corrispondenza dell'asse neutro.

Quando l'anima della sezione è molto alta (sezione a doppio T limite simmetrica) indicando con $\underline{h}$ la distanza dei baricentri dei correnti, con $\underline{a}$ la larghezza dei correnti stessi, ω l'area di ciascuno di essi,



si può porre:

$$I = \omega\,\frac{h^2}{2}$$

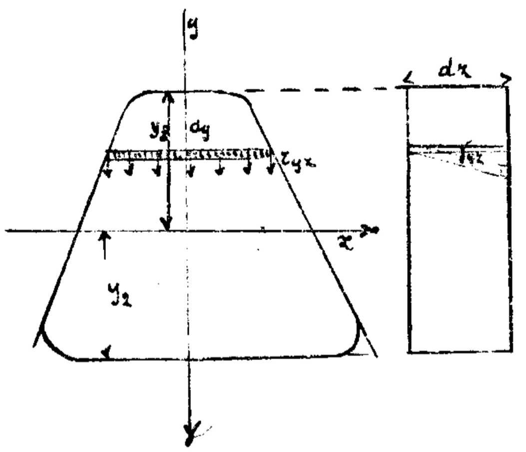
per uno strato qualunque x dell'anima, trascurando i termini assai piccoli che dipendono dagli elementi di area dell'anima stessa si può porre: $M = \omega \frac{h}{2}$ quindi per uno strato qualunque dell'anima

$$\tau_{yz} = \frac{T \frac{\omega h}{2}}{a_1 \frac{\omega h^2}{2}} = \frac{T}{a_1 h}$$

dunque in una trave a doppio T limite lo sforzo di taglio nelle fibre dei correnti è nullo, mentre è costante ed eguale a $\frac{T}{a_1 h}$ quello relativo alle fibre dell'anima.

Lavoro di deformazione.

Consideriamo un elemento di trave compreso fra due sezioni trasversali alla distanza dz. Sullo strato infinitesimo (tratteggiato in figura) della sezione si ha la tensione tangenziale $b\,\tau_{yz}\,dy$ (si prescinde dalla presenza di τ_{zx}).



La tensione tangenziale τ_{yz} produce uno scorrimento γ_{yz} che è dato da $\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$; così che il lavoro compiuto da $b\,\tau_{yz}\,dy$ per lo spostamento $\gamma_{yz}\,dz$ è, per il teorema di Clapeyron:

$$\frac{1}{2}\, b\, \tau_{yz}\, dy\, \gamma_{yz}\, dz$$

Sommando i lavori corrispondenti alle singole strisce cioè integrando rispetto ad y, dopo aver sostituito a τ_{yz} il suo valore dato dalla (151) si ottiene il lavoro di deformazione dL corrispondente all'elemento di volume considerato:

$$d\mathcal{L} = \frac{1}{2}\frac{dz}{G}\int b\,\tau_{yz}^2\,dy = \frac{1}{2}\frac{dz}{G}\int\frac{T^2\,\mathfrak{M}^2}{I^2\,b^2}\,b\,dy = \frac{T^2 dz}{2G}\int_{y_1}^{y_2}\frac{\mathfrak{M}^2}{b I^2}\,dy$$

essendo

$$I^2 = \rho^4 A^2$$

sarà

$$d\mathcal{L} = \frac{1}{2}\frac{T^2 dz}{G\,A}\,\frac{1}{A\rho^4}\int_{y_1}^{y_2}\frac{\mathfrak{M}^2}{b}\,dy = \chi\,\frac{T^2 dz}{G A} \qquad (155) \quad (*)$$

avendo posto

$$\chi = \frac{1}{A\rho^4}\int_{y_1}^{y_2}\frac{\mathfrak{M}^2}{b}\,dy \qquad (156)$$

Il fattore che moltiplica χ nella (155) esprime il valore che assumerebbe il lavoro di deformazione qualora lo sforzo di taglio T si ripartisse uniformemente su tutta la sezione dando luogo ad una τ_{yz} costante.

(*) La espressione di $d\mathcal{L}$ dovuta al taglio può ricavarsi direttamente dalla espressione del potenziale elastico: formula (80)

$$\Phi = \frac{\sigma_z^2}{2E} + \frac{\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2}{2G}$$

ricavata a Cap. VI §.1; che si riduce (poichè per effetto del taglio $\sigma_z = 0$ e con approssimazione riteniamo $\tau_{zx} = 0$) a:

$$\Phi = \frac{\tau_{yz}^2}{2G} = \frac{1}{2G}\left(\frac{T\,\mathfrak{M}}{I\,b}\right)^2$$

prendendo $dV = dz\,dA$, dove dA è l'elemento di area della sezione trasversale

$$d\mathcal{L} = \frac{1}{2G}\,dz\,\frac{T^2}{I_1}\int\left(\frac{\mathfrak{M}}{b}\right)^2 dA$$

che è la stessa (155).

Il fattore χ, che tiene conto della effettiva distribuzione delle tensioni tangenziali, è detto <u>coefficiente di forma</u> della data sezione ed è un numero astratto che dipende soltanto dalla forma della sezione, talora esso è detto <u>fattore di taglio</u>.

Il fattore di taglio può dedursi sia analiticamente che graficamente.

Calcoliamo, a titolo di esempio, il suo valore per una sezione rettangolare

$$m=(y_1-y)\,b\left(y+\frac{y_1-y}{2}\right)=\frac{b(y_1^2-y^2)}{2}\ ;\ y_1=y_2=\frac{h}{2};\ A=bh$$

$$I=\frac{1}{12}bh^3 \text{ da cui } \chi=\frac{bh}{\frac{1}{144}b^2h^2}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\frac{b}{4}(y_1^2-y)\,dy=1.20=\frac{6}{5} \qquad (151)$$

Per le sezioni circolari ed ellittiche $\chi=\frac{10}{9}$.
